Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 2 (2017). С. 247–265

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2-247-265 УДК 517.984.48:532.135

МОДЕЛЬ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ МАКСВЕЛЛА

© 2017 г. **Д. А. ЗАКОРА**

Аннотация. В работе изучена модель вращающейся вязкоупругой баротропной жидкости Максвелла. Доказана теорема об однозначной разрешимости соответствующей начально-краевой задачи. Исследована спектральная задача, ассоциированная с изучаемой системой. Доказаны утверждения о локализации спектра, о существенном и дискретном спектре, об асимптотике спектра.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В работе изучается модель вязкоупругой баротропной жидкости Максвелла. Первые модели несжимаемых жидкостей, учитывающие предысторию течения и названные впоследствии линейными вязкоупругими жидкостями, были предложены в XIX в. Дж. Максвеллом [22, 23], В. Кельвином [21] и В. Фойгтом [27, 28]. Эти модели были развиты в середине XX в. в значительной степени благодаря работам Дж. Г. Олдройта [24, 25]. Впоследствии эти и более общие модели изучались многими авторами (см., например, [7, 16], а также указанную там литературу). В работах [3, 5, 13, 26] проводится спектральный анализ некоторых моделей вязкоупругих несжимаемых жидкостей (см. также указанную там литературу).

В настоящей работе исследуется задача о малых движениях вязкоупругой сжимаемой жидкости Максвелла, заполняющей ограниченную равномерно вращающуюся область. В третьем разделе исследуется вопрос разрешимости соответствующей системы интегродифференциальных уравнений, граничных и начальных условий. При этом соответствующая задача Коши для системы интегродифференциальных уравнений сводится к задаче Коши

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}\xi + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Оператор $\mathcal{A}$ представляет из себя некоторую операторную блок-матрицу и является максимальным аккретивным оператором. Отсюда выводится утверждение о разрешимости исходной начально-краевой задачи.

В четвертом разделе исследуется задача о спектре оператора $\mathcal{A}$, которая ассоциируется со спектральной задачей для исходной системы интегродифференциальных уравнений. Установлено, что спектр оператора $\mathcal{A}$ расположен в правой открытой полуплоскости, а при отсутствии вращения — отделен от мнимой оси. Существенный спектр оператора $\mathcal{A}$ в общем случае состоит из конечного количества точек и отрезков на действительной положительной полуоси. Дискретный спектр расположен в некоторой вертикальной полосе, сгущается к бесконечности и имеет степенное асимптотическое распределение. Если система не вращается, то при некоторых условиях на физические параметры системы, дискретный спектр оператора $\mathcal{A}$, лежащий в окрестности действительной оси, — вещественный.

2. Постановка задачи

2.1. Модель вязкоупругой сжимаемой жидкости Максвелла. Движение вязкой сжимаемой жидкости Максвелла в ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ описывается следующей системой уравнений (см. [6]):

$$\widehat{\rho}\Big[\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\Big]=-\nabla\widehat{P}+J_1(t)\big(\Delta\mathbf{v}+\frac{1}{3}\nabla\mathrm{div}\mathbf{v}\big)+J_2(t)\nabla\mathrm{div}\mathbf{v}+\widehat{\rho}\mathbf{F}\quad(\text{в }\Omega),\tag{2.1}$$

$$\frac{\partial\widehat{\rho}}{\partial t}+\mathrm{div}(\widehat{\rho}\mathbf{v})=0\quad(\text{в }\Omega),\quad\mathbf{v}=\mathbf{0}\quad(\text{на }\partial\Omega).\tag{2.2}$$

Здесь $\mathbf{v}=\mathbf{v}(t,x)$ $(x:=(x_1,x_2,x_3)\in\Omega)$ — поле скоростей жидкости, $\widehat{\rho}=\widehat{\rho}(t,x)$ — плотность жидкости, $\widehat{P}=\widehat{P}(t,x)$ — давление в жидкости, $\mathbf{F}=\mathbf{F}(t,x)$ — поле внешних сил,

$$J_1(t)\mathbf{u}(t,x):=\sum_{l=1}^{m}\int_0^t\mu_l e^{-b_l(t-s)}\mathbf{u}(s,x)\,ds,\quad J_2(t)\mathbf{u}(t,x):=\sum_{l=1}^{m}\int_0^t\eta_l e^{-b_l(t-s)}\mathbf{u}(s,x)\,ds,$$
$$\mu_l>0,\quad\eta_l>0\quad(l=\overline{1,m}),\quad 0=:b_0<b_1<b_2<\ldots<b_m.\tag{2.3}$$

2.2. Уравнения малых движений баротропной жидкости Максвелла, заполняющей равномерно вращающуюся область. Пусть сжимаемая жидкость Максвелла занимает ограниченную область $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, равномерно вращающуюся вокруг оси, сонаправленной с действием силы тяжести. Обозначим через $\mathbf{n}$ единичный вектор, нормальный к границе $\partial\Omega$ и направленный вне области Ω. Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с областью, таким образом, что ось Ox_3 совпадает с осью вращения и направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится в области Ω. В этом случае равномерная скорость вращения области запишется в виде $\omega_0\mathbf{e}_3$, где $\mathbf{e}_3$ — орт оси вращения Ox_3, а $\omega_0>0$ для определенности. Будем считать, что внешнее стационарное поле сил $\mathbf{F}_0$ является гравитационным и действует вдоль оси вращения, т. е. $\mathbf{F}_0=-g\mathbf{e}_3$, $g>0$.

Далее будем считать, что сжимаемая жидкость удовлетворяет уравнению состояния баротропной жидкости: $\widehat{P}=a_\infty^2\widehat{\rho}$, где $a_\infty=\mathrm{const}$ — скорость звука в сжимаемой жидкости.

Рассмотрим состояние относительного равновесия жидкости. Из уравнения (2.1) движения сжимаемой жидкости Максвелла, записанного в подвижной системе координат, найдем формулу для градиента стационарного давления:

$$\nabla P_0=\rho_0\big(-\omega_0^2\mathbf{e}_3\times(\mathbf{e}_3\times\mathbf{r})-g\mathbf{e}_3\big)=\rho_0\nabla\big(2^{-1}\omega_0^2|\mathbf{e}_3\times\mathbf{r}|^2-gx_3\big),\tag{2.4}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор текущей точки области Ω, а ρ_0 — стационарная плотность жидкости. Из (2.4) и соотношения $P_0=a_\infty^2\rho_0$ заключаем, что стационарная плотность ρ_0 является функцией параметра $z:=2^{-1}\omega_0^2(x_1^2+x_2^2)-gx_3$. При этом ρ_0 будет постоянной, только если в системе отсутствуют вращение и гравитационное поле. Для функции $\rho_0(z)$ выполнено также следующее свойство: $0<\alpha_1\leqslant\rho_0(z)\leqslant\alpha_2<+\infty$.

Представим теперь полное давление и плотность жидкости в виде: $\widehat{P}(t,x)=P_0(z)+p(t,x)$, $\widehat{\rho}(t,x)=\rho_0(z)+\widetilde{\rho}(t,x)$, где $p(t,x)$ и $\widetilde{\rho}(t,x)$ — это динамическое давление и плотность соответственно, возникающие при малых движениях жидкости относительно стационарного состояния.

Осуществим линеаризацию уравнений (2.1), (2.2), записанных в подвижной системе координат, относительно состояния относительного равновесия. Получим задачу о малых движениях баротропной жидкости Максвелла, заполняющей равномерно вращающееся твердое тело:

$$\frac{\partial \mathbf{u}(t,x)}{\partial t} - 2\omega_0\big(\mathbf{u}(t,x)\times\mathbf{e}_3\big) = -\nabla\Big(\frac{a_\infty^2}{\rho_0(z)}\,\widetilde{\rho}(t,x)\Big) +$$
$$+\sum_{l=1}^{m}\int_0^t e^{-b_l(t-s)}\frac{1}{\rho_0(z)}\Big(\mu_l\Delta\mathbf{u}(s,x) + \big(\eta_l+\frac{\mu_l}{3}\big)\nabla\mathrm{div}\mathbf{u}(s,x)\Big)\,ds + \mathbf{f}(t,x) \ \ (\text{в } \Omega),$$
$$\frac{\partial\widetilde{\rho}(t,x)}{\partial t} + \mathrm{div}\big(\rho_0(z)\mathbf{u}(t,x)\big) = 0 \ \ (\text{в } \Omega), \quad \mathbf{u}(t,x) = \mathbf{0} \ \ (\text{на } \partial\Omega),$$

где $\mathbf{u}(t,x)$ — поле скоростей жидкости в подвижной системе координат, $\mathbf{f}(t,x)$ — малое поле внешних сил, наложенное на гравитационное поле.

Осуществим в полученной системе с целью ее симметризации замену $a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\widetilde{\rho}(t,x) = \rho(t,x)$. В результате получим основную задачу:

$$\frac{\partial \mathbf{u}(t,x)}{\partial t} - 2\omega_0\big(\mathbf{u}(t,x)\times\mathbf{e}_3\big) = -\nabla\big(a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\rho(t,x)\big) +$$
$$+\sum_{l=1}^{m}\int_0^t e^{-b_l(t-s)}\frac{1}{\rho_0(z)}\Big(\mu_l\Delta\mathbf{u}(s,x) + \big(\eta_l+\frac{\mu_l}{3}\big)\nabla\mathrm{div}\mathbf{u}(s,x)\Big)\,ds + \mathbf{f}(t,x) \ \ (\text{в } \Omega), \tag{2.5}$$
$$\frac{\partial\rho(t,x)}{\partial t} + a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\mathrm{div}\big(\rho_0(z)\mathbf{u}(t,x)\big) = 0 \ \ (\text{в } \Omega), \quad \mathbf{u}(t,x) = \mathbf{0} \ \ (\text{на } \partial\Omega). \tag{2.6}$$

Для полноты формулировки задачи зададим еще начальные условия:

$$\mathbf{u}(0,x) = \mathbf{u}^0(x), \quad \rho(0,x) = \rho^0(x). \tag{2.7}$$

3. Теорема о существовании и единственности решения задачи

В этом разделе начально-краевая задача (2.5)–(2.7), описывающая малые движения вращающейся сжимаемой вязкоупругой жидкости Максвелла, с помощью специальных операторов сводится к задаче Коши (3.6) для системы дифференциально-операторных уравнений в гильбертовом пространстве. Затем исследуется вопрос разрешимости задачи Коши (3.6). Основное утверждение раздела — теорема 3.1.

3.1. Операторная формулировка задачи. Введем векторное гильбертово пространство $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$ с весом $\rho_0(z)$ со скалярным произведением и нормой следующего вида:

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)} := \int_\Omega \rho_0(z)\mathbf{u}(x)\cdot\overline{\mathbf{v}(x)}\,d\Omega, \quad \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)} = \int_\Omega \rho_0(z)|\mathbf{u}(x)|^2\,d\Omega.$$

Введем скалярное гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ функций, суммируемых со своими квадратами по области Ω, а также его подпространство $L_{2,\rho_0}(\Omega) := \{f\in L_2(\Omega)\mid (f,\rho_0^{1/2})_{L_2(\Omega)} = 0\}$.

Определим оператор $S\mathbf{u}(t,x) := i\big(\mathbf{u}(t,x)\times\mathbf{e}_3\big)$, $\mathcal{D}(S) = \mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$. Верна лемма, доказательство которой подобно доказательству аналогичной леммы о свойствах кориолисова оператора из [9].

Лемма 3.1. *Оператор $\mathcal{S}$ является самосопряженным и ограниченным в $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$: $\mathcal{S}=\mathcal{S}^*$, $\mathcal{S}\in\mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0))$; более того, $\|\mathcal{S}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0))} = 1$.*

Будем считать далее, что граница $\partial\Omega$ области Ω — класса C^2.

Пусть $\alpha>0$, $\beta\geqslant 0$, $\gamma\geqslant 0$. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу:

$$\begin{aligned} -\rho_0^{-1}(z)\big(\alpha\Delta\mathbf{u}(x) + \beta\nabla\mathrm{div}\mathbf{u}(x)\big) - \gamma\nabla\big[a_\infty^2\rho_0^{-1}(z)\mathrm{div}\big(\rho_0(z)\mathbf{u}(x)\big)\big] = \mathbf{v}(x) \quad (\text{в } \Omega),\\ \mathbf{u}(x) = \mathbf{0} \quad (\text{на } \partial\Omega). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Эта задача, как известно (см. [18]), имеет единственное обобщенное решение $\mathbf{u} = A^{-1}(\alpha,\beta,\gamma)\mathbf{v}$ для любого $\mathbf{v}\in\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$, где оператор $A(\alpha,\beta,\gamma)$ является самосопряженным и положительно определенным в $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$. Энергетическое пространство $\mathbf{H}_{A(\alpha,\beta,\gamma)} = \mathcal{D}(A^{1/2}(\alpha,\beta,\gamma)) = \{\mathbf{u}\in$

$\mathbf{W}_2^1(\Omega)|\ \mathbf{u}=\mathbf{0}$ (на $\partial\Omega$)$\}$ оператора $A(\alpha,\beta,\gamma)$ компактно вложено в пространство $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$, а значит, оператор $A^{-1}(\alpha,\beta,\gamma)$ компактен и положителен в $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$. Для любых $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{H}_{A(\alpha,\beta,\gamma)}$

$$\begin{gathered}(\mathbf{u},\mathbf{v})_{A(\alpha,\beta,\gamma)}=(A^{1/2}(\alpha,\beta,\gamma)\mathbf{u},A^{1/2}(\alpha,\beta,\gamma)\mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}=\alpha\mathcal{J}(\mathbf{u},\mathbf{v})+\beta\mathcal{D}(\mathbf{u},\mathbf{v})+\gamma\mathcal{F}(\mathbf{u},\mathbf{v}),\\ \mathcal{J}(\mathbf{u},\mathbf{v}):=\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^3\nabla u_i(x)\cdot\overline{\nabla v_i(x)}\,d\Omega,\quad \mathcal{D}(\mathbf{u},\mathbf{v}):=\int\limits_\Omega\operatorname{div}\mathbf{u}(x)\,\overline{\operatorname{div}\mathbf{v}(x)}\,d\Omega,\\ \mathcal{F}(\mathbf{u},\mathbf{v}):=\int\limits_\Omega\frac{a_\infty^2}{\rho_0(z)}\operatorname{div}\bigl(\rho_0(z)\mathbf{u}(x)\bigr)\,\overline{\operatorname{div}\bigl(\rho_0(z)\mathbf{v}(x)\bigr)}\,d\Omega.\end{gathered}\tag{3.2}$$

Кроме того, можно проверить, что нормы в любых двух энергетических пространствах $\mathbf{H}_{A(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)}$ и $\mathbf{H}_{A(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)}$ эквивалентны между собой.

Определим операторы $A_l:=A(\mu_l,\eta_l+3^{-1}\mu_l,0)$ $(l=\overline{1,m})$ (напомним, что $\mu_l,\eta_l>0$, $l=\overline{1,m}$), а также $A_0:=A(\sum\limits_{l=1}^m\mu_l,\sum\limits_{l=1}^m(\eta_l+3^{-1}\mu_l),1)$, $A_b:=A(\sum\limits_{l=1}^m b_l^{-1}\mu_l,\sum\limits_{l=1}^m b_l^{-1}(\eta_l+3^{-1}\mu_l),0)$.

Определим оператор $B\mathbf{u}(t,x):=a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\operatorname{div}\bigl(\rho_0(z)\mathbf{u}(t,x)\bigr)$, $\mathcal{D}(B):=\{\mathbf{u}\in\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)|\ \operatorname{div}(\rho_0\mathbf{u})\in L_2(\Omega),\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}=0$ (на $\partial\Omega$)$\}\supset\mathcal{D}(A_0^{1/2})=\mathcal{D}(A_l^{1/2})$ $(l=\overline{1,m})$.

Лемма 3.2 (см., например, [6]). *Имеют место следующие формулы*:

$$\begin{gathered}B^*\rho(x)=-\nabla\bigl(a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\rho(x)\bigr),\quad \mathcal{D}(B^*)=W^1_{2,\rho_0}(\Omega):=W_2^1(\Omega)\cap L_{2,\rho_0}(\Omega)\\ \exists\, c_l>0:\quad \|B\mathbf{u}\|_{W^1_{2,\rho_0}(\Omega)}\leqslant c_l\|A_l\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}\quad\forall\,\mathbf{u}\in\mathcal{D}(A_l)\ \ (l=\overline{0,m}).\end{gathered}$$

Для $l=\overline{1,m}$ определим следующие операторы:

$$\begin{gathered}Q_l:=A_l^{1/2}A_0^{-1/2},\quad Q_l^+:=A_0^{-1/2}A_l^{1/2},\\ Q_B:=BA_0^{-1/2},\quad Q_B^+:=A_0^{-1/2}B^*,\quad Q_{B,b}:=BA_b^{-1/2},\quad Q_{B,b}^+:=A_b^{-1/2}B^*.\end{gathered}\tag{3.3}$$

Лемма 3.3. $Q_l\in\mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0))$, $Q_B,Q_{B,b}\in\mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0),L_{2,\rho_0}(\Omega))$. *Операторы* Q_l^+, Q_B^+, $Q_{B,b}^+$ *расширяются по непрерывности до ограниченных операторов* Q_l^*, Q_B^*, $Q_{B,b}^*$ *соответственно, при этом* $Q_B^+=Q_B^*|_{\mathcal{D}(B^*)}$, $Q_{B,b}^+=Q_{B,b}^*|_{\mathcal{D}(B^*)}$, $Q_l^+=Q_l^*|_{\mathcal{D}(A_l^{1/2})}$ $(l=\overline{1,m})$. *Кроме того,*

$$Q_l^*Q_l\geqslant q_l^0I\quad(q_l^0>0,\ \ l=\overline{1,m}),\qquad Q_B^*Q_B+\sum_{l=1}^mQ_l^*Q_l=I,\qquad Q_B\Bigl[\sum_{l=1}^m\frac{1}{b_l}\,Q_l^*Q_l\Bigr]^{-1}Q_B^*=Q_{B,b}Q_{B,b}^*.$$

Доказательство. Доказательство проведем для оператора Q_l. Ограниченность Q_l следует из равенства $\mathcal{D}(A_l)=\mathcal{D}(A_0)$ $(l=\overline{1,m})$. Следовательно, $Q_l^*\in\mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0))$. Далее, для любого $\mathbf{u}\in\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$ и $\mathbf{v}\in\mathcal{D}(A_l^{1/2})$ имеем $(Q_l\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}=(\mathbf{u},Q_l^+\mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}=(\mathbf{u},Q_l^*\mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}$. Отсюда следует, что $Q_l^+=Q_l^*|_{\mathcal{D}(A_l^{1/2})}$, $\overline{Q_l^+}=Q_l^*$ $(l=\overline{1,m})$.

Из неравенства Фридрихса $\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\leqslant c\mathcal{J}(\mathbf{u},\mathbf{u})$, верного для всех $\mathbf{u}\in\mathbf{H}_{A_0}$ (см. [18, с. 186]), и (3.2) найдем, что (напомним, что $z=2^{-1}\omega_0^2(x_1^2+x_2^2)-gx_3$)

$$\begin{gathered}\mathcal{F}(\mathbf{u},\mathbf{u})\leqslant a_\infty^2\bigl(\min_{x\in\overline{\Omega}}\rho_0(z)\bigr)^{-1}\int\limits_\Omega|\nabla\rho_0(z)\cdot\mathbf{u}(x)+\rho_0(z)\operatorname{div}\mathbf{u}(x)|^2\,d\Omega\leqslant\\ \leqslant 2a_\infty^2\bigl(\min_{x\in\overline{\Omega}}\rho_0(z)\bigr)^{-1}\Bigl[c\max_{x\in\overline{\Omega}}|\nabla\rho_0(z)|^2\mathcal{J}(\mathbf{u},\mathbf{u})+\max_{x\in\overline{\Omega}}\rho_0^2(z)\mathcal{D}(\mathbf{u},\mathbf{u})\Bigr]=:d_1\mathcal{J}(\mathbf{u},\mathbf{u})+d_2\mathcal{D}(\mathbf{u},\mathbf{u}).\end{gathered}$$

Отсюда и из (3.2) для любого $\mathbf{u}\in\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$ имеем

$$\begin{gathered}\bigl(Q_l^*Q_l\mathbf{u},\mathbf{u}\bigr)_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}=\bigl(Q_l\mathbf{u},Q_l\mathbf{u}\bigr)_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}=\bigl(A_0^{-1/2}\mathbf{u},A_0^{-1/2}\mathbf{u}\bigr)_{A_l}=\\ =\mu_l\mathcal{J}(A_0^{-1/2}\mathbf{u},A_0^{-1/2}\mathbf{u})+\Bigl(\eta_l+\frac{\mu_l}{3}\Bigr)\mathcal{D}(A_0^{-1/2}\mathbf{u},A_0^{-1/2}\mathbf{u})\geqslant\\ \geqslant\frac{\mu_l}{2}\mathcal{J}(A_0^{-1/2}\mathbf{u},A_0^{-1/2}\mathbf{u})+\Bigl(\frac{\eta_l}{2}+\frac{\mu_l}{6}\Bigr)\mathcal{D}(A_0^{-1/2}\mathbf{u},A_0^{-1/2}\mathbf{u})+\end{gathered}$$

$$+\min\Big\{\frac{\mu_l}{2d_1},\frac{\eta_l}{2d_2}+\frac{\mu_l}{6d_2}\Big\}\mathcal{F}(A_0^{-1/2}\mathbf{u},A_0^{-1/2}\mathbf{u})\geqslant q_l^0\big(A_0^{-1/2}\mathbf{u},A_0^{-1/2}\mathbf{u}\big)_{A_0}=q_l^0\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)},$$

где $q_l^0>0$. Таким образом, оператор $Q_l^*Q_l$ положительно определен.

Далее, для любых $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$ имеем

$$\Big(\Big[Q_B^*Q_B+\sum_{l=1}^m Q_l^*Q_l-I\Big]\mathbf{u},\mathbf{v}\Big)_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}=$$

$$=\big(BA_0^{-1/2}\mathbf{u},BA_0^{-1/2}\mathbf{v}\big)_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}+\sum_{l=1}^m\big(A_0^{-1/2}\mathbf{u},A_0^{-1/2}\mathbf{v}\big)_{A_l}-\big(\mathbf{u},\mathbf{v}\big)_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}=$$

$$=\mathcal{F}(A_0^{-1/2}\mathbf{u},A_0^{-1/2}\mathbf{v})+\sum_{l=1}^m\Big[\mu_l\mathcal{J}(A_0^{-1/2}\mathbf{u},A_0^{-1/2}\mathbf{v})+\Big(\eta_l+\frac{\mu_l}{3}\Big)\mathcal{D}(A_0^{-1/2}\mathbf{u},A_0^{-1/2}\mathbf{v})\Big]-\big(\mathbf{u},\mathbf{v}\big)_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}=$$

$$=\big(A_0^{-1/2}\mathbf{u},A_0^{-1/2}\mathbf{v}\big)_{A_0}-\big(\mathbf{u},\mathbf{v}\big)_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}=0,$$

а значит, $Q_B^*Q_B+\sum\limits_{l=1}^m Q_l^*Q_l=I$.

Из плотности множества $\mathcal{D}(A_0^{1/2})$ в $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho)$ и соотношений

$$\sum_{l=1}^m\frac{1}{b_l}\,Q_l^*Q_l\Big|_{\mathcal{D}(A_0^{1/2})}=A_0^{-1/2}A_bA_0^{-1/2}\Big|_{\mathcal{D}(A_0^{1/2})}=(A_b^{1/2}A_0^{-1/2})^*(A_b^{1/2}A_0^{-1/2})\Big|_{\mathcal{D}(A_0^{1/2})}$$

следует, что $(A_b^{1/2}A_0^{-1/2})^*(A_b^{1/2}A_0^{-1/2})=\sum\limits_{l=1}^m b_l^{-1}Q_l^*Q_l\gg 0$. Отсюда, из плотности множества $\mathcal{D}(B^*)$ в $L_{2,\rho_0}(\Omega)$, [8, теорема 5.30, с. 214] и соотношений

$$Q_B\Big[\sum_{l=1}^m\frac{1}{b_l}\,Q_l^*Q_l\Big]^{-1}Q_B^*\Big|_{\mathcal{D}(B^*)}=BA_0^{-1/2}(A_b^{1/2}A_0^{-1/2})^{-1}\big[(A_b^{1/2}A_0^{-1/2})^*\big]^{-1}A_0^{-1/2}B^*\Big|_{\mathcal{D}(B^*)}=$$

$$=BA_b^{-1/2}\big[(A_b^{1/2}A_0^{-1/2})^{-1}\big]^*A_0^{-1/2}B^*\Big|_{\mathcal{D}(B^*)}=Q_{B,b}Q_{B,b}^*\Big|_{\mathcal{D}(B^*)}$$

следует, что $Q_B\big[\sum\limits_{l=1}^m b_l^{-1}Q_l^*Q_l\big]^{-1}Q_B^*=Q_{B,b}Q_{B,b}^*$. □

С использованием введенных операторов задачу (2.5)–(2.7) запишем в виде задачи Коши для системы интегродифференциальных уравнений первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}_0:=\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)\oplus L_{2,\rho_0}(\Omega)$:

$$\begin{cases}\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}+2\omega_0 iS\mathbf{u}-B^*\rho+\sum\limits_{l=1}^m\int\limits_0^t e^{-b_l(t-s)}A_l\mathbf{u}(s)\,ds=\mathbf{f}(t),\\[2mm] \dfrac{d\rho}{dt}+B\mathbf{u}=0,\quad (\mathbf{u}(0);\rho(0))^\tau:=(\mathbf{u}^0;\rho^0)^\tau,\end{cases}\tag{3.4}$$

где символ τ обозначает операцию транспонирования.

С использованием (3.3) и леммы 3.3 перепишем систему (3.4) в обобщенной форме:

$$\begin{cases}\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}+2\omega_0 iS\mathbf{u}+A_0^{1/2}\Big\{-Q_B^*\rho+\sum\limits_{l=1}^m Q_l^*\int\limits_0^t e^{-b_l(t-s)}A_l^{1/2}\mathbf{u}(s)\,ds\Big\}=\mathbf{f}(t),\\[2mm] \dfrac{d\rho}{dt}+B\mathbf{u}=0,\quad (\mathbf{u}(0);\rho(0))^\tau:=(\mathbf{u}^0;\rho^0)^\tau.\end{cases}\tag{3.5}$$

Определение 3.1. Решение задачи (3.5) назовем *решением* начально-краевой задачи (2.5)–(2.7). Элемент $\zeta(t):=(\mathbf{u}(t);\rho(t))^\tau$ назовем *решением* задачи (3.5), если $\zeta(t)\in\mathcal{D}(A_0^{1/2})\oplus L_{2,\rho_0}(\Omega)$ при каждом $t\in\mathbb{R}_+:=[0,+\infty)$, $(\mathbf{u}(t);\rho(t))^\tau\in C^1(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}_0)$, выражение в фигурных скобках принимает значения в $\mathcal{D}(A_0^{1/2})$ и $A_0^{1/2}\{\dots\}\in C(\mathbb{R}_+;\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0))$, $(\mathbf{u}(0);\rho(0))^\tau:=(\mathbf{u}^0;\rho^0)^\tau$ и выполнены уравнения из (3.5) для любого $t\in\mathbb{R}_+$.

3.2. Переход к дифференциально-операторному уравнению первого порядка. Теорема о разрешимости. Пусть $\mathbf{u}(t)$, $\rho(t)$ — решение задачи (3.5). Тогда с использованием (3.3) получим, что $\mathbf{u}(t)$, $\rho(t)$ удовлетворяют также следующей системе

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\omega_0 iS\mathbf{u} + A_0^{1/2}\Big\{ -Q_B^*\rho + \sum\limits_{l=1}^{m} Q_l^* \int\limits_0^t e^{-b_l(t-s)} Q_l A_0^{1/2}\mathbf{u}(s)\,ds \Big\} = \mathbf{f}(t), \\ \dfrac{d\rho}{dt} + Q_B A_0^{1/2}\mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{u}(0);\rho(0))^\tau := (\mathbf{u}^0;\rho^0)^\tau, \end{cases} \tag{3.6}$$

Осуществим в системе (3.6) следующие замены:

$$\mathbf{v}_l(t) := \int\limits_0^t e^{-b_l(t-s)} Q_l A_0^{1/2}\mathbf{u}(s)\,ds \quad (l=\overline{1,m}). \tag{3.7}$$

Поля $\mathbf{v}_l(t)$ $(l=\overline{1,m})$ непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}_+$. Продифференцированные соотношения (3.7) и преобразованные уравнения системы (3.6) составляют следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\omega_0 iS\mathbf{u} + A_0^{1/2}\Big\{ -Q_B^*\rho + \sum\limits_{l=1}^{m} Q_l^*\mathbf{v}_l \Big\} = \mathbf{f}(t), \\ \dfrac{d\rho}{dt} + Q_B A_0^{1/2}\mathbf{u} = 0, \quad \dfrac{d\mathbf{v}_l}{dt} - Q_l A_0^{1/2}\mathbf{u} + b_l\mathbf{v}_l = 0 \quad (l=\overline{1,m}), \\ \qquad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \rho(0)=\rho^0, \quad \mathbf{v}_l(0) = 0 \ \ (l=\overline{1,m}). \end{cases} \tag{3.8}$$

Эту систему будем трактовать как задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := \mathbf{H}\oplus\mathcal{H}_0$, где $\mathcal{H}_0 := L_{2,\rho_0}(\Omega)\oplus\big(\oplus_{l=1}^m \mathbf{H}\big)$, $\mathbf{H} := \mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}\xi + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0. \tag{3.9}$$

Здесь $\xi := (\mathbf{u};w)^\tau$, $w := (\rho;\mathbf{v}_1;\ldots;\mathbf{v}_m)^\tau$, $\xi^0 := (\mathbf{u}^0;w^0)^\tau$, $w^0 := (\rho^0;\mathbf{0};\ldots;\mathbf{0})^\tau$, $\mathcal{F}(t) := (\mathbf{f}(t);0)^\tau$. Для операторного блока $\mathcal{A}$ справедливо следующее представление:

$$\mathcal{A} = \operatorname{diag}\big(A_0^{1/2},\mathcal{I}\big)\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G}\end{pmatrix}\operatorname{diag}\big(A_0^{1/2},\mathcal{I}\big) + \operatorname{diag}\big(2\omega_0 iS, 0\big), \tag{3.10}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{\xi = (\mathbf{u};w)^\tau \in \mathcal{H} \mid \mathbf{u}\in\mathcal{D}(A_0^{1/2}), \quad \mathcal{Q}^*w\in\mathcal{D}(A_0^{1/2})\}, \tag{3.11}$$

где I, $\mathcal{I}$ — единичные операторы в $\mathbf{H} = \mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$ и $\mathcal{H}_0$ соответственно,

$$\mathcal{Q} := \big(-Q_B, Q_1,\ldots,Q_m\big)^\tau, \quad \mathcal{G} := \operatorname{diag}\big(0, b_1 I,\ldots,b_m I\big).$$

Дадим следующее

Определение 3.2 (см. [10, с. 38])**.** *Сильным решением* задачи Коши (3.9) назовем функцию $\xi(t)$ такую, что $\xi(t)\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$ для любого t из $\mathbb{R}_+$, $\mathcal{A}\xi(t)\in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{H})$, $\xi(t)\in C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{H})$, $\xi(0)=\xi^0$ и выполнено уравнение из (3.9) для любого $t\in\mathbb{R}_+$.

При доказательстве следующих утверждений используем такой известный факт. Пусть $A_{kl}\in\mathcal{L}(H)$ $(k,l=1,2)$, $A_{22}^{-1}\in\mathcal{L}(H)$, $D_1 := A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$. Если $D_1^{-1}\in\mathcal{L}(H)$, то существует

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}^{-1} &= \left[\begin{pmatrix} I & A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I\end{pmatrix}\right]^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} D_1^{-1} & -D_1^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}D_1^{-1} & A_{22}^{-1}\big[A_{22} + A_{21}D_1^{-1}A_{12}\big]A_{22}^{-1}\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Пусть $A_{11}^{-1}\in\mathcal{L}(H)$, $D_2 := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$. Если $D_2^{-1}\in\mathcal{L}(H)$, то существует

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}^{-1} &= \left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & D_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I\end{pmatrix}\right]^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}^{-1}\big[A_{11} + A_{12}D_2^{-1}A_{21}\big]A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1} \\ -D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & D_2^{-1}\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Лемма 3.4. *Оператор $\mathcal{A}$ максимальный аккретивный.*

Доказательство. **1.** Прежде всего заметим, что $\mathcal{D}(A_0^{1/2}) \oplus \mathcal{D}(B^*) \oplus_{l=1}^m \mathcal{D}(A_l^{1/2}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$, а значит оператор $\mathcal{A}$ плотно определен. Действительно, пусть $\xi = (\mathbf{u}; w)^\tau \in \mathcal{D}(A_0^{1/2}) \oplus \big[\mathcal{D}(B^*) \oplus_{l=1}^m \mathcal{D}(A_l^{1/2})\big]$, т. е. $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(A_0^{1/2})$, $\rho \in \mathcal{D}(B^*)$, $\mathbf{v}_l \in \mathcal{D}(A_l^{1/2})$ $(l = \overline{1,m})$. Тогда с использованием леммы 3.3 найдем

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \in \mathcal{D}(A_0^{1/2}), \quad \mathcal{Q}^* w &= -Q_B^*\rho + \sum_{l=1}^m Q_l^*\mathbf{v}_l = -Q_B^*\big|_{\mathcal{D}(B^*)}\rho + \sum_{l=1}^m Q_l^*\big|_{\mathcal{D}(A_l^{1/2})}\mathbf{v}_l = \\ &= -A_0^{-1/2}B^*\rho + \sum_{l=1}^m A_0^{-1/2}A_l^{1/2}\mathbf{v}_l = A_0^{-1/2}\big[-B^*\rho + \sum_{l=1}^m A_l^{1/2}\mathbf{v}_l\big] \in \mathcal{D}(A_0^{1/2}), \end{aligned} \tag{3.14}$$

т. е. $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ (см. (3.11)).

Покажем, что оператор $\mathcal{A}$ аккретивен. Пусть $\xi = (\mathbf{u}; w)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, тогда $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(A_0^{1/2})$ и из факторизации (3.10) оператора $\mathcal{A}$ симметричной формы и леммы 3.1 получим

$$\operatorname{Re}\big(\mathcal{A}\xi, \xi\big)_{\mathcal{H}} = \operatorname{Re}\left(\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_0^{1/2}\mathbf{u} \\ w\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_0^{1/2}\mathbf{u} \\ w\end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}} = \|\mathcal{G}^{1/2}w\|^2_{\mathcal{H}_0} \geqslant 0.$$

2. Докажем, что оператор $\mathcal{A}$ максимален и замкнут. Для этого достаточно показать (см. [10, теорема 4.3, с. 109]), что оператор $\mathcal{A} - \lambda$ непрерывно обратим при $\lambda < 0$. Положим $\xi_1 := (\mathbf{u}_1; w_1)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $\xi_2 := (\mathbf{u}_2; w_2)^\tau \in \mathcal{H}$. Определим оператор $S_A := A_0^{-1/2}SA_0^{-1/2}$. Из (3.10) найдем, что уравнение $(\mathcal{A} - \lambda)\xi_1 = \xi_2$ можно переписать в векторно-матричной форме:

$$\operatorname{diag}(A_0^{1/2}, \mathcal{I})\begin{pmatrix} 2\omega_0 iS_A - \lambda A_0^{-1} & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} - \lambda\end{pmatrix}\operatorname{diag}(A_0^{1/2}, \mathcal{I})\begin{pmatrix}\mathbf{u}_1 \\ w_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{u}_2 \\ w_2\end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

Отсюда видно, что оператор $\mathcal{A} - \lambda$ будет иметь ограниченный обратный оператор, определенный на всем пространстве $\mathcal{H}$, т. е. будет иметь резольвенту $\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) := (\mathcal{A} - \lambda)^{-1}$, если средний блок в (3.15) будет непрерывно обратим в $\mathcal{H}$.

Введем оператор-функцию $L(\lambda) := -\lambda A_0^{-1} + 2\omega_0 iS_A + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}$. Фиксируем $\lambda < 0$. Для любого $0 \neq \mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$ с использованием леммы 3.3 найдем, что

$$\begin{aligned} \|L(\lambda)\mathbf{u}\| &\geqslant \|\mathbf{u}\|^{-1}\cdot|(L(\lambda)\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}| \geqslant \|\mathbf{u}\|^{-1}\cdot\operatorname{Re}(L(\lambda)\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)} = \\ &= -\lambda\|\mathbf{u}\|^{-1}\cdot\|A_0^{-1/2}\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^{-1}\cdot((\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}\mathbf{u}, \mathcal{Q}\mathbf{u})_{\mathcal{H}_0} \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\Big[-\frac{\|Q_B\mathbf{u}\|^2}{\lambda} + \sum_{l=1}^m \frac{\|Q_l\mathbf{u}\|^2}{b_l - \lambda}\Big] \geqslant \sum_{l=1}^m \frac{q_l^0}{b_l - \lambda}\cdot\|\mathbf{u}\|, \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\|[L(\lambda)]^*\mathbf{u}\| \geqslant \ldots \geqslant \sum_{l=1}^m \frac{q_l^0}{b_l - \lambda}\cdot\|\mathbf{u}\|.$$

Следовательно, $L^{-1}(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0))$ и из (3.12) получим, что

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} -\lambda A_0^{-1} + 2\omega_0 iS_A & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} - \lambda\end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \left[\begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ 0 & \mathcal{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{G} - \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q} & \mathcal{I}\end{pmatrix}\right]^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q} & \mathcal{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} L^{-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ 0 & \mathcal{I}\end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} L^{-1}(\lambda) & -L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda) & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) - \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \end{aligned} \tag{3.17}$$

где $\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) := (\mathcal{G} - \lambda)^{-1}$. Отсюда следует, что оператор $\mathcal{A}$ замкнут и максимален. □

Из (3.15), (3.17) получим представление для резольвенты оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} A_0^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A_0^{-1/2} & -A_0^{-1/2}L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)A_0^{-1/2} & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) - \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

при всех $\lambda \notin \sigma(\mathcal{G}) \cup \sigma(L(\lambda))$, где $\sigma(\mathcal{G})$, $\sigma(L(\lambda))$ — спектры оператора $\mathcal{G}$ и операторного пучка $L(\lambda)$ соответственно.

Следствием леммы 3.4 является следующая теорема о разрешимости задачи (2.5)–(2.7).

Теорема 3.1. *Пусть* $\mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(A_0^{1/2})$, $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$, $\mathbf{f}(t,x) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0))$. *Тогда решение задачи* (2.5)–(2.7) (*в смысле определения* 3.1) *существует и единственно.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(A_0^{1/2})$, $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$, $\xi^0 := (\mathbf{u}^0; w^0)^\tau$, $w^0 := (\rho^0; 0; \ldots; 0)^\tau$. Из (3.14) найдем, что $\xi^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Из условий теоремы и (3.9) следует, что $\mathcal{F}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$.

Из [10, теорема 4.5, с. 110] следует, что оператор $-\mathcal{A}$ порождает сильно непрерывную полугруппу сжимающих операторов. Из [10, теорема 6.5, с. 166] следует, что задача Коши (3.9) имеет единственное сильное (в смысле определения 3.2) решение.

Пусть функция $\xi(t)$ — единственное решение задачи Коши (3.9), то есть $\xi(t) = (\mathbf{u}(t); w(t))^\tau$, где $w(t) = (\rho(t); \mathbf{v}_1(t); \ldots; \mathbf{v}_m(t))^\tau$, причем $\mathcal{A}\xi(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, $\xi(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$. Тогда $\mathbf{u}(t)$, $\rho(t)$ — решение системы (3.6) (или (3.5)) в смысле определения 3.1. □

4. Задача о спектре вязкоупругой сжимаемой жидкости

В этом разделе исследуется спектр операторного блока $\mathcal{A}$ (см. (3.10)-(3.11)). Основным утверждением здесь является следующая теорема, доказываемая в леммах 4.1, 4.3–4.8.

Теорема 4.1.

1. $\{0, b_1, \ldots, b_m\} \subset \rho(\mathcal{A})$ (*леммы* 4.1, 4.3).
2. $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \Lambda_{E,1} \cup \Lambda_{E,2} \cup \Lambda_L \subset (0, b_m)$ (*см.* (4.9), (4.10)). *Множество* $\mathbb{C} \backslash \sigma_{ess}(\mathcal{A})$ *состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора* $\mathcal{A}$. *Спектр оператора* $\mathcal{A}$ *расположен симметрично относительно действительной оси* (*лемма* 4.4).
3. $\sigma(\mathcal{A}) \subset \big\{\lambda \in \mathbb{C} | \, 0 < \mathrm{Re}\lambda < b_m\big\}$ (*лемма* 4.6). *Спектр оператора* $\mathcal{A}$ *имеет две ветви собственных значений* $\{\lambda_k^{(\pm i\infty)}\}_{k=1}^\infty$ *со следующей асимптотикой* (*лемма* 4.5):

$$\lambda_k^{(\pm i\infty)} = \pm i\lambda_k^{1/2}(A_0)(1 + o(1)) \quad (k \to +\infty),$$

$$\lambda_k(A_0) = \Big(\frac{1}{6\pi^2}\int\limits_\Omega \rho_0^{3/2}(z)\Big\{2\Big[\sum_{l=1}^m \frac{\mu_l}{b_l}\Big]^{-3/2} + \Big[a_\infty^2\rho_0(z) + \sum_{l=1}^m \frac{3\eta_l + 4\mu_l}{3b_l}\Big]^{-3/2}\Big\}\, d\Omega\Big)^{-2/3} k^{2/3}(1 + o(1)).$$

4. *Пусть* $\omega_0 = 0$, *тогда существует* $\beta_0 > 0$ *такое, что* (*лемма* 4.7)

$$\sigma(\mathcal{A}) \cap \big\{\lambda \in \mathbb{C} | \, \mathrm{Im}\lambda \neq 0\big\} \subset \big\{\lambda \in \mathbb{C} | \, \beta_0 \leqslant \mathrm{Re}\lambda < b_m/2\big\}.$$

5. *Пусть* $\omega_0 = 0$ *и существует* $0 < \varepsilon < b_m^{-2}$ *такое, что* (*см.* (3.2))

$$\mathcal{J}(\mathbf{u},\mathbf{u})\sum_{l=1}^m \Big(\frac{1}{(b_l - \lambda)^2} - \varepsilon\Big)\mu_l + \mathcal{D}(\mathbf{u},\mathbf{u})\sum_{l=1}^m \Big(\frac{1}{(b_l - \lambda)^2} - \varepsilon\Big)\Big(\eta_l + \frac{\mu_l}{3}\Big) + \\ + \mathcal{F}(\mathbf{u},\mathbf{u})\Big(\frac{1}{\lambda^2} - \varepsilon\Big) \geqslant \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}$$

   при всех $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{A_0}$ *и* $\lambda \in \cup_{l=1}^m (b_{l-1}, b_l)$ $(b_0 = 0)$. *Тогда спектр оператора* $\mathcal{A}$, *лежащий в области* $\{\lambda \in \mathbb{C} | \, \mathrm{Im}\lambda \neq 0\}$, *сгущается только к бесконечности* (*лемма* 4.8).

4.1. Вывод основных спектральных задач. Будем разыскивать решения однородного (при $\mathcal{F}(t) \equiv 0$) уравнения (3.9) в виде $\xi(t) = \exp(-\lambda t)\xi$, где λ — спектральный параметр, а ξ — амплитудный элемент. В результате придем к следующей основной спектральной задаче:

$$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi, \quad \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}, \tag{4.1}$$

которую будем ассоциировать с задачей о спектре вязкоупругой сжимаемой жидкости Максвелла.

Пусть $\xi = (\mathbf{u}; w)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Осуществив с учетом факторизации (3.10) в спектральной задаче (4.1) замену искомого элемента $\mathrm{diag}(A_0^{1/2}, \mathcal{I})\xi = \eta =: (\mathbf{z}; w)^\tau$, получим спектральную задачу

$$\mathcal{A}(\lambda)\eta := \begin{pmatrix} -\lambda A_0^{-1} + 2\omega_0 i S_A & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} - \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ w \end{pmatrix} = 0, \quad \eta \in \mathcal{H} = \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0) \oplus \mathcal{H}_0, \tag{4.2}$$

где $S_A = A_0^{-1/2} S A_0^{-1/2}$. Пусть $\lambda \notin \{0, b_1, \ldots, b_m\} = \sigma(\mathcal{G})$, тогда из (4.2), (3.10) найдем, что

$$\begin{aligned} L(\lambda)\mathbf{z} : &= \big[-\lambda A_0^{-1} + 2\omega_0 i S_A + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}\big]\mathbf{z} = \\ &= \Big[-\lambda A_0^{-1} + 2\omega_0 i S_A - \frac{1}{\lambda} Q_B^* Q_B + \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - \lambda} Q_l^* Q_l\Big]\mathbf{z} = 0, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{H} = \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Из (3.16) следует, что спектр оператора $\mathcal{A}$ и спектр пучка $L(\lambda)$ (спектры задач (4.1) и (4.3)) совпадают между собой при $\lambda \notin \sigma(\mathcal{G})$.

4.2. О существенном и дискретном спектре задачи. Прежде всего установим следующую лемму о точках множества $\{0, b_1, \ldots, b_m\}$.

Лемма 4.1. $\{b_1, \ldots, b_m\} \subset \rho(\mathcal{A})$. *Точка* $\lambda = 0$ *не является собственным значением оператора* $\mathcal{A}$ (*спектральной задачи* (4.1)).

Доказательство. Запишем уравнение $(\mathcal{A} - \lambda)\xi = \xi_0$ в виде системы (см. (3.8), (3.10)):

$$\begin{cases} 2\omega_0 i S\mathbf{u} + A_0^{1/2}\Big\{ -Q_B^*\rho + \sum\limits_{l=1}^m Q_l^*\mathbf{v}_l\Big\} - \lambda\mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \\ Q_B A_0^{1/2}\mathbf{u} - \lambda\rho = \rho_0, \\ -Q_l A_0^{1/2}\mathbf{u} + b_l\mathbf{v}_l - \lambda\mathbf{v}_l = \mathbf{v}_{l0}, \quad l = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{4.4}$$

1. Положим в системе (4.4) $\lambda = 0$, $\xi_0 = (\mathbf{u}_0; \rho_0; \mathbf{v}_{10}; \ldots; \mathbf{v}_{m0})^\tau = 0$ и выразим из третьего уравнения поле $\mathbf{v}_l$. С учетом (3.3) найдем, что $\mathbf{v}_l = b_l^{-1} Q_l A_0^{1/2}\mathbf{u} = b_l^{-1} A_l^{1/2}\mathbf{u}$ ($l = \overline{1,m}$). Используем найденные элементы в первом уравнении системы (4.4); умножим первое уравнение системы скалярно на поле $\mathbf{u}$, а второе — на функцию ρ. После простых преобразований получим систему

$$\begin{cases} 2\omega_0 i(S\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)} - (Q_B^*\rho, A_0^{1/2}\mathbf{u})_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)} + \sum\limits_{l=1}^m \dfrac{1}{b_l}\, \|A_l^{1/2}\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)} = 0, \\ (Q_B A_0^{1/2}\mathbf{u}, \rho)_{L_{2,\rho_0(\Omega)}} = \overline{(Q_B^*\rho, A_0^{1/2}\mathbf{u})}_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)} = 0. \end{cases}$$

Из этой системы следует, что $\sum\limits_{l=1}^m b_l^{-1}\|A_l^{1/2}\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)} = 0$, а значит, $\mathbf{u} = 0$ в $\mathbf{H}_{A_0} = \mathbf{H}_{A_l}$. Следовательно, $\mathbf{v}_l = 0$ ($l = \overline{1,m}$). Из системы (4.4) (при $\lambda = 0$, $\xi_0 = 0$) найдем теперь, что $Q_B^*\rho = 0$. Отсюда следует, что $\rho = 0$, так как $\mathrm{Ker} Q_B^* = \{0\}$. Таким образом, $\xi = 0$ и точка $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора $\mathcal{A}$.

2. Положим теперь в системе (4.4) $\lambda = b_q$, $\xi_0 = 0$:

$$\begin{cases} 2\omega_0 i S\mathbf{u} + A_0^{1/2}\Big\{ -Q_B^*\rho + \sum\limits_{l=1}^m Q_l^*\mathbf{v}_l\Big\} - b_q\mathbf{u} = 0, \\ Q_B A_0^{1/2}\mathbf{u} - b_q\rho = 0, \qquad -Q_q A_0^{1/2}\mathbf{u} = -A_q^{1/2}\mathbf{u} = 0, \\ -Q_l A_0^{1/2}\mathbf{u} + (b_l - b_q)\mathbf{v}_l = 0, \quad l = \overline{1,m}, \quad l \neq q. \end{cases} \tag{4.5}$$

Последовательно из третьего, второго и четвертого уравнений системы (4.5) найдем, что $\mathbf{u}=0$, $\rho=0$, $\mathbf{v}_l=0$ $(l\neq q)$. Теперь из первого уравнения (4.5) следует, что $A_0^{1/2}Q_q^*\mathbf{v}_q=0$, а значит, $\mathbf{v}_q=0$. Таким образом, $\xi=0$ и точка $\lambda=b_q$ не является собственным значением оператора $\mathcal{A}$.

3. Покажем теперь, что $b_q\in\rho(\mathcal{A})$. Для этого в силу формулы (3.16) достаточно установить, что в некоторой проколотой окрестности точки $\lambda=b_q$ существует $L^{-1}(\lambda)\in\mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0))$. С использованием леммы 3.3 преобразуем пучок $L(\lambda)$ в окрестности точки $\lambda=b_q$ следующим образом:

$$L(\lambda)=\Big[-\lambda A_0^{-1}+2\omega_0 iS_A-\frac{1}{\lambda}Q_B^*Q_B+\sum_{l=1,l\neq q}^{m}\frac{1}{b_l-\lambda}Q_l^*Q_l\Big]+\frac{1}{b_q-\lambda}Q_q^*Q_q=$$

$$=\frac{1}{b_q-\lambda}Q_q^*Q_q\Big(I+(b_q-\lambda)\big[Q_q^*Q_q\big]^{-1}\Big[-\lambda A_0^{-1}+2\omega_0 iS_A-\frac{1}{\lambda}Q_B^*Q_B+\sum_{l=1,l\neq q}^{m}\frac{1}{b_l-\lambda}Q_l^*Q_l\Big]\Big)=$$

$$=:\frac{1}{b_q-\lambda}Q_q^*Q_q\big(I+G_q(\lambda)\big),$$

где $G_q(\lambda)\to 0$ при $\lambda\to b_q$. Отсюда и из теоремы об обращении оператора, близкого к единичному, следует требуемое утверждение. □

Всюду далее будем считать, что граница $\partial\Omega$ — класса C^∞. Приведем известное утверждение об эллиптичности двух специальных краевых задач.

Лемма 4.2.

1. *Пусть* $a(x)$, $b(x)$, $c(x)\in C(\overline{\Omega})$, $c(x)\neq 0$ $(x\in\overline{\Omega})$. *Тогда следующая краевая задача является эллиптической при* $a(x)\neq 0$ $(x\in\overline{\Omega})$:

$$\begin{cases}-a(x)\Delta\mathbf{u}(x)-b(x)\nabla\mathrm{div}\mathbf{u}(x)+c(x)\nabla p(x)=\mathbf{v}(x) \quad (\textit{в } \Omega),\\ \ c(x)\,\mathrm{div}\mathbf{u}(x)=q(x) \quad (\textit{в } \Omega), \qquad \mathbf{u}(x)=\mathbf{g}(x) \quad (\textit{на } \partial\Omega).\end{cases}$$

2. *Пусть* $a(x)$, $b(x)\in C(\overline{\Omega})$. *Тогда следующая краевая задача является эллиптической, если* $a(x)\neq 0$, $a(x)+b(x)\neq 0$ $(x\in\overline{\Omega})$ *и* $2a(x)+b(x)\neq 0$ $(x\in\partial\Omega)$:

$$-a(x)\Delta\mathbf{u}(x)-b(x)\nabla\mathrm{div}\mathbf{u}(x)=\mathbf{v}(x) \quad (\textit{в } \Omega), \qquad \mathbf{u}(x)=\mathbf{g}(x) \quad (\textit{на } \partial\Omega).$$

Основываясь на лемме 4.2, докажем следующие два утверждения.

Лемма 4.3. $0\in\rho(\mathcal{A})$.

Доказательство. Доказательство $\mathcal{A}^{-1}\in\mathcal{H}$ проведем в несколько шагов.

1. Перепишем оператор $\mathcal{A}$ (см. (3.10)) относительно разложения $\mathcal{H}:=\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)\oplus L_{2,\rho_0}(\Omega)\oplus\widehat{\mathcal{H}}$, где $\widehat{\mathcal{H}}:=\oplus_{l=1}^m\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$, в следующем виде:

$$\mathcal{A}=\mathrm{diag}\big(A_0^{1/2},I,\widehat{I}\big)\begin{pmatrix}2\omega_0 iS_A & -Q_B^* & \widehat{Q}^*\\ Q_B & 0 & 0\\ -\widehat{Q} & 0 & \widehat{G}\end{pmatrix}\mathrm{diag}\big(A_0^{1/2},I,\widehat{I}\big), \tag{4.6}$$

где I, $\widehat{I}$ — единичные операторы в $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$ и $\widehat{\mathcal{H}}$ соответственно,

$$\widehat{Q}:=\big(Q_1,\ldots,Q_m\big)^\tau, \quad \widehat{G}:=\mathrm{diag}\big(b_1 I,\ldots,b_m I\big).$$

Из (3.12) и (4.6) найдем, что

$$\begin{aligned}\mathcal{A}=\mathrm{diag}\big(A_0^{1/2},I,\widehat{I}\big)\begin{pmatrix}I & 0 & \widehat{Q}^*\widehat{G}^{-1}\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & \widehat{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{Q}^*\widehat{G}^{-1}\widehat{Q}+2\omega_0 iS_A & -Q_B^* & 0\\ Q_B & 0 & 0\\ 0 & 0 & \widehat{G}\end{pmatrix}\times\\ \times\begin{pmatrix}I & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ -\widehat{G}^{-1}\widehat{Q} & 0 & \widehat{I}\end{pmatrix}\mathrm{diag}\big(A_0^{1/2},I,\widehat{I}\big).\end{aligned} \tag{4.7}$$

Из леммы 3.3 следует, что $(\widehat{Q}^*\widehat{G}^{-1}\widehat{Q}+2\omega_0 iS_A)^{-1}=(\sum\limits_{l=1}^{m}b^{-1}Q_l^*Q_l+2\omega_0 iS_A)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0))$. Если существует $\left[Q_B(\widehat{Q}^*\widehat{G}^{-1}\widehat{Q}+2\omega_0 iS_A)^{-1}Q_B^*\right]^{-1}\in\mathcal{L}(L_{2,\rho_0}(\Omega))$, то из (4.7) и (3.13) будет следовать, что $\mathcal{A}^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

2. Положим $C:=\widehat{Q}^*\widehat{G}^{-1}\widehat{Q}=\sum\limits_{l=1}^{m}b_l^{-1}Q_l^*Q_l$. Из лемм 3.1, 3.3 для любого $\mathbf{u}\in\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$ имеем

$$\|(I+2\omega_0 iC^{-1/2}S_AC^{-1/2})\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}=\|(I+2\omega_0 iC^{-1/2}A_0^{-1/2}SA_0^{-1/2}C^{-1/2})\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}\leqslant$$
$$\leqslant(1+2\omega_0\|C^{-1/2}A_0^{-1/2}\|^2_{\mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0))})\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}.$$

Отсюда, если положить $T:=(I+2\omega_0 iC^{-1/2}S_AC^{-1/2})^{-1}$, следует, что для любого $\mathbf{v}\in\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$

$$\|T\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}\geqslant(1+2\omega_0\|C^{-1/2}A_0^{-1/2}\|^2_{\mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0))})^{-2}\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}=:\gamma\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}.$$

Теперь из соотношения $T+T^*=2T^*T=2TT^*$ для любого $\rho\in L_{2,\rho_0}(\Omega)$ имеем

$$\|Q_B(\widehat{Q}^*\widehat{G}^{-1}\widehat{Q}+2\omega_0 iS_A)^{-1}Q_B^*\rho\|_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}\cdot\|\rho\|_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}=$$
$$=\|Q_BC^{-1/2}TC^{-1/2}Q_B^*\rho\|_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}\cdot\|\rho\|_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}\geqslant\mathrm{Re}(Q_BC^{-1/2}TC^{-1/2}Q_B^*\rho,\rho)_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}=$$
$$=\frac{1}{2}((T+T^*)C^{-1/2}Q_B^*\rho,C^{-1/2}Q_B^*\rho)_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}=\|TC^{-1/2}Q_B^*\rho\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}\geqslant$$
$$\geqslant\gamma\|C^{-1/2}Q_B^*\rho\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}=\gamma(Q_BC^{-1}Q_B^*\rho,\rho)_{L_{2,\rho_0}(\Omega)},$$
$$\|\left[Q_B(\widehat{Q}^*\widehat{G}^{-1}\widehat{Q}+2\omega_0 iS_A)^{-1}Q_B^*\right]^*\rho\|_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}\cdot\|\rho\|_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}\geqslant\dots\geqslant\gamma(Q_BC^{-1}Q_B^*\rho,\rho)_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}.$$

Отсюда следует, что для доказательства $\left[Q_B(\widehat{Q}^*\widehat{G}^{-1}\widehat{Q}+2\omega_0 iS_A)^{-1}Q_B^*\right]^{-1}\in\mathcal{L}(L_{2,\rho_0}(\Omega))$ достаточно установить, что оператор $Q_BC^{-1}Q_B^*=Q_B(\sum\limits_{l=1}^{m}b_lQ_l^*Q_l)^{-1}Q_B^*=Q_{B,b}Q_{B,b}^*$ (см. лемму 3.3) положительно определен в $L_{2,\rho_0}(\Omega)$ или $(Q_{B,b}Q_{B,b}^*)^{-1}\in\mathcal{L}(L_{2,\rho_0}(\Omega))$.

3. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases}-\rho_0^{-1}(z)\sum\limits_{l=1}^{m}\Big(\dfrac{\mu_l}{b_l}\Delta\mathbf{u}(x)+\big(\dfrac{\eta_l}{b_l}+\dfrac{\mu_l}{3b_l}\big)\nabla\mathrm{div}\mathbf{u}(x)\Big)+\\ \qquad\qquad+2\omega_0 i(\mathbf{u}(x)\times\mathbf{e}_3)+\nabla\big(a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\rho(x)\big)=\mathbf{v}(x)\quad(\text{в }\Omega),\\ a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\mathrm{div}\big(\rho_0(z)\mathbf{u}(x)\big)=q(x)\quad(\text{в }\Omega),\qquad\mathbf{u}(x)=0\quad(\text{на }\partial\Omega).\end{cases}\tag{4.8}$$

Система (4.8) — это система Дуглиса—Ниренберга. Краевая задача, отвечающая главной части системы (4.8), имеет вид (первое уравнение умножено на $\rho_0(z)$)

$$\begin{cases}-\sum\limits_{l=1}^{m}\Big(\dfrac{\mu_l}{b_l}\Delta\mathbf{u}(x)+\big(\dfrac{\eta_l}{b_l}+\dfrac{\mu_l}{3b_l}\big)\nabla\mathrm{div}\mathbf{u}(x)\Big)+a_\infty\rho_0^{1/2}(z)\nabla\rho(x)=\rho_0(z)\mathbf{v}(x)\quad(\text{в }\Omega),\\ a_\infty\rho_0^{1/2}(z)\mathrm{div}\mathbf{u}(x)=q(x)\quad(\text{в }\Omega),\qquad\mathbf{u}(x)=0\quad(\text{на }\partial\Omega)\end{cases}$$

и является эллиптической в силу леммы 4.2. Из [20] следует, что максимальный оператор, являющийся L_2-реализацией краевой задачи (4.8), фредгольмов. С использованием операторов A_b, $Q_{B,b}$, $Q_{B,b}^*$, $S_{A_b}=A_b^{-1/2}SA_b^{-1/2}$ краевую задачу (4.8) можно переписать в следующей операторной форме в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}_0:=\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)\oplus L_{2,\rho_0}(\Omega)$:

$$\mathbf{B}\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \rho\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_b^{1/2}&0\\0&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I+2\omega_0 iS_{A_b}&-Q_{B,b}^*\\Q_{B,b}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_b^{1/2}&0\\0&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \rho\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}A_b^{1/2}\big((I+2\omega_0 iS_{A_b})A_b^{1/2}\mathbf{u}-Q_{B,b}^*\rho\big)\\ Q_{B,b}A_b^{1/2}\mathbf{u}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{v}\\ q\end{pmatrix},$$
$$\mathcal{D}(\mathbf{B})=\{\zeta=(\mathbf{u};\rho)^\tau\in\mathbf{H_0}\mid\mathbf{u}-A_b^{-1/2}(I+2\omega_0 iS_{A_b})^{-1}Q_{B,b}^*\rho\in\mathcal{D}(A_b)\}.$$

Оператор $\mathbf{B}$ является максимальным аккретивным оператором, $\mathrm{Ker}\mathbf{B}=\{0\}$. Эти факты доказываются по аналогии с соответствующими утверждениями в леммах 3.4 и 4.1. Оператор $\mathbf{B}^*$ также является максимальным аккретивным оператором, $\mathrm{Ker}\mathbf{B}^* = \{0\}$. Отсюда и из фредгольмовости оператора $\mathbf{B}$ следует, что существует $\mathbf{B}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_0)$.

4. Докажем теперь, что существует $(Q_{B,b}Q_{B,b}^*)^{-1} \in \mathcal{L}(L_{2,\rho_0}(\Omega))$. Допустим, что это не верно. Тогда существует некомпактная последовательность $\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset L_{2,\rho_0}(\Omega)$ такая, что $\|\rho_n\|_{L_{2,\rho_0}(\Omega)} = 1$, $Q_{B,b}Q_{B,b}^*\rho_n \to 0$ $(n \to +\infty)$ в $L_{2,\rho_0}(\Omega)$. Определим $\zeta_n := (A_b^{-1/2}(I + 2\omega_0 iS_{A_b})^{-1}Q_{B,b}^*\rho_n; \rho_n)^\tau$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\{\zeta_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{D}(\mathbf{B})$, так как $[A_b^{-1/2}(I+2\omega_0 iS_{A_b})^{-1}Q_{B,b}^*\rho_n] - A_b^{-1/2}(I+2\omega_0 iS_{A_b})^{-1}Q_{B,b}^*[\rho_n] = 0 \in \mathcal{D}(A_b)$. Кроме того, имеем

$$\zeta_n \nrightarrow 0, \quad \mathbf{B}\zeta_n = \mathbf{B}\begin{pmatrix} A_b^{-1/2}(I + 2\omega_0 iS_{A_b})^{-1}Q_{B,b}^*\rho_n \\ \rho_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Q_{B,b}Q_{B,b}^*\rho_n \end{pmatrix} \to 0 \quad (n \to +\infty),$$

что противоречит $\mathbf{B}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_0)$. Таким образом, $(Q_{B,b}Q_{B,b}^*)^{-1} \in \mathcal{L}(L_{2,\rho_0}(\Omega))$, и лемма доказана. □

Определение 4.1. *Существенным спектром* оператора $\mathcal{A}$ (спектральной задачи (4.1)) назовем множество $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\mathcal{A} - \lambda)$ — нефредгольмов$\}$.

Для описания существенного спектра задачи определим функции

$$\varphi(\lambda) := \sum_{l=1}^{m} \frac{\mu_l}{b_l - \lambda}, \quad \psi(\lambda, x) := \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{b_l - \lambda}\Big(\eta_l + \frac{\mu_l}{3}\Big) - \frac{1}{\lambda}\, a_\infty^2 \rho_0(z). \tag{4.9}$$

С помощью функций (4.9) определим множества в комплексной плоскости (точнее, на $\mathbb{R}_+$)

$$\begin{aligned} \Lambda_{E,1} &:= \big\{\lambda \in \mathbb{C} |\ \varphi(\lambda) = 0\big\}, \\ \Lambda_{E,2} &:= \big\{\lambda \in \mathbb{C} |\ \varphi(\lambda) + \psi(\lambda, x) = 0,\ x \in \overline{\Omega}\big\}, \\ \Lambda_L &:= \big\{\lambda \in \mathbb{C} |\ 2\varphi(\lambda) + \psi(\lambda, x) = 0,\ x \in \partial\Omega\big\}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Простые геометрические рассуждения показывают, что множество $\Lambda_{E,1}$ состоит ровно из $m-1$ различных точек, находящихся на интервале (b_1, b_m) и разделенных точками b_l $(l = \overline{2, m-1})$. Каждое из множеств $\Lambda_{E,2}$, Λ_L состоит ровно из m отрезков на интервале $(0, b_m)$. Для каждого множества отрезки разделены точками b_l $(l = \overline{1, m-1})$. Если рассматриваемая система не вращается и находится в невесомости $(\omega_0 = 0,\ g = 0)$, то $\rho_0 = \mathrm{const}$ и каждое из множеств $\Lambda_{E,2}$, Λ_L превращается в набор из m точек.

Лемма 4.4. $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \Lambda_{E,1} \cup \Lambda_{E,2} \cup \Lambda_L \subset (0, b_m)$. *Множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора $\mathcal{A}$. Спектр оператора $\mathcal{A}$ расположен симметрично относительно действительной оси.*

Доказательство. Пусть $\lambda \notin \Lambda_{E,1} \cup \Lambda_{E,2} \cup \Lambda_L$, $\lambda \notin \sigma(\mathcal{G})$. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\rho_0(z)} \sum_{l=1}^{m} \Big[\frac{\mu_l}{b_l - \lambda}\Delta\mathbf{u}(x) + \frac{1}{b_l - \lambda}\Big(\eta_l + \frac{\mu_l}{3}\Big)\nabla\mathrm{div}\mathbf{u}(x)\Big] + \\ &\qquad + \frac{1}{\lambda}\nabla\Big[\frac{a_\infty^2}{\rho_0(z)}\mathrm{div}\big(\rho_0(z)\mathbf{u}(x)\big)\Big] - 2\omega_0\big(\mathbf{u}(x) \times \mathbf{e}_3\big) - \lambda\mathbf{u}(x) = \mathbf{v}(x) \quad (\text{в } \Omega), \\ &\qquad \mathbf{u}(x) = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Из (4.9), (4.10) и леммы 4.2 найдем, что краевая задача (4.11) является эллиптической. Из [20] следует, что оператор, являющийся L_2-реализацией краевой задачи (4.11), фредгольмов. С использованием введенных ранее операторов и пучка (4.3) можно проверить, что краевую задачу (4.11) можно переписать в виде $A_0^{1/2}L(\lambda)A_0^{1/2}\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Таким образом, оператор $A_0^{1/2}L(\lambda)A_0^{1/2}$ фредгольмов в $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$.

Из [14, лемма 1, с. 52] следует, что оператор $A_0^{1/2}L(\lambda)A_0^{1/2}$ фредгольмов как оператор, действующий из $\mathbf{H}_{A_0}$ в $\mathbf{H}_{A_0}^*$ ($\mathbf{H}_{A_0}^*$ — пространство, сопряженное к $\mathbf{H}_{A_0}$ относительно скалярного произведения в $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$). Следовательно, оператор $L(\lambda)$ также фредгольмов в $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$.

Из [19, теорема 3.1, с. 374] (теорема о произведении фредгольмовых операторов), (3.10) и факторизации (3.12) теперь найдем, что оператор

$$\mathcal{A}-\lambda = \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda A_0^{-1} + 2\omega_0 i S_A & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{G}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q} & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) = (\mathcal{G}-\lambda)^{-1}$, $S_A = A_0^{-1/2} S A_0^{-1/2}$, фредгольмов. Следовательно, для существенного спектра оператора $\mathcal{A}$ получаем включение $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) \subset \Lambda_{E,1} \cup \Lambda_{E,2} \cup \Lambda_L$.

Множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$, очевидно, является связным, а оператор $\mathcal{A}$ имеет регулярные точки. Отсюда и из [8, теорема 5.17, с. 296] (теорема об устойчивости индекса и дефекта замкнутого оператора) следует, что множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора $\mathcal{A}$.

Предположим теперь, что $\lambda \notin \sigma_{ess}(\mathcal{A})$, $\lambda \in \Lambda_{E,1} \cup \Lambda_{E,2} \cup \Lambda_L$. В этом случае получим противоречие, так как регулярные точки (отличные от $0, b_1, \cdots, b_m$) и изолированные собственные значения конечной кратности оператора $\mathcal{A}$ являются регулярными и изолированными собственными значениями конечной кратности для пучка $L(\lambda)$.

Симметричность расположения спектра оператора $\mathcal{A}$ относительно действительной оси следует из самосопряженности пучка $L(\lambda)$ (см. [11, с. 174]) или из J-самосопряженности оператора $\mathcal{A}$ (см. [2, с. 131]). □

4.3. Локализация спектра и асимптотика спектра на бесконечности.

Лемма 4.5. *Для любого как угодно малого $\varepsilon > 0$ существует $R = R(\varepsilon) > 0$ такое, что весь спектр оператора $\mathcal{A}$ принадлежит множеству $\Lambda_\varepsilon^\pm \cup C_R$, где $\Lambda_\varepsilon^\pm := \{\, |\arg\lambda \mp \pi/2| < \varepsilon\}$, $C_R := \{\, |\lambda| < R\}$. Более того, спектр оператора $\mathcal{A}$ имеет две ветви собственных значений $\{\lambda_k^{(\pm i\infty)}\}_{k=1}^\infty$, расположенных в $\Lambda_\varepsilon^\pm\backslash C_R$, со следующей асимптотикой:*

$$\lambda_k^{(\pm i\infty)} = \pm i \lambda_k^{1/2}(A_0)(1+o(1)) \quad (k\to+\infty),$$

$$\lambda_k(A_0) = \Big(\frac{1}{6\pi^2}\int\limits_\Omega \rho_0^{3/2}(z)\Big\{2\Big[\sum_{l=1}^m \frac{\mu_l}{b_l}\Big]^{-3/2} + \Big[a_\infty^2\rho_0(z) + \sum_{l=1}^m \frac{3\eta_l+4\mu_l}{3b_l}\Big]^{-3/2}\Big\}\, d\Omega\Big)^{-2/3} k^{2/3}(1+o(1)).$$

Доказательство. **1**. Из леммы 4.3 следует, что $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора $\mathcal{A}$. Преобразуем пучок $-\lambda L(\lambda)$ (см. (4.3)) при $\lambda \neq 0$ с помощью леммы 3.3 к виду:

$$-\lambda L(\lambda)\mathbf{z} = \Big[\lambda^2 A_0^{-1} - 2\omega_0 i\lambda S_A + Q_B^* Q_B - \sum_{l=1}^m \frac{\lambda}{b_l-\lambda} Q_l^* Q_l\Big]\mathbf{z} =$$

$$= \Big[I + \lambda^2 A_0^{-1} - 2\omega_0 i\lambda S_A - \sum_{l=1}^m \frac{b_l}{b_l-\lambda} Q_l^* Q_l\Big]\mathbf{z} = 0, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{H} = \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0). \tag{4.12}$$

Из оценок работы [17] и $A_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0))$ найдем, что для $\pi/2 > \varepsilon > 0$ и $R > 0$

$$\|(I - i\lambda A_0^{-1/2})^{-1} S_A (I + i\lambda A_0^{-1/2})^{-1}\| \leqslant$$
$$\leqslant \|(I - i\lambda A_0^{-1/2})^{-1} A_0^{-1/4}(A_0^{-1/4}S)\| \cdot \|(I + i\lambda A_0^{-1/2})^{-1} A_0^{-1/4}\| = o(\lambda^{-1}), \tag{4.13}$$
$$\lambda\to\infty, \quad \lambda \notin \Lambda_\varepsilon^\pm \cup C_R.$$

Отсюда и из представления

$$-\lambda L(\lambda) = (I - i\lambda A_0^{-1/2})\Big[I - (I - i\lambda A_0^{-1/2})^{-1}\Big\{2\omega_0 i\lambda S_A +$$
$$+ \sum_{l=1}^m \frac{b_l}{b_l-\lambda} Q_l^* Q_l\Big\}(I + i\lambda A_0^{-1/2})^{-1}\Big](I + i\lambda A_0^{-1/2})$$

следует, что $L(\lambda)$ непрерывно обратим в $\mathbb{C}\backslash(\Lambda_\varepsilon^\pm \cup C_R)$ при достаточно большом $R = R(\varepsilon) > 0$, а значит, $\sigma(\mathcal{A}) \subset \Lambda_\varepsilon^\pm \cup C_R$.

2. С помощью оценки, аналогичной (4.13), можно найти, что

$$\|(I-\lambda A_0^{-1/2})^{-1}\Big\{2\omega_0 i\lambda S_A+\sum_{l=1}^{m}\frac{b_l}{b_l-\lambda}Q_l^*Q_l\Big\}(I+\lambda A_0^{-1/2})^{-1}\|\to 0,\quad \lambda\to\infty,\quad \lambda\in\Lambda_\varepsilon^{\pm}\backslash C_R.$$

Отсюда, из степенной асимптотики собственных значений $\lambda_k(A_0)$ оператора A_0 и теоремы об асимптотике спектра пучка вида (4.12) (см. [1, 15]) следует, что пучок $L(\lambda)$ (оператор $\mathcal{A}$) имеет в $\Lambda_\varepsilon^{\pm}\backslash C_R$ две ветви собственных значений $\lambda_k^{(\pm i\infty)}=\pm i\lambda_k^{1/2}(A_0)(1+o(1))$ $(k\to+\infty)$.

3. Асимптотика собственных значений оператора A_0 следует из [4, с. 10]. Точнее, собственные значения оператора A_0 имеют асимптотику $\lambda_k(A_0)=C_{A_0}^{-2/3}k^{2/3}(1+o(1))$ $(k\to+\infty)$, где

$$\begin{gathered}C_{A_0}:=\frac{1}{24\pi^3}\int\limits_{\Omega}d\Omega\int\limits_{|\xi|=1}\rho_0^{3/2}(z)\,\mathrm{Tr}\Big\{g_1|\xi|^2I_3+g_2(z)\xi\xi^\tau\Big\}^{-3/2}dS(\xi),\\ \xi:=(\xi_1;\xi_2;\xi_3)^\tau\in\mathbb{R}^3\backslash\{0\},\quad g_1:=\sum_{l=1}^{m}\frac{\mu_l}{b_l},\quad g_2(z):=a_\infty^2\rho_0(z)+\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{b_l}\Big(\eta_l+\frac{\mu_l}{3}\Big),\end{gathered}\tag{4.14}$$

а I_3 — единичная матрица в $\mathbb{R}^3$. Для вычисления C_{A_0} введем матрицу $\Gamma_\xi:=(|\xi|^{-1}\xi,a^\perp,b^\perp)$, состоящую из вектор-столбцов $|\xi|^{-1}\xi$, $a^\perp$, $b^\perp$. Здесь вектор-столбцы $a^\perp$, $b^\perp$ $(|a^\perp|=|b^\perp|=1)$ ортогональны ξ и между собой. Используя формулы $\Gamma_\xi^\tau\Gamma_\xi=I_3$, $\Gamma_\xi^\tau\xi\xi^\tau\Gamma_\xi=\mathrm{diag}(|\xi|^2,0,0)=:|\xi|^2P_1$, найдем собственные значения матрицы в фигурных скобках из (4.14):

$$\begin{aligned}\det\Big\{g_1|\xi|^2I_3-\lambda I_3+g_2(z)\xi\xi^\tau\Big\}&=\det\Gamma_\xi^\tau\Big\{g_1|\xi|^2I_3-\lambda I_3+g_2(z)\xi\xi^\tau\Big\}\Gamma_\xi=\\&=\det\Big\{g_1|\xi|^2I_3-\lambda I_3+g_2(z)|\xi|^2P_1\Big\}=\big([g_1+g_2(z)]|\xi|^2-\lambda\big)\big(g_1|\xi|^2-\lambda\big)^2=0.\end{aligned}$$

Следовательно, $\lambda_{1,2}=g_1|\xi|^2$, $\lambda_3=\big[g_1+g_2(z)\big]|\xi|^2$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}&\int\limits_{|\xi|=1}\mathrm{Tr}\Big\{g_1|\xi|^2I_3+g_2(z)\xi\xi^\tau\Big\}^{-3/2}dS(\xi)=\\&\qquad=\int\limits_{|\xi|=1}\Big\{2g_1^{-3/2}+\big[g_1+g_2(z)\big]^{-3/2}\Big\}|\xi|^{-3}\,dS(\xi)=4\pi\Big\{2g_1^{-3/2}+\big[g_1+g_2(z)\big]^{-3/2}\Big\}.\end{aligned}$$

Отсюда и из (4.14) следует формула асимптотики собственных значений оператора A_0. □

Из леммы 3.4 следует, что $\sigma(\mathcal{A})\subset\{\lambda\in\mathbb{C}|\,\mathrm{Re}\lambda\geqslant 0\}$. В следующей лемме уточняется расположение найденных в лемме 4.5 ветвей собственных значений и всего спектра оператора $\mathcal{A}$.

Лемма 4.6. $\sigma(\mathcal{A})\subset\big\{\lambda\in\mathbb{C}|\,0<\mathrm{Re}\lambda<b_m\big\}$.

Доказательство. Пусть $\lambda\in\sigma(\mathcal{A})$, $\lambda\notin\sigma_{ess}(\mathcal{A})\subset(0,b_m)$, $\lambda\notin\sigma(\mathcal{G})=\{0,b_1,\ldots,b_m\}$. Тогда λ, являющееся собственным значением оператора $\mathcal{A}$ (см. лемму 4.4), является также собственным значением пучка $L(\lambda)$ (см. (4.3)), то есть существует $0\neq\mathbf{z}\in\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$ такой, что $L(\lambda)\mathbf{z}=0$. Умножая последнее равенство скалярно на $\mathbf{z}$, получим уравнение, которому удовлетворяет λ:

$$-\lambda p+2\omega_0 is-\frac{1}{\lambda}q_0+\sum_{l=1}^{m}\frac{q_l}{b_l-\lambda}=0,\tag{4.15}$$

$$p:=\frac{\|A_0^{-1/2}\mathbf{z}\|^2}{\|\mathbf{z}\|^2},\quad s:=\frac{(S_A\mathbf{z},\mathbf{z})}{\|\mathbf{z}\|^2},\quad q_0:=\frac{\|Q_B\mathbf{z}\|^2}{\|\mathbf{z}\|^2},\quad q_l:=\frac{\|Q_l\mathbf{z}\|^2}{\|\mathbf{z}\|^2}\ \ (l=\overline{1,m}).$$

Выделим действительную и мнимую части из (4.15):

$$-p\mathrm{Re}\lambda-q_0\frac{\mathrm{Re}\lambda}{|\lambda|^2}+\sum_{l=1}^{m}\frac{q_l(b_l-\mathrm{Re}\lambda)}{|b_l-\lambda|^2}=0,\quad -p\mathrm{Im}\lambda+2\omega_0 s+q_0\frac{\mathrm{Im}\lambda}{|\lambda|^2}+\sum_{l=1}^{m}\frac{q_l\mathrm{Im}\lambda}{|b_l-\lambda|^2}=0.\tag{4.16}$$

Учитывая, что $p>0$, $q_l \geqslant q_l^0 > 0$ $(l=\overline{1,m})$ (см. лемму 3.3), из (4.16) и леммы 4.3 следует

$$0<\mathrm{Re}\lambda \sum_{l=1}^{m} \frac{q_l}{|b_l-\lambda|^2} < \mathrm{Re}\lambda\Big[p+\frac{q_0}{|\lambda|^2}+\sum_{l=1}^{m}\frac{q_l}{|b_l-\lambda|^2}\Big] = \sum_{l=1}^{m}\frac{b_l q_l}{|b_l-\lambda|^2} \leqslant b_m \sum_{l=1}^{m}\frac{q_l}{,}|b_l-\lambda|^2$$

и лемма доказана. □

4.4. Локализация спектра в случае $\omega_0=0$. В следующих двух утверждениях установим локализацию спектра оператора $\mathcal{A}$ в случае, когда в системе отсутствует вращение.

Лемма 4.7. *Пусть $\omega_0=0$, тогда существует $\beta_0>0$ такое, что*

$$\sigma(\mathcal{A})\cap\big\{\lambda\in\mathbb{C}|\ \mathrm{Im}\lambda\neq 0\big\}\subset\big\{\lambda\in\mathbb{C}|\ \beta_0\leqslant \mathrm{Re}\lambda<b_m/2\big\}.$$

Доказательство. Определим в $\mathbb{R}^{m+2}$ множество параметров уравнения (4.15) (при $\omega_0=0$):

$$\mathbb{T}:=\big\{(p;q_0;q_1;\ldots;q_m)^\tau\in\mathbb{R}^{m+2}|\ 0<p\leqslant\|A_0^{-1/2}\|^2,\ \ 0\leqslant q_0\leqslant\|Q_B\|^2,\ \ q_l^0\leqslant q_l\leqslant\|Q_l\|^2\ (l=\overline{1,m})\big\},$$

где числа $q_l^0>0$ определены в лемме 3.3. Уравнение (4.15) (при $\omega_0=0$) имеет m действительных положительных корней и еще два корня — пару комплексно сопряженных чисел либо пару действительных положительных чисел. Рассмотрим ситуацию, когда имеется пара комплексно сопряженных корней. В этом случае обозначим действительные корни уравнения (4.15) через $\lambda^{(l)}=\lambda^{(l)}(p,q_0,\ldots,q_m)$ $(l=\overline{1,m})$. Определим теперь число β_0 по следующей формуле:

$$\beta_0:=\inf_{(p;q_0;q_1;\ldots;q_m)\in\mathbb{T}}\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m}\big(b_l-\lambda^{(l)}(p,q_0,q_1,\ldots,q_m)\big)>0. \tag{4.17}$$

Пусть $\lambda^{(+i)}$ — комплексное собственное значение оператора $\mathcal{A}$ (см. лемму 4.4). Тогда $\lambda^{(+i)}$ — корень уравнения (4.15) (при $\omega_0=0$) при некотором $\mathbf{z}=\mathbf{z}^{(+i)}$. При этом число $\lambda^{(-i)}:=\overline{\lambda^{(+i)}}$ также будет корнем уравнения (4.15). Обозначим через $\lambda^{(l)}$ $(l=\overline{1,m})$ оставшиеся действительные (положительные) корни уравнения (4.15) (при $\omega_0=0$) и запишем уравнение (4.15) в виде

$$(-1)^m p\,(\lambda-\lambda^{(+i)})(\lambda-\lambda^{(-i)})\prod_{l=1}^{m}(\lambda-\lambda^{(l)})=0. \tag{4.18}$$

С другой стороны, уравнение (4.15) (при $\omega_0=0$) можно переписать в следующем виде:

$$\lambda^2 p\prod_{l=1}^{m}(b_l-\lambda)+q_0\prod_{l=1}^{m}(b_l-\lambda)-\lambda\sum_{l=1}^{m}q_l\prod_{k=1,\,k\neq l}^{m}(b_k-\lambda)=0. \tag{4.19}$$

Приравнивая коэффициенты при λ^{m+1} в уравнениях (4.18) и (4.19) и учитывая (4.17), теперь найдем, что $(b_0:=0)$

$$\beta_0\leqslant\mathrm{Re}\lambda^{(\pm i)}=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m}(b_l-\lambda^{(l)})<\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m}(b_l-b_{l-1})=\frac{b_m}{2}.$$

□

Лемма 4.8. *Пусть $\omega_0=0$ и существует $0<\varepsilon<b_m^{-2}$ такое, что* (*см.* (3.2))

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\mathbf{u},\mathbf{u})\sum_{l=1}^{m}\Big(\frac{1}{(b_l-\lambda)^2}-\varepsilon\Big)\mu_l+\mathcal{D}(\mathbf{u},\mathbf{u})\sum_{l=1}^{m}\Big(\frac{1}{(b_l-\lambda)^2}-\varepsilon\Big)\Big(\eta_l+\frac{\mu_l}{3}\Big)+\\ +\mathcal{F}(\mathbf{u},\mathbf{u})\Big(\frac{1}{\lambda^2}-\varepsilon\Big)\geqslant\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}\end{aligned} \tag{4.20}$$

при всех $\mathbf{u}\in\mathbf{H}_{A_0}$ и $\lambda\in\cup_{l=1}^{m}(b_{l-1},b_l)$ $(b_0=0)$. Тогда спектр оператора $\mathcal{A}$, лежащий в области $\{\lambda\in\mathbb{C}|\ \mathrm{Im}\lambda\neq 0\}$, сгущается только к бесконечности (*см. лемму* 4.5).

Доказательство. Предположим, что оператор $\mathcal{A}$ имеет ветвь собственных значений $\{\lambda_k^{(+i)}\}_{k=1}^{\infty}$, стремящихся к положительному числу $\gamma \in \sigma_{ess}(\mathcal{A})$. Тогда числа $\lambda_k^{(+i)}$ суть корни уравнений (4.15) (при $\omega_0 = 0$) при некоторых $\mathbf{z} = \mathbf{z}_k^{(+i)}$. При этом числа $\lambda_k^{(-i)} := \overline{\lambda_k^{(+i)}}$ также будут собственными значениями оператора $\mathcal{A}$ (см. лемму 4.4). Таким образом, $\lambda_k^{(\pm i)}$ будут корнями следующих функций (см. (4.15)):

$$f_k(\lambda) := -\lambda p_k + -\frac{1}{\lambda}\, q_{0,k} + \sum_{l=1}^{m} \frac{q_{l,k}}{b_l - \lambda} = 0, \tag{4.21}$$

$$p_k := \frac{\|A_0^{-1/2}\mathbf{z}_k^{(+i)}\|^2}{\|\mathbf{z}_k^{(+i)}\|^2}, \quad q_{0,k} := \frac{\|Q_B\mathbf{z}_k^{(+i)}\|^2}{\|\mathbf{z}_k^{(+i)}\|^2}, \quad q_{l,k} := \frac{\|Q_l\mathbf{z}_k^{(+i)}\|^2}{\|\mathbf{z}_k^{(+i)}\|^2} \quad (l = \overline{1,m}).$$

Можно считать, что $\lim\limits_{k\to\infty} p_k =: \widehat{p}$, $\lim\limits_{k\to\infty} q_{0,k} =: \widehat{q}_0$, $\lim\limits_{k\to\infty} q_{l,k} =: \widehat{q}_l > 0$ $(l = \overline{1,m})$. В противном случае мы ограничимся соответствующими подпоследовательностями. Определим функцию

$$f(\lambda) := -\lambda\widehat{p} - \frac{1}{\lambda}\,\widehat{q}_0 + \sum_{l=1}^{m} \frac{\widehat{q}_l}{b_l - \lambda}.$$

Таким образом, последовательность функций $\{f_k(\lambda)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится (равномерно) к функции $f(\lambda)$ в каждой замкнутой ограниченной области, не содержащей точек $\{0, b_1, \ldots, b_m\}$. По теореме Гурвица (см. [12, с. 426]) функция $f(\lambda)$ имеет в точке $\lambda = \gamma$ кратный нуль, т. е. $f'(\gamma) = 0$. Из (3.3), (3.2) и (4.20) теперь найдем, что

$$\begin{aligned}
0 = f'(\gamma) = \lim_{k\to\infty} f_k'(\gamma) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\|\mathbf{z}_k^{(+i)}\|^2}\Big[-\|A_0^{-1/2}\mathbf{z}_k^{(+i)}\|^2 + \frac{\|Q_B\mathbf{z}_k^{(+i)}\|^2}{\gamma^2} + \sum_{l=1}^{m} \frac{\|Q_l\mathbf{z}_k^{(+i)}\|^2}{(b_l-\gamma)^2}\Big] = \\
= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\|\mathbf{z}_k^{(+i)}\|^2}\Big[-\|A_0^{-1/2}\mathbf{z}_k^{(+i)}\|^2 + \mathcal{J}(A_0^{-1/2}\mathbf{z}_k^{(+i)}, A_0^{-1/2}\mathbf{z}_k^{(+i)}) \sum_{l=1}^{m} \frac{\mu_l}{(b_l-\gamma)^2} + \\
+ \mathcal{D}(A_0^{-1/2}\mathbf{z}_k^{(+i)}, A_0^{-1/2}\mathbf{z}_k^{(+i)}) \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{(b_l-\gamma)^2}\Big(\eta_l + \frac{\mu_l}{3}\Big) + \\
+ \mathcal{F}(A_0^{-1/2}\mathbf{z}_k^{(+i)}, A_0^{-1/2}\mathbf{z}_k^{(+i)}) \frac{1}{\gamma^2} \pm \varepsilon\big(A_0^{-1/2}\mathbf{z}_k^{(+i)}, A_0^{-1/2}\mathbf{z}_k^{(+i)}\big)_{A_0}\Big] \geqslant \varepsilon > 0.
\end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает лемму. □

Автор приносит благодарность проф. Н. Д. Копачевскому за обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Авакян В. А.* Асимптотическое распределение спектра линейного пучка, возмущенного аналитической оператор-функцией// Функц. анализ и его прилож. — 1978. — *12*, № 2. — С. 66-67.
2. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Наука, 1986.
3. *Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д., Орлова Л. Д.* Эволюционные и спектральные задачи, порожденные проблемой малых движений вязкоупругой жидкости// Тр. СПб. Мат. об-ва. — 1998. — *6*.— С. 5–33.
4. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра дифференциальных уравнений// Итоги науки и техн. Сер. мат. анализ. — 1977. — *14*. — С. 5–58.
5. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Спектральный анализ гиперболических вольтерровых интегродифференциальных уравнений// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 6. — С. 656–660.
6. *Закора Д. А.* Модель сжимаемой жидкости Олдройта// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — *61*. — С. 41–66.
7. *Звягин В. Г., Турбин М. В.* Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина—Фойгта// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *31*. — С. 3–144.
8. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
9. *Копачевский Н. Д, Крейн С. Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
10. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.

11. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: Штиинца, 1986.
12. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Т. 1. — М.: Наука, 1967.
13. *Милославский А. И.* Спектр малых колебаний вязкоупругой наследственной среды// Докл. АН СССР. — 1989. — *309*, № 3. — С. 532–536.
14. *Михлин С. Г.* Спектр пучка операторов теории упругости// Усп. мат. наук. — 1973. — *28*, № 3. — С. 43–82.
15. *Оразов М. Б.* Некоторые вопросы спектральной теории несамосопряженных операторов и связанные с ними задачи из механики. — Дисс. д-ра. физ.-мат. наук, 01.01.02. — Ашхабад, 1982.
16. *Осколков А. П.* Начально-краевые задачи для уравнений движений жидкостей Кельвина—Фойгта и жидкостей Олдройта// Тр. МИАН. — 1987. — *179*. — С. 126–164.
17. *Радзиевский Г. В.* Квадратичный пучок операторов. Препринт. — Киев, 1976.
18. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. — М.: Мир, 1985.
19. *Gohberg I., Goldberg S., Kaashoek M. A.* Classes of linear operators. Vol. 1. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1990.
20. *Grubb G., Geymonat G.* The essential spectrum of elliptic systems of mixed order// Math. Ann. — 1977. — *227*. — С. 247–276.
21. *Kelvin (Thomson) W.* On the theory of viscoelastic fluids// Math. A. Phys. Pap. — 1875. — *3*. — С. 27–84.
22. *Maxwell J. C.* On the dynamical theory of gases// Philos. Trans. R. Soc. London. — 1867. — *157*. — С. 49–88.
23. *Maxwell J. C.* On the dynamical theory of gases// Philos. Mag. London. — 1868. — *35*. — С. 129–145.
24. *Oldroyd J. G.* On the formulation of rheological equations of state// Proc. Roy. Soc. London. — 1950. — *A200*. — С. 523–541.
25. *Oldroyd J. G.* The elastic and viscous properties of emulsions and suspensions// Proc. R. Soc. London Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. — 1953. — *A218*. — С. 122–137.
26. *Rautian N. A., Vlasov V. V.* Well-posedness and spectral analysis of hyperbolic Volterra equations of convolution type// Differential and difference equations with applications. ICDDEA, Amadora, Portugal, May 18–22, 2015. Selected contributions. — Cham: Springer, 2016. — С. 411–419.
27. *Voight W.* Uber die innere Reibung der festen Körper, inslesondere der Krystalle// Gottinden Abh. — 1889. — *36*, № 1. — С. 3–47.
28. *Voight W.* Uber innex Reibung fester Körper, insbesondere der Metalle// Ann. Phys. U. Chem. — 1892. — *47*, № 9. — С. 671–693.

Д. А. Закора
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
295007, Симферополь, проспект Вернадского, 4;
Воронежский государственный университет,
394006, Воронеж, Университетская площадь, 1
E-mail: dmitry.zkr@gmail.com, dmitry_@crimea.edu

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2-247-265 UDC 517.984.48:532.135

Model of the Maxwell Compressible Fluid

© 2017 **D. A. Zakora**

Abstract. A model of viscoelastic barotropic Maxwell fluid is investigated. The unique solvability theorem is proved for the corresponding initial-boundary value problem. The associated spectral problem is studied. We prove statements on localization of the spectrum, on the essential and discrete spectra, and on asymptotics of the spectrum.

REFERENCES

1. V. A. Avakian, "Asimptoticheskoe raspredelenie spektra lineinogo puchka, vozmushchennogo analiticheskoi operator-funktsiei" [Asymptotic distribution of the spectrum of a linear pencil perturbed with analytic operator-function], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1978, **12**, No. 2, 66-67 (in Russian).
2. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, *Osnovy teorii lineinykh operatorov v prostranstvakh s indefinitnoi metrikoi* [Essentials of Theory of Linear Operators in Spaces with Indefinite Metrics], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
3. T. Ya. Azizov, N. D. Kopachevskii, and L. D. Orlova, "Evoliutsionnye i spektralnye zadachi, porozhdennye problemoi malykh dvizhenii viazkouprugoi zhidkosti" [Evolution and spectral problems generated by the problem of small motions of viscoelastic fluid], *Tr. SPb. Mat. ob-va* [Proc. Saint Petersburg Math. Soc.], 1998, **6**, 5–33 (in Russian).
4. M. Sh. Birman and M. Z. Solomiak, "Asimptotika spektra differentsialnykh uravnenii" [Asymptotics of the spectrum of differential equations], *Itogi nauki i tekhn. Ser. mat. analiz* [Totals Sci. Tech. Math. Anal.], 1977, **14**, 5–58 (in Russian).
5. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "Spektralnyi analiz giperbolicheskikh volterrovykh integrodifferentsialnykh uravnenii" [Spectral analysis of hyperbolic Volterra integrodifferential equations], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2015, **464**, No. 6, 656–660 (in Russian).
6. D. A. Zakora, "Model szhimaemoi zhidkosti Oldroita" [Model of the Oldroyd compressible fluid], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **61**, 41–66 (in Russian).
7. V. G. Zvyagin and M. V. Turbin, "Issledovanie nachalno-kraevykh zadach dlia matematicheskikh modelei dvizheniia zhidkostei Kelvina—Foigta" [The study of initial-boundary value problems for mathematical models of the motion of Kelvin–Voigt fluids], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2009, **31**, 3–144 (in Russian).
8. T. Kato, *Teoriia vozmushchenii lineinykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
9. N. D. Kopachevskii, S. G. Kreyn, and Ngo Zuy Kan, *Operatornye metody v lineynoy gidrodinamike: evolyutsionnye i spektral'nye zadachi* [Operator Methods in Linear Hydrodynamics: Evolution and Spectral Problems], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
10. S. G. Kreyn, *Lineinye differentsialnye uravneniia v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
11. A. S. Markus, *Vvedenie v spektralnuiu teoriiu polinomialnykh operatornykh puchkov* [Introduction to Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils], Shtiintsa, Kishinev, 1986 (in Russian).
12. A. I. Markushevich, *Teoriia analiticheskikh funktsii. T. 1* [Theory of Analytic Functions. V. 1], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
13. A. I. Miloslavskii, "Spektr malykh kolebanii viazkouprugoi nasledstvennoi sredy" [Spectrum of small oscillations of viscoelastic medium with memory], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1989, **309**, No. 3, 532–536 (in Russian).
14. S. G. Mikhlin, "Spektr puchka operatorov teorii uprugosti" [Spectrum of an operator pencil of the elasticity theory], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1973, **28**, No. 3, 43–82 (in Russian).
15. M. B. Orazov, *Nekotorye voprosy spektralnoi teorii nesamosopriazhennykh operatorov i sviazannye s nimi zadachi iz mekhaniki* [Some questions of the spectral theory of nonself-adjoint operators and related problems of mechanics], Doctoral thesis, 01.01.02, Ashkhabad, 1982.

16. A. P. Oskolkov, “Nachalno-kraevye zadachi dlia uravnenii dvizhenii zhidkostei Kelvina—Foigta i zhidkostei Oldroita” [Inital-boundary value problems for the equations of motion of the Kelvin–Voight and Oldroid fluids], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1987, **179**, 126–164 (in Russian).
17. G. V. Radzievskii, *Kvadratichnyi puchok operatorov. Preprint* [Quadratic Pencil of Operators. Preprint], Kiev, 1976 (in Russian).
18. K. Rektoris, *Variatsionnye metody v matematicheskoi fizike i tekhnike* [Variational Methods in Mathematical Physics and Technics], Mir, Moscow, 1985 (in Russian).
19. I. Gohberg, S. Goldberg, and M. A. Kaashoek, *Classes of Linear Operators. Vol. 1*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 1990.
20. G. Grubb and G. Geymonat, “The essential spectrum of elliptic systems of mixed order,” *Math. Ann.*, 1977, **227**, 247–276.
21. W. Kelvin (Thomson), “On the theory of viscoelastic fluids,” *Math. A. Phys. Pap.*, 1875, **3**, 27–84.
22. J. C. Maxwell, “On the dynamical theory of gases,” *Philos. Trans. R. Soc. London.*, 1867, **157**, 49–88.
23. J. C. Maxwell, “On the dynamical theory of gases,” *Philos. Mag. London.*, 1868, **35**, 129–145.
24. J. G. Oldroyd, “On the formulation of rheological equations of state,” *Proc. Roy. Soc. London.*, 1950, **A200**, 523–541.
25. J. G. Oldroyd, “The elastic and viscous properties of emulsions and suspensions,” *Proc. R. Soc. London Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 1953, **A218**, 122–137.
26. N. A. Rautian and V. V. Vlasov, “Well-posedness and spectral analysis of hyperbolic Volterra equations of convolution type,” *Differential and difference equations with applications*. ICDDEA, Amadora, Portugal, May 18–22, 2015. Selected contributions. — Springer, Cham, 2016, 411–419.
27. W. Voight, “Uber die innere Reibung der festen Körper, inslesondere der Krystalle,” *Gottinden Abh.*, 1889, **36**, No. 1, 3–47.
28. W. Voight, “Uber innex Reibung fester Körper, insbesondere der Metalle,” *Ann. Phys. U. Chem.*, 1892, **47**, No. 9, 671–693.

D. A. Zakora
V. I. Vernadsky Crimean Federal University
4 Vernadsky Avenue, 295007 Simferopol, Russia;
Voronezh State University
1 Universitetskaya Square, 1394006 Voronezh, Russia
E-mail: dmitry.zkr@gmail.com, dmitry_@crimea.edu