Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 2 (2017). С. 266–277

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2-266-277 УДК 517.5

УСТРАНЕНИЕ ИЗОЛИРОВАННЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ ОБОБЩЕННЫХ КВАЗИИЗОМЕТРИЙ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

© 2017 г. **Д. П. ИЛЬЮТКО, Е. А. СЕВОСТЬЯНОВ**

Аннотация. Для отображений с неограниченной характеристикой получены теоремы об устранении изолированных особенностей на римановых многообразиях. Установлено, что отображение, удовлетворяющее определенному модульному неравенству, характеристика квазиконформности которого имеет мажоранту конечного среднего колебания в заданной изолированной особой точке, имеет предел в этой точке.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Хорошо известная из общего курса комплексного анализа теорема об устранении изолированной особенности утверждает, что ограниченная аналитическая функция $\varphi\colon D\setminus\{z_0\}\to\mathbb{C}$ области $D\setminus\{z_0\}\subset\mathbb{C}$ имеет предел в точке z_0 (см. [12, теорема $1'$, § 6, п. 24, гл. II]).

Этот результат обобщен в n-мерном пространстве для отображений с ограниченным искажением (см. [18, следствие 4.5] и [20, теорема 2.9, гл. III], см. также [4, 5]). Несколько позднее были получены и другие обобщения, в частности, установленные вторым автором данной статьи [9, 10]. В последних работах речь идет об аналогах теоремы Сохоцкого—Вейерштрасса для так называемых кольцевых Q-отображений, т. е. отображений, в основе определения которых лежит свойство контролируемого искажения модуля семейств кривых. Здесь функция Q отвечает за «испорченность» искажения модуля и предполагается, вообще говоря, неограниченной. В то же время содержательность результатов для указанных отображений имеет место, как правило, в случае слабого роста функции Q в окрестности фиксированной изолированной точки, например, особенностей логарифмического типа, функций конечного среднего колебания и т.п. (см. там же). Стоит отметить, что аналитические функции отвечают $Q\equiv 1$, а отображения с ограниченным искажением — $Q\equiv\mathrm{const}$. Большая часть известных ныне классов отображений также являются кольцевыми Q-отображениями при не очень сильных ограничениях на характеристику квазиконформности, гладкость отображений и меру их множества точек ветвления [8].

Чтобы подытожить упомянутые результаты, мы покажем в настоящей заметке, что аналог теоремы об устранении изолированной особенности для кольцевых Q-отображений справедлив также на римановых многообразиях при практически тех же ограничениях на функцию Q, а не только в евклидовом n-мерном пространстве. Здесь также участвуют некоторые ограничения на сами многообразия, которые будут оговорены ниже.

Перейдем к определениям и формулировкам основных результатов. Следующие понятия могут быть найдены, например, в [12, 17]. Напомним, что *n-мерным топологическим многообразием* $\mathbb{M}^n$ называется хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную некоторому открытому множеству в $\mathbb{R}^n$. *Картой* на многообразии $\mathbb{M}^n$ будем называть пару (U,φ), где U — открытое подмножество пространства $\mathbb{M}^n$

©Российский университет дружбы народов, 2017

и φ — соответствующий гомеоморфизм множества U на открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Если $P \in U$ и $\varphi(P) = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, то соответствующие числа $x^1, \ldots, x^n$ называются *локальными координатами точки P*. *Гладким многообразием* называется само множество $\mathbb{M}^n$ вместе с соответствующим набором карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, так что объединение всех U_α по параметру α дает все $\mathbb{M}^n$ и, кроме того, отображение, осуществляющее переход от одной системы локальных координат к другой, принадлежит классу C^∞.

Напомним, что *римановой метрикой* на гладком многообразии $\mathbb{M}^n$ называется положительно определенное гладкое симметричное тензорное поле g_{ij} типа $(0,2)$. В частности, компоненты римановой метрики в различных локальных координатах (U,x) и (V,y), $U \cap V \neq \varnothing$, взаимосвязаны посредством тензорного закона

$$g'_{kl}(y) = g_{ij}(x(y)) \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial x^j}{\partial y^l},$$

где $g'_{kl}(y)$ — компоненты римановой метрики в системе координат (V,y), а $g_{ij}(x)$ — в системе координат (U,x).

Римановым многообразием будем называть гладкое многообразие вместе с римановой метрикой на нем. Длину гладкой кривой $\gamma = \gamma(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, соединяющей точки $\gamma(t_1) = P_1 \in \mathbb{M}^n$ и $\gamma(t_2) = P_2 \in \mathbb{M}^n$, и n-мерный объем (*меру объема*) v области A на римановом многообразии определим согласно соотношениям

$$l(\gamma) := \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}(\gamma(t)) \frac{d\gamma^i}{dt} \frac{d\gamma^j}{dt}}\, dt, \quad v(A) = \int\limits_A \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \ldots dx^n. \tag{1.1}$$

Ввиду положительной определенности тензора $G = (g_{ij}(x))$ имеем $\det g_{ij} > 0$. *Геодезическим расстоянием* между точками P_1 и $P_2 \in \mathbb{M}^n$ будем называть наименьшую длину всех кусочно-гладких кривых в $\mathbb{M}^n$, соединяющих точки P_1 и P_2. Геодезическое расстояние между точками P_1 и P_2 будем обозначать символом $d(P_1, P_2)$ (всюду далее d обозначает геодезическое расстояние, если не оговорено противное). В частности, (*открытым*) *шаром $B(P_0, r)$ с центром в точке $P_0 \in \mathbb{M}^n$ и радиусом $r > 0$* на римановом многообразии $\mathbb{M}^n$ мы будем называть следующее множество:

$$B(P_0, r) = \{P \in \mathbb{M}^n \mid d(P, P_0) < r\}.$$

Так как риманово многообразие, вообще говоря, не предполагается связным, расстояние между любыми точками многообразия, вообще говоря, может быть не определено. Хорошо известно, что любая точка P риманова многообразия $\mathbb{M}^n$ имеет окрестность $U \ni P$ (называемую далее *нормальной окрестностью точки P*) и соответствующее координатное отображение $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$, так что геодезические сферы с центром в точке P и радиусом r, лежащие в окрестности U, переходят при отображении φ в евклидовы сферы того же радиуса, а пучок геодезических кривых, исходящих из точки P, переходит в пучок радиальных отрезков в $\mathbb{R}^n$ (см. [17, леммы 5.9 и 6.11], см. также комментарии на с. 77 там же). Локальные координаты $\varphi(P) = (x^1, \ldots, x^n)$ в этом случае называются *нормальными координатами* точки P. Стоит отметить, что в случае связного многообразия $\mathbb{M}^n$ открытые множества метрического пространства $(\mathbb{M}^n, d)$ порождают топологию исходного топологического пространства $\mathbb{M}^n$ (см. [17, лемма 6.2]). Заметим, что в нормальных координатах тензорная матрица $G = (g_{ij})$ в точке P — всегда единичная (а в силу непрерывности функций g_{ij} в точках, близких к P, эта матрица сколь угодно близка к единичной; см. [17, пункт (c) предложения 5.11]).

Пусть X и Y — два топологических пространства. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *открытым*, если $f(U)$ открыто в Y для любого открытого множества $U \subset X$, и *дискретным*, если для каждой точки $P \in Y$ все точки множества $f^{-1}(P)$ имеют попарно непересекающиеся окрестности.

Пусть (X, d, μ) — произвольное метрическое пространство, наделенное мерой μ и $B(P_0, r) = \{P \in X \mid d(P, P_0) < r\}$. Следующее определение может быть найдено, например, в [6, раздел 4]. Будем говорить, что интегрируемая в $B(P_0, r)$ функция $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$, где D — область в X, имеет *конечное среднее колебание* в точке $P_0 \in D$, пишем $\varphi \in FMO(P_0)$, если

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\mu(B(P_0, \varepsilon))} \int\limits_{B(P_0, \varepsilon)} |\varphi(P) - \overline{\varphi}_\varepsilon|\, d\mu(P) < \infty,$$

где $\overline{\varphi}_{\varepsilon}=\frac{1}{\mu(B(P_0,\,\varepsilon))}\int\limits_{B(P_0,\,\varepsilon)}\varphi(P)\,d\mu(P).$

Всюду далее (если не оговорено противное) $\mathbb{M}^n$ и $\mathbb{M}^n_*$ — римановы многообразия с геодезическими расстояниями d и d_*, соответственно. *Кривой* γ мы называем непрерывное отображение отрезка $[a,b]$ (открытого интервала (a,b), либо полуоткрытого интервала вида $[a,b)$ или $(a,b]$) в $\mathbb{M}^n$, $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{M}^n$. Под семейством кривых Γ подразумевается некоторый фиксированный набор кривых γ, а если $f\colon\mathbb{M}^n\to\mathbb{M}^n_*$ — произвольное отображение, то $f(\Gamma)=\{f\circ\gamma|\gamma\in\Gamma\}$. Длину произвольной кривой $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{M}^n$, лежащей на многообразии $\mathbb{M}^n$, можно определить как точную верхнюю грань сумм $\sum\limits_{i=1}^{n-1}d(\gamma(t_i),\gamma(t_{i+1}))$ по всевозможным разбиениям $a\leqslant t_1\leqslant\ldots\leqslant t_n\leqslant b$. Следующие определения в случае пространства $\mathbb{R}^n$ могут быть найдены, например, в [21, разделы 1–6, гл. I], см. также [15, гл. I]. Борелева функция $\rho\colon\mathbb{M}^n\to[0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{M}^n$, если линейный интеграл по натуральному параметру s каждой (локально спрямляемой) кривой $\gamma\in\Gamma$ от функции ρ удовлетворяет условию $\int\limits_0^{l(\gamma)}\rho(\gamma(s))ds\geqslant 1$. В этом случае мы пишем $\rho\in\operatorname{adm}\Gamma$. Пусть $p\geqslant 1$ — фиксированное действительное число, тогда *p-модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M_p(\Gamma)=\inf_{\rho\in\operatorname{adm}\Gamma}\int\limits_{\mathbb{M}^n}\rho^p(x)\,dv(x).$$

(Здесь и далее v означает меру объема, определенную в (1.1). При этом, если $\operatorname{adm}\Gamma=\varnothing$, то полагаем $M_p(\Gamma)=\infty$, см. [21, раздел 6, с. 16] или [15, с. 176].) Свойства модуля в некоторой мере аналогичны свойствам меры Лебега m в $\mathbb{R}^n$:

1. p-модуль пустого семейства кривых равен нулю, $M_p(\varnothing)=0$;
2. p-модуль обладает свойством монотонности относительно семейств кривых:
$$\Gamma_1\subset\Gamma_2\Rightarrow M_p(\Gamma_1)\leqslant M_p(\Gamma_2);$$
3. p-модуль обладает свойством полуаддитивности:
$$M_p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\Gamma_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}M_p(\Gamma_i)\tag{1.2}$$
(см. [21, теорема 6.2, гл. I] в $\mathbb{R}^n$ или [15, теорема 1] в случае более общих пространств с мерами).

Говорят, что семейство кривых Γ_1 *минорируется* семейством Γ_2, пишем $\Gamma_1>\Gamma_2$, если для каждой кривой $\gamma\in\Gamma_1$ существует подкривая, которая принадлежит семейству Γ_2. В этом случае

$$\Gamma_1>\Gamma_2\quad\Rightarrow\quad M_p(\Gamma_1)\leqslant M_p(\Gamma_2)\tag{1.3}$$

(см. [21, теорема 6.4, гл. I] или [15, свойство (c)] в случае более общих пространств с мерами).

Следующее определение для случая $\mathbb{R}^n$ может быть найдено, например, в монографии [19, раздел 7.1, гл. 7]. Пусть $\mathbb{M}^n$ и $\mathbb{M}^n_*$ — римановы многообразия, $n\geqslant 2$, D — область в $\mathbb{M}^n$, $x_0\in D$, $Q\colon D\to[0,\infty]$ — измеримая относительно меры объема v функция и число $r_0>0$ таково, что замкнутый шар $\overline{B(x_0,r_0)}$ лежит в некоторой нормальной окрестности U точки x_0. Пусть также $0<r_1<r_2<r_0$, $A=A(r_1,r_2,x_0)=\{x\in\mathbb{M}^n : r_1<d(x,x_0)<r_2\}$, $S_i=S(x_0,r_i)$, $i=1,2,$ — геодезические сферы с центром в точке x_0 и радиусов r_1 и r_2 соответственно, а $\Gamma(S_1,\,S_2,\,A)$ обозначает семейство всех кривых, соединяющих S_1 и S_2 внутри области A. Зафиксируем $p\geqslant 1$ и условимся называть отображение $f\colon D\to\mathbb{M}^n_*$ (или $f\colon D\setminus\{x_0\}\to\mathbb{M}^n_*$) *кольцевым* (p,Q)-*отображением в точке* $x_0\in D$, если соотношение

$$M_p\left(f\left(\Gamma\left(S_1,\,S_2,\,A\right)\right)\right)\leqslant\int\limits_A Q(x)\cdot\eta^p(d(x,x_0))\,dv(x)\tag{1.4}$$

выполнено в кольце A для произвольных r_1, r_2, указанных выше, и для каждой измеримой функции $\eta\colon (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)dr \geqslant 1. \tag{1.5}$$

Отображения типа кольцевых (p, Q)-отображений были предложены к изучению О. Мартио и изучались им совместно с В. Рязановым, У. Сребро и Э. Якубовым, см. [19], а также [1, 14].

Пусть (X, d, μ) — метрическое пространство с метрикой d, наделенное локально конечной борелевской мерой μ. Следуя [16, раздел 7.22], будем говорить, что борелева функция $\rho\colon X \to [0, \infty]$ является *верхним градиентом* функции $u\colon X \to \mathbb{R}$, если для всех спрямляемых кривых γ, соединяющих точки P и Q из X, выполняется неравенство $|u(P) - u(Q)| \leqslant \int\limits_{\gamma} \rho\, ds$, где, как обычно, $\int\limits_{\gamma} \rho\, ds$ обозначает линейный интеграл от функции ρ по кривой γ. Будем также говорить, что в указанном пространстве X выполняется $(1; p)$-неравенство Пуанкаре, если найдутся постоянные $C \geqslant 1$ и $\tau > 0$ такие, что для каждого шара $B \subset X$, произвольной ограниченной непрерывной функции $u\colon X \to \mathbb{R}$ и любого ее верхнего градиента ρ выполняется следующее неравенство:

$$\frac{1}{\mu(B)} \int\limits_{B} |u - u_B| d\mu(P) \leqslant C \cdot (\operatorname{diam} B) \left(\frac{1}{\mu(\tau B)} \int\limits_{\tau B} \rho^p d\mu(P) \right)^{1/p},$$

где $u_B := \dfrac{1}{\mu(B)} \displaystyle\int\limits_{B} u d\mu(P)$ и τB — шар полученный из B изменением радиуса в τ раз. Стоит заметить, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ указанное неравенство выполнено для произвольного $1 \leqslant p < \infty$ (см. комментарии на с. 610 в [13]). Метрическое пространство (X, d, μ) назовем *$\widetilde{Q}$-регулярным по Альфорсу* при некотором $\widetilde{Q} \geqslant 1$, если при каждом $P_0 \in X$, некоторой постоянной $C \geqslant 1$ и произвольного $R < \operatorname{diam} X$ выполняется

$$\frac{1}{C} R^{\widetilde{Q}} \leqslant \mu(B(P_0, R)) \leqslant C R^{\widetilde{Q}}.$$

Заметим, что локально римановы многообразия являются n-регулярными по Альфорсу (см. [1, лемма 5.1]). Следует также заметить, что если риманово многообразие $\widetilde{Q}$-регулярно по Альфорсу, то $\widetilde{Q} = n$ (см. рассуждения на с. 61 в [16] о совпадении $\widetilde{Q}$ с хаусдорфовой размерностью пространства X, а также [1, лемма 5.1] о совпадении топологической и хаусдорфовых размерностей областей риманова многообразия). Справедлива следующая

Теорема 1.1. *Пусть $n \geqslant 2$, $p \in (n-1, n]$, $\mathbb{M}^n_*$ — связно, является n-регулярным по Альфорсу, кроме того, в $\mathbb{M}^n_*$ выполнено $(1; p)$-неравенство Пуанкаре. Пусть также D — область в $\mathbb{M}^n$, $B_R \subset \mathbb{M}^n_*$ — некоторый фиксированный шар радиуса R такой, что $\overline{B_R}$ — компакт в $\mathbb{M}^n_*$, $K \subset \mathbb{M}^n_*$ — некоторый континуум, $f\colon D \setminus \{x_0\} \to B_R \setminus K$ — открытое дискретное кольцевое (p, Q)-отображение в точке $x_0 \in D$. Предположим, что $Q \in FMO(x_0)$. Тогда f имеет непрерывное продолжение $f\colon D \to \overline{B_R}$ (непрерывность понимается в смысле геодезического расстояния d_* в $\mathbb{M}^n_*$).*

Благодарности. Авторы выражают благодарность В. И. Рязанову и Р. Р. Салимову за полезные советы и постоянное внимание к работе.

Работа первого автора выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 16-01-00378) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-7962.2016.1).

2. Вспомогательные леммы

Всюду далее

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{M}^n \,|\, d(x, x_0) = r\},$$
$$A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{M}^n \,|\, r_1 < d(x, x_0) < r_2\},$$

$d(A)$ — геодезический диаметр множества $A \subset \mathbb{M}^n$. Далее, если не оговорено противное, граница ∂D области $D \subset \mathbb{M}^n$ и замыкание $\overline{D}$ области D понимаются в смысле геодезического расстояния d. Перед тем, как мы приступим к изложению вспомогательных результатов и основной части данного раздела, дадим еще одно важное определение (см. [20, раздел 3, гл. II]). Пусть D — область риманова многообразия $\mathbb{M}^n$, $n \geqslant 2$, $f\colon D \to \mathbb{M}^n_*$ — отображение, $\beta\colon [a, b) \to \mathbb{M}^n_*$ — некоторая кривая и $x \in f^{-1}(\beta(a))$. Кривая $\alpha\colon [a, c) \to D$, $c \leqslant b$, называется *максимальным поднятием* кривой β при отображении f с началом в точке x_0, если (1) $\alpha(a) = x_0$; (2) $f \circ \alpha = \beta|_{[a, c)}$; (3) если $c < c' \leqslant b$, то не существует кривой $\alpha'\colon [a, c') \to D$, такой что $\alpha = \alpha'|_{[a, c)}$ и $f \circ \alpha = \beta|_{[a, c')}$. Имеет место следующее

Предложение 2.1. *Пусть $\mathbb{M}^n$ и $\mathbb{M}^n_*$ — римановы многообразия, $n \geqslant 2$, D — область в $\mathbb{M}^n$, $f\colon D \to \mathbb{M}^n_*$ — открытое дискретное отображение, $\beta\colon [a, b) \to \mathbb{M}^n_*$ — кривая и точка $x_0 \in f^{-1}(\beta(a))$. Тогда кривая β имеет максимальное поднятие при отображении f с началом в точке x_0.*

Доказательство. Зафиксируем точку $x_0 \in \mathbb{M}^n$ и рассмотрим $f(x_0) \in \mathbb{M}^n_*$. Поскольку точка $f(x_0)$ принадлежит многообразию $\mathbb{M}^n_*$, найдется окрестность V этой точки, гомеоморфная множеству $\psi(V) \subset \mathbb{R}^n$. В силу непрерывности отображения f найдется окрестность U точки x_0 такая, что $f(U) \subset V$. С другой стороны, не ограничивая общности, можно считать, что U гомеоморфна открытому множеству $\varphi(U)$ в $\mathbb{R}^n$. Можно также считать, что $\varphi(U)$ и $\psi(V)$ являются областями в $\mathbb{R}^n$, тогда $f^* = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ — открытое дискретное отображение между областями $\varphi(U)$ и $\psi(V)$ в $\mathbb{R}^n$. Для таких отображений существование максимальных поднятий локально вытекает из соответствующего результата Рикмана в n-мерном евклидовом пространстве (см. [20, шаг 2 доказательства теоремы 3.2 гл. II]). Отсюда вытекает локальное существование максимальных поднятий и на многообразиях. Глобальное существование максимальных поднятий может быть установлено аналогично доказательству шага 1 указанной выше теоремы. $\square$

Пусть $\mathbb{M}^n$ и $\mathbb{M}^n_*$ — римановы многообразия. Пусть A — открытое подмножество многообразия $\mathbb{M}^n$, $n \geqslant 2$, а C — компактное подмножество A. *Конденсатором* будем называть пару множеств $E = (A, C)$.

Пусть Γ_E — семейство всех кривых вида $\gamma\colon [a, b) \to A$ таких, что $\gamma(a) \in C$ и $|\gamma| \cap (A \setminus F) \neq \varnothing$ для произвольного компакта $F \subset A$. При $p \geqslant 1$ *p-емкостью* конденсатора E называется следующая величина:

$$\operatorname{cap}_p E = M_p(\Gamma_E).$$

Справедливо следующее утверждение (см. [13, предложение 4.7]).

Предложение 2.2. *Пусть X — $\widetilde{Q}$-регулярное по Альфорсу метрическое пространство с мерой, в котором выполняется $(1;p)$-неравенство Пуанкаре так, что $\widetilde{Q} - 1 < p \leqslant \widetilde{Q}$. Тогда для произвольных континуумов E и F, содержащихся в шаре $B(x_0, R)$, и некоторой постоянной $C > 0$ выполняется неравенство*

$$M_p(\Gamma(E, F, X)) \geqslant \frac{1}{C} \cdot \frac{\min\{\operatorname{diam} E, \operatorname{diam} F\}}{R^{1+p-\widetilde{Q}}}.$$

Доказательство следующего утверждения для пространства $\mathbb{R}^n$ и $p = n$, сформулированного ранее даже в несколько более общей форме в терминах весового модуля, может быть найдено, например, в работе [9, лемма 5.1].

Лемма 2.1. *Пусть $n \geqslant 2$, $p \geqslant 1$, D — область в $\mathbb{M}^n$, $f\colon D\setminus\{x_0\} \to \mathbb{M}^n_*$ — кольцевое (p, Q)-отображение в точке $x_0 \in D$. Предположим, что найдутся $\varepsilon_0 > 0$ и измеримая по Лебегу функция $\psi\colon (0, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$ со следующим свойством. Для любого $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_0]$ найдется $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_2]$ такое, что*

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_2) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_2} \psi(t)dt < \infty \tag{2.1}$$

при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ *и, кроме того, при* $\varepsilon \to 0$

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^p(d(x,x_0))\, dv(x) \;=\; o\left(I^p(\varepsilon,\varepsilon_0)\right). \tag{2.2}$$

Если Γ — *семейство всех кривых* $\gamma\colon (0,1) \to D \setminus \{x_0\}$ *таких, что* $\gamma(t_k) \to x_0$ *для некоторой последовательности* $t_k \to 0$, $\gamma(t) \not\equiv x_0$, *то* $M_p\left(f(\Gamma)\right) = 0$.

В частности, условие (2.1) автоматически выполнено, как только функция $\psi \in L^1_{loc}(0,\varepsilon_0)$ удовлетворяет условию: $\psi(t) > 0$ при почти всех $t \in (0,\varepsilon_0)$.

Доказательство. Можно считать, что шар $B(x_0,\varepsilon_0)$ лежит в нормальной окрестности точки x_0. Заметим, что

$$\Gamma > \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i, \tag{2.3}$$

где Γ_i — семейство таких кривых $\alpha_i\colon (0,1) \to \mathbb{M}^n$, что $\alpha_i(1) \in \{0 < d(x,x_0) = r_i < \varepsilon_0\}$, где r_i — некоторая последовательность такая, что $r_i \to 0$ при $i \to \infty$ и $\alpha_i(t_k) \to x_0$ при $k \to \infty$ для той же самой последовательности $t_k \to 0$ при $k \to \infty$. Зафиксируем $i \geqslant 1$. По соотношению (2.1) леммы найдется такое $\varepsilon_1 \in (0, r_i]$, что $I(\varepsilon, r_i) > 0$ при всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1)$. Заметим, что при указанных $\varepsilon > 0$ функция

$$\eta(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(\varepsilon, r_i), & t \in (\varepsilon, r_i), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (\varepsilon, r_i) \end{cases}$$

удовлетворяет условию нормировки вида (1.5) в кольце $A(x_0,\varepsilon,r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varepsilon < d(x,x_0) < r_i\}$ и, следовательно, ввиду соотношения (1.4) (поскольку f является кольцевым (p,Q)-отображением в точке x_0)

$$M_p\left(f\left(\Gamma\left(S(x_0,\varepsilon),\, S(x_0,r_i),\, A(x_0,\varepsilon,r_i)\right)\right)\right) \leqslant \int\limits_{A(x_0,\varepsilon,r_i)} Q(x)\cdot\eta^p(d(x,x_0))\, dv(x) \;\leqslant \mathfrak{F}_i(\varepsilon), \tag{2.4}$$

где $\mathfrak{F}_i(\varepsilon) = \dfrac{1}{(I(\varepsilon,r_i))^p} \displaystyle\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} Q(x)\,\psi^p(d(x,x_0))\,dv(x).$

Принимая во внимание (2.2), получим, что $\mathfrak{F}_i(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Заметим, что при каждом $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1)$

$$\Gamma_i > \Gamma\left(S(x_0,\varepsilon),\, S(x_0,r_i),\, A(x_0,\varepsilon,r_i)\right). \tag{2.5}$$

Таким образом, при каждом фиксированном $i = 1,2,\ldots$ из (2.4) и (2.5) получаем, что

$$M_p(f(\Gamma_i)) \leqslant \mathfrak{F}_i(\varepsilon) \to 0 \tag{2.6}$$

при $\varepsilon \to 0$ и каждом фиксированном $i \in \mathbb{N}$. Однако, левая часть неравенства (2.6) не зависит от ε и, следовательно, $M_p(f(\Gamma_i)) = 0$. Наконец, из (2.3) и свойства полуаддитивности p-модуля (1.2) вытекает, что $M_p(f(\Gamma)) = 0$. □

Основным техническим утверждением, позволяющим получать результаты об устранимых особенностях открытых дискретных кольцевых (p,Q)-отображений в наиболее общей ситуации, является следующая лемма.

Лемма 2.2. *Пусть* $n \geqslant 2$, $n-1 < p \leqslant n$, $\mathbb{M}^n_*$ — *связно, является* n*-регулярным по Альфорсу, кроме того, в* $\mathbb{M}^n_*$ *выполнено* $(1;p)$*-неравенство Пуанкаре. Пусть также* D — *область в* $\mathbb{M}^n$, $B_R \subset \mathbb{M}^n_*$ — *некоторый фиксированный шар радиуса* R *такой, что* $\overline{B_R}$ — *компакт в* $\mathbb{M}^n_*$, $f\colon D\setminus\{x_0\} \to B_R \setminus K$ — *открытое дискретное кольцевое* (p,Q)*-отображение в точке* $x_0 \in D$ ($K \subset B_R$ — *некоторый фиксированный континуум*). *Предположим, что существует* $\varepsilon_0 > 0$ *и измеримая по Лебегу функция* $\psi\colon (0,\varepsilon_0) \to [0,\infty]$ *со следующим свойством: для любого* $\varepsilon_2 \in (0,\varepsilon_0]$ *найдется* $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon_2]$ *такое, что при всех* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1)$ *выполнено соотношение* (2.1) *и, кроме того, при* $\varepsilon \to 0$ *выполнено соотношение* (2.2). *Тогда* f *имеет непрерывное продолжение* $f\colon D \to \overline{B_R}$ (*непрерывность понимается в смысле геодезического расстояния* d_* *в* $\mathbb{M}^n_*$).

Доказательство. Можно считать, что $\overline{B(x_0,\varepsilon_0)}$ лежит в нормальной окрестности U точки x_0. В частности, $\overline{B(x_0,\varepsilon_0)}$ — компакт в U. Предположим противное, а именно, что отображение f не может быть продолжено по непрерывности в точку x_0. Поскольку $\overline{B_R}$ — компакт, то предельное множество $C(f,x_0)$ непусто. Тогда найдутся две последовательности x_j и x_j', принадлежащие $B(x_0,\varepsilon_0)\setminus\{x_0\}$, $x_j\to x_0$, $x_j'\to x_0$, такие, что $d_*\left(f(x_j),\, f(x_j')\right)\geqslant a>0$ для всех $j\in\mathbb{N}$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что x_j и x_j' лежат внутри шара $B(x_0,\varepsilon_0)$. Полагаем $r_j=\max\left\{d(x_j,x_0),\, d(x_j',x_0)\right\}$. Заметим, что при достаточно малых r_j множество $\overline{B(x_0,r_j)}\setminus\{x_0\}$ является связным ввиду определения риманова многообразия $\mathbb{M}^n$. В таком случае соединим точки x_j и x_j' замкнутой кривой, лежащей в $\overline{B(x_0,r_j)}\setminus\{x_0\}$. Обозначим эту кривую символом C_j и рассмотрим конденсатор $E_j=(B(x_0,\varepsilon_0)\setminus\{x_0\},C_j)$. В силу открытости и непрерывности отображения f пара $f(E_j)$ также является конденсатором. Рассмотрим семейства кривых Γ_{E_j} и $\Gamma_{f(E_j)}$. Пусть Γ_j^* — семейство всех максимальных поднятий семейства кривых $\Gamma_{f(E_j)}$ при отображении f с началом в C_j, лежащих в $B(x_0,\varepsilon_0)\setminus\{x_0\}$. Заметим, что $\Gamma_j^*\subset\Gamma_{E_j}$. Поскольку $\Gamma_{f(E_j)}>f(\Gamma_j^*)$, мы получим:

$$M_p\left(\Gamma_{f(E_j)}\right)\leqslant M_p\left(f(\Gamma_j^*)\right)\leqslant M_p\left(f(\Gamma_{E_j})\right). \tag{2.7}$$

Заметим, что семейство Γ_{E_j} может быть разбито на два подсемейства:

$$\Gamma_{E_j}=\Gamma_{E_{j_1}}\cup\Gamma_{E_{j_2}}, \tag{2.8}$$

где $\Gamma_{E_{j_1}}$ — семейство всех кривых $\alpha\colon[a,\,c)\to B(x_0,\varepsilon_0)\setminus\{x_0\}$ с началом в C_j таких, что найдется $t_k\in[a,\,c):\alpha(t_k)\to x_0$ при $t_k\to c-0$; $\Gamma_{E_{j_2}}$ — семейство всех кривых $\alpha\colon[a,\,c)\to B(x_0,\varepsilon_0)\setminus\{x_0\}$ с началом в C_j таких, что найдется $t_k\in[a,\,c):\operatorname{dist}(\alpha(t_k),\partial B(x_0,\varepsilon_0))\to 0$ при $t_k\to c-0$.

В силу соотношений (2.7) и (2.8),

$$M_p\left(\Gamma_{f(E_j)}\right)\leqslant M_p(f(\Gamma_{E_{j_1}}))+M_p(f(\Gamma_{E_{j_2}})). \tag{2.9}$$

Заметим, что $M_p(f(\Gamma_{E_{j_1}}))=0$ ввиду леммы 2.1. Кроме того, заметим, что при достаточно больших $m\in\mathbb{N}$, $\Gamma_{E_{j_2}}>\Gamma\Big(S(x_0,r_j),S\Big(x_0,\varepsilon_0-\dfrac{1}{m}\Big),A\Big(x_0,r_j,\varepsilon_0-\dfrac{1}{m}\Big)\Big)$. Рассмотрим теперь кольцо $A_j=\Big\{x\in\mathbb{M}^n\,|\,r_j<d(x,x_0)<\varepsilon_0-\dfrac{1}{m}\Big\}$ и семейство функций

$$\eta_j(t)=\begin{cases}\psi(t)/I\Big(r_j,\varepsilon_0-\dfrac{1}{m}\Big), & t\in(r_j,\,\varepsilon_0-\frac{1}{m}),\\ 0, & t\in\mathbb{R}\setminus(r_j,\,\varepsilon_0-\frac{1}{m}).\end{cases}$$

Имеем:

$$\int\limits_{r_j}^{\varepsilon_0-\frac{1}{m}}\eta_j(t)dt=\frac{1}{I\left(r_j,\varepsilon_0-\frac{1}{m}\right)}\int\limits_{r_j}^{\varepsilon_0-\frac{1}{m}}\psi(t)dt=1.$$

Таким образом, по определению кольцевого (p,Q)-отображения в точке x_0 и условию (2.9) мы получаем, что

$$M_p(f(\Gamma_{E_j}))\leqslant\frac{1}{I(r_j,\varepsilon_0-\frac{1}{m})^p}\int\limits_{r_j<d(x,x_0)<\varepsilon_0}Q(x)\,\psi^p(d(x,x_0))\,dv(x),$$

откуда, переходя к пределу при $m\to\infty$, получим соотношение

$$M_p(f(\Gamma_{E_j}))\leqslant\mathcal{S}(r_j):=\frac{1}{I(r_j,\varepsilon_0)^p}\int\limits_{r_j<d(x,x_0)<\varepsilon_0}Q(x)\,\psi^p(d(x,x_0))\,dv(x).$$

В силу условия (2.2), $\mathcal{S}(r_j)\to 0$ при $j\to\infty$. Тогда ввиду (2.7) получаем, что

$$M_p\left(\Gamma_{f(E_j)}\right)\to 0,\qquad j\to\infty. \tag{2.10}$$

С другой стороны, рассмотрим семейство кривых $\Gamma_{f(E_j)}$ для конденсатора $f(E_j)$. Заметим, что подсемейство неспрямляемых кривых семейства $\Gamma_{f(E_j)}$ имеет нулевой модуль и что оставшееся подсемейство, состоящее из всех спрямляемых кривых семейства $\Gamma_{f(E_j)}$, состоит из кривых $\beta\colon [a,b) \to f(D\setminus\{x_0\})$, имеющих предел при $t\to b$ (здесь учтено, что $\overline{B_R}$ — компакт в $\mathbb{M}^n_*$). Заметим, что указанный предел принадлежит множеству $\partial f(A)$, где $A := B(x_0,\varepsilon_0)\setminus\{x_0\}$. Из сказанного следует, что

$$M_p(\Gamma_{f(E_j)}) = M_p(\Gamma(f(C_j), \partial f(A), f(A))). \tag{2.11}$$

Поскольку многообразие $\mathbb{M}^n_*$ связно, семейство кривых $\Gamma(K, f(C_j), \mathbb{M}^n_*)$ непусто. Кроме того, ввиду [2, теорема 1, § 46, п. I] произвольная кривая γ, соединяющая K и $f(C_j)$ в $\mathbb{M}^n_*$, имеет подкривую, соединяющую $\partial f(A)$ и $f(C_j)$ в $f(A)$. Иными словами, $\Gamma(K, f(C_j), \mathbb{M}^n_*) > \Gamma(\partial f(A), f(C_j), f(A))$.

Ввиду предложения 2.2 и того, что $d_*\Big(f(x_j),\, f(x_j')\Big) \geqslant a > 0$ для всех $j\in\mathbb{N}$ ввиду предположения, мы получим:

$$\begin{aligned} M_p(\Gamma(f(C_j), \partial f(A), f(A))) &\geqslant M_p(\Gamma(f(C_j), \partial f(A), \mathbb{M}^n_*)) \geqslant \\ &\geqslant M_p(\Gamma(f(C_j), K, \mathbb{M}^n_*)) \geqslant \frac{1}{C}\cdot\frac{\min\{\operatorname{diam} f(C_j), \operatorname{diam} K\}}{R^{1+p-n}} \geqslant \delta > 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Однако, неравенства (2.11) и (2.12) противоречат (2.10). Полученное противоречие опровергает предположение, что f не имеет предела при $x\to x_0$ в $\mathbb{M}^n_*$. □

3. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1.1 сводится к утверждению леммы 2.2. Выберем в этой лемме $0 < \psi(t) = \dfrac{1}{\left(t\,\ln\frac{1}{t}\right)^{n/p}}$. На основании [11, предложение 3] для указанной функции будем иметь, что

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^p(d(x,x_0))\; dv(x) \;= \int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} \frac{Q(x)\,dv(x)}{\left(d(x,x_0)\ln\frac{1}{d(x,x_0)}\right)^n} = O\left(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

при $\varepsilon\to 0$. Заметим также, что при указанных выше ε выполнено $\psi(t)\geqslant \dfrac{1}{t\,\ln\frac{1}{t}}$, поэтому $I(\varepsilon,\varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt \;\geqslant \ln\dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{\varepsilon_0}}$. Тогда выполнено соотношение (2.2). Таким образом, все условия леммы 2.2 выполнены и, значит, необходимое заключение вытекает из этой леммы. □

Элементом площади гладкой поверхности H на римановом многообразии $\mathbb{M}^n$ будем называть выражение вида

$$d\mathcal{A} = \sqrt{\det g^*_{\alpha\beta}}\, du^1\ldots du^{n-1},$$

где $g^*_{\alpha\beta}$ — риманова метрика на H, порожденная исходной римановой метрикой g_{ij} согласно соотношению

$$g^*_{\alpha\beta}(u) = g_{ij}(x(u))\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}. \tag{3.1}$$

Здесь индексы α и β меняются от 1 до $n-1$, а $x(u)$ обозначает параметризацию поверхности H такую, что $\nabla_u x\neq 0$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть $n\geqslant 2$, $p\in(n-1,n]$, $\mathbb{M}^n_*$ — связно, является n-регулярным по Альфорсу, кроме того, в $\mathbb{M}^n_*$ выполнено $(1;p)$-неравенство Пуанкаре. Пусть также D — область в $\mathbb{M}^n$, $B_R\subset\mathbb{M}^n_*$ — некоторый фиксированный шар радиуса R такой, что $\overline{B_R}$ — компакт в $\mathbb{M}^n_*$, $K\subset\mathbb{M}^n_*$ — некоторый континуум, $f\colon D\setminus\{x_0\}\to B_R\setminus K$ — открытое дискретное кольцевое (p,Q)-отображение в точке $x_0\in D$. Если при некотором $\delta(x_0)>0$ выполняется равенство*

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\delta(x_0)} \frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}}q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)} = \infty, \tag{3.2}$$

где $q_{x_0}(r) := \frac{1}{r^{n-1}} \int\limits_{S(x_0,r)} Q(x)\,d\mathcal{A}$, *то* f *имеет непрерывное продолжение* $f\colon D \to \overline{B_R}$ *(непрерывность понимается в смысле геодезического расстояния* d_* *в* $\mathbb{M}^n_*$*).*

Доказательство. Достаточно показать, что условие (3.2) влечет выполнение условия (2.2) леммы 2.1. Можно считать, что $B(x_0, \delta(x_0))$ лежит в нормальной окрестности точки x_0. Рассмотрим функцию

$$\psi(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}, & t \in (r_1, r_2), \\ 0, & t \notin (r_1, r_2). \end{cases}$$

Заметим теперь, что требование вида (2.1) выполняется при $\varepsilon_0 = \delta(x_0)$ и всех достаточно малых ε. Далее установим неравенство

$$\int\limits_{\varepsilon < d(x,x_0) < \delta(x_0)} Q(x)\psi^p(d(x,x_0))\,dv(x) \leqslant C \cdot \int\limits_{\varepsilon}^{\delta(x_0)} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \tag{3.3}$$

при некоторой постоянной $C > 0$. Для этого покажем, что к левой части соотношения (3.3) применим аналог теоремы Фубини. Рассмотрим в окрестности точки $x_0 \in S(z_0, r) \subset \mathbb{R}^n$ локальную систему координат $z^1, \ldots, z^n$, $n-1$ базисных векторов которой взаимно ортогональны и лежат в плоскости, касательной к сфере в точке x_0, а последний базисный вектор перпендикулярен этой плоскости. Пусть $r, \theta^1, \ldots, \theta^{n-1}$ — указанные координаты точки $x = x(\theta)$ в $\mathbb{R}^n$. Заметим, что $n-1$ приращений переменных $z^1, \ldots, z^{n-1}$ вдоль сферы при фиксированном r равны $dz^1 = rd\theta^1, \ldots, dz^{n-1} = rd\theta^{n-1}$, а приращение переменной z^n по r равно $dz^n = dr$. В таком случае

$$dv(x) = \sqrt{\det g_{ij}(x)}\, r^{n-1}\, dr d\theta^1 \ldots d\theta^{n-1}.$$

Рассмотрим параметризацию сферы $S(0,r)$ $x = x(\theta)$, $\theta = (\theta^1, \ldots, \theta^{n-1})$, $\theta_i \in (-\pi, \pi]$. Заметим, что $\partial x^\alpha / \partial \theta^\beta = r$ при $\alpha = \beta$ и $\partial x^\alpha / \partial \theta^\beta = 0$ при $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, n-1$. Тогда в обозначениях соотношения (3.1) имеем: $g^*_{\alpha\beta}(\theta) = g_{\alpha\beta}(x(\theta)) r^2$,

$$d\mathcal{A} = \sqrt{\det\, g_{\alpha\beta}(x(\theta))}\, r^{n-1} d\theta^1 \ldots d\theta^{n-1}.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)} = \int\limits_{S(x_0,r)} Q(x)\psi^p(d(x,x_0))\,d\mathcal{A} =$$

$$= \psi^p(r) r^{n-1} \cdot \int\limits_{\Pi} \sqrt{\det g_{\alpha\beta}(x(\theta))}\, Q(x(\theta))\, d\theta^1 \ldots d\theta^{n-1}, \tag{3.4}$$

где $\Pi = (-\pi, \pi]^{n-1}$ — прямоугольная область изменения параметров $\theta^1, \ldots, \theta^{n-1}$. Напомним, что в нормальной системе координат геодезические сферы переходят в обычные сферы того же радиуса с центром в нуле, а пучок геодезических, исходящих из точки многообразия, переходит в пучок радиальных отрезков в $\mathbb{R}^n$ (см. [17, леммы 5.9 и 6.11]), так что кольцу $\{x \in \mathbb{M}^n \,|\, \varepsilon < d(x,x_0) < \delta(x_0)\}$ соответствует та часть $\mathbb{R}^n$, в которой $r \in (\varepsilon, \delta(x_0))$. Согласно сказанному выше, применяя классическую теорему Фубини (см., например, [7, раздел 8.1, гл. III]),

$$\int\limits_{\varepsilon < d(x,x_0) < \delta(x_0)} Q(x)\psi^p(d(x,x_0))\,dv(x) = \int\limits_{\varepsilon}^{\delta(x_0)} \int\limits_{\Pi} \sqrt{\det g_{ij}(x)}\, Q(x)\psi^p(r) r^{n-1}\, d\theta^1 \ldots d\theta^{n-1} dr. \tag{3.5}$$

Поскольку в нормальных координатах тензорная матрица g_{ij} сколь угодно близка к единичной в окрестности данной точки, то

$$C_2 \det\, g_{\alpha\beta}(x) \leqslant \det\, g_{ij}(x) \leqslant C_1 \det\, g_{\alpha\beta}(x).$$

Учитывая сказанное и сравнивая (3.4) и (3.5), приходим к соотношению (3.3). Но тогда также

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\delta(x_0)} Q(x)\psi^p(d(x,x_0))dv(x) = o(I^p(\varepsilon,\delta(x_0)))$$

ввиду соотношения (3.2). Утверждение теоремы следует теперь из леммы 2.2. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Афанасьева Е. С., Рязанов В. И., Салимов Р. Р.* Об отображениях в классах Орлича—Соболева на римановых многообразиях// Укр. мат. вестн. — 2011. — *8*, № 3. — С. 319–342.
2. *Куратовский К.* Топология. Т. 2. — М.: Мир, 1969.
3. *Мазья В. Г.* Пространства Соболева. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
4. *Миклюков В. М.* Об устранимых особенностях квазиконформных отображений в пространстве// Докл. АН СССР. — 1969. — *188*, № 3. — С. 525–527.
5. *Миклюков В. М.* Граничные свойства n-мерных квазиконформных отображений// Докл. АН СССР. — 1970. — *193*, № 3. — С. 525–527.
6. *Рязанов В. И., Салимов Р. Р.* Слабо плоские пространства и границы в теории отображений// Укр. мат. вестн. — 2007. — *4*, № 2. — С. 199–234.
7. *Сакс С.* Теория интеграла. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1949.
8. *Севостьянов Е. А.* Обобщение одной леммы Е. А. Полецкого на классы пространственных отображений// Укр. мат. ж. — 2009. — *61*, № 7. — С. 969–975.
9. *Севостьянов Е. А.* К теории устранения особенностей отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности// Изв. РАН. Сер. Мат. — 2010. — *4*, №1. — С. 159–174.
10. *Севостьянов Е. А.* О некоторых свойствах обобщенных квазиизометрий с неограниченной характеристикой// Укр. мат. ж. — 2011. — *63*, №3. — С. 385–398.
11. *Смоловая Е. С.* Граничное поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов в метрических пространствах// Укр. мат. ж. — 2012. — *62*, № 5. — С. 682–689.
12. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Т. 1. — М.: Наука, 1976.
13. *Adamowicz T., Shanmugalingam N.* Non-conformal Loewner type estimates for modulus of curve families// Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. — 2010. — *35*. — С. 609–626.
14. *Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space// Int. J. Math. Math. Sci. — 2003. — *22*. — С. 1397–1420.
15. *Fuglede B.* Extremal length and functional completion// Acta Math. — 1957. — *98*. — С. 171–219.
16. *Heinonen J.* Lectures on analysis on metric spaces. — New-York: Springer, 2001.
17. *Lee J. M.* Riemannian manifolds: an introduction to curvature. — New-York: Springer, 1997.
18. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Distortion and singularities of quasiregular mappings// Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. — 1970. — *465*. — С. 1–13.
19. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. — New-York: Springer, 2009.
20. *Rickman S.* Quasiregular mappings. — Berlin etc.: Springer, 1993.
21. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. — Berlin, etc.: Springer, 1971.

Денис Петрович Ильютко
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, д. 1
E-mail: ilyutko@yandex.ru

Евгений Александрович Севостьянов
Житомирский государственный университет им. И. Франко
Украина, 10008, г. Житомир, ул. Велика Бердичівська, 40
E-mail: esevostyanov2009@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2-266-277 UDC 517.5

Removal of Isolated Singularities of Generalized Quasiisometries on Riemannian Manifolds

© 2017 **D. P. Ilyutko, E. A. Sevostyanov**

Abstract. For mappings with unbounded characteristics we prove theorems on removal of isolated singularities on Riemannian manifolds. We prove that if a mapping satisfies certain inequality of absolute values and its quasiconformity characteristic has a majorant of finite average oscillation at a fixed singular point, then it has a limit at this point.

REFERENCES

1. E. S. Afanas'eva, V. I. Ryazanov, and R. R. Salimov, "Ob otobrazheniyakh v klassakh Orlicha—Soboleva na rimanovykh mnogoobraziyakh" [On mappings in the Orlicz–Sobolev classes on Riemannian manifolds], *Ukr. mat. vestn.* [Ukr. Math. Bull.], 2011, **8**, No. 3, 319–342 (in Russian).
2. K. Kuratovskiy, *Topologiya. T. 2* [Topology. V. 2], Mir, Moscow, 1969 (in Russian).
3. V. G. Maz'ya, *Prostranstva Soboleva* [Sobolev Spaces], LGU, Leningrad, 1985 (in Russian).
4. V. M. Miklyukov, "Ob ustranimykh osobennostyakh kvazikonformnykh otobrazheniy v prostranstve" [On removable singularities of quasiconformal mappings in the space], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1969, **188**, No. 3, 525–527 (in Russian).
5. V. M. Miklyukov, "Granichnye svoystva n-mernykh kvazikonformnykh otobrazheniy" [Boundary properties of n-dimensional quasiconformal mappings], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1970, **193**, No. 3, 525–527 (in Russian).
6. V. I. Ryazanov and R. R. Salimov, "Slabo ploskie prostranstva i granitsy v teorii otobrazheniy" [Weakly flat spaces and boundaries in the theory of mappings], *Ukr. mat. vestn.* [Ukr. Math. Bull.], 2007, **4**, No. 2, 199–234 (in Russian).
7. S. Saks, *Teoriya integrala* [Theory of Integral], Izd-vo inostrannoy literatury, Moscow, 1949 (in Russian).
8. E. A. Sevost'yanov, "Obobshchenie odnoy lemmy E. A. Poletskogo na klassy prostranstvennykh otobrazheniy" [Generalization of one Poletskii lemma to classes of space mappings], *Ukr. mat. zh.* [Ukr. Math. J.], 2009, **61**, No. 7, 969–975 (in Russian).
9. E. A. Sevost'yanov, "K teorii ustraneniya osobennostey otobrazheniy s neogranichennoy kharakteristikoy kvazikonformnosti" [To the theory of removable mappings with unbounded quasiconformity characteristics], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2010, **4**, No. 1, 159–174 (in Russian).
10. E. A. Sevost'yanov, "O nekotorykh svoystvakh obobshchennykh kvaziizometriy s neogranichennoy kharakteristikoy" [On some properties of generalized quasiisometries with unbounded characteristics], *Ukr. mat. zh.* [Ukr. Math. J.], 2011, **63**, No. 3, 385–398 (in Russian).
11. E. S. Smolovaya, "Granichnoe povedenie kol'tsevykh Q-gomeomorfizmov v metricheskikh prostranstvakh" [Boundary behavior of ring Q-homeomorphisms in metric spaces], *Ukr. mat. zh.* [Ukr. Math. J.], 2012, **62**, No. 5, 682–689 (in Russian).
12. B. V. Shabat, *Vvedenie v kompleksnyy analiz. T. 1* [Introduction to Complex Analysis. V. 1], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
13. T. Adamowicz and N. Shanmugalingam, "Non-conformal Loewner type estimates for modulus of curve families," *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 2010, **35**, 609–626.
14. C. J. Bishop, V. Ya. Gutlyanskii, O. Martio, and M. Vuorinen, "On conformal dilatation in space," *Int. J. Math. Math. Sci.*, 2003, **22**, 1397–1420.
15. B. Fuglede, "Extremal length and functional completion," *Acta Math.*, 1957, **98**, 171–219.
16. J. Heinonen, *Lectures on Analysis on Metric Spaces*, Springer, New-York, 2001.
17. J. M. Lee, *Riemannian Manifolds: an Introduction to Curvature*, Springer, New-York, 1997.
18. O. Martio, S. Rickman, and J. Väisälä, "Distortion and singularities of quasiregular mappings," *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1.*, 1970, **465**, 1–13.

©Peoples' Friendship University of Russia, 2017

19. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, and E. Yakubov, *Moduli in Modern Mapping Theory*, Springer, New-York, 2009.
20. S. Rickman, *Quasiregular Mappings*, Springer, Berlin etc., 1993.
21. J. Väisälä, *Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings*, Springer, Berlin, etc., 1971.

D. P. Ilyutko
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics
Vorob'evy Gory, 119899 Moscow, Russia
E-mail: ilyutko@yandex.ru

E. A. Sevostyanov
Zhytomyr Franko State University
40 Velika Berdichivska, 10008 Zhytomyr, Ukraine
E-mail: esevostyanov2009@mail.ru