Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 2 (2017). С. 278–315

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2-278-315 УДК 517.984.5

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ, ПОРОЖДЕННЫХ ПОЛУТОРАЛИНЕЙНОЙ ФОРМОЙ

© 2017 г. **Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ, А. Р. ЯКУБОВА**

Аннотация. На базе обобщенной формулы Грина для полуторалинейной несимметрической формы для оператора Лапласа рассмотрены спектральные несамосопряженные задачи, как близкие к классическим, так и другие, которые встречаются при исследовании задач гидродинамики, дифракции, задач с поверхностной диссипацией энергии. Устанавливаются свойства решений этих задач. Изучаются также начально-краевые задачи, порождающие исследованные спектральные задачи, доказываются теоремы о корректной разрешимости этих задач на произвольном промежутке времени.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Данная работа является подробным изложением докладов авторов на международных конференциях в Абрау-Дюрсо и Ласпи—Батилимане (см. [22, 23], а также [17, гл. 6]). Исходным толчком, побудившим авторов заняться исследованиями спектральных и начально-краевых задач в липшицевых областях, стали работы М.С. Аграновича (см. [1, 2, 37, 38]) и его лекции в ежегодной Крымской осенней математической школе в Батилимане.

Общие подходы, которые применялись при исследовании этих задач, побуждали рассматривать их на базе абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств или полуторалинейных форм, а также на базе соответствующих обобщенных формул Грина для конкретных пространств, возникающих в задачах математической физики (см. [10, 11, 14, 16, 17]).

В данной работе рассматриваются несамосопряженные спектральные и начально-краевые задачи, порожденные обобщенной формулой Грина для оператора Лапласа. Общие построения, проведенные здесь, могут быть применены и к другим задачам, в частности, к задачам гидродинамики, теории упругости, дифракции и т. д., а также для аналогичных абстрактных задач, порожденных абстрактной формулой Грина для полуторалинейных форм.

В первом разделе напоминаются общие положения, связанные с выводом абстрактной формулы Грина для ограниченных и равномерно аккретивных полуторалинейных форм.

Во втором разделе формулируется постановка задачи на базе обобщенной формулы Грина для оператора Лапласа. Рассматриваются слабые решения полной краевой задачи Неймана—Ньютона, приводится общая формула для ее решения (см. (2.32)) с помощью операторов двух вспомогательных краевых задач.

В третьем разделе рассматриваются несамосопряженные спектральные задачи, близкие к классическим задачам Дирихле, Неймана—Ньютона, Стеклова, Стефана. Для этих задач доказываются теоремы о структуре спектра, свойствах корневых (собственных и присоединенных) функций, о локализации спектра в комплексной области. Наконец, аналогичные вопросы исследуются для других классов возмущенных спектральных задач. Это задачи С. Крейна, Аграновича, Чуешова.

В четвертом разделе изучаются начально-краевые задачи, порожденные полуторалинейной формой для оператора Лапласа и порождающие спектральные задачи третьего раздела. Для этих задач доказываются теоремы существования сильных по времени решений, указываются классы функций, в которых выполняются уравнения и граничные условия задачи.

Данная работа написана при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 14-21-00066, выполняемый в Воронежском университете).

1. Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и полуторалинейных форм

1.1. Формула Грина для тройки гильбертовых пространств. Пусть F и E — гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_F$ и $(\cdot,\cdot)_E$ соответственно, причем F плотно вложено в E, т. е. F — плотное линейное подмножество в E и существует константа $a>0$ такая, что

$$\|u\|_E \leqslant a\|u\|_F \qquad \forall\, u\in F. \tag{1.1}$$

Говорят, что пространства F и E с указанными свойствами образуют *гильбертову пару* $(F;E)$, и обозначают это символом $F\hookrightarrow E$.

По любой паре $(F;E)$ единственным образом определяется порождающий оператор A гильбертовой пары, который обладает следующими свойствами:

$$(u,v)_F=(A^{1/2}u,A^{1/2}v)_E=\langle u,Av\rangle_E \quad \forall\, u,v\in F. \tag{1.2}$$

Здесь $\langle u,Av\rangle_E$ — значение функционала $Av\in F^*$ на элементе $u\in F$, $\mathcal{D}(A)=F$, $\mathcal{R}(A)=F^*$.

Пусть теперь $\{E,(\cdot,\cdot)_E\},\{F,(\cdot,\cdot)_F\},\ \{G,(\cdot,\cdot)_G\}$ — сепарабельные гильбертовы пространства с введенными в них скалярными произведениями. Будем считать, что для этой тройки пространств выполнены следующие условия:

1°. Плотность вложения:

$$F\hookrightarrow E,\quad ||u||_E\leqslant a||u||_F \qquad \forall\, u\in F.$$

2°. На F задан оператор γ, называемый оператором следа и действующий из F в G, причем

$$\gamma: F\to\mathcal{R}(\gamma)=:G_+\hookrightarrow G,\quad ||\gamma u||_G\leqslant b||u||_F \quad \forall\, u\in F.$$

3°. Ядро оператора γ

$$\ker\gamma=:N\hookrightarrow E,\quad \|u\|_E\leqslant c\|u\|_F \quad \forall\, u\in F.$$

Типичным примером, когда выполнены условия 1°–3°, является тройка пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$, $\Gamma := \partial\Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — область с липшицевой границей. При этом

$$\gamma u := u|_\Gamma \quad \forall\, u \in H^1(\Omega), \quad \ker\gamma = H_0^1(\Omega). \tag{1.3}$$

Теорема 1.1 (см. [16]). *Пусть для тройки пространств E, F и G (с введенными на них скалярными произведениями) и для оператора следа γ выполнены условия 1°–3°. Тогда существуют абстрактное дифференциальное выражение $Lu \in F^*$ и абстрактная производная по внешней нормали $\partial u \in (G_+)^*$ такие, что имеет место абстрактная формула Грина (аналог первой формулы Грина для оператора Лапласа)*

$$(\eta, u)_F = \langle \eta, Lu\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G \quad \forall\, \eta, u\, \in F. \tag{1.4}$$

При этом ∂u по элементам $u \in F$ и $Lu \in F^*$ определяются однозначно.

Замечание 1.1. В приложениях дифференциальное выражение $Lu \in F^*$, как правило, определено из физического смысла задачи, а тогда и производная по внешней нормали $\partial u \in (G_+)^*$ также определена однозначно. Обсуждение этой задачи см. в [42], а также в [16].

Замечание 1.2. Классическим примером, когда в качестве дифференциального выражения выбрано $Lu := u - \Delta u$, $u \in H^1(\Omega)$, является обобщенная формула Грина для оператора Лапласа ($\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — область с липшицевой границей):

$$\begin{gathered}(\eta, u)_{H^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega (\eta\bar{u} + \nabla\eta\cdot\nabla\bar{u})\, d\Omega = \langle \eta, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n}\rangle_{L_2(\Gamma)} \\ \forall\, \eta, u \in H^1(\Omega),\end{gathered} \tag{1.5}$$

$$u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*, \quad \gamma\eta \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \partial u \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

1.2. Полуторалинейные ограниченные формы. Функцию $\Phi(\eta, u) : F \times F \to \mathbb{C}$, определенную на комплексном гильбертовом пространстве F, называют *полуторалинейной формой,* если она линейна по η и антилинейна по u:

$$\Phi(c_1\eta_1 + c_2\eta_2, u) = c_1\Phi(\eta_1, u) + c_2\Phi(\eta_2, u),$$

$$\Phi(\eta, c_1u_1 + c_2u_2) = \bar{c_1}\Phi(\eta, u_1) + \bar{c_2}\Phi(\eta, u_2).$$

Простейшим примером полуторалинейной формы на F является скалярное произведение $(\eta, u)_F$.

Полуторалинейная форма называется *ограниченной* на F, если

$$|\Phi(\eta, u)| \leqslant c_1 \,\|\, \eta\|_F \cdot \|u\|_F \quad \forall\, \eta, u \in F, \quad c_1 > 0. \tag{1.6}$$

Будем далее считать, что имеется гильбертова пара пространств $(F; E)$, а потому имеет место и оснащение

$$F \hookrightarrow E \hookrightarrow F^*.$$

Каждой ограниченной форме $\Phi(\eta, u)$ однозначно отвечает линейный ограниченный оператор $A : F \to F^*$, с помощью которого форма допускает представление

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, Au\rangle_E \quad \forall\, \eta, u \in F, \quad \|A\|_{F\to F^*} \leqslant c_1. \tag{1.7}$$

Форма

$$\Phi^*(\eta, u) := \overline{\Phi(u, \eta)} \tag{1.8}$$

называется сопряженной к форме $\Phi(\eta, u)$. Если выполнено условие

$$\Phi^*(\eta, u) = \Phi(\eta, u) \quad \forall\, \eta, u \in F, \tag{1.9}$$

то форма $\Phi(\eta, u)$ называется эрмитовой или симметрической.

Сопряженной форме $\Phi^*(\eta, u)$ однозначно отвечает сопряженный ограниченный оператор $A^* : F \to F^*$:

$$\Phi^*(\eta, u) = \langle \eta, A^*u\rangle_E. \tag{1.10}$$

Эрмитовой (симметрической) форме отвечает самосопряженный оператор, действующий из F на F^*:

$$\Phi(\eta,u)=\langle\eta,Au\rangle_E=\Phi^*(\eta,u)=\overline{\Phi(u,\eta)}=\overline{\langle u,A\eta\rangle}_E\quad\forall\,\eta,u\in F. \tag{1.11}$$

Для простейшего примера ограниченной полуторалинейной формы $\Phi_0(\eta,u)=(\eta,u)_F$ получаем, что оператором этой формы является оператор A гильбертовой пары $(F;E)$, который самосопряжен в смысле определения (1.11), причем норма этого оператора равна единице.

Форма $\Phi(\eta,u)$ и отвечающий ей оператор A называются *равномерно аккретивными* (сильно коэрцитивными) в пространстве F, если

$$\operatorname{Re}\Phi(u,u)=\operatorname{Re}\langle u,Au\rangle_E\geqslant c_2\|u\|_F^2,\quad c_2>0\quad\forall\,u\in F. \tag{1.12}$$

(Это соотношение иногда называют также усиленным неравенством Гординга.) Равномерно аккретивная форма является *ограниченной снизу*:

$$|\Phi(u,u)|\geqslant c_2\|u\|_F^2\quad c_2>0\;\forall\,u\in F. \tag{1.13}$$

Лемма 1.1 (Лакс, Мильграм, см., например, [42]). *Ограниченный на F равномерно аккретивный оператор $A:F\to F^*$, отвечающий форме $\Phi(\eta,u)$, имеет ограниченный обратный оператор $A^{-1}:F^*\to F$,*

$$\|A^{-1}\|_{F^*\to F}\leqslant c_2^{-1}. \tag{1.14}$$

Пусть ограниченная и равномерно аккретивная форма $\Phi(\eta,u)$ является несимметрической:

$$\Phi(\eta,u)\neq\Phi^*(\eta,u). \tag{1.15}$$

Введем в рассмотрение симметрические формы:

$$\begin{aligned}\Phi_R(\eta,u)&:=\frac12\Big[\Phi(\eta,u)+\Phi^*(\eta,u)\Big]=\Phi_R^*(\eta,u),\\ \Phi_I(\eta,u)&:=\frac1{2i}\Big[\Phi(\eta,u)-\Phi^*(\eta,u)\Big]=\Phi_I^*(\eta,u),\end{aligned} \tag{1.16}$$

называемые *вещественной* и *мнимой частями* формы $\Phi(\eta,u)$, так как

$$\Phi(\eta,u)=\Phi_R(\eta,u)+i\Phi_I(\eta,u). \tag{1.17}$$

Для $\Phi_R(\eta,u)$ имеем неравенства

$$c_2\|u\|_F^2\leqslant\Phi_R(u,u)=\operatorname{Re}\Phi(u,u)=:\|u\|_{F_0}^2\leqslant c_1\|u\|_F^2\quad\forall\,u\in F. \tag{1.18}$$

Отсюда следует, что в пространстве F можно ввести норму $\|u\|_{F_0}$, эквивалентную норме $\|u\|_F$, а также соответствующее скалярное произведение.

Тогда возникает гильбертова пара пространств $(F_0;E)$. Обозначим через A_0 оператор гильбертовой пары. Для него имеем тождество

$$(\eta,u)_{F_0}=(A_0^{1/2}\eta,A_0^{1/2}u)_E=\langle\eta,A_0u\rangle_E\quad\forall\,\eta,u\in F_0=F. \tag{1.19}$$

Для $\Phi_I(\eta,u)$ в силу предыдущего имеем оценку

$$\begin{aligned}|\Phi_I(\eta,u)|\leqslant|\Phi(\eta,u)|\leqslant c_1\|\eta\|_F\cdot\|u\|_F\leqslant c_1c_2^{-1}\|\eta\|_{F_0}\|u\|_{F_0}=\\ =c_1c_2^{-1}\|A_0^{1/2}\eta\|_E\cdot\|A_0^{1/2}u\|_E\quad\forall\,\eta,u\in F_0=F.\end{aligned} \tag{1.20}$$

Отсюда в силу симметричности $\Phi_I(\eta,u)$ выводится (см. [16,25]), что

$$\begin{gathered}\Phi_I(\eta,u)=(QA_0^{1/2}\eta,A_0^{1/2}u)_E=(A_0^{1/2}\eta,QA_0^{1/2}u)_E,\\ \forall\,\eta,u\in F,\;Q=Q^*\in\mathcal{L}(E),\end{gathered} \tag{1.21}$$

откуда следует представление

$$A=A_0^{1/2}(I-iQ)A_0^{1/2},\quad A\in\mathcal{L}(F_0,F_0^*), \tag{1.22}$$

а также

$$A^{-1}=A_0^{-1/2}(I-iQ)^{-1}A_0^{-1/2},\quad A^{-1}\in\mathcal{L}(F_0^*,F_0). \tag{1.23}$$

1.3. Абстрактная формула Грина для полуторалинейных форм. Представление (1.22) для оператора A формы $\Phi(\eta,u)$ позволяет получить обобщение обсуждавшегося в пункте 1.1 варианта, когда имелась тройка пространств E, F и G, а также оператор следа γ. Именно, теперь можно рассмотреть случай, когда вместо пространства F с введенным на нем скалярным произведением $(\eta,u)_E = \Phi_0(\eta,u)$ имеется форма $\Phi(\eta,u)$, удовлетворяющая в пространстве F общим условиям (1.6) и (1.12). Соответствующую формулу Грина назовем *абстрактной формулой Грина для полуторалинейной формы* $\Phi(\eta,u)$.

Итак, пусть выполнены условия 1°–3°, а также условия (1.6) и (1.12). Тогда для пространства $F_0 = F$ с нормой (1.18) и соответствующим скалярным произведением

$$\Phi_0(\eta,u) := (\eta,u)_{F_0} = \Phi_R(\eta,u) \tag{1.24}$$

имеет место абстрактная формула Грина

$$\Phi_0(\eta,u) = \langle \eta, L_0 u\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial_0 u\rangle_G \quad \forall\, \eta, u \in F_0. \tag{1.25}$$

При этом

$$F_0 = N_0 \oplus M_0, \quad N_0 = \ker\gamma, \qquad M_0 := \ker L_0, \tag{1.26}$$

а $L_0 u$ и $\partial_0 u$ — абстрактное дифференциальное выражение и производная по внешней нормали, причем $\partial_0 u$ однозначно определяется по $u \in F_0$ и выбранному $L_0 u \in F_0^*$.

Наша цель — получить такую формулу Грина для формы $\Phi(\eta,u)$, которая бы имела вид, близкий к (1.25), и при $Q \to 0$ (см. (1.21), (1.22)), когда $\Phi(\eta,u) \to \Phi_0(\eta,u) = \Phi_R(\eta,u)$, переходила бы в формулу (1.25). Иными словами, желательно получить формулу Грина с непрерывной зависимостью от $Q = Q^* \in \mathcal{L}(E)$.

При таком построении теперь вместо ортогонального разложения (1.26) для несимметрической формы $\Phi(\eta,u)$ следует воспользоваться прямым разложением

$$F_0 = N_0 \oplus M_0 = N(\dot{+})M, \quad N = N_0 = \ker\gamma, \quad M := \ker L, \tag{1.27}$$

где Lu — дифференциальное выражение, отвечающее форме $\Phi(\eta,u)$.

Теорема 1.2 (см. [16]). *Пусть выполнены условия* 1°–3° *пункта* 1.1*, а также условия* (1.6) *и* (1.12). *Пусть, кроме того, подпространства N и M из* (1.27) *выбраны таким образом, чтобы*

$$\Phi(\eta,u) = 0 \quad \forall\, \eta \in N = N_0 = \ker\gamma \quad \forall\, u \in M = \ker L. \tag{1.28}$$

Тогда имеет место следующая формула Грина:

$$\Phi(\eta,u) = \langle \eta, Lu\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G \quad \forall\, \eta, u \in F_0 = F, \tag{1.29}$$
$$Lu \in F_0^*, \qquad \partial u \in (G_+)^*,$$

причем ∂u определяется по элементам $u \in F_0$ и $Lu \in F_0^*$ однозначно.

Замечание 1.3. При доказательстве теоремы 1.2 в [16] установлено также, что при $Q \to 0$ (см. (1.22)) дифференциальное выражение Lu переходит в $L_0 u$ из (1.25), а потому и ∂u переходит в $\partial_0 u$. Кроме того, подпространство M из (1.27) переходит в $M_0 = \ker L_0$, а прямая сумма из (1.27) переходит в ортогональную сумму подпространств N_0 и M_0. Заметим еще, что при условии (1.28) косые проекторы на подпространства (1.27) однозначно выражаются через ортопроекторы из (1.26) и при $Q \to 0$ переходят в них.

2. Краевые задачи, порожденные полуторалинейной несимметрической формой на основе оператора Лапласа

2.1. Формула Грина для невозмущенной задачи. Рассмотрим тройку гильбертовых пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$, $\Gamma := \partial\Omega$, и обычный оператор следа $\gamma u := u\,|_\Gamma$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — область с липшицевой границей.

Тогда, как было установлено выше, в этом случае имеет место следующая обобщенная формула Грина, порожденная оператором Лапласа:

$$(\eta,u)_{H^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega (\eta\bar u + \nabla\eta\cdot\nabla\bar u)\, d\Omega = \langle \eta, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n}\rangle_{L_2(\Gamma)} \tag{2.1}$$
$$\forall\, \eta, u \in H^1(\Omega),$$

$$u-\Delta u\in(H^1(\Omega))^*,\quad \gamma\eta\in H^{1/2}(\Gamma),\quad \frac{\partial u}{\partial n}\in H^{-1/2}(\Gamma). \tag{2.2}$$

Здесь слева в (2.1) стоит скалярное произведение в $H^1(\Omega)$, и оно является симметрической полуторалинейной формой в $H^1(\Omega):\ \Phi_0(\eta,u):=(\eta,u)_{H^1(\Omega)}$.

На основе этой формулы Грина можно исследовать слабые решения классических краевых задач для оператора Лапласа, т. е. задачи Дирихле, Неймана и другие, а также соответствующие спектральные и начально-краевые задачи.

Целью дальнейших рассмотрений является исследование подобных задач в несимметрическом случае, когда вместо скалярного произведения $(\eta,u)_{H^1(\Omega)}=\Phi_0(\eta,u)$ имеется полуторалинейная несимметрическая форма $\Phi_\varepsilon(\eta,u)$, определенная на пространстве $H^1(\Omega)$, ограниченная на нем и являющаяся равномерно аккретивной. Параметр $\varepsilon\in\mathbb{R}$ будет введен для удобства дальнейших рассмотрений, причем все изучаемые задачи при $\varepsilon\to 0$ будут переходить в задачи, отвечающие соответствующим невозмущенным задачам.

Отметим еще, что в (2.1) дифференциальное выражение имеет вид $L_0u=u-\Delta u$, а производная по внешней нормали $\partial_0u:=(\partial u/\partial n)_\Gamma$.

2.2. О формуле Грина для возмущенной задачи. Рассмотрим дифференциальное выражение

$$L_\varepsilon u:=u-\Delta u+\varepsilon\sum_{k=1}^m c_k\frac{\partial u}{\partial x_k},\quad c_k\in\mathbb{R},\quad k=\overline{1,m},\quad \varepsilon\in\mathbb{R}, \tag{2.3}$$

а также соответствующую обобщенную формулу Грина для полуторалинейной формы. Как было видно из предыдущих рассмотрений, и дифференциальное выражение, и вид полуторалинейной формы можно выбирать неоднозначно, а краевые, спектральные и начально-краевые задачи затем формулировать на основе этой выбранной формулы Грина.

При дальнейшем рассмотрении задач, основываясь на тождествах

$$\int_\Omega \eta\frac{\partial\bar u}{\partial x_k}d\Omega=-\int_\Omega\frac{\partial\eta}{\partial x_k}\bar u d\Omega+\int_\Gamma\cos(\widehat{\vec n,\vec e_k})\eta\bar u\,d\Gamma\quad\forall\,\eta,u\in H^1(\Omega) \tag{2.4}$$

и учитывая вид $L_\varepsilon u$ из (2.3), на основе формулы (2.1) приходим к выводу, что имеет место следующая обобщенная формула Грина для полуторалинейной формы:

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon(\eta,u)&:=(\eta,u)_{H^1(\Omega)}+2\varepsilon\sum_{k=1}^m c_k\left[\left(\eta,\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)_{L_2(\Omega)}-\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_k},u\right)_{L_2(\Omega)}\right]=\\&=\langle\eta,L_\varepsilon u\rangle_{L_2(\Omega)}+\langle\gamma\eta,\partial_\varepsilon u\rangle_{L_2(\Gamma)}\quad\forall\,\eta,u\in H^1(\Omega),\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\partial_\varepsilon u:=\partial_0u-\varepsilon\sigma\gamma u,\quad \sigma:=\sum_{k=1}^m c_k\cos(\widehat{\vec n,\vec e_k}),\quad \partial_\varepsilon u\in H^{-1/2}(\Gamma), \tag{2.6}$$

где $L_\varepsilon u\in(H^1(\Omega))^*$ — дифференциальное выражение (2.3), а $\partial_0u:=(\partial u/\partial n)_\Gamma$.
Все дальнейшие задачи будем формулировать на базе этой формулы Грина.

Отметим еще, что $L_\varepsilon u=L_0u+L_1u$, где L_1u — дифференциальное выражение первого порядка, в то время как $L_0u=u-\Delta u$ — дифференциальное выражение второго порядка.

Проверим, что полуторалинейная форма $\Phi_\varepsilon(\eta,u)$ из (2.5) ограничена в $H^1(\Omega)$ и равномерно аккретивна. Имеем

$$\begin{aligned}\Big|\left(\eta,\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)_{L_2(\Omega)}-\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_k},u\right)_{L_2(\Omega)}\Big|&\leqslant\|\eta\|_{L_2(\Omega)}\cdot\|\frac{\partial u}{\partial x_k}\|_{L_2(\Omega)}+\\+\|\frac{\partial\eta}{\partial x_k}\|_{L_2(\Omega)}\cdot\|u\|_{L_2(\Omega)}&\leqslant 2\|\eta\|_{H^1(\Omega)}\cdot\|u\|_{H^1(\Omega)}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Поэтому

$$\Big|\Phi_\varepsilon(\eta,u)\Big|\leqslant\tilde c_1\|\eta\|_{H^1(\Omega)}\cdot\|u\|_{H^1(\Omega)},\quad \tilde c_1=\left(1+4|\varepsilon|\sum_{k=1}^m|c_k|\right), \tag{2.8}$$

т. е. $\Phi_\varepsilon(\eta, u)$ ограничена в $H^1(\Omega)$. Далее, сопряженная форма имеет вид

$$\Phi^*(\eta, u) = \overline{\Phi(u, \eta)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - 2\varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_k \left[\left(\eta, \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)_{L_2(\Omega)} - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k}, u \right)_{L_2(\Omega)} \right]. \tag{2.9}$$

Отсюда и из (2.5) получаем, что

$$\operatorname{Re} \Phi_\varepsilon(u, u) = \frac{1}{2} \left[\Phi_\varepsilon(u, u) + \Phi_\varepsilon^*(u, u) \right] = (u, u)_{H^1(\Omega)} = \|u\|^2_{H^1(\Omega)}, \tag{2.10}$$

т. е. $\Phi_\varepsilon(u, u)$ равномерно аккретивна в $H^1(\Omega)$ с константой $c_2 = 1$.

Тогда из общей теории таких полуторалинейных форм следует, во-первых, что форме $\Phi_\varepsilon(\eta, u)$ однозначно отвечает оператор $A_\varepsilon : H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))^*$, связанный с формой соотношениями

$$\Phi_\varepsilon(\eta, u) = \langle \eta, A_\varepsilon u \rangle_{L_2(\Omega)} \qquad \forall\, \eta, u \in H^1(\Omega), \quad A_\varepsilon u \in (H^1(\Omega))^*, \tag{2.11}$$

а во-вторых, этот оператор имеет ограниченный обратный

$$A_\varepsilon^{-1} : (H^1(\Omega))^* \to H^1(\Omega) \tag{2.12}$$

(теорема Лакса—Мильграма). Заметим еще, что пространство $L_2(\Omega)$ имеет оснащение

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow (H^1(\Omega))^* \tag{2.13}$$

(с компактными вложениями левых пространств в правые).

Отметим, наконец, что связь оператора A_ε, отвечающего форме $\Phi_\varepsilon(\eta, u)$, и оператора A_0, отвечающего невозмущенной форме $\Phi_0(\eta, u) = (\eta, u)_{H^1(\Omega)}$, будет выяснена ниже.

2.3. Краевые задачи, порожденные несимметрической формой. Рассмотрим теперь краевые задачи, отвечающие формуле Грина (2.5), (2.6) и связанные с дифференциальным выражением $L_\varepsilon u$ из (2.3).

1°. *Первая краевая задача Неймана—Ньютона.* Эта задача соответствует уравнению Пуассона для дифференциального выражения $L_\varepsilon u$ и однородному условию Неймана—Ньютона (аналог первой вспомогательной задачи С. Крейна):

$$L_\varepsilon v = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_\varepsilon v = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \tag{2.14}$$

$$L_\varepsilon v := v - \Delta v + \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{\partial v}{\partial x_k}, \quad \partial_\varepsilon v := \partial_0 v - \varepsilon \sigma \gamma v. \tag{2.15}$$

Будем изучать слабые решения этой задачи, считая, что искомая функция $v \in H^1(\Omega)$, и используя формулу Грина (2.5).

Определение 2.1. *Слабым решением* задачи (2.14), (2.15) назовем такую функцию $v = v_\varepsilon(x) \in H^1(\Omega)$, для которой выполнено тождество

$$\Phi_\varepsilon(\eta, v) = \langle \eta, f \rangle_{L_2(\Omega)} \qquad \forall\, \eta \in H^1(\Omega). \tag{2.16}$$

Теорема 2.1. *Задача* (2.14), (2.15) *имеет слабое решение* $v = v_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$f \in (H^1(\Omega))^*. \tag{2.17}$$

Это решение выражается формулой

$$v_\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} f, \quad A_\varepsilon \in \mathcal{L}\,(H^1(\Omega); (H^1(\Omega))^*), \tag{2.18}$$

где A_ε — оператор полуторалинейной формы $\Phi_\varepsilon(\eta, u)$ (см. (2.11)*).*

Доказательство. Заметим сначала, что правая часть в (2.16) является линейным ограниченным функционалом в $H^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (2.17). Далее, любой линейный ограниченный функционал относительно $\eta \in H^1(\Omega)$ выражается не только в виде скалярного произведения $(\eta, v_*)_{H^1(\Omega)}$ (теорема Ф. Рисса), но также и в виде $\Phi_\varepsilon(\eta, v_\varepsilon)$, т. е. существует единственный элемент $v_\varepsilon \in H^1(\Omega)$, для которого выполнено тождество (2.16), если $f \in (H^1(\Omega))^*$. Однако в силу свойства (2.11) тогда будем иметь

$$\Phi_\varepsilon(\eta, v_\varepsilon) = \langle \eta, A_\varepsilon v_\varepsilon \rangle_{L_2(\Omega)} = \langle \eta, f \rangle_{L_2(\Omega)} \qquad \forall\, \eta \in H^1(\Omega). \tag{2.19}$$

Отсюда получаем, что $A_\varepsilon v_\varepsilon = f$, и так как A_ε имеет ограниченный обратный (см. (2.12)), приходим к выводу, что имеет место формула (2.18), где A_ε — оператор полуторалинейной формы $\Phi_\varepsilon(\eta, u)$. □

2°. *Вторая краевая задача Неймана—Ньютона.* В этой задаче имеем однородное уравнение в Ω и неоднородное условие Неймана—Ньютона на $\Gamma = \partial\Omega$:

$$L_\varepsilon w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_\varepsilon w = \psi \quad (\text{на } \Gamma). \tag{2.20}$$

Определение 2.2. *Слабым решением* задачи (2.20) назовем такую функцию $w = w_\varepsilon \in H^1(\Omega)$, для которой выполнено тождество

$$\Phi_\varepsilon(\eta, w) = \langle \gamma\eta, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} \qquad \forall\, \eta \in H^1(\Omega). \tag{2.21}$$

Теорема 2.2. *Задача* (2.20) *имеет слабое решение* $w \in H^1(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\psi \in H^{-1/2}(\Gamma). \tag{2.22}$$

Это решение дается формулой

$$w = w_\varepsilon = V_\varepsilon \psi, \quad V_\varepsilon \in \mathcal{L}\,(H^{-1/2}(\Gamma); H^1_{h,\varepsilon}(\Omega)), \tag{2.23}$$

$$H^1_{h,\varepsilon}(\Omega) := \{w \in H^1(\Omega) : L_\varepsilon w = 0\} = \ker \mathrm{L}_\varepsilon. \tag{2.24}$$

Доказательство. Проверим, что правая часть в (2.21) является линейным ограниченным функционалом в $H^1(\Omega)$ (относительно η) тогда и только тогда, когда выполнено условие (2.22). Действительно, из теоремы Гальярдо (см. [41]) имеем оценку

$$\|\gamma\eta\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant c_1 \|\eta\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall\, \eta \in H^1(\Omega). \tag{2.25}$$

Поэтому

$$\Big| \langle \gamma\eta, \psi \rangle \Big|_{L_2(\Gamma)} \leqslant \|\gamma\eta\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \cdot \|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leqslant (c_1 \|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}) \cdot \|\eta\|_{H^1(\Omega)}. \tag{2.26}$$

Здесь при выводе был использован также факт наличия оснащения

$$H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Gamma) \hookrightarrow\hookrightarrow H^{-1/2}(\Gamma), \tag{2.27}$$

который имеет место для областей $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$.

Итак, поскольку правая часть в (2.21) — линейный ограниченный функционал в $H^1(\Omega)$, то найдется единственный элемент $w = w_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ такой, что этот функционал имеет вид $\Phi_\varepsilon(\eta, w_\varepsilon)$, т. е. выполнено тождество (2.21). Решение w_ε находится однозначно по элементу ψ, поэтому $w_\varepsilon = V_\varepsilon\psi$, где V_ε — линейный ограниченный оператор, действующий из $H^{-1/2}(\Gamma)$ в $H^1(\Omega)$.

Покажем, что область значений оператора V_ε дает все пространство $H^1_{h,\varepsilon}(\Omega)$ из (2.24). В самом деле, из общей теории абстрактной формулы Грина для полуторалинейных форм, а также из (2.5) при $\eta \in H^1_0(\Omega) = \ker \gamma$ следует, что $\Phi_\varepsilon(\eta, w_\varepsilon) = 0$ тогда и только тогда, когда $L_\varepsilon w_\varepsilon = 0$, т. е. $w_\varepsilon \in H^1_{h,\varepsilon}(\Omega) = \ker L_\varepsilon$. Иными словами, имеет место прямое разложение

$$H^1(\Omega) = H^1_0(\Omega)(\dot{+})H^1_{h,\varepsilon}(\Omega). \tag{2.28}$$

Однако при $\eta \in H^1_0(\Omega)$ из (2.21) имеем $\Phi_\varepsilon(\eta, w_\varepsilon) = 0$, и тогда $L_\varepsilon w_\varepsilon = 0$, т. е. $w_\varepsilon \in H^1_{h,\varepsilon}(\Omega)$. Значит, оператор V_ε, $w_\varepsilon = V_\varepsilon\psi$, действует из $H^{-1/2}(\Gamma)$ на $H^1_{h,\varepsilon}(\Omega)$ ограниченным образом, т. е. имеет место свойство $V_\varepsilon \in \mathcal{L}\,(H^{-1/2}(\Gamma); H^1_{h,\varepsilon}(\Omega))$. □

3°. *Полная краевая задача Неймана—Ньютона.* Эта задача отвечает неоднородному уравнению Пуассона в Ω и неоднородному условию Неймана—Ньютона на $\Gamma = \partial\Omega$:

$$L_\varepsilon u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_\varepsilon u = \psi \quad (\text{на } \Gamma), \tag{2.29}$$

Определение 2.3. *Слабым решением* задачи (2.29) назовем такую функцию $u \in H^1(\Omega)$, для которой выполнено тождество

$$\Phi_\varepsilon(\eta, u) = \langle \eta, f \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma\eta, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} \qquad \forall\, \eta \in H^1(\Omega), \tag{2.30}$$

следующее из формулы Грина (2.5) и уравнений (2.29).

Опираясь на решения задачи (2.14), (2.15), а также задачи (2.20), приходим к следующему выводу.

Теорема 2.3. *Задача* (2.29) *имеет слабое решение* $u = u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия* (2.17) *и* (2.22):

$$f \in (H^1(\Omega))^*, \quad \psi \in H^{-1/2}(\Gamma). \tag{2.31}$$

При этом оно представляется в виде

$$u_\varepsilon = v_\varepsilon + w_\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} f + V_\varepsilon \psi, \tag{2.32}$$

где A_ε^{-1} *и* V_ε — *операторы, описанные в теоремах* 2.1 *и* 2.2 *соответственно.*

Доказательство. Введем функции v_ε и w_ε как слабые решения задач (2.14), (2.15) и (2.20). Опираясь на формулировки их слабых решений (см. (2.16), (2.21)), получим с учетом (2.30) для $\tilde{u}_\varepsilon := v_\varepsilon + w_\varepsilon$ тождество

$$\Phi_\varepsilon(\eta, \tilde{u}_\varepsilon) = \langle \eta, f \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma\eta, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} =: \Phi_\varepsilon(\eta, u_\varepsilon) \qquad \forall\, \eta \in H^1(\Omega). \tag{2.33}$$

Отсюда следует, что

$$\Phi_\varepsilon(\eta, u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon) = 0 \qquad \forall\, \eta \in H^1(\Omega),$$

и потому $u_\varepsilon = \tilde{u}_\varepsilon := v_\varepsilon + w_\varepsilon$, т. е. имеет место формула (2.32). □

Таким образом, слабое решение полной краевой задачи Неймана—Ньютона есть сумма слабых решений задач пунктов 1° и 2°, разобранных выше.

4°. *Однородная задача Дирихле для уравнения Пуассона.* Рассмотрим теперь задачу

$$L_\varepsilon u := u - \Delta u + \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \gamma u := u|_\Gamma = 0 \quad (\text{на } \Gamma) \tag{2.34}$$

Будем разыскивать ее слабое решение, считая, что искомая функция $u = u_\varepsilon(x) \in H_0^1(\Omega)$,

$$H_0^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \gamma u = 0 \quad (\text{на } \Gamma)\}. \tag{2.35}$$

Для функций из $H_0^1(\Omega)$ формула Грина (2.5) принимает вид

$$\Phi_{0,\varepsilon}(\eta, u) = \langle \eta, L_\varepsilon u \rangle_{L_2(\Omega)} \qquad \forall\, \eta, u \in H_0^1(\Omega). \tag{2.36}$$

При этом сужение $\Phi_{0,\varepsilon}(\eta, u)$ полуторалинейной формы $\Phi_\varepsilon(\eta, u)$ с $H^1(\Omega)$ на $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ обладает теми же общими свойствами, которыми она обладала на всем $H^1(\Omega)$: после такого сужения $\Phi_{0,\varepsilon}(\eta, u)$ снова является ограниченной и равномерно аккретивной формой в $H_0^1(\Omega)$. Отметим еще, что пространство $L_2(\Omega)$ имеет оснащение

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow (H_0^1(\Omega))^*. \tag{2.37}$$

Из этих свойств следует, что форме $\Phi_{0,\varepsilon}(\eta, u)$ отвечает оператор $A_{0,\varepsilon} \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega); (H_0^1(\Omega))^*)$, который дает связь, аналогичную (2.11):

$$\Phi_{0,\varepsilon}(\eta, u) = \langle \eta, A_{0,\varepsilon} u \rangle_{L_2(\Omega)} \qquad \forall\, \eta, u \in H_0^1(\Omega). \tag{2.38}$$

Определение 2.4. *Слабым решением* задачи (2.34) назовем такую функцию $u = u_{0,\varepsilon} \in H_0^1(\Omega)$, для которой выполнено тождество

$$\Phi_{0,\varepsilon}(\eta, u) = \langle \eta, f \rangle_{L_2(\Omega)} \qquad \forall\, \eta \in H_0^1(\Omega), \tag{2.39}$$

следующее из (2.36) и (2.34).

Теорема 2.4. *Задача* (2.34) *имеет слабое решение* $u = u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*:

$$f \in (H_0^1(\Omega))^*. \tag{2.40}$$

В этом случае

$$u_\varepsilon = A_{0,\varepsilon}^{-1} f, \qquad A_{0,\varepsilon}^{-1} \in \mathcal{L}\,((H_0^1(\Omega))^*; H_0^1(\Omega)). \tag{2.41}$$

Доказательство. Оно в точности повторяет доказательство теоремы 2.1 с заменами $H^1(\Omega) \mapsto H_0^1(\Omega)$, $A_\varepsilon \mapsto A_{0,\varepsilon}$ и с учетом того факта, что правая часть в (2.39) является линейным ограниченным функционалом относительно η в $H_0^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (2.40). При этом вместо (2.11) используется формула (2.38). □

3. Спектральные задачи, порожденные полуторалинейной формой

В этом разделе изучаются несамосопряженные спектральные задачи, порожденные полуторалинейной формой $\Phi_\varepsilon(\eta, u)$ из (2.5), а также разобранными в пункте 2.3 краевыми задачами и некоторыми новыми задачами.

3.1. Спектральная задача Дирихле. Если в краевой задаче Дирихле (2.34) положить $f = \lambda u$, то придем к задаче

$$L_\varepsilon u := u - \Delta u + \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = \lambda u \quad (\text{в } \Omega), \quad u = 0 \quad (\text{на } \Gamma = \partial\Omega). \tag{3.1}$$

Здесь снова $c_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, m}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, а $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр.

Исследование этой задачи будем проводить методами теории самосопряженных и несамосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве, в данном случае — в комплексном пространстве $L_2(\Omega)$. При этом для простоты изложения будем считать границу области $\Gamma = \partial\Omega$ принадлежащей классу C^2, т. е. дважды непрерывно дифференцируемой.

Введем в рассмотрение оператор A_0, действующий в $L_2(\Omega)$ по закону

$$A_0 u := u - \Delta u, \quad u \in \mathcal{D}(A_0) := H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \tag{3.2}$$

Опираясь на известные методы (см. [12, 32, 33]), можно доказать, что оператор A_0, заданный на области определения $\mathcal{D}(A_0)$ из (3.2), является неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором, действующим в $L_2(\Omega)$. При этом его квадратичная форма

$$(A_0 u, u)_{L_2(\Omega)} = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2) d\Omega \geqslant \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(A_0). \tag{3.3}$$

После замыкания по норме $H_0^1(\Omega)$ из (3.3) получаем, что энергетическое пространство $\mathcal{H}_{A_0}$ оператора A_0 совпадает с $H_0^1(\Omega) = \mathcal{D}(A_0^{1/2})$, т.е

$$\|A_0^{1/2} u\|^2_{L_2(\Omega)} = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \geqslant \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega) = \mathcal{H}_{A_0}. \tag{3.4}$$

Так как $H_0^1(\Omega)$ компактно вложено в $L_2(\Omega)$ (см. (2.37)), то по основной теореме о спектре (см. [33]) получаем, что оператор A_0 имеет дискретный положительный спектр $\{\lambda_k(A_0)\}_{k=1}^\infty$, состоящий из положительных конечнократных собственных значений $\lambda_k(A_0) \geqslant 1$, имеющих предельную точку $\lambda = +\infty$. При этом система его собственных элементов $\{u_k(A_0)\}_{k=1}^\infty$ образует ортогональный базис как в $L_2(\Omega)$, так и в $H_0^1(\Omega)$:

$$(u_k, u_l)_{L_2(\Omega)} = \delta_{k,l}, \quad (u_k, u_l)_{H_0^1(\Omega)} = \lambda_k(A_0)\delta_{k,l}, \quad k, l = 1, 2, \ldots. \tag{3.5}$$

Отметим еще, что собственные значения $\lambda_k(A_0)$ имеют асимптотическое поведение

$$\lambda_k(A_0) = d_m k^{2/m}[1 + o(1)], \quad d_m > 0, \quad k \to \infty, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^m. \tag{3.6}$$

В частности, при $m = 3$ (трехмерное пространство) имеем известную классическую асимптотику Вейля (см. [1]):

$$\lambda_k(A_0) = \left(\frac{|\Omega|}{6\pi^2}\right)^{-2/3} k^{2/3}[1 + o(1)] \quad (k \to \infty). \tag{3.7}$$

Опишем теперь в операторной форме свойства второго слагаемого слева в уравнении (3.1). Введем в рассмотрение оператор

$$B_0 u := i \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{\partial u}{\partial x_k}, \quad c_k \in \mathbb{R}, \tag{3.8}$$

$$u \in \mathcal{D}(B_0) := \Big\{u \in H^1(\Omega) : \ u = 0 \ (\text{на } \Gamma)\Big\} = H_0^1(\Omega) = \mathcal{D}(A_0^{1/2}) \supset \mathcal{D}(A_0). \tag{3.9}$$

Можно убедиться, используя прием интегрирования по частям, что

$$\begin{aligned}(B_0u,v)_{L_2(\Omega)} &= i\sum_{k=1}^{m} c_k \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_k}\bar{v}\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} u\overline{\left(i\sum_{k=1}^{m} c_k \frac{\partial v}{\partial x_k}\right)}d\Omega = \\ &= (u, B_0v)_{L_2(\Omega)} \quad \forall\, u,v \in H_0^1(\Omega) = \mathcal{D}(B_0).\end{aligned} \tag{3.10}$$

Отсюда следует, что B_0 — неограниченный самосопряженный оператор, действующий в $L_2(\Omega)$ и заданный на области определения $\mathcal{D}(B_0) = \mathcal{D}(A_0^{1/2})$.

После введения операторов A_0 и B_0 задачу (3.1) можно в операторной форме переписать в виде

$$(A_0 - i\varepsilon B_0)u = \lambda u, \qquad u \in \mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{D}(A_0^{1/2}) = H_0^1(\Omega) = \mathcal{D}(B_0) \subset L_2(\Omega), \tag{3.11}$$

где свойства операторов A_0 и B_0 уже описаны выше. Таким образом, возникла несамосопряженная спектральная задача на собственные значения для оператора $A_0 - i\varepsilon B_0$.

Преобразуем задачу (3.11) к виду, для которого можно использовать известные теоремы М. В. Келдыша (см. [9, п. 5.8]).

Прежде всего отметим, что оператор $A_0 - i\varepsilon B_0$ имеет нулевое ядро. В самом деле, если

$$(A_0 - i\varepsilon B_0)u_0 = 0, \quad u_0 \in \mathcal{D}(A_0),$$

то отсюда выводим, в силу свойств A_0 и B_0, что

$$(A_0u_0, u_0)_{L_2(\Omega)} = \|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} = 0 \quad \Rightarrow u_0 = 0.$$

Значит, оператор $A_0 - iB_0$ имеет обратный. Действительно, из определения (3.8), (3.9) оператора B_0 и определения нормы в $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ легко выводится неравенство

$$\|B_0u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c_0\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = c_0\|A_0^{1/2}u\|_{L_2(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{3.12}$$

После замены $u = A_0^{-1/2}v,\ v \in L_2(\Omega)$, отсюда получаем, что $B_0A_0^{-1/2} : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ — ограниченный оператор.

Опираясь на эти факты, осуществим в (3.11) замену искомого элемента:

$$A_0^{1/2}u = v, \quad v \in L_2(\Omega). \tag{3.13}$$

Тогда вместо (3.11) возникает спектральная задача

$$(I - i\varepsilon C_0)v = \lambda A_0^{-1}v, \qquad C_0 := A_0^{-1/2}(B_0A_0^{-1/2}) = C_0^* \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)). \tag{3.14}$$

Здесь оператор $I - i\varepsilon C_0$ в силу самосопряженности C_0 имеет ограниченный обратный оператор, и потому задача (3.14) равносильна задаче на собственные значения

$$\begin{aligned}&(I + T(\varepsilon))A_0^{-1}v = \mu v, \quad \mu = \lambda^{-1}, \\ &I + T(\varepsilon) := (I - i\varepsilon C_0)^{-1}, \quad T(\varepsilon) \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)).\end{aligned} \tag{3.15}$$

Отметим, наконец, что в силу асимптотической формулы (3.6) имеем свойство

$$A_0^{-1} \in \mathfrak{S}_p, \quad p > m/2, \tag{3.16}$$

и потому к задаче (3.15) применимы теоремы М. В. Келдыша (см. [9, с. 314–320]). Отсюда получаем такой вывод.

Теорема 3.1. *Задача* (3.11)*, а потому и исходная задача* (3.1) *имеют дискретный спектр, состоящий из конечнократных собственных значений* $\lambda_k,\ k = 1, 2, \ldots,$ *расположенных в правой полуплоскости и имеющих предельную точку* $\lambda = \infty$*. Для любого* $\delta > 0$ *все собственные значения этой задачи, кроме, быть может, конечного их числа, лежат в секторе* $|\arg \lambda| < \delta$*. Система корневых* (*собственных и присоединенных*) *элементов задачи* (3.11) *полна в энергетическом пространстве* $\mathcal{H}_{A_0} = H_0^1(\Omega)$ *оператора* A_0*. Собственные значения* λ_k *задачи* (3.11) *имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_k = \lambda_k(A_0)[1 + o(1)], \quad k \to \infty, \tag{3.17}$$

где $\lambda_k(A_0)$*, в свою очередь, имеют асимптотическое поведение* (3.6).

Доказательство. В задаче (3.15) оператор $Z := (I + T(\varepsilon))A_0^{-1} = (I - i\varepsilon C_0)^{-1}A_0^{-1}$ полный, т. е. $\ker \mathrm{Z} = \{0\}$, поскольку Z обратим и $Z^{-1} = A_0(I - i\varepsilon C_0)$. Далее, для A_0^{-1} выполнено свойство (3.16), причем A_0^{-1} — положительный оператор. Поэтому к уравнению (3.15) применима первая теорема М. В. Келдыша. Согласно утверждениям этой теоремы приходим к следующим выводам.

1°. Система корневых (собственных и присоединенных) элементов $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ этой задачи полна в $L_2(\Omega)$.

2°. Все собственные значения μ_k этой задачи конечнократны и для любого $\delta > 0$ расположены, кроме, быть может, конечного их числа, в угле $|\arg \mu| < \delta$. Кроме того, все они находятся в правой комплексной полуплоскости и имеют предельную точку $\mu = 0$.

Отсюда для задачи (3.14), а потому и для задач (3.11), (3.1) получаем, что они имеют дискретный спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, расположенный в правой комплексной полуплоскости и имеющий предельную точку $\lambda = \infty$. При этом из условия $|\arg\,\mu| < \delta$ следует условие $|\arg\,\lambda| < \delta$, так что при любом $\delta > 0$ собственные значения λ_k, кроме, быть может, конечного числа, лежат в угле $|\arg\,\lambda| < \delta$. Наконец, из полноты системы корневых элементов $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ задачи (3.15) в силу замены (3.13) следует свойство полноты системы корневых элементов $u_k = A_0^{-1/2}v_k,\ k = 1, 2, \ldots,\ u_k \in \mathcal{D}(A_0^{1/2}) = H_0^1(\Omega) = \mathcal{H}_{A_0}$, т. е. в энергетическом пространстве $\mathcal{H}_{A_0}$ оператора A_0.

Вернемся теперь к задаче (3.14), переписанной в виде

$$L(\lambda)v := (I - i\varepsilon C_0 - \lambda A_0^{-1})v = 0, \quad v \in L_2(\Omega), \tag{3.18}$$

т. е. к задаче на собственные значения для линейного относительно λ операторного пучка $L(\lambda)$. Так как здесь $C_0 = C_0^* \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega))$, A_0^{-1} — полный положительный компактный оператор, собственные значения которого в силу (3.6) имеют степенную асимптотику собственных значений

$$\lambda_k(A_0^{-1}) = d_m^{-1}k^{-2/m}[1 + o(1)], \quad k \to \infty, \tag{3.19}$$

то к пучку (3.18) применима теорема Маркуса—Мацаева (см., например, [29], а также [30]), из которой следует, что асимптотика собственных значений λ_k в задаче (3.18) такая же, как в задаче для укороченного пучка:

$$L_0(\lambda)v := (I - \lambda A_0^{-1})v = 0. \tag{3.20}$$

Отсюда и следует асимптотическая формула (3.17).

Отметим, наконец, что расположение собственных значений λ_k в правой комплексной полуплоскости следует также из (3.18) при $\lambda = \lambda_k,\ v = v_k$:

$$(v, v)_{L_2(\Omega)} - \mathrm{Re}\,\lambda(A_0^{-1}v, v)_{L_2(\Omega)} = 0, \quad A_0^{-1} > 0, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{3.21}$$

□

Наличие степенной асимптотики собственных значений оператора A_0 (см. (3.6)), а также свойство ограниченности оператора $B_0A_0^{-1/2} : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ позволяет установить более сильные утверждения о свойствах решений спектральной задачи (3.14).

Теорема 3.2. *Спектр задачи* (3.18) *расположен в параболической области*

$$\Lambda_\varepsilon := \Big\{ \mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \lambda_1(A_0) :\ |\mathrm{Im}\,\lambda|^2 \leqslant \varepsilon^2\|B_0A_0^{-1/2}\|^2 \cdot \mathrm{Re}\,\lambda \Big\}, \tag{3.22}$$

а корневые элементы этой задачи образуют базис Абеля—Лидского порядка $\alpha > m/2$ в пространстве $H_0^1(\Omega)$.

Доказательство. Для любого собственного значения λ и отвечающего ему элемента v задачи (3.14) имеем соотношение (3.21), откуда следует, что

$$\mathrm{Re}\,\lambda = \frac{\|v\|^2_{L_2(\Omega)}}{\|A_0^{-1/2}v\|_{L_2(\Omega)}} = \frac{\|A_0^{1/2}u\|^2_{L_2(\Omega)}}{\|u\|^2_{L_2(\Omega)}} \geqslant \lambda_1(A_0), \quad v = A_0^{1/2}u. \tag{3.23}$$

Далее, из (3.14) следует также соотношение

$$-\varepsilon(Cv, v)_{L_2(\Omega)} = -\varepsilon(A_0^{-1/2}(B_0A_0^{-1/2})v, v)_{L_2(\Omega)} = (\mathrm{Im}\lambda)\|A_0^{-1/2}v\|^2_{L_2(\Omega)},$$

и потому

$$|\,\mathrm{Im}\lambda| \cdot \|A_0^{-1/2}v\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant |\varepsilon|\|B_0A_0^{-1/2}\| \cdot \|v\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|A_0^{-1/2}v\|_{L_2(\Omega)}. \tag{3.24}$$

Отсюда и из (3.23) получаем связь:

$$|\,\mathrm{Im}\lambda| \leqslant \varepsilon \|B_0 A_0^{-1/2}\| \cdot \|v\|_{L_2(\Omega)} \,/\, \|A_0^{-1/2} v\|_{L_2(\Omega)} = |\varepsilon| \|B_0 A_0^{-1/2}\| (\mathrm{Re}\lambda)^{1/2}.$$

Поэтому спектр задачи (3.18) расположен в параболической области (3.22).

Осуществим теперь в задаче (3.14) замену искомого элемента по формуле

$$(I - i\varepsilon C_0)v =: w. \tag{3.25}$$

Тогда это уравнение преобразуется к виду

$$A_0^{-1}(I + T(\varepsilon))w = \mu w, \quad \mu = \lambda^{-1}. \tag{3.26}$$

Здесь $I + T(\varepsilon)$ — оператор из (3.15), $T(\varepsilon) \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega))$, а асимптотика собственных значений компактного положительного оператора A_0^{-1}, как следует из (3.19), такова:

$$\lambda_k(A_0^{-1}) \sim d_m^{-1} k^{-p}, \quad p = 2/m, \quad k \to \infty. \tag{3.27}$$

Поэтому согласно утверждению из [38, с. 292] корневые элементы $\{w_k\}_{k=1}^\infty$, $w_k = (I - i\varepsilon C_0)v_k$, задачи (3.26), отвечающие корневым элементам v_k задачи (3.14), образуют базис Абеля—Лидского порядка $\alpha > p^{-1} = m/2$. Однако при замене (3.25) базис $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ переходит в базис $\{v_k\}_{k=1}^\infty$, и потому корневые элементы $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ задачи (3.14) также образуют базис Абеля—Лидского порядка $\alpha > m/2$ в пространстве $L_2(\Omega)$. Отсюда с учетом замены (3.13) приходим к выводу, что в задаче (3.11) корневые элементы $\{u_k\}_{k=1}^\infty$, $u_k = A_0^{-1/2} v_k$, образуют базис Абеля—Лидского порядка $\alpha > m/2$ в энергетическом пространстве $\mathcal{H}_{A_0} = H_0^1(\Omega) = \mathcal{D}(A_0^{1/2})$ оператора A_0. □

3.2. Спектральная задача Неймана—Ньютона. Так называют спектральную задачу вида

$$L_\varepsilon v = \lambda v \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_\varepsilon v = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \tag{3.28}$$

где $L_\varepsilon v$ и $\partial_\varepsilon v$ — дифференциальное выражение и производная по нормали, определенные по формулам (2.3), (2.6):

$$L_\varepsilon v := v - \Delta v + \varepsilon \sum_{k=1}^m c_k \frac{\partial v}{\partial x_k}, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{1,m}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}, \tag{3.29}$$

$$\partial_\varepsilon v := \partial_0 v - \varepsilon \sigma \gamma v, \quad \sigma = \sum_{k=1}^m c_k \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_k}), \quad \partial_0 v := (\partial v / \partial n)_\Gamma. \tag{3.30}$$

В задаче (3.28) спектральный параметр $\lambda \in \mathbb{C}$ входит в уравнение.

Наряду с (3.28)–(3.30) рассмотрим также невозмущенную спектральную задачу Неймана:

$$L_0 v := v - \Delta v = \lambda v \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_0 v := (\frac{\partial v}{\partial n})_\Gamma = 0 \quad (\text{на } \Gamma). \tag{3.31}$$

Как известно, эта задача равносильна уравнению

$$Av = \lambda v, \tag{3.32}$$

$$v \in \mathcal{D}(A) = \left\{ v \in H^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \Gamma) \right\} \subset \mathcal{D}(A^{1/2}) = H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega). \tag{3.33}$$

При этом оператор A имеет дискретный положительный спектр $\{\lambda_k(A)\}_{k=1}^\infty$ с предельной точкой $\lambda = +\infty$ и систему собственных элементов $\{v_k(A)\}_{k=1}^\infty$, образующих ортогональный базис как в $L_2(\Omega)$, так и в $H^1(\Omega)$:

$$(v_k, v_j)_{L_2(\Omega)} = \delta_{kj}, \quad (v_k, v_j)_{H^1(\Omega)} = \lambda_k(A)\delta_{kj}, \quad k, j = 1, 2, \ldots. \tag{3.34}$$

Кроме того, известно, что собственные значения $\lambda_k(A)$ невозмущенной задачи Неймана (3.31) имеют такое же асимптотическое поведение, как собственные значения невозмущенной задачи Дирихле (см. (3.6), (3.7)):

$$\lambda_k(A) = d_m k^{2/m}[1 + o(1)], \quad d_m > 0, \quad k \to \infty, \quad d_3 = \left(\frac{|\Omega|}{6\pi^2}\right)^{-2/3}. \tag{3.35}$$

Прежде чем исследовать задачу (3.28)–(3.30), найдем операторную связь между решениями $v = v_\varepsilon$ возмущенной задачи

$$L_\varepsilon v = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_\varepsilon v = 0 \quad (\text{на } \Gamma) \tag{3.36}$$

и решениями $v = v_0$ невозмущенной задачи

$$L_0 v = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_0 v = 0 \quad (\text{на } \Gamma) \tag{3.37}$$

с одной и той же заданной функцией f.

Перепишем задачу (3.36) в виде

$$L_0 v = -\varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{\partial v}{\partial x_k} + f =: -\varepsilon B v + f \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_0 v = \varepsilon \sigma \gamma v \quad (\text{на } \Gamma). \tag{3.38}$$

Воспользуемся теперь формулой для решения полной краевой задачи Неймана—Ньютона из пункта 2.3, т. е. формулой (2.32), рассмотренной, однако, при $\varepsilon = 0$:

$$v = v_1 + v_2 = A^{-1} f + V\psi, \tag{3.39}$$

где $v_1 = A^{-1} f$ — решение задачи

$$L_0 v_1 = f, \quad \partial_0 v_1 = 0 \Leftrightarrow A v_1 = f, \tag{3.40}$$

а $v_2 = V\psi$ — решение задачи

$$L_0 v_2 = 0, \quad \partial_0 v_2 = \psi. \tag{3.41}$$

Получение таких формул для слабых решений описаны в пункте 2.3 (см. задачи 1°–3°).

Для задачи (3.38) тогда будем иметь связь

$$v = A^{-1}(-\varepsilon B v + f) + V(\varepsilon \sigma \gamma v). \tag{3.42}$$

Здесь A — оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$, свойства которого описаны выше, $V : H^{-1/2}(\Gamma) \to H_h^1(\Omega)$ — оператор задачи (3.41), а $v = v_\varepsilon$ — решение задачи (3.36).

Из (3.42) получаем соотношение

$$[I + \varepsilon(A^{-1} B - V\sigma\gamma)] v_\varepsilon = A^{-1} f = v_0, \tag{3.43}$$

где v_0 — решение невозмущенной задачи (3.37), $v_\varepsilon \in H^1(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2})$. Поэтому в (3.43) можно сделать замену

$$v_\varepsilon = A^{-1/2} \eta_\varepsilon, \quad \eta_\varepsilon \in L_2(\Omega). \tag{3.44}$$

Более того, из (3.43) видно, что в этом уравнении все слагаемые принадлежат $\mathcal{D}(A^{1/2})$. Поэтому после замены (3.44) и действия слева оператором $A^{1/2}$ получаем соотношение для η_ε:

$$[I + \varepsilon(A^{-1/2} B A^{-1/2} - (A^{1/2} V)\sigma(\gamma A^{-1/2}))]\eta_\varepsilon = \eta_0 := A^{1/2} v_0 = A^{-1/2} f. \tag{3.45}$$

Изучим теперь общие свойства операторных коэффициентов из (3.45).

Лемма 3.1. *Оператор B, определенный соотношением*

$$B v := \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{\partial v}{\partial x_k}, \quad \mathcal{D}(B) = H^1(\Omega), \tag{3.46}$$

является линейным ограниченным оператором, действующим из $H^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Оно основано на элементарном неравенстве

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial x_k} \right\|^2_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial x_k} \right|^2 d\Omega \leqslant \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \quad \forall\, v \in H^1(\Omega). \tag{3.47}$$

□

В качестве следствия из этой леммы получаем такой вывод: оператор

$$BA^{-1/2} \in \mathcal{L}(L_2(\Omega)), \tag{3.48}$$

так как $A^{-1/2} \in \mathcal{L}(L_2(\Omega); H^1(\Omega))$. Отсюда, в свою очередь, приходим к выводу, что $A^{-1/2}(BA^{-1/2})$ является компактным оператором, действующим в $L_2(\Omega)$.

Рассмотрим теперь свойства второго оператора из (3.45), т. е. оператора $(A^{1/2}V)\sigma(\gamma A^{-1/2})$. Прежде всего заметим, что

$$\sigma = \sigma(x) := \sum_{k=1}^{m} c_k \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_k}), \quad x \in \Gamma \tag{3.49}$$

— это непрерывная вещественнозначная функция, заданная на гладкой (даже дважды непрерывно дифференцируемой) поверхности Γ. Далее, легко убедиться, что операторы

$$\gamma A^{-1/2} : L_2(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Gamma), \quad A^{1/2}V : L_2(\Gamma) \to L_2(\Omega) \tag{3.50}$$

взаимно сопряжены и компактны. В самом деле, для слабого решения задачи (3.41) имеем тождество

$$(w, v_2)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma w, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} \quad \forall\, w \in H^1(\Omega) \quad \forall\, \psi \in H^{-1/2}(\Gamma) \supset L_2(\Gamma), \tag{3.51}$$

откуда имеем при $w = A^{-1/2}\eta$ соотношение

$$\begin{aligned}(A^{-1/2}\eta, V\psi)_{H^1(\Omega)} &= (A^{1/2}(A^{-1/2}\eta), A^{1/2}(V\psi))_{L_2(\Omega)} = (\eta, (A^{1/2}V)\psi)_{L_2(\Omega)} = \\ &= ((\gamma A^{-1/2})\eta, \psi)_{L_2(\Gamma)} \quad \forall\, \eta \in L_2(\Omega)\ \forall\, \psi \in L_2(\Gamma).\end{aligned} \tag{3.52}$$

Из полученных фактов приходим к следующему выводу.

Лемма 3.2. *Оператор*

$$Q_\sigma := (A^{1/2}V)\sigma(\gamma A^{-1/2}) : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega) \tag{3.53}$$

является компактным самосопряженным оператором.

Следствием из лемм 3.1 и 3.2 является такое утверждение: оператор

$$S := A^{-1/2}(BA^{-1/2}) - Q_\sigma \tag{3.54}$$

является компактным оператором, действующим в $L_2(\Omega)$.

Таким образом, связь (3.43)–(3.45) между решениями возмущенной и невозмущенной задач (3.36) и (3.37) дается соотношением

$$A^{-1/2}(I + \varepsilon S)A^{1/2}v_\varepsilon = v_0, \tag{3.55}$$

где S — компактный оператор из (3.54).

В дальнейшем будем считать, что оператор $I + \varepsilon S$ обратим; так будет, по крайней мере, если выполнено условие

$$|\varepsilon| \cdot \|S\| < 1. \tag{3.56}$$

Тогда будем иметь

$$(I + \varepsilon S)^{-1} = I + T(\varepsilon), \quad T(\varepsilon) \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)), \tag{3.57}$$

и потому решение задачи (3.36) дается формулой

$$v_\varepsilon = A^{-1/2}(I + \varepsilon S)^{-1}A^{1/2}v_0 = A_0^{-1/2}(I + \varepsilon S)^{-1}A^{-1/2}f. \tag{3.58}$$

При $\varepsilon = 0$ из (3.58) получаем, очевидно, $v_\varepsilon = v_0 = A^{-1}f$.

Вернемся теперь на основе связи (3.58) к рассмотрению исходной спектральной задачи (3.28). Сравнивая ее с (3.36), видим, что ее решение $v = v_\varepsilon$ можно получить по формуле (3.58) при $f = \lambda v_\varepsilon$. Отсюда приходим к уравнению

$$v_\varepsilon = \lambda A^{-1/2}(I + \varepsilon S)^{-1}A^{-1/2}v_\varepsilon. \tag{3.59}$$

Снова осуществляя замену (3.44), получаем спектральную задачу

$$(I + \varepsilon S)^{-1}A^{-1}\eta_\varepsilon = \mu\eta_\varepsilon, \quad \mu = \lambda^{-1}, \quad \eta_\varepsilon = A^{1/2}v_\varepsilon, \tag{3.60}$$

$$(I + \varepsilon S)^{-1} = I + T(\varepsilon), \quad T(\varepsilon) \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)), \tag{3.61}$$

которая имеет в точности такой же вид, как задача (3.15), возникшая в задаче Дирихле (3.1). Более того, оператор A в (3.60) и оператор A_0 в (3.15) имеют идентичные свойства в пространствах $H^1(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$ соответственно и одинаковую асимптотику собственных значений (см. (3.6), (3.7) и (3.35)). Поэтому для задачи (3.60), (3.61) имеют место те же общие выводы, которые были установлены в пункте 3.1 для решений спектральной задачи (3.1). Отличием в задаче (3.59) является лишь то обстоятельство, что оператор S не является кососамосопряженным, а лишь компактным оператором, действующим в $L_2(\Omega)$ (см. (3.54) и леммы 3.1 и 3.2).

Теорема 3.3. *Задача* (3.28) *имеет дискретный спектр, состоящий из конечнократных собственных значений* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *с предельной точкой* $\lambda = \infty$. *При любом* $\delta > 0$ *все собственные значения этой задачи, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе* $|\arg \lambda| < \delta$. *Система корневых элементов задачи* (3.28) *полна в энергетическом пространстве* $\mathcal{H}_A = H^1(\Omega)$ *оператора* A. *Собственные значения* λ_k *имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_k = \lambda_k(A)[1 + o(1)] = d_m k^{2/m}[1 + o(1)] \quad (k \to \infty).$$

Корневые элементы задачи (3.28) *образуют в пространстве* $H^1(\Omega)$ *также базис Абеля—Лидского порядка* $\alpha > m/2$.

Уточним теперь расположение спектра задачи (3.28).

Теорема 3.4. *Пусть в задаче* (3.28) *выполнено условие*

$$c_\varepsilon := 1 - |\varepsilon| \left(\|BA^{-1/2}\| \cdot \|A^{-1/2}\| + \|Q_\sigma\| \right) > 0, \tag{3.62}$$

где оператор $BA^{-1/2}$*введен в* (3.46), (3.48), *а* Q_σ — *в* (3.53). *Тогда спектр этой задачи расположен в правой полуплоскости в параболической области*

$$\Lambda_\varepsilon := \left\{ \operatorname{Re} \lambda \geqslant c_\varepsilon \lambda_1(A) : \ |\operatorname{Im} \lambda| \leqslant \left(\varepsilon \|BA^{-1/2}\| \cdot c_\varepsilon^{-1/2} \right) (\operatorname{Re} \lambda)^{1/2} \right\}. \tag{3.63}$$

Доказательство. Перепишем уравнение (3.60) при $\eta_\varepsilon = \eta$ в виде

$$\lambda A^{-1}\eta = (I + \varepsilon S)\eta = \left[I + \varepsilon(A^{-1/2}(BA^{-1/2}) - Q_\sigma) \right] \eta. \tag{3.64}$$

Отсюда получаем соотношение

$$\begin{aligned} (\operatorname{Re} \lambda + i \operatorname{Im} \lambda)\|A^{-1/2}\eta\|^2_{L_2(\Omega)} = \|\eta\|^2_{L_2(\Omega)} + \\ +\varepsilon \left[((BA^{-1/2})\eta, A^{-1/2}\eta)_{L_2(\Omega)} - (Q_\sigma \eta, \eta)_{L_2(\Omega)} \right]. \end{aligned} \tag{3.65}$$

Вычисляя вещественную и мнимую части, будем иметь (с учетом свойства $Q_\sigma^* = Q_\sigma$)

$$\operatorname{Re} \lambda \, \|A^{-1/2}\eta\|^2_{L_2(\Omega)} = \|\eta\|^2_{L_2(\Omega)} + \varepsilon \ \left[\operatorname{Re} ((BA^{-1/2})\eta, A^{-1/2}\eta)_{L_2(\Omega)} - (Q_\sigma \eta, \eta)_{L_2(\Omega)} \right],$$

$$\operatorname{Im} \lambda \, \|A^{-1/2}\eta\|^2_{L_2(\Omega)} = \varepsilon \operatorname{Im} \left((BA^{-1/2})\eta, A^{-1/2}\eta \right)_{L_2(\Omega)}.$$

Из первого равенства получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda \, \|A^{-1/2}\eta\|^2_{L_2(\Omega)} \geqslant \Big[1 - |\varepsilon| \Big(\|BA^{-1/2}\| \cdot \|A^{-1/2}\| + \\ + \|Q_\sigma\| \Big)\Big] \, \|\eta\|^2_{L_2(\Omega)} =: c_\varepsilon \|\eta\|^2_{L_2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.66}$$

откуда следует, что $\operatorname{Re} \lambda \geqslant c_\varepsilon \lambda_1(A) > 0$ и

$$\frac{\|\eta\|_{L_2(\Omega)}}{\|A^{-1/2}\eta\|_{L_2(\Omega)}} \leqslant \left(\operatorname{Re} \lambda/c_\varepsilon \right)^{1/2}. \tag{3.67}$$

Из второго равенства с учетом (3.67) имеем

$$|\operatorname{Im} \lambda| \leqslant |\varepsilon| \cdot \|BA^{-1/2}\| \cdot \|\eta\|_{L_2(\Omega)} \, / \, \|A^{-1/2}\eta\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\varepsilon| \cdot \|BA^{-1/2}\| \cdot (\operatorname{Re} \lambda/c_\varepsilon)^{1/2},$$

т. е. все собственные значения λ задачи (3.28) расположены в параболической области (3.63). □

3.3. Спектральная задача Стеклова. Так называют спектральную задачу (возмущенная задача)

$$L_\varepsilon w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_\varepsilon w = \lambda\, \gamma w \quad (\text{на } \Gamma), \tag{3.68}$$

в которой спектральный параметр λ не входит в уравнение, но входит в краевое условие.

Как и в пункте 3.2, рассмотрим наряду с (3.68) невозмущенную спектральную задачу

$$L_0 w := w - \Delta w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_0 w := \frac{\partial w}{\partial n} = \lambda\, \gamma w \quad (\text{на } \Gamma). \tag{3.69}$$

Эту задачу можно трактовать как невозмущенную вторую краевую задачу Неймана—Ньютона, т. е. в рассуждениях пункта 2.3, случай 2°, считать, что $\varepsilon = 0$, $\psi = \lambda\gamma w$ (см. (2.20)) Тогда согласно теореме 2.2 получаем, что ее решение дается формулой (2.23):

$$w = w_0 = V\psi = \lambda\, V\gamma w_0, \quad V \in \mathcal{L}\,(H^{-1/2}(\Gamma); H_h^1(\Omega)), \tag{3.70}$$

$$H_h^1(\Omega) = \Big\{\; w \in H^1(\Omega):\; L_0 w = 0 \;\Big\}.$$

Осуществим в (3.70) замену вида (3.44):

$$w_0 = A^{-1/2}\eta_0, \quad \eta_0 \in L_2(\Omega) \tag{3.71}$$

и подействуем слева оператором $A^{1/2}$. Тогда приходим к спектральной задаче вида

$$\eta = \lambda C\eta, \quad C := (A^{1/2}V)(\gamma A^{-1/2}) = C^* \geqslant 0, \tag{3.72}$$

$$C \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)).$$

В самом деле, согласно формулам (3.50)–(3.52) получаем, что $A^{1/2}V$ и $\gamma A^{-1/2}$ взаимно сопряжены и компактны.

Отсюда приходим к следующим выводам

1°. Задача (3.72), а вместе с ней и исходная невозмущенная задача (3.69) имеют дискретный положительный спектр $\{\lambda_k^{-1}(C)\}_{k=1}^\infty$, состоящий из конечнократных собственных значений с предельной точкой $\lambda = +\infty$.

2°. Собственные элементы $\{\eta_k\}_{k=1}^\infty$ образуют ортогональный базис в подпространстве

$$L_{2,h}(\Omega) := \Big\{\; \eta \in L_2(\Omega):\; \eta = A^{1/2}w,\; w \in H_h^1(\Omega) \;\Big\}, \tag{3.73}$$

ортогональном подпространству

$$L_{2,0}(\Omega) := \Big\{\; \xi \in L_2(\Omega):\; \xi = A^{1/2}v,\; v \in H_0^1(\Omega) \;\Big\} = \ker \mathrm{C}. \tag{3.74}$$

3°. Собственные значения $\lambda_k^{-1}(C)$ суть последовательные минимумы вариационного отношения

$$\frac{\|\eta\|^2_{L_2(\Omega)}}{(C\eta, \eta)_{L_2(\Omega)}} = \frac{\|w\|^2_{H^1(\Omega)}}{\|\gamma w\|^2_{L_2(\Gamma)}}, \quad w \in H_h^1(\Omega). \tag{3.75}$$

4°. Асимптотическое поведение собственных значений $\lambda_k(C)$ таково:

$$\begin{gathered} \lambda_k(C) = \tilde{d}_m k^{-1/(m-1)}[1 + o(1)] \quad k \to \infty, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^m, \\ \lambda_k(C) = \Big(\; \frac{|\Gamma|}{12\pi} \;\Big)^{1/2} k^{-1/2}[1 + o(1)], \quad k \to \infty, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^3. \end{gathered} \tag{3.76}$$

Заметим, что асимптотические формулы (3.76) следуют из результатов работы [7].

Опираясь на установленные факты, рассмотрим теперь свойства решений возмущенной спектральной задачи Стеклова (3.68). Предварительно установим, как и в пункте 3.2, связь решений соответствующих возмущенной и невозмущенной краевых задач:

$$L_\varepsilon w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_\varepsilon w = \psi \quad (\text{на } \Gamma), \tag{3.77}$$

$$L_0 w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_0 w = \psi \quad (\text{на } \Gamma). \tag{3.78}$$

Решение задачи (3.78), как упомянуто выше, имеет вид (3.70). Переходя теперь к задаче (3.77), перепишем ее в виде

$$L_0 w = -\varepsilon B w \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_0 w = \varepsilon\sigma\gamma w + \psi. \tag{3.79}$$

Тогда, используя снова формулу (2.32) при $\varepsilon = 0$, будем иметь

$$w = A_0^{-1}(-\varepsilon Bw) + V(\varepsilon\sigma\gamma w + \psi), \tag{3.80}$$

откуда получаем уравнение для $w = w_\varepsilon$:

$$\Big[\, I + \varepsilon(A^{-1}B - V\sigma\gamma) \,\Big]\, w_\varepsilon = V\psi = w_0. \tag{3.81}$$

Осуществляя здесь замену

$$w_\varepsilon = A^{-1/2}\eta_\varepsilon, \quad \eta_\varepsilon \in L_2(\Omega), \tag{3.82}$$

и действуя слева оператором $A^{1/2}$ (это можно сделать), приходим, как и в пункте 3.2, к связи вида

$$(I + \varepsilon S)\eta_\varepsilon = (A^{1/2}V)\psi = A^{1/2}w_0 =: \eta_0, \tag{3.83}$$

где S — компактный оператор, введенный в (3.54). Будем далее предполагать, что выполнено условие (3.56). Тогда получаем связь (с учетом (3.81)) между решениями возмущенной и невозмущенной задач (3.68), (3.69):

$$w_\varepsilon = A^{-1/2}(I + \varepsilon S)^{-1}A^{1/2}w_0 = A^{-1/2}(I + \varepsilon S)^{-1}(A^{1/2}V)\psi. \tag{3.84}$$

Она имеет такой же вид, как и в пункте 3.2 (см. (3.58)). (При $\varepsilon = 0$ получаем из (3.84) $w_\varepsilon = w_0$, как и должно быть.)

Опираясь на представление (3.84), вернемся к спектральной возмущенной задаче (3.68). Из (3.77) и (3.68) видно, что в (3.84) следует взять $\psi = \lambda\gamma w_\varepsilon$. Тогда будем иметь спектральную задачу

$$w_\varepsilon = \lambda A^{-1/2}(I + \varepsilon S)^{-1}(A^{1/2}V)\gamma w_\varepsilon, \tag{3.85}$$

которая при замене (3.82) переходит в задачу на собственные значения

$$(I + \varepsilon S)\eta_\varepsilon = \lambda C\eta_\varepsilon, \tag{3.86}$$

являющуюся возмущением самосопряженной спектральной задачи (3.72). Свойства оператора C и свойства решений задачи (3.72) описаны выше (см. 1°–4°).

Очевидно, задача (3.86) равносильна задаче

$$(I + \varepsilon S)^{-1}C\eta = \mu\eta, \quad \mu = \lambda^{-1}, \quad \eta = \eta_\varepsilon \in L_2(\Omega), \tag{3.87}$$

т. е. задаче на собственные значения слабо возмущенного компактного неотрицательного оператора. Поэтому к задаче (3.87), как и выше, можно применить теоремы М. В. Келдыша. Некоторым затруднением, однако, здесь является то обстоятельство, что оператор C в (3.87) и (3.86) не является полным: он имеет нетривиальное и притом бесконечномерное ядро (см. (3.73), (3.74)).

Опираясь на ортогональное разложение

$$L_2(\Omega) = L_{2,0}(\Omega) \oplus L_{2,h}(\Omega) \tag{3.88}$$

(см. (3.73), (3.74)) и вводя ортопроекторы P_0 и P_h на эти подпространства, представим искомый элемент $\eta_\varepsilon = \eta$ в виде

$$\eta = P_0\eta + P_h\eta =: \eta_0 + \eta_h. \tag{3.89}$$

Подставим это разложение в (3.86) и подействуем на обе части этого уравнения операторами P_0 и P_h. Учитывая еще, что $L_{2,0}(\Omega) = \ker \mathrm{C}$, будем иметь

$$\eta_0 + \varepsilon P_0SP_0\eta_0 + \varepsilon P_0SP_h\eta_h = 0, \tag{3.90}$$

$$\eta_h + \varepsilon P_hSP_0\eta_0 + \varepsilon P_hSP_h\eta_h = \lambda(P_hCP_h)\eta_h. \tag{3.91}$$

Здесь для простоты записи символом P_hSP_0 обозначено сужение оператора P_hS на подпространство $L_{2,0}(\Omega)$ (с областью значений $L_{2,h}(\Omega)$); другие такие же символы понимаются аналогично.

В уравнении (3.90) оператор $I_0 + \varepsilon P_0SP_0$ ограниченно обратим в силу условия (3.56). Тогда, находя η_0 из (3.90) и подставляя его в (3.91), получим уравнение для $\eta_h = P_h\eta$:

$$(I_h + T_h(\varepsilon))\eta_h = \lambda C_h\eta_h, \quad C_h := P_hCP_h = C_h^* > 0 \quad (\text{в } L_{2,h}(\Omega)), \tag{3.92}$$

$$T_h(\varepsilon) := \varepsilon P_hSP_h - \varepsilon^2(P_hSP_0)(I_0 + \varepsilon P_0SP_0)^{-1}(P_0SP_h) \in \mathfrak{S}_\infty(L_{2,h}(\Omega)). \tag{3.93}$$

Убедимся, что в уравнении (3.92) оператор $I_h + T_h(\varepsilon)$ ограниченно обратим. В самом деле, для доказательства этого факта достаточно проверить, что $\ker\,(I_h + T_h(\varepsilon)) = \{0\}$, т.е уравнение $(I_h + T_h(\varepsilon))\eta_h = 0$ имеет лишь тривиальное решение. Однако из этого уравнения путем обратных замен приходим к системе уравнений (3.90), (3.91) с правыми частями, равными нулю, т. е. к соотношению $(I+\varepsilon S)\eta=0$. Поскольку $I+\varepsilon S$ обратим, то $\eta=0$, а потому и $\eta_h=P_h\eta=0$.

Отсюда следует, что задача (3.92), (3.93) равносильна спектральной задаче

$$(I_h+T_h(\varepsilon))^{-1}C_h\eta_h=\mu\eta_h,\quad \eta_h\in L_{2,h}(\Omega),\quad \mu=\lambda^{-1},\tag{3.94}$$

т. е. задаче на собственные значения слабо возмущенного самосопряженного полного положительного компактного оператора. Заметим еще, что в силу (3.76) имеем асимптотическую формулу

$$\lambda_k(C_h)=\lambda_k(C)=\tilde{d_m}k^{-1/(m-1)}[1+o(1)]\quad (k\to\infty),\ \Omega\in\mathbb{R}^m,\tag{3.95}$$

для ненулевых собственных значений оператора C, т. е. для собственных значений $\lambda_k(C_h)$ оператора $C_h: L_{2,h}(\Omega)\to L_{2,h}(\Omega)$. Поэтому

$$C_h\in\mathfrak{S}_p(L_{2,h}(\Omega)),\quad p>m-1.\tag{3.96}$$

Следствием установленных фактов является такой результат.

Теорема 3.5. *Спектральная задача Стеклова* (3.68) *имеет дискретный спектр* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, *расположенный в правой полуплоскости и состоящий из конечнократных собственных значений* λ_k *с предельной точкой* $\lambda=\infty$. *При любом* $\delta>0$ *все собственные значения* λ_k, *кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе* $|\arg\lambda|<\delta$. *Система корневых* (*собственных и присоединенных*) *элементов* $\{\eta_{\varepsilon,k}\}_{k=1}^{\infty}$ *задачи* (3.86) *после проектирования на подпространство* $L_{2,h}(\Omega)$, *т. е. система* $\{\eta_{\varepsilon,h,k}\}_{k=1}^{\infty}$ *корневых элементов задачи* (3.92), *является полной в* $L_{2,h}(\Omega)$. *Поэтому система корневых элементов* $\{w_{\varepsilon,h,k}\}_{k=1}^{\infty}$, $w_{\varepsilon,h,k}=A^{-1/2}\eta_{\varepsilon,h,k}$, *полна в* $H_h^1(\Omega)$. *Собственные значения* λ_k *задачи* (3.68) *имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_k=\lambda_k^{-1}(C_h)[1+o(1)]=\tilde{d_m}^{-1}k^{1/(m-1)}[1+o(1)]\quad (k\to\infty),\ \Omega\in\mathbb{R}^m.\tag{3.97}$$

Кроме полноты, система корневых элементов $\{w_{\varepsilon,h,k}\}_{k=1}^{\infty}$, *отвечающая собственным значениям* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, *образует базис Абеля—Лидского порядка* $\alpha>m-1$ *в пространстве* $H_h^1(\Omega)$.

Доказательство. Оно проводится точно так же, как и в теоремах 3.2 и 3.3. Проверим лишь, что все собственные значения λ задачи (3.68) расположены в открытой правой полуплоскости.

В самом деле, для решений задачи (3.86) при $\eta_\varepsilon=\eta$ имеем соотношение

$$(\mathrm{Re}\,\lambda)(C\eta,\eta)_{L_2(\Omega)}=\mathrm{Re}\,((I+\varepsilon S)\eta,\eta)_{L_2(\Omega)}\geqslant(1-|\varepsilon|\|S\|)\|\eta\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Поэтому

$$\mathrm{Re}\,\lambda\geqslant(1-|\varepsilon|\|S\|)\cdot\frac{\|\eta\|^2_{L_2(\Omega)}}{(C\eta,\eta)_{L_2(\Omega)}}\geqslant(1-|\varepsilon|\|S\|)\cdot\lambda_1^{-1}(C)>0,\tag{3.98}$$

так как $1-|\varepsilon|\|S\|>0$ (см. (3.56)). □

3.4. Спектральная задача Стефана. Рассмотрим теперь возмущенную спектральную задачу в случае, когда спектральный параметр входит линейным образом и в уравнение, и в краевое условие:

$$L_\varepsilon u=\lambda u\quad (\text{в }\Omega),\quad \partial_\varepsilon u=\lambda\,\gamma u\quad (\text{на }\Gamma).\tag{3.99}$$

Эту задачу называют возмущенной спектральной задачей Стефана.

Как и ранее, наряду с (3.99) рассмотрим сначала невозмущенную спектральную задачу Стефана:

$$L_0u:=u-\Delta u=\lambda u\quad (\text{в }\Omega),\quad \partial_0u:=\frac{\partial u}{\partial n}=\lambda\,\gamma u\quad (\text{на }\Gamma).\tag{3.100}$$

Эта задача равносильна уравнению, которое получается из общей формулы (2.32) при $\varepsilon=0$ и $f=\lambda u$, $\psi=\lambda\,\gamma u$:

$$u=A^{-1}(\lambda u)+V(\lambda\,\gamma u),\quad u\in H^1(\Omega).\tag{3.101}$$

После замены вида (3.82), т. е. $u=A^{-1/2}\eta$, $\eta\in L_2(\Omega)$, приходим к невозмущенной спектральной задаче

$$\eta=\lambda(A^{-1}+C)\eta,\quad \eta\in L_2(\Omega),\tag{3.102}$$

где $C=(A^{1/2}V)(\gamma A^{-1/2})=C^*\geqslant 0$ — оператор, свойства которого были описаны в пункте 3.3.

Так как $A^{-1}>0$ и компактен в $L_2(\Omega)$, то оператор $A^{-1}+C$ положителен и компактен в этом пространстве. Отсюда приходим к следующим выводам.

1°. Задача (3.102), а вместе с ней и исходная невозмущенная задача Стефана (3.100) имеют дискретный положительный спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, $\lambda_k = \lambda_k^{-1}(A^{-1}+C)$, с предельной точкой $\lambda = +\infty$.

2°. Собственные элементы $\{\eta_k\}_{k=1}^\infty$ задачи (3.102) образуют ортогональный базис в пространстве $L_2(\Omega)$ и базис по форме $((A^{-1}+C)\eta,\eta)_{L_2(\Omega)}$. Поэтому собственные элементы $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ задачи (3.100) образуют ортогональный базис в $H^1(\Omega)$ и по квадратичной форме $\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\gamma u\|^2_{L_2(\Gamma)}$:

$$(u_k,u_l)_{L_2(\Omega)} + (\gamma u_k, \gamma u_l)_{L_2(\Gamma)} = \delta_{k,l}, \quad (u_k,u_l)_{H^1(\Omega)} = \lambda_k\delta_{k,l}. \tag{3.103}$$

3°. Собственные значения λ_k задачи (3.102) и (3.100) суть последовательные минимумы вариационного отношения

$$\frac{\|\ \eta\ \|^2_{L_2(\Omega)}}{\|\ A^{-1/2}\eta\ \|^2_{L_2(\Omega)} + \|\ \gamma A^{-1/2}\eta\ \|^2_{L_2(\Gamma)}} = \frac{\|\ u\ \|^2_{H^1(\Omega)}}{\|\ u\ \|^2_{L_2(\Omega)} + \|\ \gamma u\ \|^2_{L_2(\Gamma)}}, \quad A^{-1/2}\eta = u \in H^1(\Omega). \tag{3.104}$$

4°. Собственные значения λ_k имеют асимптотическое поведение

$$\lambda_k = \lambda_k^{-1}(C)[1+o(1)] = \tilde{d_m}^{-1} k^{1/(m-1)}[1+o(1)] \quad (k\to\infty),\ \Omega\in\mathbb{R}^m,\ m\geqslant 3, \tag{3.105}$$

где d_m — константы из (3.76).

Нетрудно установить свойства 1°–3°, здесь поясним лишь вывод асимптотической формулы (3.105). Из асимптотических формул (3.35) для $\lambda_k(A)$ и (3.76) для $\lambda_k(C)$ получаем, что

$$\lambda_k(A^{-1}) \sim d_m^{-1}k^{-2/m}, \quad \lambda_k(C) \sim \tilde{d_m}k^{-1/(m-1)}, k\to\infty. \tag{3.106}$$

Так как $m-1 \geqslant m/2$ при $m\geqslant 3$, то согласно лемме Фань Цюй (см. [9, с. 52]) отсюда следует, что

$$\lambda_k(A^{-1}+C) \sim \tilde{d_m}k^{-1/(m-1)}, k\to\infty, \quad m\geqslant 3,$$

т. е. асимптотическое поведение собственных значений $\lambda_k(A^{-1}+C)$ такое же, как и собственных значений $\lambda_k(C)$, и потому имеет место формула (3.105).

На основе установленных фактов перейдем к рассмотрению возмущенной задачи Стефана. Снова пользуясь общей формулой (2.32) уже при $\varepsilon\neq 0$, $f=\lambda u$, $\psi = \lambda\gamma u$, будем иметь

$$u = A_\varepsilon^{-1}(\lambda u) + V_\varepsilon(\lambda\,\gamma u), \quad u\in H^1(\Omega). \tag{3.107}$$

Используя еще связь (3.58) между A_ε и A, а также (3.84) для V_ε и V, получим соотношение

$$u = A^{-1/2}(I+\varepsilon S)^{-1}A^{1/2}(\lambda u) + A^{-1/2}(I+\varepsilon S)^{-1}(A^{1/2}V)(\lambda\,\gamma u), \tag{3.108}$$

которое после замены $u = A^{-1/2}\eta$, $\eta\in L_2(\Omega)$, приводит к спектральной задаче

$$(I+\varepsilon S)\eta = \lambda(A^{-1}+C)\eta, \quad \eta\in L_2(\Omega), \tag{3.109}$$

равносильной исходной возмущенной спектральной задаче (3.99).

Эта задача, в свою очередь, равносильна задаче

$$(I+\varepsilon S)^{-1}(A^{-1}+C)\eta = \mu\eta, \quad \mu = \lambda^{-1}. \tag{3.110}$$

Таким образом, задача Стефана (3.99) так же, как и задача Стеклова (3.68) (см., в частности, (3.87)), приведена к задаче на собственные значения слабо возмущенного компактного положительного оператора. Так как $A^{-1}+C>0$, то эта задача проще задачи (3.87), поскольку в (3.110) оператор $A^{-1}+C$ полный, т. е. имеет тривиальное ядро, и потому здесь не требуется, как это было для задачи Стеклова, проводить дополнительное проектирование на ядро основного оператора задачи.

Теорема 3.6. *Спектральная задача Стефана* (3.99) *имеет дискретный спектр* $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, *состоящий из конечнократных собственных значений с предельной точкой* $\lambda=\infty$. *При любом* $\delta>0$ *все собственные значения этой задачи, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе* $|\arg\lambda|<\delta$. *Система корневых элементов задачи* (3.99) *полна в* $H^1(\Omega)$, *а также по форме* $\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\gamma u\|^2_{L_2(\Gamma)}$. *Собственные значения* λ_k *имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_k = \lambda_k^{-1}(A^{-1}+C)[1+o(1)] = d_m^{-1}k^{1/(m-1)}[1+o(1)] \quad (k\to\infty),\ \Omega\in\mathbb{R}^m. \tag{3.111}$$

Теорема 3.7. *Корневые элементы задачи* (3.99) *образуют базис Абеля—Лидского порядка* $\alpha > m-1$ *в пространстве* $H^1(\Omega)$. *Если выполнено условие* (3.62), *т. е.*

$$c_\varepsilon := 1 - |\varepsilon| \Big(\|BA^{-1/2}\| \cdot \|A^{-1/2}\| + \|Q_\sigma\| \Big) > 0, \tag{3.112}$$

то спектр задачи (3.99) *расположен в правой полуплоскости, в параболической области*

$$\Lambda_\varepsilon := \Big\{ \operatorname{Re}\lambda \geqslant c_\varepsilon \lambda_1^{-1}(A^{-1}+C) : \ |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant (|\varepsilon| \|BA^{-1/2}\|)(\operatorname{Re}\lambda/c_\varepsilon)^{1/2} \Big\}. \tag{3.113}$$

Доказательство. Свойство базисности по Абелю—Лидскому следует из асимптотической формулы (3.105) и соответствующего утверждения из [38, с. 292]. Локализация спектра в комплексной плоскости доказывается так же, как аналогичное утверждение в теореме 3.4.

Именно, из уравнения (3.109) имеем соотношения

$$\operatorname{Re}\lambda((A^{-1}+C)\eta,\eta)_{L_2(\Omega)} \geqslant \Big[1 - |\varepsilon| \|BA^{-1/2}\| \cdot \|A^{-1/2}\| - $$

$$- |\varepsilon| \cdot \|Q_\sigma\| \Big] \cdot \|\eta\|^2_{L_2(\Omega)} =: c_\varepsilon \|\eta\|^2_{L_2(\Omega)},$$

$$|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant |\varepsilon| \|BA^{-1/2}\| \cdot \|A^{-1/2}\eta\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|\eta\|_{L_2(\Omega)} / \Big(\|A^{-1/2}\eta\|^2_{L_2(\Omega)} + \|C^{1/2}\eta\|^2_{L_2(\Omega)} \Big) \leqslant$$

$$\leqslant |\varepsilon| \|BA^{-1/2}\| \cdot \|\eta\|_{L_2(\Omega)} / \Big(\|A^{-1/2}\|^2_{L_2(\Omega)} + \|C^{1/2}\eta\|^2_{L_2(\Omega)} \Big)^{1/2}.$$

Из первого соотношения имеем неравенства

$$\operatorname{Re}\lambda \geqslant c_\varepsilon \|\eta\|^2_{L_2(\Omega)} / \Big(\|A^{-1/2}\eta\|^2_{L_2(\Omega)} + \|C^{1/2}\eta\|^2_{L_2(\Omega)} \Big) \geqslant c_\varepsilon \lambda_1^{-1}(A^{-1}+C),$$

а отсюда и из второго неравенства получаем, что

$$|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant |\varepsilon| \|BA^{-1/2}\| \cdot (\operatorname{Re}\lambda / c_\varepsilon)^{1/2},$$

т. е. спектр задачи (3.99) расположен в области Λ_ε из (3.113). □

3.5. Другие классы возмущенных спектральных задач. Опираясь на построения, проведенные в пункте 3.4, рассмотрим еще три класса возмущенных спектральных задач, встречающихся в приложениях.

1°. *Спектральная задача С. Крейна.* Она возникла при исследовании нормальных (собственных) колебаний тяжелой вязкой жидкости в открытом сосуде и состоит в нахождении нетривиальных решений следующей задачи:

$$L_\varepsilon u = \lambda u \quad (\text{в } \Omega), \quad \lambda\, \partial_\varepsilon u = \gamma u \quad (\text{на } \Gamma). \tag{3.114}$$

Здесь спектральный параметр λ линейно входит в уравнение и краевое условие, причем в краевом условии он стоит при $\partial_\varepsilon u$.

Заметим сначала, что при $\lambda = 0$ задача (3.114) имеет лишь тривиальное решение. В самом деле, из формулы Грина (2.5) при $\eta = u$ получаем, что при $L_\varepsilon u = 0$ и $\gamma u = 0$ будет

$$0 = \Phi_\varepsilon(u,u) \geqslant c_2 \|u\|^2_{H^1(\Omega)}, \quad c_2 > 0, \quad u \in H^1(\Omega), \tag{3.115}$$

и потому $u = 0$. Отметим теперь, что от спектральной задачи Стефана (3.99) задача С. Крейна (3.114) отличается лишь тем, что в граничном условии на Γ вместо λ (в задаче Стефана) следует писать λ^{-1} (в задаче С. Крейна).

Учитывая этот факт и повторяя все выкладки, которые были проведены в пункте 3.4 для задачи Стефана, приходим к выводу, что задача С. Крейна равносильна уравнению (3.109) с заменой λ на λ^{-1} во втором слагаемом справа. Это дает спектральную задачу

$$(I + \varepsilon S)\eta = \lambda A^{-1}\eta + \lambda^{-1} C\eta, \quad \eta \in L_2(\Omega), \tag{3.116}$$

равносильную возмущенной задаче С. Крейна (3.114).

Задачи вида (3.116) достаточно подробно исследованы (см. [19, 24, 26]). Поэтому сейчас приведем лишь основной результат, относящийся к случаю, когда операторный пучок

$$L(\lambda) := I - \lambda(I+\varepsilon S)^{-1}A^{-1} - \lambda^{-1}(I+\varepsilon S)^{-1}C, \tag{3.117}$$

отвечающий задаче (3.116), допускает спектральную факторизацию. Достаточным условием для этого является условие

$$4\|(I+\varepsilon S)^{-1}\|^2 \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|C\| < 1. \tag{3.118}$$

Подробная процедура исследования описана, например, в [13, с. 82–86]. Именно, при выполнении условия (3.118) имеет место факторизация

$$\begin{aligned} M(\lambda) &:= \lambda L(\lambda) = \lambda I - (I+\varepsilon S)^{-1}C - \lambda^2 (I+\varepsilon S)^{-1}A^{-1} = \\ &= Y^{-1}(I - \lambda Y(I+\varepsilon S)^{-1}A^{-1})(\lambda I - Y(I+\varepsilon S)^{-1}C), \end{aligned} \tag{3.119}$$

где оператор Y обратим и является решением уравнения

$$Y = I + (I+\varepsilon S)^{-1}A^{-1}Y(I+\varepsilon S)^{-1}CY. \tag{3.120}$$

При этом оператор-функция $I - \lambda Y(I+\varepsilon S)^{-1}A^{-1}$ обратима при

$$|\lambda| < r_+, \quad r_\pm := \frac{(1 \pm \sqrt{1 - 4\|(I+\varepsilon S)^{-1}\|^2 \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|C\|})}{2\|(I+\varepsilon S)^{-1}\| \cdot \|A^{-1}\|}, \quad 0 < r_- < r_+ < \infty, \tag{3.121}$$

а спектр оператора $Z := Y(I+\varepsilon S)^{-1}C$ лежит в круге

$$\sigma(Z) \subset \{\lambda : |\lambda| \leqslant r_-\}. \tag{3.122}$$

Таким образом, при $|\lambda| \leqslant r_-$ задача (3.116) сводится к задаче

$$(I+\Phi)C\eta = \lambda\eta, \quad \eta \in L_2(\Omega), \tag{3.123}$$

$$I + \Phi := (I + (I+\varepsilon S)^{-1}A^{-1}Y(I+\varepsilon S)^{-1}CY)(I+\varepsilon S)^{-1}, \quad \Phi \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)). \tag{3.124}$$

Здесь оператор $I+\Phi$, очевидно, обратим, а оператор $C \geqslant 0$, как и в задаче (3.87), имеет ядро $\ker C = L_{2,0}(\Omega)$, т. е. подпространство из ортогонального разложения (3.88):

$$L_2(\Omega) = L_{2,0} \oplus L_{2,h}(\Omega). \tag{3.125}$$

Вводя, как и в пункте 3.3, ортопроекторы P_0 и P_h на эти подпространства, представляя η в виде (3.89), т. е.

$$\eta = P_0\eta + P_h\eta = \eta_0 + \eta_h,$$

и исключая η_0, приходим к уравнению

$$(I_h + P_h\Phi P_h)C_h\eta_h = \lambda\eta_h, \quad C_h = P_hCP_h. \tag{3.126}$$

Здесь C_h — полный оператор в $L_{2,h}(\Omega)$, он положителен, компактен и имеет степенную асимптотику (3.95). Отсюда, как и в пункте 3.3, получаем результат, аналогичный теореме 3.5.

Теорема 3.8. *В области* $|\lambda| \leqslant r_-$ *задача* (3.126) *имеет дискретный спектр* $\{\lambda_k^0\}_{k=1}^\infty$, *расположенный в правой полуплоскости и состоящий из конечнократных собственных значений* λ_k^0 *с предельной точкой* $\lambda = 0$. *При любом* $\delta > 0$ *все собственные значения* λ_k^0, *кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе* $|\arg\lambda| < \delta$. *Система корневых элементов* $\{\eta_k^0\}_{k=1}^\infty$ *задачи* (3.123) *после проектирования на подпространство* $L_{2,h}(\Omega)$, *т. е. система* $\{\eta_{k,h}^0\}_{k=1}^\infty$, $\eta_{k,h}^0 = P_h\eta_k^0$, *является полной в* $L_{2,h}(\Omega)$. *Поэтому система корневых элементов* $\{u_{k,h}^0\}_{k=1}^\infty$, $u_{k,h}^0 = A^{-1/2}\eta_{k,h}^0$, *полна в* $H_h^1(\Omega)$. *Собственные значения* λ_k^0 *задачи* (3.126), *т. е. собственные значения задачи* (3.116) *при* $|\lambda| \leqslant r_-$, *имеют асимптотическое поведение* (*см.* (3.97))

$$\lambda_k^0 = \lambda_k(C)[1+o(1)] = \tilde{d_m}k^{-1/(m-1)}[1+o(1)] \quad (k \to \infty). \tag{3.127}$$

Кроме полноты, система корневых элементов $\{u_{k,h}^0\}_{k=1}^\infty$, *отвечающая собственным значениям* $\{\lambda_k^0\}_{k=1}^\infty$, *образует базис Абеля—Лидского порядка* $\alpha > m-1$ *в пространстве* $H_h^1(\Omega)$.

Аналогичный подход можно применить при исследовании спектральной задачи в окрестности бесконечно удаленной точки. Именно, в пучке $L(\lambda)$ (см. (3.117)) осуществим замену $\lambda = \mu^{-1}$. Возникает пучок

$$\widetilde{L}(\mu) := I - \mu(I+\varepsilon S)^{-1}C - \mu^{-1}(I+\varepsilon S)^{-1}A^{-1},$$

который при условии (3.118) также допускает факторизацию в виде

$$\mu\widetilde{L}(\mu) = X^{-1}(I - \mu X(I+\varepsilon S)^{-1}C)(\mu I - X(I+\varepsilon S)^{-1}A^{-1}), \tag{3.128}$$

$$X = I + (I+\varepsilon S)^{-1} C X (I+\varepsilon S)^{-1} A^{-1} X, \tag{3.129}$$

причем первая оператор-функция в (3.128) обратима при $|\mu| < \tilde{r}_+ = 1/r_-$, оператор X также обратим, а спектр второй оператор-функции лежит в области $|\mu| \leqslant \tilde{r}_- = 1/r_+$.

Таким образом, возникает спектральная задача

$$\widetilde{Z}\eta := X(I+\varepsilon S)^{-1})A^{-1}\eta = \mu\eta, \quad |\mu| \leqslant \tilde{r}_-. \tag{3.130}$$

Здесь упрощающим обстоятельством является тот факт, что A^{-1} — положительный и притом компактный оператор, и потому $\ker A^{-1} = \{0\}$. Поэтому для задачи (3.130), в отличие от (3.123) не нужно проводить процедуру проектирования на подпространство $L_{2,h}(\Omega)$.

Теорема 3.9. *В области* $|\,\lambda\,| \geqslant r_+$ *задача* (3.116) *имеет дискретный спектр* $\{\lambda_k^\infty\}_{k=1}^\infty$, *расположенный в правой комплексной полуплоскости и состоящий из конечнократных собственных значений* λ_k^∞ *с предельной точкой* $\lambda = \infty$. *При любом* $\delta > 0$ *все собственные значения* λ_k^∞, *кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе* $|\arg\lambda| < \delta$. *Система корневых элементов* $\{\eta_k^\infty\}_{k=1}^\infty$ *задачи* (3.130) *является полной в пространстве* $L_2(\Omega)$. *Поэтому система корневых элементов* $\{u_k^\infty\}_{k=1}^\infty$, $u_k^\infty := A^{-1/2}\eta_k^\infty$, *полна в* $H^1(\Omega)$. *Собственные значения* λ_k^∞ *задачи* (3.114) *при* $|\,\lambda\,| \geqslant r_+$ *имеют асимптотическое поведение* (3.35):

$$\lambda_k^\infty = \lambda_k(A)[1+o(1)] = d_m k^{2/m}[1+o(1)], \quad d_m > 0 \quad (k \to \infty). \tag{3.131}$$

Кроме полноты, система корневых элементов $\{u_k^\infty\}_{k=1}^\infty$, *отвечающая собственным значениям* $\{\lambda_k^\infty\}_{k=1}^\infty$, *образует базис Абеля—Лидского порядка* $\alpha > m/2$ *в пространстве* $H^1(\Omega)$.

Таким образом, спектр задачи (3.114) при условии (3.118) имеет две ветви, он расположен в секторах комплексной плоскости $\mathbb{C}$, описанных в теоремах 3.8 и 3.9, а корневые функции обладают приведенными выше свойствами. Отметим еще, что асимптотические формулы (3.127) и (3.131) сохраняются и в случае, когда условие (3.118) может быть не выполнено (см. [29]).

2°. *Спектральная задача Аграновича.* Эта задача возникла в теории дифракции (см. [38]) и состоит в нахождении нетривиальных решений задачи

$$L_\varepsilon u + \lambda u = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_\varepsilon u = \mu\,\gamma u \quad (\text{на } \Gamma), \tag{3.132}$$

где λ и μ — комплексные параметры. Здесь по отношению к задаче Стефана (3.99) следует сделать замены $\lambda \mapsto -\lambda$ в уравнении и $\lambda \mapsto \mu$ в граничном условии. Поэтому, исходя из уравнения (3.109) и осуществляя указанные замены, приходим к выводу, что задача (3.132) равносильна спектральной задаче

$$(I+\varepsilon S)\eta = -\lambda A^{-1}\eta + \mu C\eta, \quad \eta \in L_2(\Omega). \tag{3.133}$$

Отсюда получаем две разновидности спектральных задач: одна — при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ и спектральном параметре μ, а другая — при фиксированном $\mu \in \mathbb{C}$ и спектральном параметре λ.

Рассмотрим сначала второй вариант, т. е. будем считать, что λ — спектральный параметр, и перепишем уравнение (3.133) в виде

$$(I+\varepsilon S - \mu C)\eta = -\lambda A^{-1}\eta. \tag{3.134}$$

Будем далее полагать, что фиксированный параметр μ не совпадает с теми исключительными значениями μ_j, для которых оператор $I+\varepsilon S-\mu C$ необратим, т. е. задача

$$(I+\varepsilon S)\eta = \mu C\eta \tag{3.135}$$

имеет нетривиальное решение. Отсюда следует (см. пункт 3.3, уравнение (3.86)), что исключительные значения $\{\mu_j\}_{j=1}^\infty$ образуют спектр задачи Стеклова (3.68) и имеют асимптотическое поведение (3.97) (см. теорему 3.5).

Тогда (3.134) можно переписать в виде

$$(I+\varepsilon S-\mu C)^{-1}A^{-1}\eta = (-\lambda^{-1})\eta, \quad \eta \in L_2(\Omega), \tag{3.136}$$

которое с точностью до обозначений совпадает с финальным уравнением (3.60) задачи Неймана—Ньютона (3.28), см. пункт 3.2. Поэтому аналогично утверждениям теоремы 3.3 приходим к следующему выводу.

Теорема 3.10. *Пусть фиксированный параметр* μ *в задаче* (3.134) *не совпадает с какой-либо точкой спектра задачи Стеклова* (3.135). *Тогда задача* (3.134) *имеет дискретный спектр, состоящий из конечнократных собственных значений* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *с предельной точкой* $\lambda = \infty$. *При любом* $\delta > 0$ *все собственные значения этой задачи, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе* $|\pi - \arg\lambda| < \delta$. *Система корневых элементов задачи* (3.132) *полна в пространстве* $H^1(\Omega)$, *а собственные значения имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_k = -\lambda_k(A)[1 + o(1)] = -d_m k^{2/m}[1 + o(1)] \quad (k \to \infty). \tag{3.137}$$

Корневые элементы задачи (3.132) *образуют в пространстве* $H^1(\Omega)$ *также базис Абеля—Лидского порядка* $\alpha > m/2$.

Рассмотрим теперь другой вариант, когда в уравнении (3.133) μ является спектральным, а λ — фиксированным параметром, и перепишем это уравнение в виде

$$(I + \varepsilon S + \lambda A^{-1})\eta = \mu C\eta, \quad \eta \in L_2(\Omega). \tag{3.138}$$

Напомним (см. пункт 3.5), что здесь C — компактный неотрицательный оператор, причем $\ker C = L_{2,0}(\Omega)$.

Уравнение (3.138) является обобщением задачи (3.86), возникшей в задаче Стеклова (пункт 3.3), и рассуждениями, проведенными для задачи Стеклова (теорема 3.5), а также при доказательстве теоремы 3.10, получаем такой вывод.

Теорема 3.11. *Пусть в задаче* (3.138) *фиксированный параметр* λ *не совпадает с какой-либо точкой* $-\lambda_j$, *где* $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ — *спектр задачи Неймана—Ньютона* (*пункт* 3.2, *уравнение* (3.64)). *Тогда задача* (3.138) *имеет дискретный спектр* $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, *состоящий из конечнократных собственных значений с предельной точкой* $\mu = \infty$. *При любом* $\delta > 0$ *все собственные значения этой задачи, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе* $|\arg\mu| < \delta$. *Система корневых элементов задачи* (3.132) *после проектирования на подпространство* $H_h^1(\Omega)$ *полна в* $H_h^1(\Omega)$, *а собственные значения* μ_k *имеют асимптотическое поведение* (*см.* (3.95))

$$\mu_k = \lambda_k^{-1}(C)[1 + o(1)] = \tilde{d}_m^{-1} k^{1/(m-1)}[1 + o(1)], \quad k \to \infty.$$

Кроме того, указанные проекции корневых элементов (3.132) *образуют в подпространстве* $H_h^1(\Omega)$ *базис Абеля—Лидского порядка* $\alpha > m - 1$.

3°. *Спектральная задача Чуешова.* Данная задача возникла при исследовании динамических систем с поверхностной диссипации энергии и восходит к И. Д. Чуешову, который изучал начально-краевые нелинейные задачи (см. [39, 40]).

Соответствующая спектральная задача приводит к задаче

$$L_\varepsilon u + \lambda^2 u = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_\varepsilon u = \lambda\alpha\,\gamma u \quad (\text{на } \Gamma), \tag{3.139}$$

где $\alpha > 0$ — параметр, характеризующий интенсивность поверхностной диссипации энергии. Снова сравнивая уравнения задач (3.139) и (3.99), видим, что в данной задаче следует сделать замены $\lambda \mapsto -\lambda^2$ в уравнении и $\lambda \mapsto \alpha\lambda$ в краевом условии. Отсюда получаем, что задача (3.139) равносильна спектральной задаче

$$(I + \varepsilon S)\eta = -\lambda^2 A^{-1}\eta + \alpha\lambda C\eta, \quad \eta \in L_2(\Omega). \tag{3.140}$$

Эта задача, даже в невозмущенном случае, когда $\varepsilon = 0$, до сих пор недостаточно исследована. В частности, при $\varepsilon = 0$, $\alpha = 0$ задача (3.140) имеет дискретный спектр, расположенный на мнимой оси, при этом собственные значения $\lambda_k^{\pm} = \pm i\lambda_k^{1/2}(A)$ определяются через спектр задачи Неймана. При возрастании параметра α, как показывают конкретные примеры (плоская задача), спектр $\{\lambda_k^{\pm}(\alpha)\}_{k=1}^{\infty}$ сдвигается с мнимой оси в правую полуплоскость и при некотором (или некоторых) критическом значении $\alpha_* > 0$ уходит в бесконечно удаленную точку. При дальнейшем возрастании α спектр $\{\lambda_k^{\pm}(\alpha)\}_{k=1}^{\infty}$ начинает двигаться влево и при $\alpha = +\infty$ снова попадает на мнимую ось, однако теперь в точки $\lambda_k^{\pm}(+\infty) = \pm i\lambda_k^{1/2}(A_0)$, где A_0 — оператор невозмущенной спектральной задачи Дирихле (пункт 3.1).

Вопрос о свойствах спектра и системы корневых элементов задачи (3.140) как в невозмущенном случае, так и в возмущенном ($\varepsilon \neq 0$) до сих пор остается открытым.

4. О начально-краевых задачах, порожденных полуторалинейной формой и порождающих спектральные задачи

Каждая из разобранных выше в разделе 3 спектральных задач порождается начально-краевой задачей, которая получается формальной заменой в спектральных задачах $\lambda \mapsto -d/dt$ и учитывает наличие заданных функций в уравнениях и краевых условиях.

4.1. Возмущенные классические начально-краевые задачи.

1°. *Начально-краевая задача Дирихле.* Она состоит в решении уравнения (см. (3.1))

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L_\varepsilon u = f(t) \quad (\text{в } \Omega), \quad \gamma u = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \quad u(0) = u^0. \tag{4.1}$$

Повторяя преобразования, проделанные в пункте 3.1, приходим к выводу, что задача (4.1) равносильна задаче Коши (см. (3.11))

$$\frac{du}{dt} + (A_0 - i\varepsilon B_0)u = f(t), \quad u(0) = u^0, \tag{4.2}$$

где $u = u(t)$ — искомая функция переменной t со значениями в $L_2(\Omega)$. Свойства оператора $A_0 - i\varepsilon B_0$ описаны в пункте 3.1.

Из этих свойств следует, что оператор B_0 вполне подчинен оператору A_0, уравнение (4.2) как в невозмущенном варианте ($\varepsilon = 0$), так и в возмущенном ($\varepsilon \neq 0$) является абстрактным параболическим уравнением, а полугруппа $\mathcal{U}(t)$, отвечающая ее генератору $-(A_0 - i\varepsilon B_0)$, является аналитической в секторе, содержащем положительную полуось. Отсюда получаем следующий результат (см. [25, теоремы 7.2, 6.7]).

Теорема 4.1. *Пусть в задаче* (4.1) *выполнены условия*

$$\left.\begin{aligned} &f(t,x) \in C^\gamma([0,T]; L_2(\Omega)), \quad 0 < \gamma \leqslant 1, \\ &u^0(t,x) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) = \mathcal{D}(A_0), \quad x \in \Omega. \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

Тогда задача (4.2), *а вместе с ней и задача* (4.1) *имеют сильное решение*

$$u(t,x) \in C^1([0,T]; L_2(\Omega)) \cap C([0,T]; \mathcal{D}(A_0)), \tag{4.4}$$

и для этого решения все слагаемые в (4.2) *являются непрерывными функциями* $t \in [0,T]$ *со значениями в* $L_2(\Omega)$.

2°. *Начально-краевая задача Неймана—Ньютона.* Эта задача порождена задачей (3.28) и имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + L_\varepsilon v = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_\varepsilon v = \psi \quad (\text{на } \Gamma), \quad v(0) = v^0. \tag{4.5}$$

Повторяя преобразования из пункта 3.2 и отправляясь от уравнения

$$(I + \varepsilon S)\eta = \lambda A^{-1}\eta, \quad \eta = A^{1/2}v,$$

следующего из (3.60), приходим к выводу, что задача (4.5) равносильна задаче Коши

$$A^{-1}\frac{d\eta}{dt} + (I + \varepsilon S)\eta = A^{-1/2}f + A^{1/2}V\psi, \quad \eta(0) = \eta^0 := A^{1/2}v^0, \tag{4.6}$$

в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$. Определения и свойства операторных коэффициентов из (4.5) описаны в пункте 3.2.

Осуществим в (4.6) замену

$$A^{-1}\eta(t) =: w(t). \tag{4.7}$$

Тогда вместо (4.6) возникает задача Коши

$$\frac{dw}{dt} + (I + \varepsilon S)Aw = A^{-1/2}f(t) + A^{1/2}V\psi(t), \quad w(0) = w^0 = A^{-1/2}v^0. \tag{4.8}$$

Здесь снова в силу компактности S оператор $-(I + \varepsilon S)A$ является генератором аналитической полугруппы и так же, как в предыдущем варианте 1°, приходим к следующему выводу.

Теорема 4.2. *Пусть в задаче Неймана—Ньютона* (4.5) *выполнены условия*

$$\left.\begin{aligned}&v^0(x)\in H^1(\Omega),\ f(t,x)\in C^\gamma([0,T];(H^1(\Omega))^*),\\&\psi(t,x)\in C^\gamma([0,T];H^{-1/2}(\Gamma)),\quad 0<\gamma\leqslant 1.\end{aligned}\right\}\tag{4.9}$$

Тогда задача (4.8) *имеет сильное по переменной t решение $w(t)\in C^1([0,T];L_2(\Omega))\cap C([0,T];\mathcal{D}(A))$. Соответственно исходная задача* (4.5) *имеет сильное по переменной t решение, у которого*

$$v(t,x)\in C([0,T];H^1(\Omega)),\quad \frac{\partial v}{\partial t}\in C([0,T];(H^1(\Omega))^*).\tag{4.10}$$

При этом в уравнении в Ω все слагаемые являются непрерывными функциями переменной $t\in[0,T]$ со значениями в $(H^1(\Omega))^*$, а в граничном условии — со значениями в $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Доказательство. Если выполнены условия (4.9), то, как следует из рассмотрений пункта 2.3, правая часть в (4.8) принадлежит $C^\gamma([0,T];L_2(\Omega))$, а $w^0\in\mathcal{D}(A)$. Поэтому (снова см. [25]) задача Коши (4.8) имеет сильное решение, у которого все слагаемые в уравнении (4.8) принадлежат $C([0,T];L_2(\Omega))$. Отсюда с учетом связей $Aw(t)=\eta(t)=A^{1/2}v(t)$ получаем, что $v(t)\in C([0,T];\mathcal{D}(A^{1/2}))=C([0,T];H^1(\Omega))$. Далее, из свойства $dw/dt\in C([0,T];L_2(\Omega))$ следует, что $dv/dt=A^{1/2}dw/dt\in C([0,T];(H^1(\Omega))^*)$.

Возвращаясь от (4.6) к уравнению для $v(t)=A^{-1/2}\eta(t)$, перепишем его в виде

$$v=A^{-1}(-\varepsilon Bv+f-\frac{dv}{dt})+V(\psi+\varepsilon\sigma\gamma v)=:v_1+v_2,$$

откуда согласно общей формуле (2.32) приходим к выводу, что

$$L_0v_1=-\varepsilon Bv+f-\frac{dv}{dt}\quad(\text{в }\Omega),\quad \partial_0v_1=0\quad(\text{на }\Gamma),$$
$$L_0v_2=0\quad(\text{в }\Omega),\quad \partial_0v_2=\varepsilon\sigma\gamma v+\psi\quad(\text{на }\Gamma).$$

Отсюда следует, что

$$L_0v=L_0v_1+L_0v_2=-\varepsilon Bv+f-\frac{dv}{dt}\quad(\text{в }\Omega),$$
$$\partial_0v=\partial_0v_1+\partial_0v_2=\varepsilon\sigma\gamma v+\psi\quad(\text{на }\Gamma),$$

и потому для $v=v(t)$ выполнены уравнения (4.5). Так как по доказанному $dv/dt\in C([0,T];(H^1(\Omega))^*)$, то в уравнении в Ω из (4.5) все слагаемые из $C([0,T];(H^1(\Omega))^*)$. Далее, из свойства $v(t)\in C([0,T];H^1(\Omega))$ следует, что $\partial_0v\in C([0,T];H^{-1/2}(\Gamma))$, и потому в граничном условии на Γ все слагаемые из $C([0,T];H^{-1/2}(\Gamma))$. □

3°. *Начально-краевая задача Стеклова.* Спектральная задача Стеклова (3.68) порождается начально-краевой задачей вида

$$L_\varepsilon w=0\quad(\text{в }\Omega),\quad \frac{\partial}{\partial t}\gamma w+\partial_\varepsilon w=\psi(t)\quad(\text{на }\Gamma),\quad w(0)=w^0.\tag{4.11}$$

Повторяя теперь преобразования из пункта 3.3, приходим к выводу, что задача (4.11) равносильна задаче Коши

$$C\frac{d\eta}{dt}+(I+\varepsilon S)\eta=A^{1/2}V\psi,\quad \eta(0)=\eta^0:=A^{1/2}w^0\tag{4.12}$$

в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$.

Воспользуемся далее тем фактом, что C — компактный неотрицательный оператор, причем

$$L_2(\Omega)=L_{2,0}(\Omega)\oplus L_{2,h}(\Omega),\quad \ker C=L_{2,0}(\Omega),\tag{4.13}$$

и снова, как и в пункте 3.3, проведем преобразования, связанные с проектированием в (4.12) на подпространства (4.13), считая, что $\eta=\eta_0+\eta_h$. Вводя еще новую искомую функцию

$$v_h(t):=C_h\eta_h(t),\quad C_h=P_hCP_h,\tag{4.14}$$

приходим к задаче Коши в подпространстве $L_{2,h}(\Omega)$ (см. (3.92)):

$$\frac{dv_h}{dt}+(I_h+T_h(\varepsilon)C_h^{-1}v_h=A^{1/2}V\psi(t),\quad v_h(0)=v_h^0=C_hP_hA^{1/2}w^0.\tag{4.15}$$

Здесь $T_h(\varepsilon)$ — компактный оператор, действующий в $L_{2,h}(\Omega)$ (см. (3.93)), причем $I_h + T_h(\varepsilon)$ обратим.

Теорема 4.3. *Пусть в задаче* (4.11) *выполнены условия*

$$\psi(t) \in C^\gamma([0,T]; H^{-1/2}(\Gamma)), \quad 0 < \gamma \leqslant 1, \quad w(0) = w^0 \in H^1(\Omega). \tag{4.16}$$

Тогда задача (4.15) *имеет единственное сильное решение* $v_h(t)$, *для которого все слагаемые в* (4.15) *являются непрерывными функциями* $t \in [0,T]$ *со значениями в* $L_{2,h}(\Omega)$ *и выполнено начальное условие. Далее, при условиях* (4.16) *задача* (4.11) *имеет единственное сильное решение* $w(t) \in C([0,T]; H^1_{h,\varepsilon}(\Omega))$, *для которого выполнено граничное условие на* Γ, *причем в этом условии все слагаемые являются элементами из* $C([0,T]; H^{-1/2}(\Gamma))$.

Доказательство. Уравнение (4.15) является абстрактным параболическим, а оператор $-(I_h + T_h(\varepsilon))C_h^{-1}$ является генератором аналитической полугруппы операторов, действующей в $L_{2,h}(\Omega)$. Кроме того, при условии (4.16) функция $A^{1/2}V\psi(t) \in C^\gamma([0,T]; L_{2,h}(\Omega))$, так как $V \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma); H^1_h(\Omega))$, $A^{1/2} \in \mathcal{L}(H^1_h(\Omega); L_{2,h}(\Omega))$. Наконец, если $w^0 \in H^1(\Omega)$, то $A^{1/2}w^0 \in L_2(\Omega)$, $P_hA^{1/2}w^0 \in L_{2,h}(\Omega)$, $v_h^0 = C_hP_hA^{1/2}w^0 \in \mathcal{D}(C_h^{-1})$, $\mathcal{R}(C_h^{-1}) = L_{2,h}(\Omega)$.

Из этих свойств следует, что задача (4.15) имеет единственное сильное решение $v_h(t)$ на отрезке $[0,T]$, причем для этого решения все слагаемые в уравнении (4.15) являются элементами из $C([0,T]; L_{2,h}(\Omega))$ и выполнено начальное условие $v_h(0) = v_h^0$.

Вернемся теперь от задачи (4.15) к задаче (4.12) в пространстве $L_2(\Omega)$, проведя преобразования, обратные тем, которые были выше проделаны при переходе от (4.12) к (4.15). Тогда приходим к выводу, что существует единственное решение $\eta(t)$ задачи Коши (4.12), у которого все слагаемые в уравнении (4.12) являются элементами из $C([0,T]; L_2(\Omega))$. Так как оператор $(I + \varepsilon S)$ обратим, то отсюда получаем (см. второе слагаемое), что $\eta(t) \in C([0,T]; L_2(\Omega))$.

Осуществляя еще переход от задачи (4.12) к исходной задаче (4.11), приходим к выводу, что функция $w(t) \in C([0,T]; H^1(\Omega))$, $L_\varepsilon w = 0$, т. е. $w(t) \in C([0,T]; H^1_{h,\varepsilon}(\Omega))$. Отсюда следует, что $\partial_\varepsilon w \in C([0,T]; H^{-1/2}(\Gamma))$ и выполнено граничное условие на Γ в (4.11), причем в этом соотношении все слагаемые являются непрерывными функциями переменной t со значениями в $H^{-1/2}(\Gamma)$. □

4°. *Начально-краевая задача Стефана.* Задача (3.99) порождается следующей задачей:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L_\varepsilon u = f(t) \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial}{\partial t}\gamma u + \partial_\varepsilon u = \psi(t) \quad (\text{на } \Gamma), \quad u(0) = u^0. \tag{4.17}$$

Она интересна тем, что здесь производная $\partial/\partial t$ входит не только в уравнение, но и в краевое условие.

Осуществляя в задаче (4.17) те же преобразования, которые в пункте 3.4 были проделаны для задачи (3.99), получаем, что задача (4.17) равносильна задаче Коши

$$(A^{-1} + C)\frac{d\eta}{dt} + (I + \varepsilon S)\eta = A^{-1/2}f + A^{1/2}V\psi, \quad \eta(0) = \eta^0 := A^{1/2}u^0 \tag{4.18}$$

в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$.

Эта задача обобщает задачу Стеклова (4.12). Здесь, в отличие от (4.12), оператор $A^{-1} + C$ компактный и положительный, и потому в (4.18) не требуется проводить дополнительное проектирование. Вводя новую искомую функцию по формуле

$$(A^{-1} + C)\eta(t) =: v(t), \tag{4.19}$$

получаем из (4.18) задачу Коши

$$\begin{gathered} \frac{dv}{dt} + (I + \varepsilon S)(A^{-1} + C)^{-1}v = A^{-1/2}f + A^{1/2}V\psi(t), \\ v(0) = (A^{-1} + C)\eta^0 = (A^{-1} + C)A^{1/2}u^0. \end{gathered} \tag{4.20}$$

Теорема 4.4. *Пусть в задаче* (4.17) *выполнены условия*

$$\left.\begin{aligned} &u^0 \in H^1(\Omega),\ f(t) \in C^\gamma([0,T]; (H^1(\Omega))^*), \\ &\psi(t) \in C^\gamma([0,T]; H^{-1/2}(\Gamma)), \quad 0 < \gamma \leqslant 1. \end{aligned}\right\} \tag{4.21}$$

Тогда задача (4.20)*, а вместе с ней и задача* (4.18) *имеют единственное сильное решение* $v(t) \in C([0,T];\mathcal{D}((A^{-1}+C)^{-1}))$ *и соответственно* $\eta(t) \in C([0,T];L_2(\Omega))$. *При этом в* (4.20) *и* (4.18) *все слагаемые являются элементами из* $C([0,T];L_2(\Omega))$. *Далее, при сформулированных условиях исходная задача Стефана* (4.17) *имеет единственное сильное решение* $u(t) \in C([0,T];H^1(\Omega))$, *для которого все слагаемые в уравнении* (4.17) *являются элементами из* $C([0,T];(H^1(\Omega))^*)$, *а в граничном условии — элементами из* $C([0,T];H^{-1/2}(\Gamma))$.

Доказательство. Если выполнены условия (4.21), то в уравнении (4.20) правая часть принадлежит $C^\gamma([0,T];L_2(\Omega))$, а $v_0 \in \mathcal{D}((A^{-1}+C)^{-1})$. При этом оператор $-(I+\varepsilon S)(A^{-1}+C)^{-1}$ является генератором аналитической полугруппы операторов, действующей в $L_2(\Omega)$. Отсюда следует, что задача (4.20) имеет единственное сильное решение из $C([0,T];\mathcal{D}((A^{-1}+C)^{-1}))$, а потому задача (4.18) — единственное сильное решение $\eta(t) \in C([0,T];L_2(\Omega))$ (см. замену (4.19)), причем в (4.20) и (4.18) все слагаемые являются элементами из $C([0,T];L_2(\Omega))$.

Вернемся теперь в (4.18) к искомой функции

$$u(t) = A^{-1/2}\eta(t) \in C([0,T];H^1(\Omega)) \tag{4.22}$$

и подействуем слева оператором $A^{-1/2}$. Учитывая еще формулы (3.54) и (3.53) для S, придем к соотношению

$$u = A^{-1}\Big(-\varepsilon Bu - \frac{du}{dt} - f(t)\Big) + V\Big(\varepsilon\sigma\gamma u - \frac{d}{dt}\gamma u + \psi(t)\Big) =: u_1 + u_2. \tag{4.23}$$

Равенство

$$u_1 = A^{-1}\Big(-\varepsilon Bu - \frac{du}{dt} - f(t)\Big) \tag{4.24}$$

равносильно условиям (см. (3.31), (3.32))

$$L_0 u_1 = -\varepsilon Bu - \frac{du}{dt} - f(t) \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_0 u_1 = 0 \quad (\text{на } \Gamma). \tag{4.25}$$

Соответственно равенство

$$u_2 = V\Big(\varepsilon\sigma\gamma u - \frac{d}{dt}(\gamma u) + \psi(t)\Big) \tag{4.26}$$

равносильно условиям

$$L_0 u_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_0 u_2 = \varepsilon\sigma\gamma u - \frac{d}{dt}(\gamma u) + \psi(t) \quad (\text{на } \Gamma). \tag{4.27}$$

Отсюда приходим к связям

$$\begin{aligned} L_0(u_1+u_2) = L_0 u &= -\varepsilon Bu - \frac{du}{dt} - f(t) \quad (\text{в } \Omega), \\ \partial_0(u_1+u_2) = \partial_0 u &= -\varepsilon\sigma\gamma u - \frac{d}{dt}(\gamma u) + \psi(t) \quad (\text{на } \Gamma), \end{aligned} \tag{4.28}$$

откуда получаем соотношения

$$\frac{du}{dt} + L_\varepsilon u = f(t) \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{d}{dt}(\gamma u) + \partial_\varepsilon u = \psi(t) \quad (\text{на } \Gamma), \tag{4.29}$$

т. е. уравнения (4.17) исходной задачи Стефана.

Из (4.22) следует, что $L_0 u \in C([0,T];(H^1(\Omega))^*)$; кроме того, из свойства $B \in \mathcal{L}(H^1(\Omega);L_2(\Omega))$ (лемма 3.1) получаем, что $-\varepsilon Bu \in C([0,T];L_2(\Omega)) \subset C([0,T];(H^1(\Omega))^*)$. Поэтому в (4.29) все слагаемые в первом уравнении являются элементами из $C([0,T];(H^1(\Omega))^*)$. Аналогичным образом, опираясь на свойство $\partial_\varepsilon u \in C([0,T];(H^{-1/2}(\Gamma))$, следующее из (4.22), устанавливаем, что все слагаемые во втором уравнении (4.29) являются элементами из $C([0,T];(H^{-1/2}(\Gamma)))$. □

4.2. Некоторые неклассические начально-краевые задачи математической физики. Здесь будут рассмотрены начально-краевые задачи, порождающие спектральные задачи Крейна, Аграновича и Чуешова (см. пункт 3.5).

1°. *Начально-краевая задача С. Крейна.* Эта задача порождает спектральную задачу (3.114), если считать, что $u(t)$ отвечает полю скорости в вязкой жидкости, а $w(t)$ — полю смещений частиц жидкости от состояния равновесия, причем $u(t) = dw/dt$. Тогда приходим к задаче

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2w}{dt^2} + L_\varepsilon \frac{dw}{dt} = f(t) \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{d}{dt}\partial_\varepsilon w + \gamma w = \psi(t) \quad (\text{на } \Gamma), \\ w(0) = w^0, \quad \frac{dw}{dt}(0) = u(0) = u^0. \end{aligned}\right\} \tag{4.30}$$

Снова повторяя преобразования из пункта 3.4, получаем, что задача (4.30) равносильна задаче Коши

$$\left.\begin{aligned} &A^{-1}\frac{d^2\eta}{dt^2} + (I + \varepsilon S)\frac{d\eta}{dt} + C\eta = A^{-1/2}f(t) + A^{1/2}V\psi(t), \\ &\eta := A^{1/2}w, \quad \eta(0) = A^{1/2}w^0, \quad \frac{d\eta}{dt}(0) = A^{1/2}u^0 \end{aligned}\right\} \tag{4.31}$$

в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$.

Эту задачу, в свою очередь, можно преобразовать в задачу Коши для системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка в пространстве $L_2(\Omega) \oplus L_2(\Gamma)$.

С этой целью перепишем задачу (4.30) в виде (см. 3° из пункта 2.3)

$$\left.\begin{aligned} L_0\frac{dw}{dt} = -\varepsilon B\frac{dw}{dt} + f - \frac{d^2w}{dt^2} \quad (\text{в } \Omega), \\ \partial_0\frac{dw}{dt} = \varepsilon\sigma\gamma\frac{dw}{dt} - \gamma w + \psi \quad (\text{на } \Gamma) \end{aligned}\right\} \tag{4.32}$$

и воспользуемся формулой (2.32) при $\varepsilon = 0$:

$$\frac{dw}{dt} = A^{-1}(-\varepsilon B\frac{dw}{dt} + f - \frac{d^2w}{dt^2}) + V(\varepsilon\sigma\gamma\frac{dw}{dt} - \gamma w + \psi). \tag{4.33}$$

Возникает дифференциально-операторное уравнение второго порядка

$$A^{-1}\frac{d^2w}{dt^2} + [I + \varepsilon(A^{-1}B - V\sigma\gamma)]\frac{dw}{dt} + V\gamma w = A^{-1}f + V\psi, \tag{4.34}$$

которое после замены

$$w(t) = A^{-1/2}\eta(t) \tag{4.35}$$

и действия слева оператором $A^{1/2}$ (это можно сделать) переходит в уравнение

$$\begin{gathered} A^{-1}\frac{d^2\eta}{dt^2} + (I + \varepsilon S)\frac{d\eta}{dt} + C\eta = A^{-1/2}f + A^{1/2}V\psi, \\ C = (A^{1/2}V)(\gamma A^{-1/2}) = (\gamma A^{-1/2})^*(\gamma A^{-1/2}). \end{gathered} \tag{4.36}$$

Перейдем теперь от (4.36) к системе двух дифференциальных уравнений следующим образом. Осуществим в (4.36) замены

$$\eta(t) = Av(t), \quad \frac{d\xi}{dt} = -i(\gamma A^{-1/2})\eta(t), \quad \xi(0) = 0. \tag{4.37}$$

Тогда, используя связь

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -i(\gamma A^{-1/2})\frac{d\eta}{dt}, \quad \frac{d\xi}{dt}(0) = -i(\gamma A^{-1/2})\eta(0), \tag{4.38}$$

приходим вместо (4.36) к следующей системе уравнений и начальных условий:

$$\begin{gathered} \frac{d^2v}{dt^2} + (I + \varepsilon S)A\frac{dv}{dt} + i(\gamma A^{-1/2})^*\frac{d\xi}{dt} = A^{-1/2}f + A^{1/2}V\psi, \\ \frac{d^2\xi}{dt^2} + i(\gamma A^{-1/2})A\frac{dv}{dt} = 0, \quad \frac{dv}{dt}(0) = A^{-1/2}u^0, \ \frac{d\xi}{dt}(0) = -i\gamma w^0, \end{gathered} \tag{4.39}$$

в которых присутствуют лишь производные от искомых функций.

Осуществляя еще здесь замену

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v \\ \xi \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} v_1(t) \\ \xi_1(t) \end{pmatrix}, \tag{4.40}$$

получим задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка в пространстве $L_2(\Omega)\oplus L_2(\Gamma)$:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_1\\ \xi_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} I+\varepsilon S+A^{-1} & i(\gamma A^{-1/2})^*\\ i(\gamma A^{-1/2}) & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1\\ \xi_1\end{pmatrix}=\\ =e^{-t}\begin{pmatrix} A^{-1/2}f(t)+A^{1/2}V\psi(t)\\ 0\end{pmatrix},\quad v_1(0)=A^{-1/2}u^0,\ \xi_1(0)=-i\gamma w^0.\end{gathered}\tag{4.41}$$

Теорема 4.5. *Пусть в задаче* (4.30) *выполнены условия*

$$\begin{gathered}w^0\in H^1(\Omega),\ u^0\in H^1(\Omega),\ f(t)\in C^\gamma([0,T];(H^1(\Omega))^*),\\ \psi(t)\in C^\gamma([0,T];H^{-1/2}(\Gamma)),\ 0<\gamma\leqslant 1.\end{gathered}\tag{4.42}$$

Тогда существует единственное решение этой задачи $w(t)\in C^1([0,T];H^1(\Omega))$, для которого все слагаемые в уравнении (4.30) *являются непрерывными функциями $t\in[0,T]$ со значениями в $(H^1(\Omega))^*$, а в граничном условии на Γ — непрерывными функциями t со значениями в $H^{-1/2}(\Gamma)$.*

Доказательство. Оно проводится по схеме, уже использованной при доказательстве теоремы 4.4.

Заметим сначала, что уравнение (4.41) снова абстрактное параболическое, так как оператор $\operatorname{diag}(A;I)$ самосопряжен и положительно определен на области определения $\mathcal{D}(A)\oplus L_2(\Gamma)$, и этот оператор умножается на операторную матрицу, имеющую структуру единичного плюс компактного оператора, действующего в $L_2(\Omega)\oplus L_2(\Gamma)$. Действительно, S и A^{-1} — компактные операторы в $L_2(\Omega)$, а $\gamma A^{-1/2}\in\mathcal{L}(L_2(\Omega);H^{1/2}(\Gamma))$, $H^{1/2}(\Gamma)\hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Gamma)$.

Если выполнены условия (4.42), то в правой части

$$A^{-1/2}f(t)+A^{1/2}V\psi(t)\in C^\gamma([0,T];L_2(\Omega)),\ 0<\gamma\leqslant 1,$$

$$v_1(0)=A^{-1/2}u^0\in\mathcal{D}(A),\ \xi_1(0)=-i\gamma w^0\in H^{1/2}(\Gamma)\subset L_2(\Gamma).$$

Поэтому при условиях (4.42) задача Коши (4.41) имеет единственное решение $(v_1(t);\xi_1(t))^\tau$ на отрезке $[0,T]$, причем все слагаемые (4.41) являются непрерывными функциями t со значениями в $L_2(\Omega)\oplus L_2(\Gamma)$.

Отсюда, согласно замене (4.40), получаем, что для функции $(v(t);\xi(t))^\tau$ справедливы уравнения задачи (4.39), где все слагаемые — элементы из $C([0,T];L_2(\Omega))$ либо $C([0,T];L_2(\Gamma))$ соответственно. Далее, из (4.37)–(4.39) тогда следует, что для функции $\eta(t)$ справедливо уравнение (4.36), где все слагаемые — элементы из $C([0,T];L_2(\Omega))$. Отсюда в силу замены (4.35) получаем, что справедливо уравнение (4.34), где все слагаемые — элементы из $C([0,T];H^1(\Omega))$. Переписывая это уравнение в виде (4.33), приходим к выводу, что функция dw/dt дает решение задачи (4.32), т. е. исходной задачи (4.30).

При этом $dw/dt=A^{-1/2}d\eta/dt\in C([0,T];H^1(\Omega))$, следовательно, $-\varepsilon B dw/dt\in C([0,T];L_2(\Omega))$, $L_0 dw/dt\in C([0,T];(H^1(\Omega))^*)$. Значит, все слагаемые в уравнении (4.30) в Ω — элементы из $C([0,T];(H^1(\Omega))^*)$. Аналогично, опираясь на свойства $\sigma\gamma dw/dt\in C([0,T];H^{-1/2}(\Gamma))$, $\gamma w\in C^1([0,T];H^{1/2}(\Gamma))$, убеждаемся, что все слагаемые в граничном условии из (4.30) — элементы из $C([0,T];H^{-1/2}(\Gamma))$. □

2°. *Начально-краевые задачи Аграновича.* Эти две задачи порождают спектральную задачу (3.116) в следующих вариантах.

1. Если параметр $\mu\in\mathbb{C}$ фиксирован и задан, то начально-краевая задача, отвечающая задаче Аграновича (3.116), формулируется следующим образом:

$$\frac{dv}{dt}+L_\varepsilon v=f(t)\quad(\text{в }\Omega),\quad \partial_\varepsilon v=\mu\,\gamma v+\psi(t)\quad(\text{на }\Gamma),\quad v(0)=v^0.\tag{4.43}$$

По постановке она близка к начально-краевой задаче Неймана—Ньютона (4.5). Снова отправляясь от преобразований пункта 3.2, приходим к выводу, что задача (4.43) равносильна задаче Коши

$$A^{-1}\frac{d\eta}{dt}+(I+\varepsilon S-\mu C)\eta=A^{-1/2}f+A^{1/2}V\psi,\quad \eta(0)=\eta^0:=A^{1/2}v^0,\tag{4.44}$$

которая рассматривается в пространстве $L_2(\Omega)$, обобщает задачу (4.5) и при $\mu=0$ совпадает с ней.

Так как в (4.44) C — компактный оператор, то уравнение (4.44) — абстрактное параболическое. Поэтому для первой начально-краевой задачи (4.43) справедливы утверждения теоремы 4.2 при выполнении условий (4.9).

2. Второй вариант соответствует ситуации, когда в спектральной задаче (3.116) параметр λ фиксирован и задан. Тогда возникает начально-краевая задача

$$L_\varepsilon w + \lambda w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{d}{dt}\gamma w + \partial_\varepsilon w = \psi(t) \quad (\text{на } \Gamma), \quad w(0) = w^0, \tag{4.45}$$

близкая к начально-краевой задаче Стеклова (3.125).

Повторяя преобразования пункта 3.3, получаем, что задача (4.45) равносильна задаче Коши

$$C\frac{d\eta}{dt} + (I + \varepsilon S + \lambda A^{-1})\eta = A^{1/2}V\psi(t), \quad \eta(0) = \eta^0 := A^{1/2}w^0, \tag{4.46}$$

обобщающей задачу (4.12) и при $\lambda = 0$ совпадающей с ней.

От задачи (4.46), как и в пункте 3.3, можно перейти путем проектирования на подпространство $L_{2,h}(\Omega)$ к задаче Коши вида (4.15) с компактным оператором $T_h(\varepsilon;\lambda)$, учитывающим дополнительное слагаемое $\lambda A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega))$. Отсюда следует, что для исходной второй начально-краевой задачи Аграновича справедливы утверждения теоремы 4.3 при выполнении условий (4.16).

3°. *Начально-краевая задача Чуешова.* Спектральная задача Чуешова (3.139) порождается начально-краевой задачей

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2u}{dt^2} + L_\varepsilon u = f(t) \quad (\text{в } \Omega), \quad \alpha\frac{d}{dt}\gamma u + \partial_\varepsilon u = \psi(t) \quad (\text{на } \Gamma),\\ &u(0) = u^0, \quad \frac{du}{dt}(0) = u^1. \end{aligned}\right\} \tag{4.47}$$

Повторяя, как и в задаче (4.31), переход от (4.31) к задаче (4.43), приходим к выводу, что задача (4.47) равносильна задаче Коши

$$\left.\begin{aligned} &A^{-1}\frac{d^2\eta}{dt^2} + \alpha C\frac{d\eta}{dt} + (I + \varepsilon S)\eta = A^{-1/2}f(t) + A^{1/2}V\psi(t),\\ &\eta(0) = \eta^0 := A^{1/2}u^0, \quad \frac{d\eta}{dt}(0) = \eta^1 := A^{1/2}u^1. \end{aligned}\right\} \tag{4.48}$$

Задачу (4.48) можно преобразовать в задачу Коши для системы двух интегродифференциальных уравнений первого порядка путем следующих преобразований. Перепишем (4.48) в виде

$$A^{-1/2}\frac{d^2}{dt^2}(A^{-1/2}\eta) + \alpha C\frac{d\eta}{dt} + (I + \varepsilon(S_2 - S_1))\eta = A^{-1/2}f(t), \tag{4.49}$$

учитывающем выражение для оператора S, см. пункт 3.2. Будем здесь считать, что выполнено условие

$$|\varepsilon|(\|S_1\| + \|S_2\|) < 1, \quad S_1 = S_1^* = (A^{1/2}V)\sigma(\gamma A^{-1/2}),\ S_2 := A^{-1/2}(BA^{-1/2}). \tag{4.50}$$

Тогда оператор $I - \varepsilon S_1 \gg 0$ и потому также $I_\varepsilon := (I - \varepsilon S_1)^{1/2} \gg 0$.

Введем далее новую искомую функцию $w(t)$ соотношениями

$$-iI_\varepsilon\eta(t) =: \frac{dw}{dt}, \quad w(0) = 0, \tag{4.51}$$

и будем считать, что $\eta(t)$ и dw/dt дифференцируемы по t. Тогда вместо задачи Коши для уравнения (4.49) приходим к задаче

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\frac{d^2}{dt^2}\left[\begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta\\ w\end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix}\alpha C & iI_\varepsilon\\ iI_\varepsilon & 0\end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\eta\\ w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1/2}f(t) - \varepsilon S_2\eta(t)\\ 0\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}\eta\\ w\end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix}A^{1/2}u^0\\ 0\end{pmatrix}, \quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\eta\\ w\end{pmatrix}\bigg|_{t=0} = \begin{pmatrix}A^{1/2}u^1\\ -iI_\varepsilon A^{1/2}u^0\end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{4.52}$$

в которой слева стоят лишь производные от искомых функций.

Осуществляя еще здесь замену

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\eta(t)\\ w(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A^{1/2} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1(t)\\ w_1(t)\end{pmatrix} \tag{4.53}$$

и действуя слева оператором $\mathrm{diag}\,(A^{1/2}; I)$, приходим к задаче Коши для интегродифференциального уравнения первого порядка в $L_2(\Omega) \oplus L_2(\Omega)$:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\eta_1\\ w_1\end{pmatrix} + \left\{\begin{pmatrix}A^{1/2} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha C & iI_\varepsilon\\ iI_\varepsilon & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{1/2} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}\eta_1\\ w_1\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}f(t)+Bu^0\\ 0\end{pmatrix} - \varepsilon\int\limits_0^t \begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1(s)\\ w_1(s)\end{pmatrix} dS, \quad \begin{pmatrix}\eta_1(0)\\ w_1(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u^1\\ -iI_\varepsilon A^{1/2}u^0.\end{pmatrix} \tag{4.54}$$

Изучим теперь свойства операторных матриц в этом уравнении.

Лемма 4.1. *Операторная матрица $\mathcal{A}$ в фигурных скобках в* (4.54) *является максимальным аккретивным оператором, действующим в $L_2(\Omega)\oplus L_2(\Omega)$ и заданным на области определения*

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{(\eta_1; w_1)^\tau : \eta_1 \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad \alpha C A^{1/2}\eta_1 + iI_\varepsilon w_1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})\}. \tag{4.55}$$

Доказательство. Свойство аккретивности этой операторной матрицы следует из неравенства

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}(\eta_1; w_1)^\tau, (\eta_1; w_1)^\tau)_{L_2(\Omega)\oplus L_2(\Omega)} = \alpha(CA^{1/2}\eta_1, A^{1/2}\eta_1)_{L_2\Omega} = \alpha\|\gamma\eta_1\|^2_{L_2(\Gamma)} \geqslant 0, \tag{4.56}$$

так как $C = (A^{1/2}V)(\gamma A^{-1/2}) = (\gamma A^{-1/2})^*(\gamma A^{-1/2})$.

Далее, эта операторная матрица обратима и

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix}A^{-1/2} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -iI_\varepsilon^{-1}\\ -Ii_\varepsilon^{-1} & \alpha I_\varepsilon^{-1}CI_\varepsilon^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{-1/2} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}. \tag{4.57}$$

Так как здесь все операторные матрицы ограничены и потому $\mathcal{A}^{-1}$ задана на всем пространстве $L_2(\Omega)\oplus L_2(\Omega)$, то область значений $\mathcal{A}$ совпадает со всем пространством $L_2(\Omega)\oplus L_2(\Omega)$. Значит, аккретивный оператор $\mathcal{A}$ является максимальным аккретивным. То, что его область определения имеет вид (4.55), проверяется непосредственно. □

Следствием леммы 4.1 является такое утверждение: оператор $(-\mathcal{A})$ является генератором сжимающей C_0-полугруппы операторов, действующей в $L_2(\Omega)\oplus L_2(\Omega)$.

Отметим еще одно обстоятельство в задаче (4.54): оператор $\mathcal{B} := \mathrm{diag}\,(B; 0)$ задан на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{B}) = \mathcal{D}(B)\oplus L_2(\Omega) = H^1(\Omega)\oplus L_2(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2})\oplus L_2(\Omega) \tag{4.58}$$

и потому (см. (4.55))

$$\mathcal{D}(\mathcal{B}) \supset \mathcal{D}(\mathcal{A}). \tag{4.59}$$

Наконец, далее понадобится еще одно утверждение, которое является простейшим вариантом теоремы 1.3.2 из [15, с. 23].

Лемма 4.2. *Пусть в задаче Коши для интегродифференциального уравнения*

$$\frac{du}{dt} = A_0 u + \int\limits_0^t G(t,s)A_1 u(s)ds + f(t), \quad u(0) = u^0, \tag{4.60}$$

выполнены следующие условия:

1°. *Оператор A_0 является генератором C_0-полугруппы, действующей в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.*
2°. *Выполнено включение $\mathcal{D}(A_0)\subset\mathcal{D}(A_1)$.*
3°. *Оператор-функции $G(t,s)$, $\partial G(t,s)/\partial t$ непрерывны по своим переменным при $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ и принимают значения из $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.*
4°. *Выполнены условия*

$$f(t)\in C^1([0,T];\mathcal{H}), \quad u^0\in\mathcal{D}(A_0).$$

Тогда задача Коши (4.60) *имеет единственное сильное решение $u(t)$ на отрезке $[0,T]$, т. е.*

$$u(t)\in C^1([0,T];\mathcal{H})\cap C([0,T];\mathcal{D}(A_0)); \tag{4.61}$$

при этом все слагаемые в уравнении (4.60) *являются непрерывными функциями $t\in[0,T]$ и $u(0)=u^0$.*

Итогом рассмотрения задачи Чуешова (4.47) является следующее утверждение.

Теорема 4.6. *Пусть в задаче* (4.47) *выполнены следующие условия*:

$$f(t) \in C^1([0,T]; L_2(\Omega)), \quad u^0, u^1 \in H^1(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2}), \tag{4.62}$$

и условие согласования начальных данных

$$\alpha C A^{1/2} u^1 + (I - \varepsilon S_1) A^{1/2} u^0 \in \mathcal{D}(A^{1/2}). \tag{4.63}$$

Тогда существует единственное сильное решение задачи (4.47)*, т. е. такая функция*

$$u(t) \in C^2([0,T]; L_2(\Omega)), \tag{4.64}$$

для которой выполнено уравнение в Ω *из* (4.47)*, где все слагаемые являются элементами из* $C([0,T]; L_2(\Omega))$*, и граничное условие на* Γ*, где все слагаемые — элементы из* $C([0,T]; H^{1/2}(\Gamma))$*.*

Доказательство. Если выполнены условие (4.50) и условия (4.62), (4.63) для u^0 и u^1, то в задаче (4.54) $(\eta_1(0); w_1(0))^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ (см. (4.55)). Кроме того, в этой задаче $(f(t) + Bu^0; 0)^\tau \in C^1([0,T]; L_2(\Omega) \oplus L_2(\Omega))$. Наконец, оператор $(-\mathcal{A})$ является генератором сжимающей C_0-полугруппы (лемма 4.1) и выполнено условие (4.59). Поэтому задача (4.47) является частным случаем задачи (4.60) при $\mathcal{H} = L_2(\Omega) \oplus L_2(\Omega)$, $A_0 = -\mathcal{A}$, $A_1 = \mathcal{B}$, $G(t,s) \equiv \operatorname{diag}(I; I)$.

Отсюда по лемме 4.2 приходим к выводу, что при выполнении условий (4.62), (4.63) задача (4.54) имеет единственное сильное решение

$$(\eta_1(t); w_1(t))^\tau \in C^1([0,T]; L_2(\Omega) \oplus L_2(\Omega)) \cap C([0,T]; H^1(\Omega) \oplus L_2(\Omega)), \tag{4.65}$$

для которого все слагаемые в (4.54) — элементы из $C([0,T]; L_2(\Omega) \oplus L_2(\Omega))$.

Осуществляя теперь обратную замену (4.53) и действуя оператором $\operatorname{diag}(A^{-1/2}; I)$, получаем из (4.54), что справедливо уравнение (4.52), где

$$\left.\begin{aligned} &\eta(t) \in C^2([0,T]; (H^1(\Omega))^*) \cap C^1([0,T]; L_2(\Omega)), \\ &w(t) \in C^2([0,T]; L_2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L_2(\Omega)) = C^2([0,T]; L_2(\Omega)). \end{aligned}\right\} \tag{4.66}$$

Исключая переменную $w(t)$ (см. (4.51)), приходим к уравнению (4.49) для функции $\eta(t)$. Наконец, осуществляя еще исходную замену $u(t) = A^{-1/2}\eta(t)$, приходим к дифференциальному уравнению для функции $u(t)$, которое удобно переписать в виде

$$u = A^{-1}\Big(f - \frac{d^2u}{dt^2} - \varepsilon Bu\Big) + V\Big(\varepsilon\sigma\gamma u - \alpha\frac{d}{dt}(\gamma u)\Big). \tag{4.67}$$

Отсюда с помощью приема, который уже встречался при доказательстве теоремы 4.2, получаем, что для функции $u(t)$ выполнены соотношения

$$L_0 u = f - \frac{d^2u}{dt^2} - \varepsilon Bu \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_0 u = \varepsilon\sigma\gamma u - \alpha\frac{d}{dt}(\gamma u) \quad (\text{на } \Gamma), \tag{4.68}$$

откуда следует, что выполнены уравнение и краевое условие задачи (4.47).

Из свойств (4.66) для $\eta(t)$ после проведенной замены получаем, что

$$u(t) \in C^2([0,T]; L_2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H^1(\Omega)). \tag{4.69}$$

Отсюда следует, что правая часть в уравнении (4.68) является элементом из $C([0,T]; L_2(\Omega))$, и тогда в уравнении (4.47) все слагаемые — элементы из $C([0,T]; L_2(\Omega))$.

В граничном условии на Γ из (4.47) соответственно имеем

$$\alpha\frac{d}{dt}(\gamma u) \in C([0,T]; H^{1/2}(\Gamma)),$$

а также свойство

$$\varepsilon\sigma\gamma u \in C^1([0,T]; H^{-1/2}(\Gamma)).$$

Поэтому в граничном условии на Γ в (4.47) оба слагаемых — элементы из $C([0,T]; H^{1/2}(\Gamma))$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович М. С.* Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 5. — С. 3–78.
2. *Агранович М. С.* Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. — М.: МЦМНО, 2013.
3. *Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д.* Абстрактная формула Грина и ее приложения: специальный курс. — Симферополь: ФЛП «Бондаренко О. А.», 2011.
4. *Андронова О. А., Копачевский Н. Д.* О линейных задачах с поверхностной диссипацией энергии// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2008. — *29*. — С. 11–28.
5. *Аскеров Н. К., Крейн С. Г., Лаптев Г. И.* Задача о колебаниях вязкой жидкости и связанные с ней операторные уравнения// Функц. анализ и его прилож. — 1968. — *2*, № 2. — С. 21–32.
6. *Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д., Старков П. А.* Многокомпонентные задачи сопряжения и вспомогательные абстрактные краевые задачи// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *34*. — С. 5–44.
7. *Вулис И. Л., Соломяк М. З.* Спектральная асимптотика вырождающейся задачи Стеклова// Вестн. ЛГУ. — 1973. — *19*. — С. 148–150.
8. *Горбачук В. И.* Диссипативные граничные задачи для эллиптических дифференциальных уравнений// В сб. «Функциональные и численные методы математической физики», Ин-т матем. и механики: сб. научн. трудов. — Киев: Наукова думка, 1998. — С. 60–63.
9. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
10. *Копачевский Н. Д.* Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и ее приложениях к задаче Стокса// Тавр. вестн. информ. и мат. — 2004. — *2*. — С. 52–80.
11. *Копачевский Н. Д.* Абстрактная формула Грина и задача Стокса// Изв. вузов. Северо-Кавказск. рег. Естеств. науки. Мат. и мех. сплошн. среды. — Ростов-на-Дону, 2004. — С. 137–141.
12. *Копачевский Н. Д.* Операторные методы математической физики: специальный курс лекций. — Симферополь: ООО «ФОРМА», 2008.
13. *Копачевский Н. Д.* Спектральная теория операторных пучков: специальный курс лекций. — Симферополь: ООО «ФОРМА», 2009.
14. *Копачевский Н. Д.* Об абстрактной формуле Грина для смешанных краевых задач и ее приложениях// Спектр. и эволюц. задачи. — 2011. — *21*, № 1. — С. 2–39.
15. *Копачевский Н. Д.* Интегродифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве. Спец. курс лекций. — Симферополь: ФЛП «Бондаренко О. А.», 2012.
16. *Копачевский Н. Д.* Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и полуторалинейных форм// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *57*. — С. 71–107.
17. *Копачевский Н. Д.* Абстрактная формула Грина и некоторые ее приложения. — Симферополь: ООО «ФОРМА», 2016.
18. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г.* Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи// Укр. мат. вестн. — 2004. — *1*, № 1. — С. 69–97.
19. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
20. *Копачевский Н. Д., Радомирская К. А.* Абстрактные смешанные краевые и спектральные задачи сопряжения// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. физ.-мат. науки. — 2014. — *27*, № 1. — С. 58–64.
21. *Копачевский Н. Д., Радомирская К. А.* Абстрактные смешанные краевые и спектральные задачи сопряжения и их приложения// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — *61*. — С. 67–102.
22. *Копачевский Н. Д., Якубова А. Р.* О краевых, спектральных и начально-краевых задачах, порожденных полуторалинейными формами// Тр. XXIV Междунар. конф. «Математика. Экономика. Образование»; IX Междунар. симпоз. «Ряды Фурье и их прилож.»; Междунар. конф. по стохастич. мет. — Ростов-на-Дону: Изд-во «Фонд науки и образования», 2016. — С. 57–63.
23. *Копачевский Н. Д., Якубова А. Р.* О некоторых спектральных и начально-краевых задачах, порожденных полуторалинейными формами// Тезисы Межд. конф. «XXVII Крымская осенняя мат. школа-симпоз. по спектральным и эволюционным задачам», Батилиман (Ласпи), Крым, КФУ им. В. И. Вернадского, 17–29 сентября 2016 г. — Симферополь: ООО «ФОРМА», 2016. — С. 84–85.
24. *Крейн С. Г.* О колебаниях вязкой жидкости в сосуде// Докл. АН СССР. — 1964. — *159*, № 2. — С. 262–265.
25. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
26. *Крейн С. Г., Лаптев Г. И.* К задаче о движении вязкой жидкости в открытом сосуде// Функц. анализ и его прилож. — 1968. — *1*, № 2. — С. 40–50.

27. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970.
28. *Лионс Ж.-Л., Манженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
29. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: Штиинца, 1986.
30. *Маркус А. С., Мацаев В. И.* Теоремы о сравнении спектров линейных операторов и спектральные асимптотики// Тр. Моск. Мат. об-ва. — 1982. — *45*. — С. 133–1381.
31. *Маркус А. С., Мацаев В. И.* Теоремы о сравнении спектров линейных операторов и спектральные асимптотики для пучков Келдыша// Мат. сб. — 1984. — *123*, № 3. — С. 391–406.
32. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. — М.—Л.: Гостехиздат, 1952.
33. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970.
34. *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. — М.: Мир, 1977.
35. *Старков П. А.* Операторный подход к задачам сопряжения// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. Мат. Мех. Информ. Киберн. — 2002. — *15*, № 1. — С. 58–62.
36. *Старков П. А.* Случай общего положения для операторного пучка, возникающего при исследовании задач сопряжения// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. Мат. Мех. Информ. Киберн. — 2002. — *15*, № 2. — С. 82–88.
37. *Agranovich M. S.* Remarks on potential and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary// Russ. J. Math. Phys. — 2008. — *15*, № 2. — С. 146–155.
38. *Agranovich M. S., Katsenelenbaum B. Z., Sivov A. N., Voitovich N. N.* Generalized method of eigenoscillations in diffraction theory. — Berlin etc.: Wiley-VCH, 1999.
39. *Chueshov I., Eller M., Lasieska I.* Finite dimensionally of the attractor for a semilinear wave equation with nonlinear boundary dissipation// Commun. Part. Differ. Equ. — 2004. — *29*, № 11-12. — С. 1847–1876.
40. *Chueshov I., Lasieska I.* Global attractors for von Karman evolutions with a nonlinear boundary dissipations// J. Differ. Equ. — 2004. — *198*. — С. 196–231.
41. *Gagliardo E.* Caratterizazioni delle trace sullo frontiera relative ad alcune classi de funzioni «n» variabili// Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 1957. — *27*. — С. 284–305.
42. *McLean W.* Strongly elliptic systems and boundary integral equations. — Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
43. *Showalter R. E.* Hilbert space methods for partial differential equations// Electron. J. Differ. Equ. — 1994. — *1*. — `http://www.emis.ams.org/journals/ELDE/Monographs/01/toc.html`.

Николай Дмитриевич Копачевский
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
295007, Симферополь, проспект Вернадского, 4
E-mail: `kopachevsky@list.ru`

А. Р. Якубова
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
295007, Симферополь, проспект Вернадского, 4
E-mail: `alika.yakubova.1993@mail.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2-278-315 UDC 517.984.5

On Some Problems Generated by a Sesquilinear Form

© 2017 **N. D. Kopachevskii, A. R. Yakubova**

Abstract. Based on the generalized Green formula for a sesquilinear nonsymmetric form for the Laplace operator, we consider spectral nonself-adjoint problems. Some of them are similar to classical problems while the other arise in problems of hydrodynamics, diffraction, and problems with surface dissipation of energy. Properties of solutions of such problems are considered. Also we study initial-boundary value problems generating considered spectral problems and prove theorems on correct solvability of such problems on any interval of time.

REFERENCES

1. M. S. Agranovich, "Spektral'nye zadachi dlya sil'no ellipticheskikh sistem vtorogo poryadka v oblastyakh s gladkoy i negladkoy granitsey" [Spectral problems for strongly elliptic second-order systems in domains with smooth and nonsmooth boundaries], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2002, **57**, No. 5, 3–78 (in Russian).
2. M. S. Agranovich, *Sobolevskie prostranstva, ikh obobshcheniya i ellipticheskie zadachi v oblastyakh s gladkoy i lipshitsevoy granitsey* [Sobolev Spaces, Their Generalizations, and Elliptic Problems in Domains with Smooth and Lipschitz Boundaries], MTsMNO, Moscow, 2013 (in Russian).
3. T. Ya. Azizov and N. D. Kopachevskii, *Abstraktnaya formula Grina i ee prilozheniya: spetsial'nyy kurs* [Abstract Green Formula and Its Applications: Special Course], FLP "O. A. Bondarenko," Simferopol', 2011 (in Russian).
4. O. A. Andronova and N. D. Kopachevskii, "O lineynykh zadachakh s poverkhnostnoy dissipatsiey energii" [On linear problems with surface dissipation of energy], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2008, **29**, 11–28 (in Russian).
5. N. K. Askerov, S. G. Kreyn, and G. I. Laptev, "Zadacha o kolebaniyakh vyazkoy zhidkosti i svyazannye s ney operatornye uravneniya" [A problem of oscillations of viscous fluid and related operator equations], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1968, **2**, No. 2, 21–32 (in Russian).
6. V. I. Voytitskiy, N. D. Kopachevskii, and P. A. Starkov, "Mnogokomponentnye zadachi sopryazheniya i vspomogatel'nye abstraktnye kraevye zadachi" [Multicomponent conjugation problems and auxiliary abstract boundary-value problems], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2009, **34**, 5–44 (in Russian).
7. I. L. Vulis and M. Z. Solomyak, "Spektral'naya asimptotika vyrozhdayushcheysya zadachi Steklova" [Spectral asymptotics of the degenerating Steklov problem], *Vestn. LGU* [Bull. LGU], 1973, **19**, 148–150 (in Russian).
8. V. I. Gorbachuk, "Dissipativnye granichnye zadachi dlya ellipticheskikh differentsial'nykh uravneniy," In: *Funktsional'nye i chislennye metody matematicheskoy fiziki. In-t matem. i mekhaniki: sb. nauchn. trudov* [Functional and numeric methods of mathematical physics. Inst. Math. Mech.: Digest Sci. Proc.], Naukova dumka, Kiev, 1998, 60–63 (in Russian).
9. I. Ts. Gokhberg and M. G. Kreyn, *Vvedenie v teoriyu lineynykh nesamosopryazhennykh operatorov v gil'bertovom prostranstve* [Introduction to the Theory of Linear Nonself-adjoint Operators in a Hilbert Space], Nauka, Moscow, 1965 (in Russian).
10. N. D. Kopachevskii, "Ob abstraktnoy formule Grina dlya troyki gil'bertovykh prostranstv i ee prilozheniyakh k zadache Stoksa" [On the abstract Green formula for a triplet of Hilbert spaces and its applications to the Stokes problem], *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavricheskiy Bull. Inform. Math.], 2004, **2**, 52–80 (in Russian).
11. N. D. Kopachevskii, "Abstraktnaya formula Grina i zadacha Stoksa" [Abstract Green formula and the Stokes problem], *Izv. vuzov. Severo-Kavkazsk. reg. Estestv. nauki. Mat. i mekh. sploshn. sredy* [Bull. Higher Edu. Nothern-Caucasian Reg. Nat. Sci. Math. Mech. Contin. Medium], 2004, 137–141 (in Russian).
12. N. D. Kopachevskii, *Operatornye metody matematicheskoy fiziki: spetsial'nyy kurs lektsiy* [Operator Methods of Mathematical Physics: Special Course], OOO "FORMA," Simferopol', 2008 (in Russian).

13. N. D. Kopachevskii, *Spektral'naya teoriya operatornykh puchkov: spetsial'nyy kurs lektsiy* [Spectral Theory of Operator Pencils: Special Course], OOO "FORMA," Simferopol', 2009 (in Russian).
14. N. D. Kopachevskii, "Ob abstraktnoy formule Grina dlya smeshannykh kraevykh zadach i ee prilozheniyakh" [On abstract Green formula for mixed boundary-value problems and its applications], *Spektr. i evolyuts. zadachi* [Spectral Evolution Probl.], 2011, **21**, No. 1, 2–39 (in Russian).
15. N. D. Kopachevskii, *Integrodifferentsial'nye uravneniya Vol'terra v gil'bertovom prostranstve. Spets. kurs lektsiy* [Integrodifferential Volterra Equations in a Hilbert Space. Special Course], FLP "O. A. Bondarenko," Simferopol', 2012 (in Russian).
16. N. D. Kopachevskii, "Ob abstraktnoy formule Grina dlya troyki gil'bertovykh prostranstv i polutoralineynykh form" [Abstract Green formulas for triples of Hilbert spaces and sesquilinear forms], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **57**, 71–107 (in Russian).
17. N. D. Kopachevskii, *Abstraktnaya formula Grina i nekotorye ee prilozheniya* [Abstract Green Formula and Some Its Applications], OOO "FORMA," Simferopol', 2016 (in Russian).
18. N. D. Kopachevskii and S. G. Kreyn, "Abstraktnaya formula Grina dlya troyki gil'bertovykh prostranstv, abstraktnye kraevye i spektral'nye zadachi" [Abstract Green formulas for triples of Hilbert spaces, abstract boundary-value and spectral problems], *Ukr. mat. vestn.* [Ukr. Math. Bull.], 2004, **1**, No. 1, 69–97 (in Russian).
19. N. D. Kopachevskii, S. G. Kreyn, and Ngo Zuy Kan, *Operatornye metody v lineynoy gidrodinamike: evolyutsionnye i spektral'nye zadachi* [Operator Methods in Linear Hydrodynamics: Evolution and Spectral Problems], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
20. N. D. Kopachevskii and K. A. Radomirskaya, "Abstraktnye smeshannye kraevye i spektral'nye zadachi sopryazheniya" [Abstract mixed boundary-value and spectral conjugation problems], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo. Ser. fiz.-mat. nauki* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ. Ser. Phys. Math. Sci.], 2014, **27**, No. 1, 58–64 (in Russian).
21. N. D. Kopachevskii and K. A. Radomirskaya, "Abstraktnye smeshannye kraevye i spektral'nye zadachi sopryazheniya i ikh prilozheniya" [Abstract mixed boundary-value and spectral conjugation problems and their applications], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **61**, 67–102 (in Russian).
22. N. D. Kopachevskii and A. R. Yakubova, "O kraevykh, spektral'nykh i nachal'no-kraevykh zadachakh, porozhdennykh polutoralineynymi formami" [On boundary-value, spectral, and initial-boundary value problems generated by sesquilinear forms], *Tr. XXIV Mezhdunar. konf. «Matematika. Ekonomika. Obrazovanie»; IX Mezhdunar. simpoz. «Ryady Fur'e i ikh prilozh.»; Mezhdunar. konf. po stokhastich. met.* [Proc. XXIV Int. Conf. Mathematics. Economics. Education"; IX Int. Symp. "Fourier Series Appl."; Int. Conf. Stoch. Methods], "Fond nauki i obrazovaniya," Rostov-na-Donu, 2016, 57–63 (in Russian).
23. N. D. Kopachevskii and A. R. Yakubova, "O nekotorykh spektral'nykh i nachal'no-kraevykh zadachakh, porozhdennykh polutoralineynymi formami" [On some spectral and initial-boundary value problems generated by sesquilinear forms], *Tezisy Mezhd. konf. «XXVII Krymskaya osennyaya mat. shkola-simpoz. po spektral'nym i evolyutsionnym zadacham»* [Abstr. Int. Conf. "XXVII Crimean Autumn Math. School-Symp. Spectr. Evolution Problems"], Batiliman (Laspi), Crimea, V. I. Vernadsky Crimean Federal Univ., 17–29 Sep. 2016, OOO "FORMA," Simferopol', 2016, 84–85 (in Russian).
24. S. G. Kreyn, "O kolebaniyakh vyazkoy zhidkosti v sosude" [On oscillations of viscous fluid in a vessel], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1964, **159**, No. 2, 262–265 (in Russian).
25. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
26. S. G. Kreyn and G. I. Laptev, "K zadache o dvizhenii vyazkoy zhidkosti v otkrytom sosude" [To the problem of motion of a viscous fluid in an open vessel], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1968, **1**, No. 2, 40–50 (in Russian).
27. O. A. Ladyzhenskaya, *Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti* [Mathematical Questions of Dynamics of a Viscous Incompressible Fluid], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
28. Zh.-L. Lions and E. Manzhenes, *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya* [Nonhomogeneous Boundary-Value Problems and Their Applications], Mir, Moscow, 1971 (in Russian).
29. A. S. Markus, *Vvedenie v spektral'nuyu teoriyu polinomial'nykh operatornykh puchkov* [Introduction to the Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils], Shtiintsa, Kishinev, 1986 (in Russian).
30. A. S. Markus and V. I. Matsaev, "Teoremy o sravnenii spektrov lineynykh operatorov i spektral'nye asimptotiki" [Theorems on comparison of spectra of linear operators and spectral asymptotics], *Tr. Mosk. Mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1982, **45**, 133–1381 (in Russian).

31. A. S. Markus and V. I. Matsaev, "Teoremy o sravnenii spektrov lineynykh operatorov i spektral'nye asimptotiki dlya puchkov Keldysha" [Theorems on comparison of spectra of linear operators and spectral asymptotics for the Keldysh pencils], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1984, **123**, No. 3, 391–406 (in Russian).
32. S. G. Mikhlin, *Problema minimuma kvadratichnogo funktsionala* [Problem of Minimum of Quadratic Functional], Gostekhizdat, Moscow–Leningrad, 1952 (in Russian).
33. S. G. Mikhlin, *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike* [Variational Methods in Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
34. Zh.-P. Oben, *Priblizhennoe reshenie ellipticheskikh kraevykh zadach* [Approximate Solution of Elliptic Boundary-Value Problems], Mir, Moscow, 1977 (in Russian).
35. P. A. Starkov, "Operatornyy podkhod k zadacham sopryazheniya" [Operator approach to conjugation problems], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo. Ser. Mat. Mekh. Inform. Kibern.* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ. Ser. Math. Mech. Inform. Cybern.], 2002, **15**, No. 1, 58–62 (in Russian).
36. P. A. Starkov, "Sluchay obshchego polozheniya dlya operatornogo puchka, voznikayushchego pri issledovanii zadach sopryazheniya" [Case of general position for the operator pencil arising in investigation of conjugation problems], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo. Ser. Mat. Mekh. Inform. Kibern.* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ. Ser. Math. Mech. Inform. Cybern.], 2002, **15**, No. 2, 82–88 (in Russian).
37. M. S. Agranovich, "Remarks on potential and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary," *Russ. J. Math. Phys.*, 2008, **15**, No. 2, 146–155.
38. M. S. Agranovich, B. Z. Katsenelenbaum, A. N. Sivov, and N. N. Voitovich, *Generalized Method of Eigen-oscillations in Diffraction Theory*, Wiley-VCH, Berlin etc., 1999.
39. I. Chueshov, M. Eller, and I. Lasieska, "Finite dimensionally of the attractor for a semilinear wave equation with nonlinear boundary dissipation," *Commun. Part. Differ. Equ.*, 2004, **29**, No. 11-12, 1847–1876.
40. I. Chueshov and I. Lasieska, "Global attractors for von Karman evolutions with a nonlinear boundary dissipations," *J. Differ. Equ.*, 2004, **198**, 196–231.
41. E. Gagliardo, "Caratterizazioni delle trace sullo frontiera relative ad alcune classi de funzioni «n» variabili," *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova.*, 1957, **27**, 284–305.
42. W. McLean, *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
43. R. E. Showalter, "Hilbert space methods for partial differential equations," *Electron. J. Differ. Equ.*, 1994, **1**, http://www.emis.ams.org/journals/ELDE/Monographs/01/toc.html.

N. D. Kopachevskii
V. I. Vernadsky Crimean Federal University
4 Vernadsky Avenue, 295007 Simferopol, Russia
E-mail: kopachevsky@list.ru

A. R. Yakubova
V. I. Vernadsky Crimean Federal University
4 Vernadsky Avenue, 295007 Simferopol, Russia
E-mail: alika.yakubova.1993@mail.ru