Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 2 (2017). С. 191–222

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2-191-222 УДК 517.938

ПОСТРОЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ Ω-УСТОЙЧИВЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ НА 2- И 3-МНОГООБРАЗИЯХ

© 2017 г. **В. З. ГРИНЕС, О. В. ПОЧИНКА**

Аннотация. Настоящий обзор посвящен изложению результатов, связанных с вопросами существования энергетической функции у дискретных динамических систем, а также с техникой построения таких функций для некоторых классов Ω-устойчивых и структурно устойчивых диффеоморфизмов на многообразиях размерности 2 и 3.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Пусть M — гладкое компактное ориентируемое n-многообразие. *Функцией Ляпунова* динамической системы (потока или каскада), заданной на M, называется непрерывная функция $\varphi : M \to \mathbb{R}$, которая постоянна на каждой цепной компоненте системы и убывает вдоль ее орбит вне цепно рекуррентного множества. В силу результатов Ч. Конли [19] такая функция существует для любой динамической системы, а сам факт существования носит название «Фундаментальная теорема динамических систем». В разделе 1 изложена идея построения функции Ляпунова для дискретной динамической системы. Следует отметить, что сам Ч. Конли дополнительно требовал, чтобы образ цепно рекуррентного множества в силу φ был нигде не плотен на прямой, а значения функции φ на различных компонентах цепно рекуррентного множества были различны, и называл такую функцию *полной функцией Ляпунова*. Числа, принадлежащие образу цепно рекуррентного множества, Ч. Конли назвал критическими значениями функции φ. Однако для гладкой функции ее критическим значением принято называть образ критической точки (точки, где градиент функции обращается в ноль), которая, вообще говоря, не обязана принадлежать цепно рекуррентному множеству. В связи с этим, наряду с функцией Ляпунова, в гладкой категории используется понятие *энергетической функции*, т. е. гладкой функции Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с цепно рекуррентным множеством системы.

Первые результаты по построению энергетической функции принадлежат С. Смейлу [37], который в 1961 году доказал существование энергетической функции Морса у градиентноподобных потоков. К. Мейер [30] в 1968 году обобщил этот результат, построив энергетическую функцию Морса—Ботта для произвольного потока Морса—Смейла (см. раздел 2).

Как заметил в 1985 году Дж. Фрэнкс [21], применение результатов В. Вильсона [39] к конструкции К. Конли дает существование энергетической функции у любого гладкого потока с гиперболическим цепно рекуррентным множеством. Тогда с помощью надстройки можно построить гладкую функцию Ляпунова для любого диффеоморфизма с гиперболическим цепно рекуррентным множеством. Но построенная таким образом функция может иметь критические точки, которые не являются цепно рекуррентными, и, следовательно, функция Ляпунова не является энергетической. Встает вопрос о том, какие дискретные динамические системы допускают энергетические функции. Первые результаты в этом направлении были получены Д. Пикстоном в 1977 году, в своей работе [32] он доказал существование энергетической функции Морса у любого диффеоморфизма Морса—Смейла на поверхности. В разделе 3 мы приводим обобщение результата Пикстона на Ω-устойчивые 2-диффеоморфизмы с конечным неблуждающим множеством, энергетическая функция Морса для таких диффеоморфизмов была построена в работе [11]. В той же работе [32] Д. Пикстон построил диффеоморфизм Морса—Смейла на трехмерной сфере, не обладающий энергетической функцией Морса. Также в разделе 3 дается экспозиция результатов работ [23, 24] и книги [26] о необходимых и достаточных условиях существования энергетической функции Морса у трехмерных диффеоморфизмов Морса—Смейла. Кроме того, мы приводим результаты работы [5], в которой доказано, что в примере Пикстона минимальное число критических точек функции Ляпунова, отличных от периодических точек каскада, равно двум.

Из результатов выше следует, что не все диффеоморфизмы даже с регулярной динамикой имеют энергетическую функцию. Тем более удивительным является факт наличия энергетической функции у некоторых дискретных динамических систем с хаотическим поведением, доказанный в работах [4, 7, 8]. Технически построение такой функции базируется на процедуре сглаживания непрерывного отображения, приведенной в разделе 4. В части 4 энергетическая функция конструируется для некоторых классов Ω-устойчивых 2- и 3-диффеоморфизмов с нетривиальными базисными множествами коразмерности один.

1. Фундаментальная теорема динамических систем

В этом разделе мы даем краткое изложение основной конструкции работы Ч. Конли [19], лежащей в основе построения функции Ляпунова для произвольной динамической системы (потока или каскада), заданной на компактном метрическом пространстве M с метрикой d. Оригинальная конструкция Конли сделана для потоков, при построении функции Ляпунова для каскадов Конли использовал переход к надстройке. Однако идея Конли применима к дискретным динамическим системам непосредственно, без перехода к надстройке, и была изложена Дж. Фрэнксом в [22]. Приведем схему построения функции Ляпунова для каскада, порожденного гомеоморфизмом $f : M \to M$, следуя Фрэнксу.

Для $\varepsilon > 0$ набор точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такой, что

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n-1,$$

называется ε-цепью гомеоморфизма f.

Точка $x \in M$ называется *цепно рекуррентной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число n (зависящее от ε) и ε-цепь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такая, что $x_1 = x_n = x$. Множество R_f всех цепно рекуррентных точек называется *цепно рекуррентным множеством* диффеоморфизма f.

Непосредственной проверкой устанавливается, что множество R_f является f-инвариантным и компактным.

Введем на цепно рекуррентном множестве R_f отношение эквивалентности $\sim$ правилом: $x \sim y$ для $x, y \in R_f$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существуют ε-цепи от x к y и от y к x. Класс эквивалентности точек из R_f относительно введенного отношения эквивалентности называется *цепной компонентой*.

Определение 1.1. Функцией Ляпунова для гомеоморфизма f называется непрерывная функция $\varphi : M \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами:

1. если $x \notin R_f$, то $\varphi(f(x)) < \varphi(x)$;
2. если $x, y \in R_f$, то $\varphi(x) = \varphi(y)$ тогда и только тогда, когда x и y лежат в одной цепной компоненте;
3. $\varphi(R_f)$ — компактное нигде не плотное подмножество прямой $\mathbb{R}$.

Компактное множество $A \subset M$ называется *аттрактором гомеоморфизма* f, если существует его открытая окрестность U, называемая *захватывающей*, такая, что $f(cl(U)) \subset U$ и $\bigcap\limits_{n\geqslant 0} f^n(cl(U)) = A$. Если $V = M \setminus cl(U)$ и $A^* = \bigcap\limits_{n\geqslant 0} f^{-n}(cl(V))$, тогда A^* — аттрактор для f^{-1} с захватывающей окрестностью V. Множество A^* называется *репеллером, дуальным к аттрактору* A. Из построения ясно, что A^* не зависит от выбора захватывающей окрестности U аттрактора A и $f(A) = A$, $f(A^*) = A^*$. Кроме того, из определения аттрактора (репеллера) следует, что само пространство M является аттрактором (репеллером) гомеоморфизма f, дуальным репеллером (аттрактором) к которому является пустое множество.

Предложение 1.1 (см. [22, Lemma 1.2, 1.3]). *Пусть $f : M \to M$ — гомеоморфизм. Тогда*

1. *Множество аттракторов гомеоморфизма f не более, чем счетно.*
2. *Если $\{A_n\}$ — множество всех аттракторов гомеоморфизма f и $\{A_n^*\}$ — множество соответствующих дуальных к ним репеллеров, то $R_f = \bigcap\limits_n (A_n \cup A_n^*)$.*

Предложение 1.2 (см. [22, Proposition 1.5]). *Пусть $f : M \to M$ — гомеоморфизм. Тогда точки $x, y \in M$ лежат в одной и той же цепной компоненте множества R_f тогда и только тогда, когда не существует дуальной пары аттрактор, репеллер A, A^* такой, что $x \in A$, $y \in A^*$ или $y \in A$, $x \in A^*$.*

Предложение 1.3 (см. [22, Lemma 1.7]). *Существует непрерывная функция $\varphi : M \to [0, 1]$ такая, что $\varphi^{-1}(0) = A$, $\varphi^{-1}(1) = A^*$ и φ убывает вдоль орбит множества $M \setminus (A \cup A^*)$ (т. е. $\varphi(f(x)) < \varphi(x)$, если $x \in M \setminus (A \cup A^*)$).*

Определим функцию $\varphi : M \to \mathbb{R}$ посредством сходящегося ряда:

$$\varphi(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}\varphi_n(x),$$

где $\varphi_n : M \to [0, 1]$ — непрерывная функция из предложения 1.3 для пары A_n, A_n^*.

Непосредственно проверяется, что $\varphi : M \to \mathbb{R}$ является функцией Ляпунова для каскада, порожденного гомеоморфизмом f.

Дав определения цепно рекуррентного множества, аттрактора, репеллера и функции Ляпунова для непрерывного потока f^t, заданного на M, и проделав конструкцию, аналогичную построению функции $\varphi : M \to \mathbb{R}$ для гомеоморфизма f, получаем следующий результат.

Теорема 1.1 (Фундаментальная теорема динамических систем, [19]). *Для любого непрерывного потока f^t и любого гомеоморфизма f компактного метрического пространства M существует функция Ляпунова $\varphi : M \to \mathbb{R}$.*

2. Энергетическая функция для потоков Морса—Смейла

2.1. Существование энергетической функции для гладкого потока на многообразии. В дальнейшем мы будем предполагать, что метрическое пространство M является гладким компактным многообразием. Более того, для простоты изложения мы будем считать, что граница M пуста, т. е. M является гладким замкнутым многообразием.

Определение 2.1. Гладкая функция Ляпунова φ называется *энергетической функцией* динамической системы на многообразии M, если множество критических точек φ (точек, в которых $\operatorname{grad}\varphi = 0$) совпадает с цепно рекуррентным множеством системы.

Таким образом, для энергетической функции понятие критической точки по Конли совпадает с классическим понятием критической точки как точки, в которой все частные производные первого порядка равны нулю. Как уже было отмечено выше, применение результатов В. Вильсона, полученных в [39], приводит к доказательству существования энергетической функции для произвольного гладкого потока на многообразии M. Пусть f^t — гладкий поток, индуцированный векторным полем χ, заданным на M, и A — аттрактор этого потока с захватывающей окрестностью U и бассейном притяжения $D = \bigcup\limits_{t\leqslant 0} f^t(cl(U))$. Для гладкой функции $\varphi : D \to \mathbb{R}$ обозначим через $\chi(\varphi)$ производную φ в направлении векторного поля χ.

Предложение 2.1 (см. [39, Theorem 3.2])**.** *Пусть $f^t : M \to M$ — гладкий поток, индуцированный векторным полем χ на гладком многообразии M и A — аттрактор этого потока с захватывающей окрестностью U и бассейном притяжения D. Тогда существует C^∞-функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ такая, что $\varphi(A) = 0$ и $\chi(\varphi)(x) < 0$, $x \in (D \setminus A)$.*

Непосредственно из этого предложения следует, что для гладкого потока f^t, индуцированного векторным полем χ, заданным на гладком многообразии M, предложение 1.3 может быть усилено до результата существования гладкой функции $\varphi_n : M \to [0,1]$ такой, что $\varphi_n^{-1}(0) = A_n$, $\varphi_n^{-1}(1) = A_n^*$ и $\chi(\varphi_n)(x) < 0$, $x \in (M \setminus (A_n \cup A_n^*))$ для каждой пары аттрактор-репеллер A_n, A_n^*. Тогда функция $\varphi : M \to \mathbb{R}$, определяемая рядом $\varphi(x) = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{-n}\varphi_n(x)$, является энергетической функцией потока f^t. Таким образом, фундаментальная теорема Ч. Конли (Теорема 1.1) в применении к гладким потокам на многообразии может быть переформулирована следующим образом.

Теорема 2.1. *Для любого гладкого потока f^t, заданного на гладком компактном многообразии M, существует энергетическая функция $\varphi : M \to \mathbb{R}$.*

Используя конструкцию надстройки, можно построить гладкую функцию Ляпунова φ для любого диффеоморфизма гладкого компактного многообразия на себя. Но эта функция может иметь критические точки вне цепно рекуррентного множества и, следовательно, не являться энергетической. В связи со всем вышесказанным возникают естественные вопросы, для каких классов дискретных динамических систем существует энергетическая функция и как ее строить. Частично ответы на эти вопросы будут даны ниже. Но сначала мы приведем исторически первые результаты о построении энергетической функции для потоков Морса—Смейла, полученные ранее работы Ч. Конли.

2.2. Функции Морса и Морса—Ботта. Этот раздел мы начнем с короткого введения в теорию Морса (для детального знакомства см., например, [10]).

Пусть $f : M \to \mathbb{R}$ — C^r-гладкая функция, заданная на многообразии M. Точка $p \in M$ называется *критической точкой* функции $f(x)$, если $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_p = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \cdots = \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0$, а $f(p)$ называется *критическим значением* функции $f(x)$. В противном случае точка p называется *регулярной точкой*, а $f(p)$ — *регулярным значением* функции $f(x)$. Следующее утверждение о регулярном значении доставляет распространенный способ задания многообразий. Если $a \in \mathbb{R}$ есть регулярное значение C^r-гладкой функции ($r \geqslant 1$) $f : M \to \mathbb{R}$, то $f^{-1}(a)$ есть C^r-подмногообразие многообразия M.

Для $r \geqslant 2$ критическая точка p C^r-функции f называется *невырожденной*, если матрица вторых производных (*матрица Гессе*) $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)\Big|_p$ невырождена, в противном случае точка p называется *вырожденной*. В силу симметричности матрица Гессе имеет только действительные собственные значения и является вырожденной тогда и только тогда, когда имеет нулевые собственные значения. Число нулевых собственных значений матрицы $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)\Big|_p$ называют *степенью вырождения* *критической точки* p, а число ее отрицательных собственных значений называют *индексом критической точки* p и обозначают $q(p)$. Гладкая функция, значение которой в каждой критической точке p равно индексу этой точки ($f(p) = q(p)$) называется *самоиндексирующейся*.

Определение 2.2. C^r-гладкая ($r \geqslant 2$) функция $f : M \to \mathbb{R}$ на гладком n-многообразии X называется *функцией Морса*, если все ее критические точки невырождены.

Определение 2.3. C^r-гладкая ($r \geqslant 2$) функция $f : M \to \mathbb{R}$ на гладком n-многообразии X называется функцией Морса—Ботта, если гессиан в каждой критической точке невырожден в направлении нормальном к критическому множеству уровня.

Функции Морса имеют важное значение при изучении топологии многообразия в силу следующих фактов. На любом гладком компактном многообразии существуют функции Морса. Функции Морса всюду плотны в пространстве всех гладких функций на многообразии. Каждая функция Морса имеет на компактном многообразии лишь конечное число критических точек, в частности, все они изолированы. На любом компактном многообразии X существуют так называемые *правильные функции Морса* $f : M \to \mathbb{R}$, т. е. такие, что $f(x) \geqslant f(y)$, если x и y — критические точки f и $q(x) \geqslant q(y)$. Отметим, что такие функции уже не образуют плотного подмножества в пространстве всех гладких функций на M.

Предложение 2.2 (Лемма Морса). *Пусть p — критическая точка функции Морса $f : M \to \mathbb{R}$. Тогда существуют локальные координаты $x_1, \ldots, x_n$ в точке p, называемые координатами Морса, в которых локальное представление f имеет вид*

$$f_p(x_1, \ldots, x_n) = f(p) - x_1^2 - \cdots - x_{q(p)}^2 + x_{q(p)+1}^2 + \cdots + x_n^2,$$

где $q(p)$ — индекс f в точке p.

2.3. Энергетическая функция Морса для градиентноподобных потоков. Первые результаты по построению энергетических функций касались систем Морса—Смейла. В 1960 году С. Смейл в работе [36] ввел класс C^∞ векторных полей χ на C^∞ замкнутом многообразии M со следующими свойствами:

(1) Векторное поле χ имеет конечное число особых точек $\beta_1, \ldots, \beta_k$, и матрица Якоби линеаризации векторного поля в окрестности каждой особой точки не имеет собственных значений с нулевой действительной частью.
(2) Векторное поле χ имеет конечное число замкнутых орбит $\beta_{k+1}, \ldots, \beta_m$, и отображение Пуанкаре в окрестности каждой такой орбиты не имеет собственных значений, по модулю равных 1.
(3) Предельные точки всех орбит χ при $t \to \pm\infty$ принадлежат β_i.
(4) Устойчивые и неустойчивые многообразия β_i имеют трансверсальное пересечение.
(5) Если β_i — периодическая орбита, то не существует точка $y \in M$ такая, что $\alpha(y) = \omega(y) = \beta_i$.

С современной точки зрения условия (1)–(5) означают, что цепно рекуррентное множество потока, индуцированного векторным полем χ, состоит из конечного числа неподвижных гиперболических точек $\beta_1, \ldots, \beta_k$ и конечного числа гиперболических периодических орбит $\beta_{k+1}, \ldots, \beta_m$ таких, что устойчивые и неустойчивые многообразия орбит β_i пересекаются трансверсально. Таким образом, условия (1)–(5) выделяют структурно устойчивые векторные поля с конечным цепно рекуррентным множеством. В своей работе [36] С. Смейл показал, что для векторных полей со свойствами (1)–(5) справедливы неравенства, подобные неравенствам Морса, с тех пор такие векторные поля называют полями *Морса—Смейла*.

Векторные поля Морса—Смейла без периодических орбит называются *градиентноподобными*, поскольку они имеют динамику, подобную динамике градиентного векторного поля, порожденного функцией Морса. Действительно, если мы рассмотрим градиентное векторное поле $\operatorname{grad}\varphi$, порожденное функцией Морса φ, то множество критических точек φ совпадает с множеством состояний равновесия градиентного потока (потока, порожденного градиентным векторным полем). Если x не является критической точкой функции φ, то $\operatorname{grad}\varphi(-\varphi) = -|\operatorname{grad}\varphi(x)|^2 < 0$, т. е. $-\varphi$ строго убывает вдоль траекторий $\mathcal{O}_x$. Таким образом, $-\varphi$ является энергетической функцией градиентного потока. Градиентное векторное поле не является структурно устойчивым в общем случае, поскольку инвариантные многообразия седловых точек могут иметь нетрансверсальное пересечение. Однако, С. Смейл в 1961 году в работе [37] доказал, что любое градиентное векторное поле на M может быть C^1 аппроксимировано градиентноподобным векторным полем.

В связи с вышесказанным естественно искать энергетическую функцию градиентноподобного потока в классе функций Морса.

В работе [37] С. Смейл рассмотрел класс C^∞ векторных полей χ на компактных C^∞ n-многообразиях M (∂M может быть как пустой, так и непустой), которые в случае замкнутого многообразия удовлетворяют следующим условиям:

(i) У каждой особой точки β поля χ существует окрестность N и C^∞ функция φ_β на N такие, что χ есть $\operatorname{grad}\varphi_\beta$ на N в некоторой римановой структуре на N. Более того, β — невырожденная критическая точка φ_β. Обозначим через $\beta_1, \ldots, \beta_k$ эти особенности.

(ii) Если $x \in M$ и $\mathcal{O}_x$ — орбита потока, порожденного χ, проходящая через x, то предельное множество орбиты $\mathcal{O}_x$ при $t \to \pm\infty$ содержится в объединении β_i.

(iii) Устойчивые и неустойчивые многообразия β_i пересекаются трансверсально.

Из следующей теоремы вытекает, что векторное поле, удовлетворяющее условиям (i)–(iii), обладает энергетической функцией.

Теорема 2.2 (см. [37, Theorem B]). *Пусть χ — C^∞-векторное поле на замкнутом C^∞-многообразии M, удовлетворяющее условиям* (1)–(3). *Тогда существует C^∞-функция φ на M со следующими свойствами*:

(a) *Критические точки φ совпадают с особыми точками χ и φ отличается на константу от функции из условия* (i) *в некоторой окрестности критической точки.*

(b) *Если χ не обращается в 0 в точке $x \in M$, то поле трансверсально поверхности уровня функции φ в точке x.*

(c) *Если $\beta \in M$ — критическая точка φ, то $\varphi(\beta) = q(\beta)$, где $q(\beta)$ — индекс точки β.*

С. Смейл доказал, что предыдущая теорема может быть усилена следующим образом.

Замечание 2.1 (см. [37, Remark]). Существует риманова метрика на M такая, что $\chi = \operatorname{grad}\varphi$.

2.4. Энергетическая функция Морса—Ботта для потоков Морса—Смейла. Если векторное поле Морса—Смейла имеет периодическую орбиту, то энергетическая функция для такого поля не может быть функцией Морса. Поэтому К. Мейер в 1968 году в работе [30] предложил рассматривать более общий класс Φ, состоящий из C^∞-функций $\varphi : M \to \mathbb{R}$ на гладком замкнутом многообразии M с римановой метрикой d, обладающих следующими свойствами:

1. Множество $Cr(\varphi)$ критических точек функции φ состоит из конечного подмножества $Cr_0(\varphi) = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$ невырожденных точек и подмножества $Cr_1(\varphi)$, которое является объединением конечного числа попарно не пересекающихся окружностей $\delta_{m+1}, \ldots, \delta_k$ таких, что индекс φ постоянен на каждой окружности;
2. Для $i \in \{m+1, \ldots, k\}$ существует окрестность N_i окружности δ_i и диффеоморфизм ξ_i такой, что ξ_i отображает N_i на прямое произведение $\mathbb{D}^{n-1}$ и $\mathbb{S}^1$, если N_i ориентируемо, и на косое произведение $\mathbb{D}^{n-1}$ и $\mathbb{S}^1$, если N_i неориентируемо, при этом $\varphi \circ \xi_i^{-1} = \varphi(\delta_i) + Q_i(x)$, где Q_i — невырожденная квадратичная форма в координатах $x_1, \ldots, x_{n-1}$ на $\mathbb{D}^{n-1}$ и периодическая функция периода один по координате x_n в $\mathbb{S}^1$. Более того, в каждой точке окружности $\mathbb{S}^1$ квадратичная форма равна индексу функции φ на δ_i.

В действительности класс Φ есть класс функций Морса—Ботта, чье множество критических точек совпадает с объединением $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \delta_k$. Из определения функции Морса—Ботта следует, что гессиан этой функции невырожден в нормальном к окружности направлении.

Теорема 2.3 (см. [30, Theorem 1]). *Если χ — векторное поле Морса—Смейла, тогда существует энергетическая функция $\varphi \in \Phi$ для χ.*

Предложение 2.3 (см. [30, Proposition]). *Пусть для гладкого векторного поля χ на M существует функция $\varphi \in \Phi$ такая, что*:

1. *$\chi(\varphi)(x) < 0$ для всех $x \in (M \setminus Cr(\varphi))$*;

2. *если p особая точка χ, то $p \notin Cr_1(\varphi)$;*
3. *существует константа $\kappa > 0$ такая, что для любого $x \in N_i$*

$$-\chi(\varphi)(x) \geqslant \kappa d(x, \delta_i)^2.$$

Тогда χ удовлетворяет всем условиям определения векторного поля Морса—Смейла, за исключением, быть может, условия трансверсальности. Более того, поле χ может быть C^1 аппроксимировано системой Морса—Смейла.

3. Энергетическая функция для каскадов с регулярной динамикой

В этом разделе мы будем рассматривать дискретные динамические системы (каскады) с регулярной динамикой. А именно, мы будем строить энергетические функции для диффеоморфизмов $f : M^n \to M^n$ с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством, заданные на замкнутом гладком n-многообразии M^n. Обозначим через $G(M^n)$ класс таких диффеоморфизмов. Подмножество структурно устойчивых диффеоморфизмов в этом классе составляют диффеоморфизмы Морса—Смейла, обозначим через $MS(M^n)$ их класс.

3.1. Функция Морса—Ляпунова. Пусть $f \in G(M^n)$. Поскольку цепно рекуррентное множество диффеоморфизма f конечно, то естественно искать его функцию Ляпунова в классе функций Морса. Факт совпадения неблуждающего множества с цепно рекуррентным приводит к следующему определению.

Определение 3.1. Функция Морса $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ называется функцией Ляпунова для $f \in G(M^n)$, если:

1. $\varphi(f(x)) < \varphi(x)$ для любого $x \notin \Omega_f$;
2. $\varphi(f(x)) = \varphi(x)$ для любого $x \in \Omega_f$.

Предложение 3.1 (см. [26, Proposition 7.1]). *Пусть $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ — функция Ляпунова для диффеоморфизма $f \in G(M^n)$. Тогда*

1. *$-\varphi$ — гладкая функция Ляпунова для f^{-1};*
2. *если p — периодическая точка диффеоморфизма f, то $\varphi(x) < \varphi(p)$ для любого $x \in W^u_p \setminus p$ и $\varphi(x) > \varphi(p)$ для любого $x \in W^s_p \setminus p$;*
3. *если p — периодическая точка диффеоморфизма f, то p — критическая точка функции φ;*
4. *индекс критической точки p равен $\dim W^u_p$.*

В силу предложения 4 периодические точки диффеоморфизма f являются критическими точками функции Ляпунова φ, а индекс φ в точке $p \in \Omega_f$ равен размерности неустойчивого многообразия W^u_p. При этом любая периодическая точка p является максимумом ограничения φ на W^u_p и минимумом ограничения φ на W^s_p.

Предложение 3.2 (см. [26, Proposition 7.2]). *Если периодическая точка p является невырожденным максимумом (минимумом) ограничения функции Ляпунова φ для диффеоморфизма $f \in G(M^n)$ на неустойчивое (устойчивое) инвариантное многообразие точки p, то это многообразие трансверсально ко всем регулярным множествам уровня φ в некоторой окрестности точки p.*

Определение 3.2. Пусть $\mathcal{O}_i$ — периодическая орбита диффеоморфизма $f \in G(M^n)$, U_i — окрестность орбиты $\mathcal{O}_i$ и $q_i = dim\ W^u_{\mathcal{O}_i}$. Функцию Морса $\psi_i : U_i \to \mathbb{R}$ назовем локальной *функцией Морса—Ляпунова*, если она обладает следующими свойствами:

1. $\psi_i(f(x)) < \psi_i(x)$ для любого $x \in (f^{-1}(U_i) \setminus \mathcal{O}_i)$ и $\psi_i(f(x)) = \psi_i(x) = 0$ для $x \in \mathcal{O}_i$;
2. множество критических точек функции ψ_i совпадает с орбитой $\mathcal{O}_i$ и каждая критическая точка имеет индекс q_i;
3. $(W^u_r \cap U_i) \subset Ox_1 \dots x_{q_i}$ и $(W^s_r \cap U_i) \subset Ox_{q_i+1} \dots x_n$ для координат Морса $x_1, \dots, x_n$ в окрестности точки $r \in \mathcal{O}_i$.

Лемма 3.1 (см. [26, Lemma 2.2]). *Для любой периодической орбиты $\mathcal{O}_i$ диффеоморфизма $f \in G(M^n)$ существует локальная функция Морса—Ляпунова.*

Локальное свойство, сформулированное в предложении 3.2, полезно для построения (глобальной) функции Ляпунова.

Определение 3.3. Функция Ляпунова $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ для диффеоморфизма $f \in G(M^n)$ называется функцией Морса—Ляпунова, если каждая периодическая точка p является невырожденным максимумом (соответственно минимумом) ограничения φ на неустойчивое (соответственно устойчивое) многообразие W^u_p (соответственно W^s_p).

Согласно лемме 3.1 функция Морса—Ляпунова существует в окрестности любой периодической орбиты диффеоморфизма $f \in G(M^n)$. Справедлив и факт существования глобальной функции Морса—Ляпунова для любого диффеоморфизма $f \in G(M^n)$. Такая функция может быть построена, в частности, с помощью перехода к надстройке. Именно, пусть $f \in G(M^n)$ и $\hat{f}^t$ — поток на многообразии $M^n \times \mathbb{R}$, порожденный векторным полем, состоящим из единичных векторов, параллельных $\mathbb{R}$ и направленных в $+\infty$. Определим диффеоморфизм $g : M^n \times \mathbb{R} \to M^n \times \mathbb{R}$ формулой $g(x,\tau) = (f(x), \tau - 1)$. Положим $\mathcal{G} = \{g^k, k \in \mathbb{Z}\}$ и $W = (M^n \times \mathbb{R})/\mathcal{G}$. Обозначим через $p_{_W} : M^n \times \mathbb{R} \to W$ естественную проекцию и через f^t — поток на многообразии W, заданный формулой $f^t(x) = p_{_W}(\hat{f}^t(p_{_W}^{-1}(x)))$. Поток f^t называется *надстройкой над диффеоморфизмом* f. По построению цепно рекуррентное множество потока f^t состоит из k_f периодических орбит $\delta_i = p_{_W}(\mathcal{O}_i \times \mathbb{R}), i \in \{1,\ldots,k_f\}$, то есть надстройка f^t является потоком Морса—Смейла без неподвижных точек. Согласно теореме 2.3 существует энергетическая функция Морса—Ботта для потока f^t. Ее ограничение на M^n является искомой функцией Морса—Ляпунова для f. Однако в общем случае построенная функция может иметь критические точки, которые не являются периодическими точками f.

Теорема 3.1 (см. [26, Theorem 7.1]). *Среди гладких функций Ляпунова для диффеоморфизма $f \in G(M^n)$ функции Морса—Ляпунова образуют открытое всюду плотное множество в C^∞-топологии.*

3.2. Порядок на множестве периодических орбит. Гиперболичность цепно рекуррентного множества равносильна Ω-устойчивости диффеоморфизма $f \in G(M^n)$ (см., например, [33]). Следовательно, периодические орбиты диффеоморфизма f допускают нумерацию $\mathcal{O}_1,\ldots,\mathcal{O}_{k_f}$, согласующуюся с отношением С. Смейла, т. е. $i \leqslant j$, если $W^s_{\mathcal{O}_i} \cap W^u_{\mathcal{O}_j} \neq \varnothing$. Не уменьшая общности, будем считать, что нумерация орбит выбрана так, что номер любой седловой орбиты больше номера любой стоковой и меньше номера любой источниковой орбиты. Для $i = 1,\ldots,k_f$ положим $W^s_i = W^s_{\mathcal{O}_i}, W^u_i = W^u_{\mathcal{O}_i}$, и для $i = 1,\ldots,k_f - 1$ положим $A_i = \bigcup\limits_{j=1}^{i} W^u_j,\ R_i = \bigcup\limits_{j=i+1}^{k_f} W^s_j$.

Для $i = 1,\ldots,k_f - 1$ положим $V_i = M^2 \setminus (A_i \cup R_i)$. Обозначим через $\hat{V}_i = V_i/f$ пространство орбит действия диффеоморфизма f на множестве V_i и через $p_{_i} : V_i \to \hat{V}_i$ — естественную проекцию.

Теорема 3.2 (см. [26, Theorem 2.6]). *Пусть $f \in G(M^n)$. Тогда*

1. *множество A_i (R_i) является аттрактором (репеллером) диффеоморфизма f и имеет захватывающую окрестность $M_i \subset \bigcup\limits_{j=1}^{i} W^s_j$ ($M_i \subset \bigcup\limits_{j=i+1}^{k_f} W^u_j$) такую, что $M_i \setminus \operatorname{int} f(M_i)$ ($M_i \setminus \operatorname{int} f^{-1}(M_i)$) является фундаментальной областью ограничения диффеоморфизма f на V_i;*
2. *проекция $p_{_i} : V_i \to \hat{V}_i$ является накрытием, индуцирующим структуру гладкого замкнутого n-многообразия на пространстве орбит $\hat{V}_i$;*
3. *если $\dim\ A_i \leqslant (n-2)$ ($\dim\ R_i \leqslant (n-2)$), то репеллер R_i (аттрактор A_i) является связным, и если $\dim\,(A_i \cup R_i) \leqslant (n-2)$, то многообразия V_i, $\hat{V}_i$ связны.*

3.3. Ω-устойчивые 2-диффеоморфизмы с конечным неблуждающим множеством. В этом разделе мы изложим результаты работы [11], а именно, изложим идею доказательства следующей теоремы.

Теорема 3.3 (см. [11, Теорема 1]). *Для любого диффеоморфизма $f \in G(M^2)$ существует энергетическая функция, являющаяся функцией Морса.*

Пусть Ω_q, $q \in \{0,1,2\}$ — подмножество периодических точек r таких, что $\dim\, W^u_r = q$, k_q — число всех периодических орбит с индексом Морса (индекс Морса периодической точки r равен размерности $\dim\, W^u_r$), меньшим или равным q. Основой доказательства являются динамические свойства диффеоморфизмов множества $G(M^2)$, сформулированные в леммах 3.2, 3.3, 3.4. Доказательство лемм существенно опирается на классические факты двумерной топологии, в частности, на факт отсутствия диких дуг на поверхностях.

Лемма 3.2 (см. [26, Lemma 3.4]). *В каждой компоненте связности множества V_i, $i = k_0, \dots, k_1 - 1$ существует окружность такая, что объединение этих окружностей пересекается с каждой сепаратрисой множества $W^u_{i+1} \setminus \mathcal{O}_{i+1}$ в одной точке.*

Согласно теореме 3.2, A_i обладает захватывающей окрестностью M_i, где M_i — компактное множество такое, что $f(M_i) \subset \operatorname{int} M_i$ (M_i — f-сжимаема) и $\bigcap\limits_{k\geqslant 0} f^k(M_i) = A_i$. Для $i = 1, \dots, k_1$ обозначим через c_i число компонент связности аттрактора A_i, через r_i — число седловых точек и через s_i — число стоковых точек в A_i. Положим $g_i = c_i + r_i - s_i$.

Определение 3.4. Захватывающую окрестность M_i, $i = 1, \dots, k_1$ аттрактора A_i назовем *тесной*, если M_i состоит из c_i дисков с дырами, общее число которых равно g_i.

Если при этом для каждой седловой точки $\sigma \in \mathcal{O}_i$ пересечение $W^s_\sigma \cap M_i$ состоит в точности из одного отрезка, то окрестность M_i будем называть *канонической*.

Лемма 3.3 (см. [11, Лемма 2.5]). *Каждый аттрактор A_i, $i = 1, \dots, k_1$ обладает канонической окрестностью.*

Лемма 3.4 (см. [26, Lemma 7.1]). *Пусть $i \in \{1, \dots, k_1\}$ и Q_i — захватывающая окрестность аттрактора A_i такая, что ∂Q_i — линия уровня энергетической функции $\varphi_{Q_i} : Q_i \to \mathbb{R}$. Тогда для любой тесной окрестности P_i аттрактора A_i существует энергетическая функция $\varphi_{P_i} : P_i \to \mathbb{R}$ для f с множеством уровня ∂P_i.*

Опираясь на факты выше, построим энергетическую функцию Морса для диффеоморфизма $f \in G(M^2)$. Разобьем построение энергетической функции для $f : M^2 \to M^2$ на шаги.

Шаг 1. Индукцией по $i = 1, \dots, k_1$ докажем существование энергетической функции φ_{M_i} на канонической окрестности M_i аттрактора A_i с множеством уровня $S_i = \partial M_i$.

Для $i = 1$ аттрактор A_1 совпадает со стоковой орбитой $\mathcal{O}_1$ диффеоморфизма f. В силу леммы 3.1 существует окрестность $U_{\mathcal{O}_1} \subset M^2$ орбиты $\mathcal{O}_1$, оснащенная энергетической функцией $\varphi_{\mathcal{O}_1} : U_{\mathcal{O}_1} \to \mathbb{R}$ для f и такая, что $\varphi_{\mathcal{O}_1}(\mathcal{O}_1) = 1$. В силу леммы 3.4 существует энергетическая функция φ_{M_1} на окрестности M_1 аттрактора A_1 с множеством уровня S_1.

Пусть по предположению индукции существует энергетическая функция $\varphi_{M_{i-1}}$ на окрестности M_{i-1} аттрактора A_{i-1} с множеством уровня S_{i-1}. Построим функцию φ_{M_i}. Рассмотрим две возможности: a) $i \leqslant k_0$; b) $i > k_0$.

В случае a) окрестность M_i состоит из c_i попарно не пересекающихся двумерных дисков. В силу предположения индукции и леммы 3.4 существует энергетическая функция $\varphi_{M_{i-1}}$ на канонической окрестности M_{i-1}, постоянная на ∂M_{i-1}. Аналогично случаю $i = 1$ доказывается существование энергетической функции $\varphi_{\mathcal{O}_i}$ на $U_{\mathcal{O}_i}$ с множеством уровня $\partial U_{\mathcal{O}_i}$. Тогда функция φ_{M_i}, составленная из функций $\varphi_{M_{i-1}}$ и $\varphi_{\mathcal{O}_i}$ является искомой.

В случае b) орбита $\mathcal{O}_i$ имеет окрестность $U_{\mathcal{O}_i} \subset M^2$, оснащенную энергетической функцией $\varphi_{\mathcal{O}_i} : U_{\mathcal{O}_i} \to \mathbb{R}$ для f с $\varphi_{\mathcal{O}_i}(\mathcal{O}_i) = i$. Более того, для каждой компоненты связности U_σ, $\sigma \in \mathcal{O}_i$ множества $U_{\mathcal{O}_i}$ существуют координаты Морса (x_1, x_2) такие, что $\varphi_{\mathcal{O}_i}(x_1, x_2) = i - x_1^2 + x_2^2$, ось Ox_1 содержится в неустойчивом многообразии, а ось Ox_2 содержится в устойчивом многообразии точки σ.

Из свойств канонической окрестности M_i и λ-леммы[1] следует существование трубчатой окрестности $N(D_i) \subset M_i$ дисков $D_i = M_i \cap W^s_{\mathcal{O}_i}$ такой, что $N(D_i) \cap A_{i-1} = \varnothing$, множество $P_{i-1} = M_i \setminus \operatorname{int} N(D_i)$ является f-сжимаемым и ∂P_{i-1} трансверсально пересекает каждую компоненту

[1]Утверждение λ-леммы состоит в том, что $f^{-n}(\partial M_i) \cap U_\sigma$ сходится к $\{x_1 = 0\} \cap U_\sigma$ в C^1-топологии, когда n стремится к $+\infty$ (см., например, [31]).

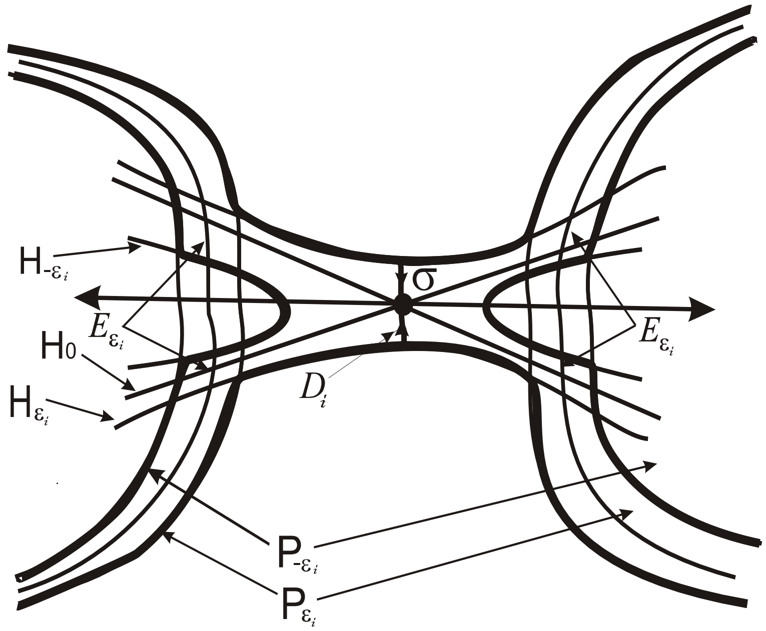

Рис. 1. Перестройка линий уровня

связности множества $\varphi_{\mathcal{O}_i}^{-1}(i) \setminus \mathcal{O}_i$ по двум точкам. Множество P_{i-1} является тесной окрестностью аттрактора A_{i-1}. По предположению индукции и лемме 3.4 на окрестности P_{i-1} существует энергетическая функция $\varphi_{_{P_{i-1}}}$ с множеством уровня ∂P_{i-1}.

Для $\varepsilon_i \in (0,1)$, $t \in [-\varepsilon_i, \varepsilon_i]$ положим $P_t = \varphi_{P_{i-1}}^{-1}([1, \varphi_{_{P_{i-1}}}(\partial P_{i-1}) - \varepsilon_i + t])$, $H_t = \{x \in U_{\mathcal{O}_i} : \varphi_{\mathcal{O}_i}(x) \leqslant i + t\}$ и $E_{\varepsilon_i} = (P_{\varepsilon_i} \setminus \operatorname{int} P_{-\varepsilon_i}) \cap (H_{\varepsilon_i} \setminus \operatorname{int} H_{-\varepsilon_i})$ (см. рис. 1). Заметим, что $P_{\varepsilon_i} = P_{i-1}$ и, следовательно, $f(P_{\varepsilon_i}) \subset \operatorname{int} P_{\varepsilon_i}$. Так как $\varphi_{\mathcal{O}_i}$ — функция Ляпунова для $f|_{U_{\mathcal{O}_i}}$, то $\varphi_{\mathcal{O}_i}(f^{-1}(\varphi_{\mathcal{O}_i}^{-1}(i) \setminus \mathcal{O}_i)) > i$ и, следовательно, $(H_0 \setminus \mathcal{O}_i) \subset \operatorname{int} f^{-1}(H_0 \setminus \mathcal{O}_i)$. Отсюда и из условий выбора окрестности $N(D_i)$ следует существование значения ε_i со следующими свойствами:

(1) $f(P_{\varepsilon_i}) \subset \operatorname{int} P_{-\varepsilon_i}$;
(2) для любого $t \in [-\varepsilon_i, \varepsilon_i]$ ∂P_t трансверсально пересекает каждую компоненту связности множества $\partial H_t \setminus D_i$ по двум точкам;
(3) $f^{-1}(E_{\varepsilon_i}) \cap H_{\varepsilon_i} = \varnothing$.

Для $t \in [-\varepsilon_i, \varepsilon_i]$ положим $Q_t = P_t \cup H_t$. По построению множество Q_t, $t \neq 0$ является f-сжимаемым. Более того, $Q_{-\varepsilon_i}$ после сглаживания является тесной окрестностью аттрактора A_{i-1}, а Q_{ε_i} после сглаживания является тесной окрестностью аттрактора A_i. В силу предположения индукции и леммы 3.4 на множестве $Q_{-\varepsilon_i}$ существует энергетическая функция $\varphi_{_{Q_{-\varepsilon_i}}}$, постоянная на $\partial Q_{-\varepsilon_i}$. Поскольку $\varphi_{_{Q_{-\varepsilon_i}}}(A_{i-1}) \leqslant i-1$, то можно считать, что $\varphi_{_{Q_{-\varepsilon_i}}}(Q_{-\varepsilon_i}) = i - \varepsilon_i$.

Определим на множестве Q_{ε_i} функцию $\varphi_{_{Q_{\varepsilon_i}}} : Q_{\varepsilon_i} \to \mathbb{R}$ формулой:

$$\varphi_{_{Q_{\varepsilon_i}}}(x) = \begin{cases} \varphi_{_{Q_{-\varepsilon_i}}}(x), \text{ если } x \in Q_{-\varepsilon_i}; \\ i + t, \text{ если } x \in Q_t. \end{cases}$$

Проверим, что $\varphi_{_{Q_{\varepsilon_i}}}$ является энергетической функцией для f, тогда существование искомой функции $\varphi_{_{M_i}} : M_i \to \mathbb{R}$ будет следовать из предложения 3.4.

Представим множество Q_{ε_i} в виде объединения подмножеств с попарно непересекающимися внутренностями: $Q_{\varepsilon_i} = A \cup B \cup C$, где $A = Q_{-\varepsilon_i}$, $B = P_{\varepsilon_i} \setminus Q_{-\varepsilon_i}$ и $C = Q_{\varepsilon_i} \setminus (P_{\varepsilon_i} \cup Q_{-\varepsilon_i})$. По построению функция $\varphi_{_{Q_{\varepsilon_i}}}|_A$ является энергетической функцией для f, $\varphi_{_{Q_{\varepsilon_i}}}(\partial A) = i - \varepsilon_i$, функция $\varphi_{_{Q_{\varepsilon_i}}}|_B$ не имеет критических точек и функция $\varphi_{_{Q_{\varepsilon_i}}}|_C$ совпадает с функцией $\varphi_{_{\mathcal{O}_i}}|_C$. Проверим свойство убывания функции $\varphi_{_{Q_{\varepsilon_i}}}$ вдоль траекторий.

Если $x \in A$, то $f(x) \in A$ и $\varphi_{_{Q_{\varepsilon_i}}}(f(x)) < \varphi_{_{Q_{\varepsilon_i}}}(x)$, поскольку $\varphi_{_{Q_{\varepsilon_i}}}|_A$ — функция Ляпунова. Если $x \in B$, то, в силу условия (1) выбора ε_i, $f(x) \in A$ и, следовательно, $\varphi_{_{Q_{\varepsilon_i}}}(x) > i - \varepsilon_i$, а

$\varphi_{Q_{\varepsilon_i}}(f(x)) < i - \varepsilon_i$, откуда $\varphi_{Q_{\varepsilon_i}}(f(x)) < \varphi_{Q_{\varepsilon_i}}(x)$. Если $x \in C$, то в силу условия (3) выбора ε_i либо $f(x) \in A$ и убывание доказывается аналогично случаю $x \in B$, либо $f(x) \in C$ и убывание следует из того, что $\varphi_{Q_{\varepsilon_i}}|_C$ — функция Ляпунова.

Шаг 2. Заметим, что множество источников Ω_2 является аттрактором для диффеоморфизма f^{-1} и, следовательно, имеет каноническую окрестность $\tilde{M}$. Аналогично шагу 1 построим энергетическую функцию $\tilde{\varphi}_{\tilde{M}}$ для f^{-1} на окрестности $\tilde{M}$ с множеством уровня $\tilde{S} = \partial\tilde{M}$.

Шаг 3. По построению множество $P_{k_1} = M^2 \setminus \operatorname{int}\tilde{M}$ является тесной окрестностью аттрактора A_{k_1}, откуда следует существование искомой функции φ. Действительно, в силу предложения 3.4 из существования энергетической функции $\varphi_{M_{k_1}}$ на окрестности M_{k_1} аттрактора A_{k_1} следует существование энергетической функции $\varphi_{P_{k_1}}$ на P_{k_1} с множеством уровня ∂P_{k_1}. Функцию $\varphi_{P_{k_1}}$ можно построить так, что $\varphi_{P_{k_1}}(\tilde{S}) = k_f + 1 - \tilde{\varphi}_{\tilde{M}}(\tilde{S})$. Поскольку $\partial P_{k_1} = \tilde{S}$, то искомая функция φ определяется формулой $\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_{P_{k_1}}(x), \text{ если } x \in P_{k_1}; \\ k_f + 1 - \tilde{\varphi}_{\tilde{M}}(x), \text{ если } x \in \tilde{M}. \end{cases}$

3.4. Диффеоморфизмы Морса—Смейла на 3-многообразиях. В этом разделе мы изложим результаты работ [5, 23, 24] (см. также монографию [26]).

3.4.1. Условия существования динамически упорядоченной энергетической функции. В пункте 3.2 мы упорядочили периодические орбиты диффеоморфизма $f \in G(M^n)$ согласно отношению частичного порядка $\prec$:

$$\mathcal{O}_p \prec \mathcal{O}_r \iff W^s_{\mathcal{O}_p} \cap W^u_{\mathcal{O}_r} \neq \varnothing.$$

В случае, когда инвариантные многообразия периодических точек диффеоморфизма f имеют трансверсальное пересечение, можно ввести порядок, более тесно связанный с динамикой.

Определение 3.5. Нумерацию периодических орбит $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_{k_f}$ диффеоморфизма $f \in MS(M^n)$ назовем *динамической*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. если $\mathcal{O}_i \prec \mathcal{O}_j$, то $i \leqslant j$;
2. если $q_i < q_j$, то $i < j$.

Предложение 3.3 (см. [26, Proposition 2.6]). *Для любого диффеоморфизма $f \in G(M^n)$ существует динамическая нумерация периодических орбит.*

На рис. 2 представлен фазовый портрет диффеоморфизма Морса—Смейла $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ с динамическим порядком периодических орбит в предположении, что неблуждающее множество Ω_f состоит из неподвижных точек.

Заметим, что существуют нумерации периодических орбит диффеоморфизма $f \in MS(M^n)$, сохраняющие отношение частичного порядка $\prec$, отличные от динамической. Везде далее мы будем предполагать, что орбиты диффеоморфизма $f \in MS(M^n)$ динамически упорядочены. Пусть Ω_q, $q \in \{0, 1, 2, 3\}$ — подмножество периодических точек r таких, что $\dim\, W^u_r = q$, k_q — число всех периодических орбит с индексом Морса, меньшим или равным q.

Согласно предложению 3.3 существует динамическая нумерация орбит диффеоморфизма f: $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_{k_f}$, используя которую, мы дадим следующее определение.

Определение 3.6. Пусть орбиты диффеоморфизма $f \in MS(M^n)$ имеют динамическую нумерацию: $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_{k_f}$. Функцию Морса—Ляпунова φ для диффеоморфизма f назовем *динамически упорядоченной*, если $\varphi(\mathcal{O}_i) = i$ для $i \in \{1, \ldots, k_f\}$.

Далее мы исследуем условия существования динамически упорядоченной энергетической функции для диффеоморфизмов Морса—Смейла на многообразиях размерности $n = 3$.

Пусть $f \in MS(M^3)$. Из теоремы 3.2 следует, что для каждого $i = 1, \ldots, k_1$ множество $A_i = \bigcup\limits_{j=1}^{i} W^u_{\mathcal{O}_j}$ является аттрактором, т. е. обладает захватывающей окрестностью M_i, где M_i компактное множество такое, что $f(M_i) \subset \operatorname{int} M_i$ (M_i — f-сжимаема) и $\bigcap\limits_{k \geqslant 0} f^k(M_i) = A_i$. Обозначим через c_i

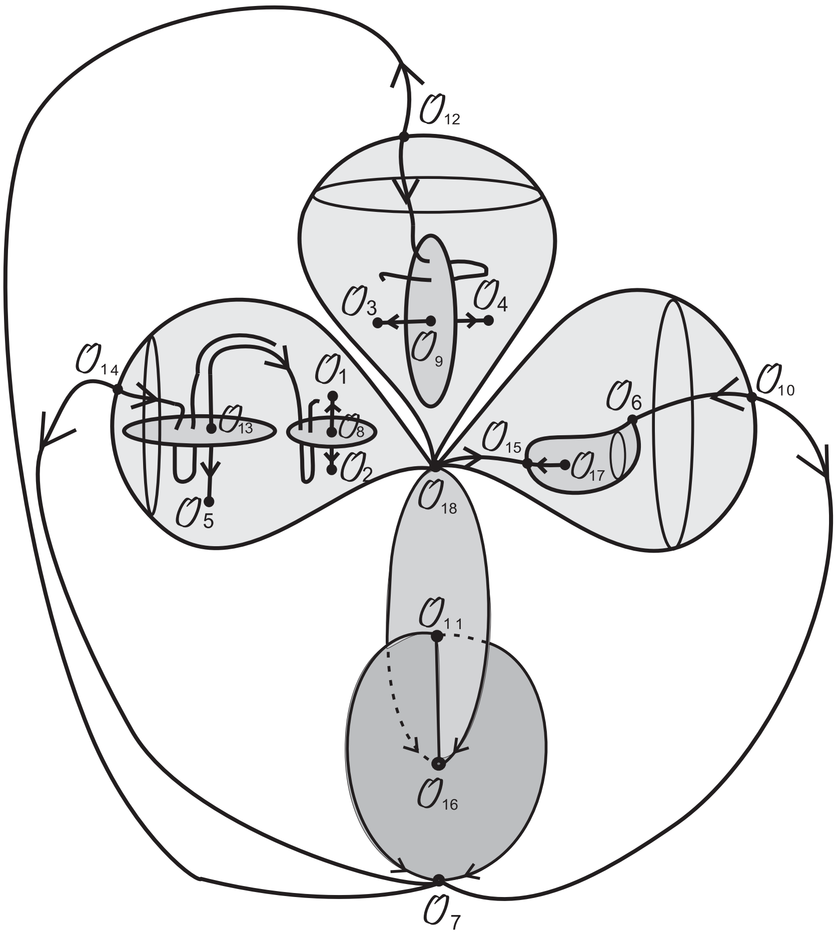

Рис. 2. Фазовый портрет диффеоморфизма Морса—Смейла $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ с динамически упорядоченным множеством периодических орбит

число компонент связности аттрактора A_i, через r_i — число седловых точек и через s_i — число стоковых точек в A_i. Положим $g_i = c_i + r_i - s_i$.

Напомним, что гладкое компактное ориентируемое трехмерное многообразие с краем называется *ручечным телом рода* $g \geqslant 0$, если оно диффеоморфно многообразию, полученному из замкнутого 3-шара отождествлением g пар попарно непересекающихся замкнутых 2-дисков на границе шара посредством меняющего ориентацию диффеоморфизма. Границей ручечного тела является ориентируемая поверхность рода g.

Определение 3.7. Захватывающая окрестность M_i аттрактора A_i называется *ручечной*, если M_i состоит из c_i компонент связности, каждая из которых является ручечным телом. Сумму g_{M_i} родов компонент связности M_i назовем родом ручечной окрестности.

Заметим, что для каждого $i = 1, \ldots, k_0$ число g_i равно нулю, аттрактор A_i является нульмерным (так как состоит из c_i стоковых точек) и обладает ручечной окрестностью M_i рода $g_i = 0$, состоящей из c_i попарно непересекающихся трехмерных шаров (это следует, например, из леммы 3.1). Для каждого $i = k_0 + 1, \ldots, k_1$ аттрактор A_i содержит одномерную компоненту связности, в силу чего (допуская некоторую вольность) мы будем далее называть его одномерным.

Предложение 3.4 (см. [26, Proposition 7.3])**.** *Каждый одномерный аттрактор A_i диффеоморфизма $f \in MS(M^3)$ обладает ручечной окрестностью M_i рода $g_{M_i} \geqslant g_i$.*

Определение 3.8. Ручечную окрестность M_i одномерного аттрактора A_i назовем *тесной*, если:

1. $g_{M_i} = g_i$;
2. для каждой точки $\sigma \in \mathcal{O}_i$ пересечение $W^s_\sigma \cap M_i$ состоит в точности из одного двумерного диска.

Одномерный аттрактор A_i, обладающий тесной окрестностью M_i назовем *тесно вложенным*.

По определению репеллер для диффеоморфизма f есть аттрактор для f^{-1}. Кроме того, динамическая нумерация орбит $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_{k_f}$ диффеоморфизма f индуцирует динамическую нумерацию орбит $\tilde{\mathcal{O}}_1, \ldots, \tilde{\mathcal{O}}_{k_f}$ диффеоморфизма f^{-1} следующим образом: $\tilde{\mathcal{O}}_i = \mathcal{O}_{k_f - i}$. Тогда одномерный репеллер называется *тесно вложенным*, если он является тесно вложенным одномерным аттрактором для f^{-1} относительно индуцированной динамической нумерации орбит.

Заметим, что свойство одномерного аттрактора (репеллера) быть тесно вложенным несет информацию о вложении неустойчивых многообразий его седловых точек. В примере Пикстона, где $\mathcal{O}_1 = \omega_1,\ \mathcal{O}_2 = \omega_2,\ \mathcal{O}_3 = \sigma,\ \mathcal{O}_4 = \alpha$, имеется единственный одномерный аттрактор $A_3 = cl\ W^u_\sigma$, для которого $g_3 = 0$. При этом любой 3-шар, окружающий $cl\ W^u_\sigma$, пересекает W^s_σ более, чем по одному 2-диску (см. рис. 3, где представлен фазовый портрет диффеоморфизма Пикстона и 3-шар). Следовательно, этот одномерный аттрактор не является тесно вложенным.

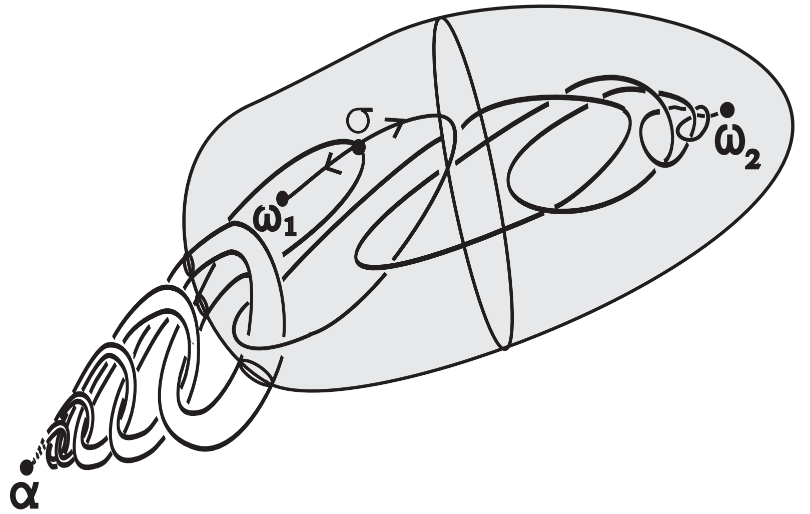

Рис. 3. Одномерный аттрактор в примере Пикстона не является тесно вложенным

Теорема 3.4 (см. [26, Theorem 7.2]). *Если диффеоморфизм $f \in MS(M^3)$ обладает динамически упорядоченной энергетической функцией, то все его одномерные аттракторы и репеллеры являются тесно вложенными.*

Определение 3.9. Тесная захватывающая окрестность M_i одномерного аттрактора A_i называется *строго тесной*, если $M_i \setminus A_i$ диффеоморфно $\partial M_i \times (0, 1]$. Одномерный аттрактор A_i, обладающий строго тесной окрестностью M_i называется *строго тесно вложенным*.

Теорема 3.5 (см. [26, Theorem 7.3]). *Если все одномерные аттракторы и репеллеры диффеоморфизма $f \in MS(M^3)$ являются строго тесно вложенными, то f обладает динамически упорядоченной энергетической функцией.*

В следующей теореме устанавливается критерий существования динамически упорядоченной энергетической функции для диффеоморфизма Морса—Смейла без гетероклинических кривых, заданного на сфере $\mathbb{S}^3$.

Теорема 3.6 (см. [26, Theorem 7.4]). *Диффеоморфизм Морса—Смейла $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ без гетероклинических кривых обладает динамически упорядоченной энергетической функцией тогда и только тогда, когда каждый его одномерный аттрактор и репеллер является тесно вложенным.*

В частности, из теоремы 3.6 следует, что диффеоморфизм $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$, фазовый портрет которого изображен на рис. 4, обладает динамически упорядоченной энергетической функцией. При этом пучок одномерных сепаратрис диффеоморфизма f, содержащих сток ω в своем замыкании, не является ручным, а представляет из себя умеренно дикий пучок Дебрунера—Фокса [20].

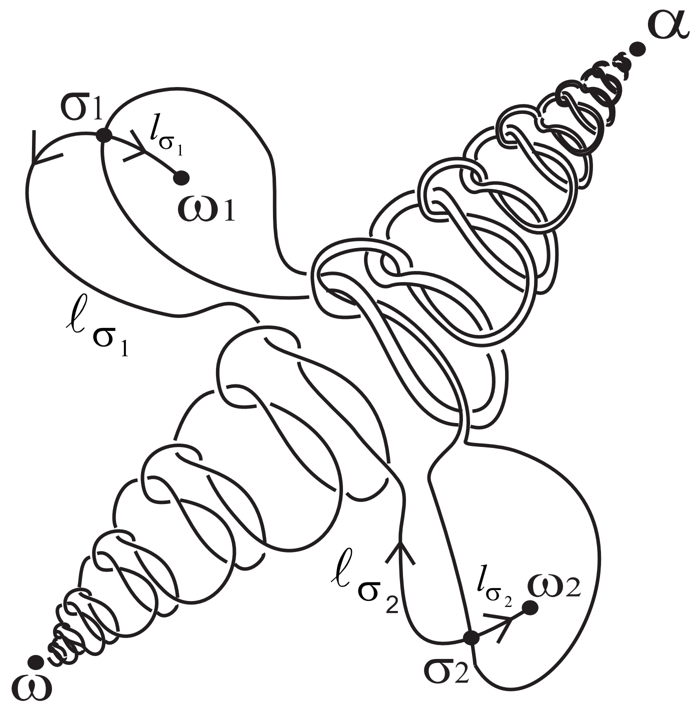

Рис. 4. Диффеоморфизм с умеренно диким пучком сепаратрис

Построение динамически упорядоченной энергетической функции для диффеоморфизма Морса—Смейла $f : M^3 \to M^3$ со строго тесно вложенными одномерными аттракторами и репеллерами идейно повторяет доказательство теоремы 3.3 и опирается на нижеследующие технические леммы.

Напомним, что по предположению теоремы 3.5 каждый одномерный аттрактор $A_i,\ i = k_0 + 1, \ldots, k_1$ является строго тесно вложенным и, следовательно, имеет ручечную окрестность M_i рода g_i такую, что $M_i \setminus A_i$ гомеоморфно $S_i \times (0, 1]$, где $S_i = \partial M_i$ и для каждой точки $\sigma \in \mathcal{O}_i$ пересечение $W^s_\sigma \cap M_i$ состоит в точности из одного двумерного диска. Положим $D_i = M_i \cap W^s_{\mathcal{O}_i}$. В силу утверждения 3.1 для каждого нульмерного аттрактора $A_i,\ i = 1, \ldots, k_0$,, существует ручечная окрестность рода $g_i = 0$, являющаяся объединением c_i трехмерных шаров, которую мы также будем обозначать через M_i и полагать $S_i = \partial M_i$.

Для $i = 1, \ldots, k_1$ положим $K_i = M_i \setminus \operatorname{int} f(M_i)$, $N_i = W^s_{A_i \cap \Omega_f}$ и $V_i = N_i \setminus A_i$. Тогда K_i диффеоморфно $S_i \times [0, 1]$. Поскольку $V_i = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} f^n(K_i)$, то V_i диффеоморфно $S_i \times \mathbb{R}$.

Определение 3.10. Пусть D — подмножество M^3, диффеоморфное многообразию $S \times [0, 1]$ для некоторой (возможно не связной) поверхности S. Тогда D называется (f, S)-сжимаемым произведением, если существует диффеоморфизм $g : D \to S \times [0, 1]$ такой, что $g^{-1}(S \times \{t\})$ ограничивает f-сжимаемую область в M^3 для любого $t \in [0, 1]$.

Предложение 3.5 (см. [26, Proposition 7.4]). *Пусть D — (f, S)-сжимаемое произведение. Тогда для любых значений $d_0 < d_1$ существует энергетическая функция $\varphi_D : D \to \mathbb{R}$ для $f|_D$ такая, что $\varphi_D(g^{-1}(S \times \{0\})) = d_0$ и $\varphi_D(g^{-1}(S \times \{1\})) = d_1$.*

Доказательство. Искомая функция $\varphi_D : D \to \mathbb{R}$ определяется формулой $\varphi_D(x) = d_0 + t(d_1 - d_0)$ для $x \in g^{-1}(S \times \{t\}),\ t \in [0, 1]$. □

Лемма 3.5 (см. [26, Lemma 7.1]). *Пусть $i \in \{1, \ldots, k_1\}$ и $P_i,\ Q_i$ — ручечные окрестности рода g_i аттрактора A_i. Если существует динамически упорядоченная энергетическая функция $\varphi_{Q_i} : Q_i \to \mathbb{R}$ для f с множеством уровня $S_{Q_i} = \partial Q_i$, то существует динамически упорядоченная энергетическая функция $\varphi_{P_i} : P_i \to \mathbb{R}$ для f с множеством уровня $S_{P_i} = \partial P_i$.*

Лемма 3.6 (см. [26, Lemma 7.2]). *Пусть $i = k_0 + 1, \ldots, k_1$, M_i — строго тесная окрестность аттрактора A_i, $D_i = M_i \cap W^s_{\mathcal{O}_i}$ и $N(D_i) \subset M_i$ — трубчатая окрестность D_i такая, что*

$N(D_i) \cap A_{i-1} = \varnothing$ и множество $P_{i-1} = M_i \setminus N(D_i)$ является f-сжимаемым. Тогда P_{i-1} — ручечная окрестность рода g_{i-1} аттрактора A_{i-1}.

3.4.2. Иллюстрация к теоремам 3.4 *и* 3.5. Заметим, что условие теоремы 3.5 не является необходимым условием существования динамически упорядоченной энергетической функции. В этом разделе мы приведем результат работы [5], а именно, построим диффеоморфизм Морса—Смейла на многообразии $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, обладающий динамически упорядоченной энергетической функцией, но одномерные аттрактор и репеллер которого не являются строго тесно вложенными.

Предложение 3.6 (см. [23, Proposition 5.1]). *Существует диффеоморфизм Морса—Смейла $f : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ со следующими свойствами*:

1. *неблуждающее множество Ω_f состоит из четырех неподвижных точек: стока $\mathcal{O}_1 = \omega$, седел $\mathcal{O}_2 = \sigma^+$ и $\mathcal{O}_3 = \sigma^-$ индексов* 1 *и* 2, *источника $\mathcal{O}_4 = \alpha$, следовательно, f имеет единственный одномерный аттрактор $A_2 = W^u_{\sigma^+} \cup \{\omega\}$ и дуальный к нему репеллер $R_2 = W^s_{\sigma^-} \cup \{\alpha\}$ с числом $g_2 = 1$ (см. обозначения перед предложением* 3.4);
2. *$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \setminus (A_2 \cup R_2)$ не является прямым произведением $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, где $\mathbb{T}^2$ — двумерный тор, но f удовлетворяет условиям теоремы* 3.5 *и, следовательно, обладает энергетической функцией Морса.*

Доказательство. Определим диффеоморфизм f^+ на трехмерном шаре B^+ как двукратное сжатие к центру ω. Пусть K^+ — замыкание множества $B^+ \setminus f^+(B^+)$; оно является фундаментальной областью для $f^+|_{B^+}$. Пусть d_1^+, d_2^+ — два непересекающихся 2-диска на ∂B^+ с центрами a_1^+, a_2^+. К этим дискам приклеивается 1-ручка $H^+ \cong [-1,+1] \times D^2$, где D^2 — 2-диск. Мы должны продолжить f^+ на заполненный тор $P^+ = B^+ \cup H^+$ так, что точка $\{0\} \times \{0\}$ в H^+ — неподвижная гиперболическая точка индекса 1, чье локальное неустойчивое многообразие совпадает с $[-1,+1] \times \{0\}$ в H^+ и локальное устойчивое многообразие совпадает с диском $\Delta^+ = \{0\} \times D^2$ в H^+ (например $f^+|_{\Delta^+}$ — двукратное сжатие). Определим вложение $f^+ : ([-1,-1/2] \cup [1/2,1]) \times D^2 \to A^+$ так, что его образ в K^+ есть две непересекающиеся трубочки, соединяющие $\dfrac{1}{2}d_1^+,\ \dfrac{1}{2}d_2^+$ с $f^+(d_1^+),\ f^+(d_2^+)$, соответственно. Опишем середины этих трубочек.

Для этого выберем кривую C^+, составленную из дуг (c_1^+, c_2^+) в K^+, каждая из которых соединяет точку $a_i^+,\ i = 1,2$ с ее образом $f^+(a_i^+)$, и обладающую свойствами:

i) пара (K^+, C^+) не гомеоморфна прямому произведению $(\mathbb{S}^2 \setminus \{x,y\}) \times [0,1]$;

ii) существует инволюция $I^+ : (K^+, C^+) \to (K^+, C^+)$, которая переставляет границы K^+ так, что $I^+|_{\partial B^+} = f^+$.

Пример такой дуги показан на рис. 5, для нее инволюция I^+ является отражением относительно серединной сферы K^+. По построению f^+ — сжатие P^+ с двумя неподвижными гиперболическими точками, стоком ω и седлом σ^+ с индексом 1. Неустойчивое многообразие седла σ^+ состоит из середины H^+ и объединения $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (f^+)^n(C^+)$. Пусть W^+ — замыкание множества $P^+ \setminus f^+(P^+)$; оно ограничено двумя торами.

Лемма 3.7 (см. [23, Lemma 5.2]).

1. *Множество W^+ не гомеоморфно $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$.*
2. *Существует инволюция $J^+ : W^+ \to W^+$, которая переставляет граничные компоненты так, что $J^+|_{\partial P^+} = f^+$.*

Доказательство.

1) Заметим, что $f^+(P^+)$ — трубчатая окрестность замкнутой кривой κ^+ в P^+, которая пересекает Δ^+ (меридианный диск заполненного тора P^+) в единственной точке σ^+. Разрезая P^+ вдоль Δ^+, мы получим 3-шар $Q^+ \cong B^+$ и узел $\kappa'^+ = \kappa^+ \cap Q^+$, который состоит из объединения c_1^+, c_2^+ и незаузленных дуг в $f^+(\partial B^+)$, соединяющих $f^+(a_1^+)$ с $f^+(a_2^+)$. Если мы разрежем $f^+(P^+)$ вдоль Δ^+, мы получим трубчатую окрестность дуги κ'^+. Нетрудно проверить, что условие i) для построенной кривой C^+ эквивалентно следующему условию:

i') в Q^+ не существует вложенного диска с границей, состоящей из кривой κ'^+ и дуги в ∂Q^+.

Предположим, что W^+ является прямым произведением. Тогда существует двумерное кольцо R^+ с одной граничной компонентой в ∂P^+ и другой — состоящей из κ^+. Стандартной техникой

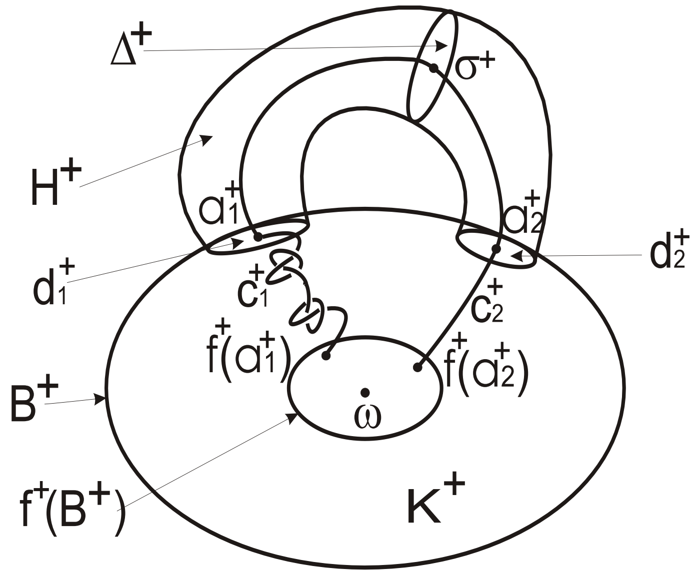

Рис. 5. Построение диффеоморфизма на заполненном торе

пересечение $R^+ \cap \Delta^+$ может быть сведено к дуге, соединяющей граничные компоненты R^+. Тогда, разрезая R^+ вдоль Δ^+, получим диск в Q^+, противоречащий условию i').

2) Пусть N^+ — трубчатая окрестность C^+ в K^+, которая инвариантна относительно I^+. Граничные слои N^+ состоят из дисков d_1^+, d_2^+ и их образов относительно f^+. Другое описание W^+ есть следующее. Мы удаляем внутренность N^+ (т. е. открытую трубчатую окрестность) и вдоль $\partial N^+ \cong \mathbb{S}^1 \times [0,1] \times \{-1,1\}$ приклеиваем $H'^+ := \mathbb{S}^1 \times [0,1] \times [-1,1]$. В таком представлении W^+ ограничение f^+ на $\partial P^+ \cap H^+$ является «тождественным» на $\mathbb{S}^1 \times \{0\} \times [-1,1] \to \mathbb{S}^1 \times \{1\} \times [-1,1]$. С другой стороны, ограничение инволюции I^+ на ∂N^+ сопряжено с $Id|_{\mathbb{S}^1} \times \tau$, где τ — стандартная инволюция отрезка $[0,1]$. Поэтому I^+ продолжается на H'^+ как инволюция J^+, которая является «тождественной» из $\partial P^+ \cap H'^+ \cong \mathbb{S}^1 \times \{0\} \times [-1,1]$ в $f^+(\partial P^+) \cap H'^+ \cong \mathbb{S}^1 \times \{1\} \times [-1,1]$. Наконец, $J^+ = f^+$ на ∂P^+. □

Рассмотрим факторпространство W^+/f^+ и естественную проекцию $p^+ : W^+ \to W^+/f^+$. Из конструкции выше следует, что $T^+ = p^+(\Delta^+ \cap W^+)$ — двумерный тор. Пусть $V^+ \cong T^+ \times [-1,1]$ — трубчатая окрестность T^+ в W^+/f^+ и $\hat{h} : W^+/f^+ \to W^+/f^+$ — диффеоморфизм такой, что $\hat{h}$ сохраняет p^+, $\hat{h} = id$ вне $\operatorname{int} V^+$ и $\hat{h}(T^+) \cap T^+ = \varnothing$. Тогда поднятие $h : W^+ \to W^+$ отображения $\hat{h}$ сохраняет ∂P^+, коммутирует с f^+ и $h(\Delta^+ \cap W^+) \cap \Delta^+ = \varnothing$.

Чтобы закончить построение примера, рассмотрим новую копию P^- заполненного тора P^+. Склеим их в силу отображения $h \circ J^+$, используя диффеоморфизм $W^- \to W^+$, где W^- — копия W^+ в P^-. Пусть $f^- : P^- \to P^-$ — копия f^+. Тогда объемлющее многообразие есть $M^3 = P^- \underset{h \circ J^+}{\cup} P^+$ и диффеоморфизм $f : M^3 \to M^3$ определяется формулами: $f|_{P^+} = f^+$ и $f|_{P^-} = (f^-)^{-1}$; нетрудно проверить, что такое определение корректно. Построенное отображение f является диффеоморфизмом Морса—Смейла, у которого неустойчивое многообразие седла σ^- не пересекается с устойчивым многообразием седла σ^+.

Репеллер R_2 есть аттрактор для f^-, т. е. является копией A_2 в P^-. Заменим P^- на $f^{-1}(P^-)$, тогда P^+ и $f^{-1}(P^-)$ имеют только общую границу и предположения теоремы 3.5 выполнены. В построенном примере $M^3 \setminus (A_2 \cup R_2)$ не гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$. Действительно, если бы это было произведение, то W^+ должно было бы быть также произведением, что противоречит лемме 3.7. □

3.4.3. Квази энергетическая функция. Из результатов раздела 3.4.1 следует, что не любой диффеоморфизм Морса—Смейла обладает энергетической функцией Морса—Ляпунова, в связи с чем естественно дать следующее определение.

Определение 3.11. Назовем функцию Морса—Ляпунова $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ *квази-энергетической* для диффеоморфизма Морса—Смейла $f : M^n \to M^n$, если она имеет наименьшее возможное число критических точек среди всех функций Морса—Ляпунова для f.

В этом разделе мы рассматриваем класс G_4 диффеоморфизмов Морса—Смейла $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$, чье неблуждающее множество состоит в точности из четырех неподвижных точек: одного источника α, одного седла σ и двух стоков ω_1 и ω_2. Замыкание каждой компоненты связности (сепаратрисы) одномерного многообразия $W^u(\sigma) \setminus \sigma$ гомеоморфно отрезку, который состоит из этой сепаратрисы и двух точек: σ и некоторого стока (см., например, [26, Proposition 2.3]). Обозначим через ℓ_1, ℓ_2 одномерные сепаратрисы, содержащие стоки ω_1, ω_2, соответственно, в своих замыканиях. Пусть $cl(\ell_i)$ — замыкание сепаратрисы ℓ_i, $i = 1, 2$. Тогда $cl(\ell_i) \setminus \omega_i$ является гладким многообразием многообразия $\mathbb{S}^3$ (см., например, [26, Theorem 2.1]). Поэтому топологическое вложение $cl(\ell_i)$ может быть сложным лишь в окрестности стока ω_i.

Согласно [17], сепаратриса ℓ_i называется *ручной* (или *ручно вложенной*), если существует гомеоморфизм $\psi_i : W^s(\omega_i) \to \mathbb{R}^n$ такой, что $\psi(\omega_i) = O$, где O — начало координат в $\mathbb{R}^n$ и $\psi_i(cl(\ell_i) \setminus \sigma)$ — луч с началом в точке O. В противном случае ℓ_i называется *дикой*. Из критерия в [28] следует, что ручность ℓ_i эквивалентна существованию в любой окрестности ω_i гладкого 3-шара B_i, содержащего ω_i и такого, что $\ell_i \cap \partial B_i$ состоит в точности из одной точки. Используя [26, Lemma 4.2], можно уточнить этот критерий следующим образом: сепаратриса ℓ_i является ручной, если и только если существует 3-шар B_{ω_i} такой, что $\omega_i \in f(B_{\omega_i}) \subset \operatorname{int} B_{\omega_i} \subset W^s(\omega_i)$ и $\ell_i \cap \partial B_{\omega_i}$ состоит в точности из одной точки.

В работе [18] (см. также [26, Proposition 4.3]) было доказано, что для каждого диффеоморфизма $f \in \mathcal{G}_4$ по крайней мере одна сепаратриса (скажем, ℓ_1) является ручной. Там же было показано, что топологическая классификация диффеоморфизмов из класса $\mathcal{G}_4$ сводится к классификации вложений сепаратрисы ℓ_2, следовательно, существует бесконечно много диффеоморфизмов в $\mathcal{G}_4$, которые не являются топологически сопряженными.

Чтобы охарактеризовать тип вложения ℓ_2, мы введем некоторое специальное разбиение Хегора для $\mathbb{S}^3$. Напомним, что трехмерное ориентируемое многообразие называется *ручечным телом рода* $g \geqslant 0$, если оно получено из 3-шара отождествлением g пар попарно непересекающихся 2-дисков, принадлежащих его границе, посредством меняющего ориентацию гомеоморфизма. Граница ручечного тела является ориентируемой поверхностью рода g.

Пусть $P^+ \subset \mathbb{S}^3$ — ручечное тело рода g такое, что $P^- = \mathbb{S}^3 \setminus \operatorname{int} P^+$ — ручечное тело (по необходимости того же рода, что и P^+). Тогда пара (P^+, P^-) называется *разбиением Хегора рода* g сферы $\mathbb{S}^3$ с поверхностью Хегора $S = \partial P^+ = \partial P^-$.

Определение 3.12. Разбиение Хегора (P^+, P^-) сферы $\mathbb{S}^3$ назовем *f-адаптированным* для $f \in G_4$, если:

a) $cl(W^u(\sigma)) \subset f(P^+) \subset \operatorname{int} P^+$;
b) $W^s(\sigma)$ трансверсально пересекает ∂P^+ и пересечение $W^s(\sigma) \cap P^+$ состоит из единственного 2-диска.

Мы называем f-адаптированное разбиение Хегора $\mathbb{S}^3 = P^+ \cup P^-$ *минимальным*, если оно имеет минимальный род среди всех f-адаптированных разбиений.

Для каждого целого числа $k \geqslant 0$ обозначим через $G_{4,k}$ множество диффеоморфизмов $f \in G_4$, для которых минимальное f-адаптированное разбиение Хегора имеет род k. Легко заметить, что для каждого $f \in G_{4,0}$ сепаратриса ℓ_2 является ручной, и согласно теореме 3.6, f обладает энергетической функцией, тогда как любой диффеоморфизм из класса $G_{4,k}$, $k > 0$, не имеет энергетической функции. На рис. 6 изображен фазовый портрет диффеоморфизма из класса $G_{4,1}$. Основным результатом этой работы является следующая теорема.

Теорема 3.7 (см. [5, Теорема 1]). *Каждая квази-энергетическая функция диффеоморфизма $f \in G_{4,1}$ имеет в точности шесть критических точек.*

Доказательство. Построение квази-энергетической функции мы будем проводить аналогично построению энергетической функции, проведенному в разделе 3.3. При этом мы опустим некоторые детали, ссылаясь на соответствующие места конструкции.

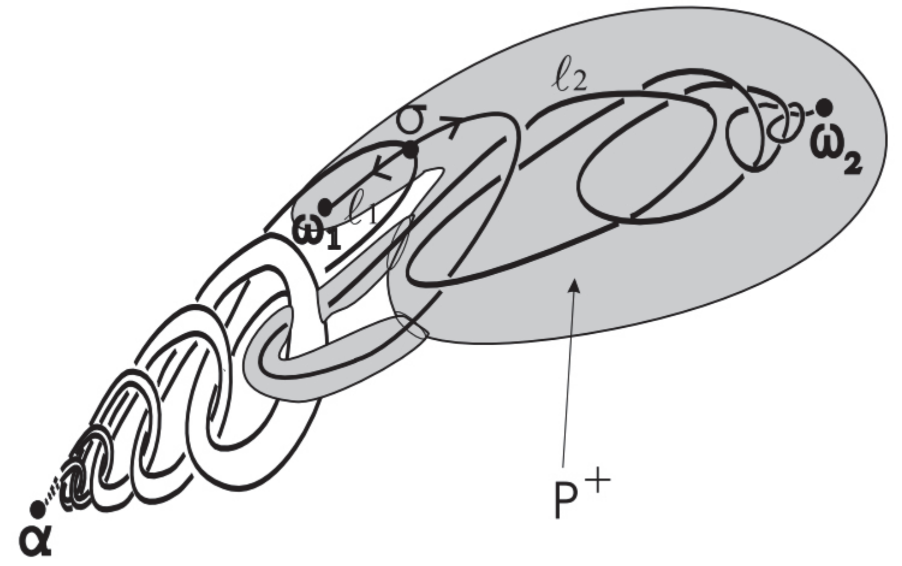

Рис. 6. Диффеоморфизм из класса $G_{4,1}$

1. Следуя лемме 3.1, выберем энергетическую функцию $\varphi_p : U_p \to \mathbb{R}$ в окрестности каждой неподвижной точки p диффеоморфизма f.

2. Из определения класса $G_{4,1}$ следует, что для каждого $f \in G_{4,1}$ существует заполненный тор P^+, принадлежащий разбиению Хегора (P^+, P^-) сферы $\mathbb{S}^3$ и такой, что:

a) $cl(W^u(\sigma)) \subset f(P^+) \subset \operatorname{int} P^+$;

b) $W^s(\sigma)$ пересекается трансверсально ∂P^+ и пересечение $W^s(\sigma) \cap P^+$ состоит из единственного 2-диска.

Поскольку $\mathbb{S}^3 \setminus cl(W^s(\sigma))$ является несвязным объединением $W^s(\omega_1) \cup W^s(\omega_2)$, то по свойству b), множество $P^+ \setminus W^s(\sigma)$ состоит из двух компонент связности. Кроме того, существует окрестность двумерного диска $P^+ \cap W^s(\sigma)$ такая, что после ее удаления из P^+ мы получим 3-шар P_{ω_1} и заполненный тор P_{ω_2} со следующими свойствами для каждого $i = 1, 2$:

a) $\omega_i \in f(P_{\omega_i}) \subset \operatorname{int} P_{\omega_i} \subset W^s(\omega_i)$;

b) ∂P_{ω_i} — поверхность Хегора и $\ell_i \cap \partial P_{\omega_i}$ состоит в точности из одной точки.

Не уменьшая общности, мы можем предполагать, что ∂P_{ω_i} трансверсальна к регулярной части критического уровня $C := \varphi_\sigma^{-1}(1)$ функции φ_σ и пересечение $C \cap \partial P_{\omega_i}$ состоит в точности из одной окружности (в противном случае мы можем, пользуясь λ-леммой, заменить P_{ω_i} на $f^{-n}(P_{\omega_i})$ для некоторого $n > 0$). Для $\varepsilon \in (0, 1/2)$ определим H^+_ϵ как замыкание множества $\{x \in U_\sigma \mid x \notin (P_{\omega_1} \cup P_{\omega_2}),\ \varphi_\sigma(x) \leqslant 1+\varepsilon\}$ и положим $P^+_\epsilon = P_{\omega_1} \cup P_{\omega_2} \cup H^+_\epsilon$. Аналогично доказательству теоремы 3.3 возможно выбрать $\varepsilon > 0$ таким образом, что ∂P_{ω_i} трансверсально пересекает по одной окружности каждое множество уровня функции φ_σ со значением, принадлежащим интервалу $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$. Выберем сглаживание Q^+ заполненного тора P^+_ε так, что $f(Q^+) \subset \operatorname{int} Q^+$ и $\Sigma := \partial Q^+$ является поверхностью Хегора рода 1 (см. рис. 7). Пусть Q^- — замыкание множества $\mathbb{S}^3 \setminus \operatorname{int} Q^+$. Легко проверить, что Q^+, как и P^+_ε, являются изотопными P^+ в $\mathbb{S}^3$. Поэтому пара (Q^+, Q^-) является f-адаптированным разбиением Хегора.

3. Для каждого $i = 1, 2$ обозначим через $\tilde{P}_{\omega_i}$ ручечное тело рода $i-1$ такое, что:

а) $f(P_{\omega_i}) \subset \tilde{P}_{\omega_i} \subset \operatorname{int} P_{\omega_i}$;

б) $\partial \tilde{P}_{\omega_i}$ трансверсально пересекает по одной окружности каждое множество уровня функции φ_σ со значением, принадлежащим интервалу $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$;

в) $P_{\omega_i} \setminus \operatorname{int} \tilde{P}_{\omega_i}$ диффеоморфно $\partial P_{\omega_i} \times [0, 1]$.

Определим d_i как замыкание множества $\{x \in U_\sigma \mid x \in (W^s(\omega_i) \setminus \tilde{P}_{\omega_i}),\ \varphi_\sigma(x) = 1-\varepsilon\}$. По построению d_i является диском, граница которого одновременно ограничивает диск D_i в $\partial \tilde{P}_{\omega_i}$. Положим $S_i = (\partial \tilde{P}_{\omega_i} \setminus \operatorname{int} D_i) \cup d_i$ и обозначим через $P(S_i)$ ручечное тело рода $i-1$, ограниченное

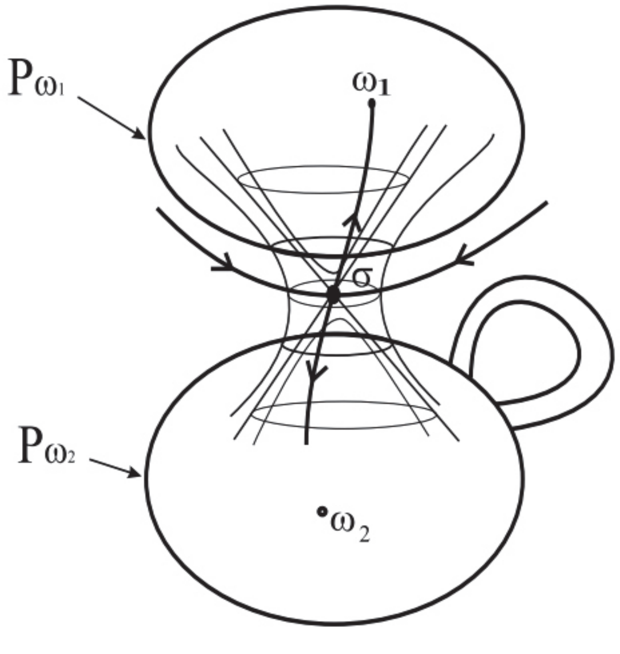

Рис. 7. Разбиение Хегора (Q^+, Q^-)

S_i и содержащее ω_i. Как и в теореме 3.3, устанавливается, что ε можно выбрать таким образом, что $f(P(S_i)) \subset \operatorname{int} P(S_i)$.

Пусть K — область между ∂Q^+ и $S_1 \cup S_2$. Обозначим через T^+ замыкание множества $\{x \in \mathbb{S}^3 \mid x \notin (P_{\omega_1} \cup P_{\omega_2}),\ 1-\varepsilon \leqslant \varphi_\sigma(x) \leqslant 1+\varepsilon\}$. Заметим, что $T^+ \subset U_\sigma$. Определим функцию $\varphi_{_K} : K \to \mathbb{R}$ со значениями $1+\varepsilon$ на ∂Q^+, $1-\varepsilon$ на $S_1 \cup S_2$, совпадающую с φ_σ на $K \cap T^+$ и без критических точек вне T^+. Это последнее условие легко выполнимо, так как рассматриваемая область является тривиальным кобордизмом. Аналогично теореме 3.3 проверяется, что φ^+ является функцией Морса—Ляпунова.

4. Поскольку $P(S_1)$ — 3-шар такой, что $\omega_1 \in f(P(S_1)) \subset \operatorname{int} P(S_1) \subset W^s(\omega_1)$, то согласно лемме 3.5 существует энергетическая функция $\varphi_{_{P(S_1)}} : P(S_1) \to \mathbb{R}$ диффеоморфизма f, которая принимает значение $1-\varepsilon$ на множестве S_1.

5. Поскольку $P(S_2)$ — заполненный тор такой, что $\omega_2 \in f(P(S_2)) \subset \operatorname{int} P(S_2) \subset W^s(\omega_2)$, то согласно лемме 3.6 существует 3-шар B_{ω_2} такой, что $f(P(S_2)) \subset B_{\omega_2} \subset \operatorname{int} P(S_2)$. Как в предыдущем пункте, существует энергетическая функция $\varphi_{_{B_{\omega_2}}} : B_{\omega_2} \to \mathbb{R}$ диффеоморфизма f, которая принимает значение $\dfrac{1}{2}$ на множестве ∂B_{ω_2}.

6. Известно, что заполненный тор может быть получен из 3-шара отождествлением пары непересекающихся 2-дисков на его границе. Поэтому $P(S_2)$ получается приклеиванием к границе некоторого 3-шара элементарного кобордизма индекса 1. Так как с точностью до изотопии существует единственный 3-шар во внутренности заполненного тора, то $(W_{\omega_2}, \partial B_{\omega_2}, S_2)$ есть элементарный кобордизм индекса 1, где $W_{\omega_2} = P(S_2) \setminus \operatorname{int} B_{\omega_2}$. Тогда W_{ω_2} обладает функцией Морса $\varphi_{_{W_{\omega_2}}}$ только с одной критической точкой индекса 1 и такой, что $\varphi_{_{W_{\omega_2}}}(\partial B_{\omega_2}) = \dfrac{1}{2}$, $\varphi_{_{W_{\omega_2}}}(S_2) = 1-\varepsilon$.

7. Определим гладкую функцию $\varphi^+ : Q^+ \to \mathbb{R}$ формулой

$$\varphi^+(x) = \begin{cases} \varphi_{_K}(x), x \in K; \\ \varphi_{_{P(S_1)}}(x), x \in P(S_1); \\ \varphi_{_{B_{\omega_2}}}(x), x \in B_{\omega_2}; \\ \varphi_{_{W_{\omega_2}}}(x), x \in W_{\omega_2}. \end{cases}$$

Тогда φ^+ — функция Морса—Ляпунова для $f|_{Q^+}$ с одной дополнительной критической точкой.

8. По построению Q^- — заполненный тор такой, что $\alpha \in f^{-1}(Q^-) \subset \operatorname{int} Q^- \subset W^u(\alpha)$. Поскольку α — сток для f^{-1}, тогда, как в пункте 4, существуют 3-шар B_α такой, что $f^{-1}(Q^-) \subset B_\alpha \subset \operatorname{int} Q^-$, и энергетическая функция $\varphi_{B_\alpha} : B_\alpha \to \mathbb{R}$ для f^{-1}, которая принимает значение $\dfrac{1}{2}$ на множестве ∂B_α.

9. Подобно пункту 5, ∂Q^- получается из ∂B_α перестройкой индекса 1. Поэтому $(W_\alpha = Q^- \setminus \operatorname{int} B_\alpha, \partial Q^-, \partial B_\alpha)$ есть элементарный кобордизм индекса 1, где $W_\alpha = Q^- \setminus \operatorname{int} B_\alpha, \partial Q^-$. Следовательно, W_α обладает функцией Морса φ_{W_α} только с одной критической точкой индекса 1 и такой, что $\varphi_{W_\alpha}(\partial B_\alpha) = \dfrac{1}{2}$ и $\varphi_{W_\alpha}(\partial Q^-) = 2 - \varepsilon$.

10. Определим гладкую функцию $\varphi^- : Q^- \to \mathbb{R}$ формулой

$$\varphi^-(x) = \begin{cases} 3 - \varphi_{B_\alpha}(x), x \in \varphi_{B_\alpha}; \\ 3 - \varphi_{W_\alpha}(x), x \in \varphi_{W_\alpha}. \end{cases}$$

Тогда φ^- — функция Морса—Ляпунова для $f|_{Q^-}$ с одной дополнительной критической точкой.

11. Функция $\varphi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}$ такая, что $\varphi|_{Q^+} = \varphi^+$ и $\varphi|_{Q^-} = \varphi^-$ — функция Морса—Ляпунова для диффеоморфизма f в точности с шестью неподвижными точками. □

4. Построение энергетической функции для диффеоморфизмов с хаотическим поведением

В этом разделе мы будем рассматривать Ω-устойчивые диффеоморфизмы f с бесконечным цепно рекуррентным множеством на n-многообразии M^n. Цепно рекуррентное множество таких диффеоморфизмов является гиперболическим, и в нем всюду плотны периодические точки. Динамически гиперболичность выражается в том, что любая точка $p \in R_f$ обладает *неустойчивым* и *устойчивым* многообразием

$$W_p^u = \{x \in M : d(f^k(p), f^k(x)) \to 0 \text{ при } k \to +\infty\} \text{ и}$$

$$W_p^s = \{x \in M : d(f^k(p), f^k(x)) \to 0 \text{ при } k \to -\infty\},$$

которые являются образами $\mathbb{R}^q, q \in \{0, \ldots, n\}$ и $\mathbb{R}^{n-q}$ при инъективной иммерсии, d — метрика на многообразии. Условие гиперболичности неблуждающего множества и всюду плотности в нем периодических точек приводит к разложению множества R_f в объединение конечного числа так называемых *базисных множеств*, каждое из которых является замыканием траектории системы (см., например, [16, 38]). Базисное множество называется *нетривиальным*, если оно не является периодической орбитой (в частности, не является неподвижной точкой).

В силу результатов Р.В. Плыкина [13] базисное множество Λ диффеоморфизма f является аттрактором (репеллером) тогда и только тогда, когда $\Lambda = \bigcup\limits_{x \in \Lambda} W_x^u$ $(\Lambda = \bigcup\limits_{x \in \Lambda} W_x^s)$. Кроме того, любое базисное множество топологической размерности n или $n-1$ является либо аттрактором, либо репеллером.

Аттрактор Λ диффеоморфизма f называется *растягивающимся аттрактором*, если топологическая размерность $\dim \Lambda$ равна размерности неустойчивого многообразия $W_x^u, x \in \Lambda$. Репеллер диффеоморфизма f называется *сжимающимся*, если он является растягивающимся аттрактором для f^{-1}.

Согласно [6] базисное множество Λ А-диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$ называется *поверхностным*, если оно принадлежит f-инвариантной замкнутой поверхности M^2_Λ (не обязательно связной), топологически вложенной в многообразие M^3 и называемой *носителем* множества Λ.

В следующих разделах 4.1, 4.2, 4.3 мы конструируем энергетические функции для некоторых классов Ω-устойчивых каскадов на 2- и 3-многообразиях. Все построения основаны на техническом факте, касающемся сглаживания непрерывной функции, который доказан в последнем разделе 4.4.

4.1. Ω-устойчивые 2-диффеоморфизмы с нетривиальными базисными множествами размерности один. В настоящем разделе рассматривается множество $S(M^2)$, состоящее из Ω-устойчивых 2-диффеоморфизмов $f : M^2 \to M^2$, каждое нетривиальное базисное множество которого является одномерным.

Детальную информацию о динамике таких диффеоморфизмов можно найти, например, в статье [1] или в главе 9 книги [26].

Пусть $f \in S(M^2)$ и Λ — нетривиальное базисное множество диффеоморфизма f. Для любой точки $p \in \Lambda$ хотя бы одна из компонент связности множества $W^s_p \setminus p$ ($W^u_p \setminus p$) имеет непустое пересечение с Λ. Точка $p \in \Lambda$ называется *s-граничной* (*u-граничной*) точкой аттрактора (репеллера) Λ, если одна из компонент связности множества $W^s_p \setminus p$ ($W^u_p \setminus p$) не пересекается с Λ, обозначим через $\ell^{s\varnothing}_p$ ($\ell^{u\varnothing}_p$) такую компоненту. Любой аттрактор (репеллер) Λ имеет конечное множество P_Λ s-граничных (u-граничных) точек.

Для каждого аттрактора Λ существует захватывающая окрестность U_Λ, которая строится следующим образом: для каждой компоненты связности $S_b, b \in \{1, \ldots, m_\Lambda\}$ множества Λ выбирается простая гладкая замкнутая кривая L_b так, что каждая сепаратриса $\ell^{s\varnothing}_p$, $p \in P_\Lambda$ трансверсально пересекает $L_\Lambda = \bigcup\limits_{b=1}^{m_\Lambda} L_b$ в точности в одной точке; $f(L_\Lambda) \cap L_\Lambda = \varnothing$ и кривые множеств L_Λ и $f(L_\Lambda)$ являются границами двумерных попарно не пересекающихся колец $K_1, \ldots, K_{m_\Lambda}$, состоящих из блуждающих точек. Тогда поверхность $U_\Lambda = \Lambda \cup \bigcup\limits_{n \geqslant 1} f^n(K_\Lambda)$, где $K_\Lambda = \bigcup\limits_{b=1}^{m_\Lambda} K_b$ является захватывающей окрестностью аттрактора Λ (см. рис. 8).

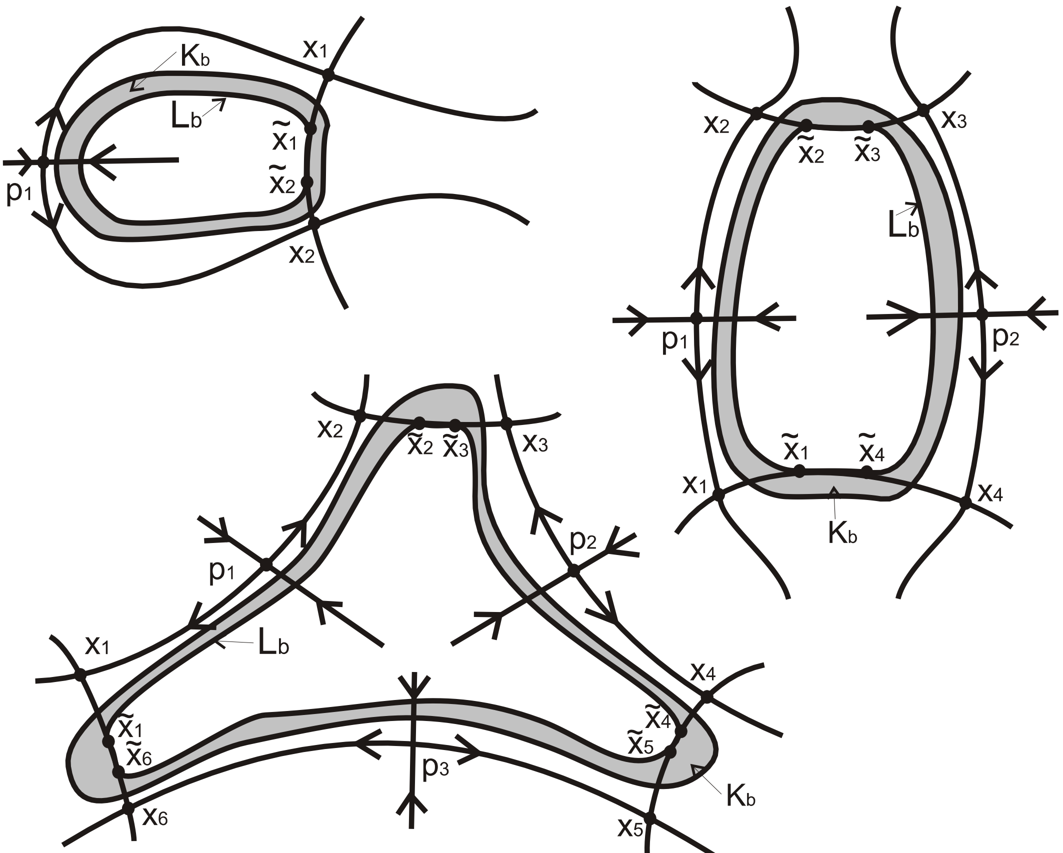

Рис. 8. Построение поверхности U_Λ

Основным результатом настоящего раздела является доказательство следующей теоремы.

Теорема 4.1. *Для любого диффеоморфизма $f \in S(M^2)$ существует энергетическая функция, являющаяся функцией Морса вне нетривиальных базисных множеств.*

Доказательство. Обозначим через $A_1, \ldots, A_{k_A}$ ($R_1, \ldots, R_{k_R}$) нетривиальные одномерные аттракторы (репеллеры) диффеоморфизма f. Пусть $U_{A_1}, \ldots, U_{A_{k_A}}$ ($U_{R_1}, \ldots, U_{R_{k_R}}$) — захватывающие окрестности аттракторов (репеллеров), построенные выше с помощью колец $K_{A_1}, \ldots, K_{A_{k_A}}$

$(K_{R_1},\dots,K_{R_{k_R}})$. Положим $A=A_1\cup\dots\cup A_{k_A}$, $R=R_1\cup\dots\cup R_{k_R}$, $U_A=U_{A_1}\cup\dots\cup U_{A_{k_A}}$, $U_R=U_{R_1}\cup\dots\cup U_{R_{k_R}}$, $K_A=K_{A_1}\cup\dots\cup K_{A_{k_A}}$, $K_R=K_{R_1}\cup\dots\cup K_{R_{k_R}}$ и $U=U_A\cup U_R$. Обозначим через D дизъюнктное объединение 2-дисков в числе, равном числу компонент связности множества ∂U. Положим $\check{M}=M^2\setminus U$ и $N=\check{M}\cup_q D$, где $q:\partial U\to\partial D$ — диффеоморфизм. Обозначим через $\pi:\check{M}\cup D\to N$ естественную проекцию.

По построению N — гладкая поверхность без края, допускающая диффеоморфизм Морса—Смейла $f_N:N\to N$, совпадающий с диффеоморфизмом $\pi f\pi^{-1}$ на множестве $\pi(\check{M})$ и имеющий по одной периодической точке (стоковой или источниковой) на каждой компоненте связности множества $\pi(D)$, обозначим через P множество этих точек. В силу результатов раздела 3.3 для диффеоморфизма f_N существует энергетическая функция Морса $\varphi_N:N\to[0,2]$ такая, что $\varphi(\Omega^0_{f_N})=0$, $\varphi(\Omega^2_{f_N})=2$ и $\pi(\partial U_A)$, $\pi(\partial U_R)$ — множества уровня функции φ_N со значениями $1/2$, $3/2$ соответственно. По построению диффеоморфизмы $f|_{M^2\setminus(A\cup R)}$ и $f_N|_{N\setminus P}$ гладко сопряжены посредством диффеоморфизма $h:M^2\setminus(A\cup R)\to N\setminus P$, совпадающего с π на $\check{M}$. Тогда $\varphi=\varphi_N h$ является гладкой функцией на $M^2\setminus(A\cup R)$, которая непрерывно продолжается на $A\cup R$ так, что $\varphi(A)=0$, $\varphi(R)=1$.

По построению функция $\varphi:M^2\to[0,2]$ является непрерывной функцией Ляпунова для диффеоморфизма f, которая является энергетической функцией Морса для f на $M^2\setminus(A\cup R)$. Положим $\varphi_{_A}=\varphi|_{U_A}$. По построению $\varphi_{_A}(U_A)=[0,1/2]$ и $\varphi_{_A}^{-1}(0)=A$. Из леммы 4.1 следует, что существует функция $g_{_A}:[0,1/2]\to[0,1/2]$ такая, что функция $\psi_{_A}=g_{_A}\circ\varphi_{_A}$ является энергетической функцией на U_A для f. Положим $\varphi_{_R}=2-\varphi|_{U_R}$. По построению $\varphi_{_R}(U_R)=[0,1/2]$ и $\varphi_{_R}^{-1}(0)=R$. Из леммы 4.1 следует, что существует функция $g_{_R}:[0,1/2]\to[0,1/2]$ такая, что функция $\psi_{_R}=g_{_R}\circ\varphi_{_R}$ является энергетической функцией на U_R для f^{-1}. Так как функции $g_{_A}$ и $g_{_R}$ являются тождественными на отрезке $[1/4,1/2]$, то функция

$$\psi(z)=\begin{cases}\varphi(z),\ \text{если } z\in(M^2\setminus(U_A\cup U_R));\\ \psi_{_A}(z),\ \text{если } z\in U_A;\\ 2-\psi_{_R}(z),\ \text{если } z\in U_R\end{cases}$$

является искомой энергетической функцией на M^2 для диффеоморфизма f. □

4.2. Структурно устойчивые 3-диффеоморфизмы с двумерным растягивающимся аттрактором (сжимающимся репеллером). В настоящей работе рассматривается класс $T(M^3)$ структурно устойчивых диффеоморфизмов на 3-многообразии $f:M^3\to M^3$, неблуждающее множество которых содержит двумерный растягивающийся аттрактор A (случай растягивающегося репеллера полностью аналогичен). В этом случае (см. Предложение 4.1) многообразие M^3 диффеоморфно трехмерному тору и A — единственное нетривиальное базисное множество диффеоморфизма f.

Изложим необходимую для построения энергетической функции информацию о динамике диффеоморфизма $f\in T(M^3)$, следуя работе [2]. Заметим, что все результаты работы [2] сформулированы для многообразия размерности $n\geqslant 3$ и случая, когда A является ориентируемым базисным множеством[1]. Однако, в работе [9] доказано, что в случае нечетного n базисное множество A является ориентируемым. Поэтому везде ниже, формулируя выжимку результатов работы [2] для случая $n=3$, мы не требуем от A дополнительно быть ориентируемым.

Пусть $f\in T(M^3)$ и A — двумерный растягивающийся аттрактор диффеоморфизма f. Тогда $\dim\ W^s_x=1$ для любой точки $x\in A$, что позволяет ввести обозначение $(z,y)^s$ $([z,y]^s)$ для открытой (замкнутой) дуги устойчивого многообразия W^s_x, ограниченной точками $y,z\in W^s_x$.

Множество $W^s_x\setminus x$ состоит из двух компонент связности. Хотя бы одна из этих компонент имеет непустое пересечение с множеством A. Точка $x\in A$ называется *s-граничной*, если одна из компонент связности множества $W^s_x\setminus x$ не пересекается с A, будем обозначать такую компоненту через $W^{s\varnothing}_x$. Множество Γ_A граничных точек множества A непусто и состоит из конечного числа периодических точек, которые разбиваются на *ассоциированные* пары (p,q) точек одинакового

[1]Базисное множество Λ называется *ориентируемым*, если для любой точки $x\in\Lambda$ и любых фиксированных чисел $\alpha>0$, $\beta>0$ индекс пересечения $W^s_\alpha(x)\cap W^u_\beta(x)$ во всех точках пересечения один и тот же (+1, либо -1). В противном случае базисное множество Λ называется *неориентируемым* (см., например, [27, с. 622]).

периода так, что 2-*связка* $B_{pq} = W^u_p \cup W^u_q$ является достижимой изнутри границей[1] компоненты связности множества $M^3 \setminus A$.

Для каждой пары (p, q) ассоциированных граничных точек множества A построим так называемую *характеристическую сферу*.

Пусть B_{pq} — 2-связка аттрактора A, состоящая из двух неустойчивых многообразий W^u_p и W^u_q ассоциированных граничных точек p и q соответственно, и m_{pq} — период точек p, q. Тогда для любой точки $x \in W^u_p \setminus p$ существует единственная точка $y \in (W^u_q \cap W^s_x)$ такая, что дуга $(x, y)^s$ не пересекается с множеством Ω. Определим отображение

$$\xi_{pq} : B_{pq} \setminus \{p, q\} \to B_{pq} \setminus \{p, q\},$$

положив $\xi_{pq}(x) = y$ и $\xi_{pq}(y) = x$. Тогда $\xi_{pq}(W^u_p \setminus p) = W^u_q \setminus q$ и $\xi_{pq}(W^u_q \setminus q) = W^u_p \setminus p$, т. е. отображение ξ_{pq} переводит проколотые неустойчивые многообразия 2-связки друг в друга и является инволюцией ($\xi^2_{pq} = id$). В силу теоремы о непрерывной зависимости инвариантных многообразий на компактных множествах отображение ξ_{pq} является гомеоморфизмом.

Ограничение $f^{m_{pq}}|_{W^u_p}$ имеет ровно одну гиперболическую отталкивающую неподвижную точку p, поэтому существует гладкий замкнутый 2-диск $D_p \subset W^u_p$ такой, что $p \in D_p \subset \mathrm{int}(f^{m_{pq}}(D_p))$. Тогда множество $C_{pq} = \bigcup\limits_{x \in \partial D_p} (x, \xi_{pq}(x))^s$ гомеоморфно замкнутому двумерному цилиндру $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$. Множество C_{pq} называют *связывающим цилиндром*. Окружность $\xi_{pq}(\partial D_p)$ ограничивает в W^u_q двумерный 2-диск D_q такой, что $q \in D_q \subset \mathrm{int}(f^{m_{pq}}(D_q))$. Множество $S_{pq} = D_p \cup C_{pq} \cup D_q$ гомеоморфно двумерной сфере, которую называют *характеристической сферой*, соответствующей связке B_{pq} (см. рис. 9).

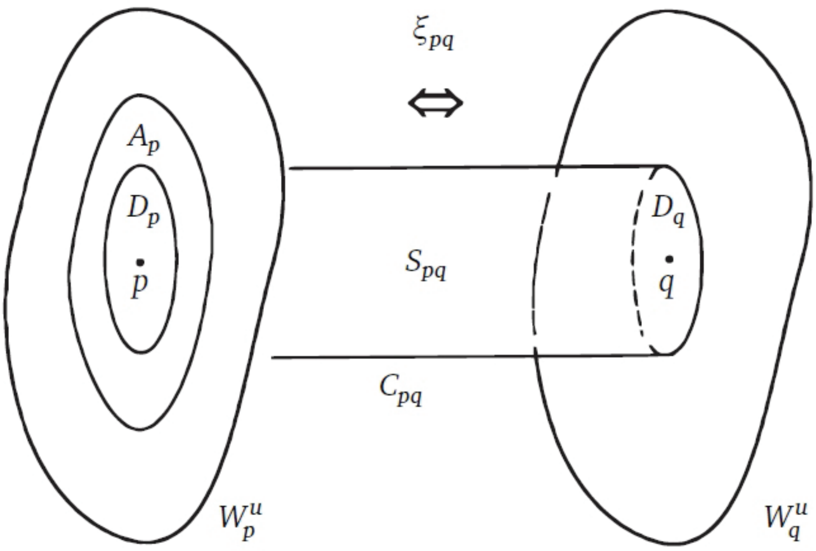

Рис. 9. Характеристическая сфера

Положим $T(f) = R_f \setminus A$ и основные динамические свойства диффеоморфизма $f \in T(M^3)$ сформулируем в виде предложения (см. рис. 10 для лучшего понимания).

Предложение 4.1. *Пусть $f : M^3 \to M^3$ — диффеоморфизм из класса $T(M^3)$. Тогда имеют место следующие факты*:

1. *объемлющее многообразие M^3 гомеоморфно трехмерному тору $\mathbb{T}^3$* (*см.* [2, *теорема* 5.1]);
2. *каждая характеристическая сфера S_{pq} ограничивает 3-шар Q_{pq} такой, что $(R_f \setminus A) \subset \bigcup\limits_{(p,q) \subset \Gamma_A} Q_{pq}$* (*см.* [2, *теорема* 5.1]);

[1]Пусть $G \subset M$ — открытое множество с границей ∂G ($\partial G = cl(G) \setminus \mathrm{int}(G)$). Подмножество $\delta G \subset \partial G$ называется *достижимой изнутри границей* области G, если для любой точки $x \in \delta G$ найдется открытая дуга, полностью лежащая в G и такая, что x является одной из ее концевых точек.

3. *для каждой ассоциированной пары* (p,q) *граничных точек существует натуральное число* k_{pq} *такое, что* $(R_f \setminus A) \cap Q_{pq}$ *состоит из* k_{pq} *периодических источников* $\alpha_1, \dots, \alpha_{k_{pq}}$ *и* $k_{pq}-1$ *седловых периодических точек* $\sigma_1, \dots, \sigma_{k_{pq}-1}$*, чередующихся на простой дуге* $l_{pq} = W_p^{s\varnothing} \cup \bigcup\limits_{i=1}^{k_{pq}-1} W^s_{\sigma_i} \cup \bigcup\limits_{i=1}^{k} W^s_{\alpha_i} \cup W_q^{s\varnothing}$ (*см.* [2, *следствие* 5.2]);
4. *пересечение* $W^u_{\sigma_i} \cap Q_{pq}, i = 1, \dots, k_{pq}-1$ *состоит в точности из одного двумерного диска* (*см.* [2, *теорема* 4.1]).

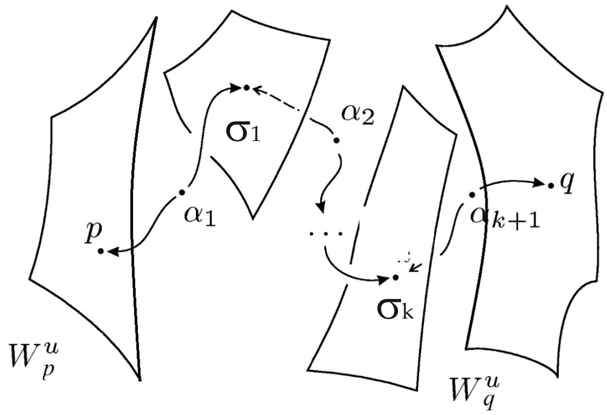

Рис. 10. Дуга l_{pq}

Теорема 4.2. *Для любого диффеоморфизма* $f \in T(M^3)$ *существует энергетическая функция, являющаяся функцией Морса вне базисного множества* Ω.

Доказательство. Доказательство теоремы базируется на предложении 4.1, теореме 3.6 и лемме 4.1.

Пусть (p,q) — пара ассоциированных граничных точек периода m_{pq} базисного множества A. Положим $A^-_{pq} = \bigcup\limits_{j=0}^{m_{pq}-1} f^j(\bigcup\limits_{i=1}^{k_{pq}-1} W^s_{\sigma_i} \cup \bigcup\limits_{i=1}^{k_{pq}-1} W^s_{\alpha_i})$. По построению множество A^-_{pq} является репеллером диффеоморфизма f. Покажем, что он является тесно вложенным. Для этого достаточно показать, что существует 3-шар P^-_{pq} такой, что $f^{-m_{pq}}(P^-_{pq}) \subset \operatorname{int} P^-_{pq}$ и пересечение $P^-_{pq} \cap W^u_{\sigma_j}$ состоит в точности из одного двумерного диска для каждого седла $\sigma_j, j \in \{1, \dots, k_{pq}-1\}$.

В силу предложения 4.1, 3-шар Q_{pq} пересекает двумерное неустойчивое многообразие седла $\sigma_j, j \in \{1, \dots, k_{pq}-1\}$ в точности по одному двумерному диску. Искомый 3-шар P^-_{pq} получатся из Q_{pq} вдавливанием внутрь дисков D_p, D_q и сглаживанием углов (см. рис. 11).

Обозначим через D дизъюнктное объединение 3-шаров в числе, равном числу пар ассоциированных точек аттрактора Ω. Положим $\check{M} = \bigcup\limits_{(p,q)\subset\Gamma_A} P^-_{pq}$ и $N = \check{M} \cup_q D$, где $q : \partial\check{M} \to \partial D$ — диффеоморфизм. Обозначим через $\pi : \check{M} \cup D \to N$ естественную проекцию.

По построению N — гладкое 3-многообразие, каждая компонента связности которого диффеоморфна $\mathbb{S}^3$, допускающее диффеоморфизм Морса—Смейла $f_N : N \to N$, совпадающий с диффеоморфизмом $\pi f \pi^{-1}$ на множестве $\pi(\check{M})$ и имеющий по одной стоковой точке на каждой компоненте связности множества $\pi(D)$, обозначим через P множество этих точек. Кроме того, все одномерные репеллеры диффеоморфизма f тесно вложены. В силу теоремы 3.6 для диффеоморфизма f_N существует энергетическая функция Морса $\varphi_N : N \to [0,3]$ такая, что $\varphi(\Omega^0_{f_N}) = 0$, $\varphi(\Omega^3_{f_N}) = 3$ и $\pi(\partial\check{M})$ — множество уровня функции φ_N со значением 1. По построению диффеоморфизмы $f|_{M^3\setminus A}$ и $f_N|_{N\setminus P}$ гладко сопряжены посредством диффеоморфизма $h : M^3 \setminus A \to N \setminus P$, совпадающего с π на $\check{M}$. Тогда $\varphi = \varphi_N h$ является гладкой функцией на $M^3 \setminus A$, которая непрерывно продолжается на A так, что $\varphi(A) = 0$.

По построению функция $\varphi : M^3 \to [0,3]$ является непрерывной функцией Ляпунова для диффеоморфизма f, которая является энергетической функцией Морса для f на $M^3 \setminus A$. Положим

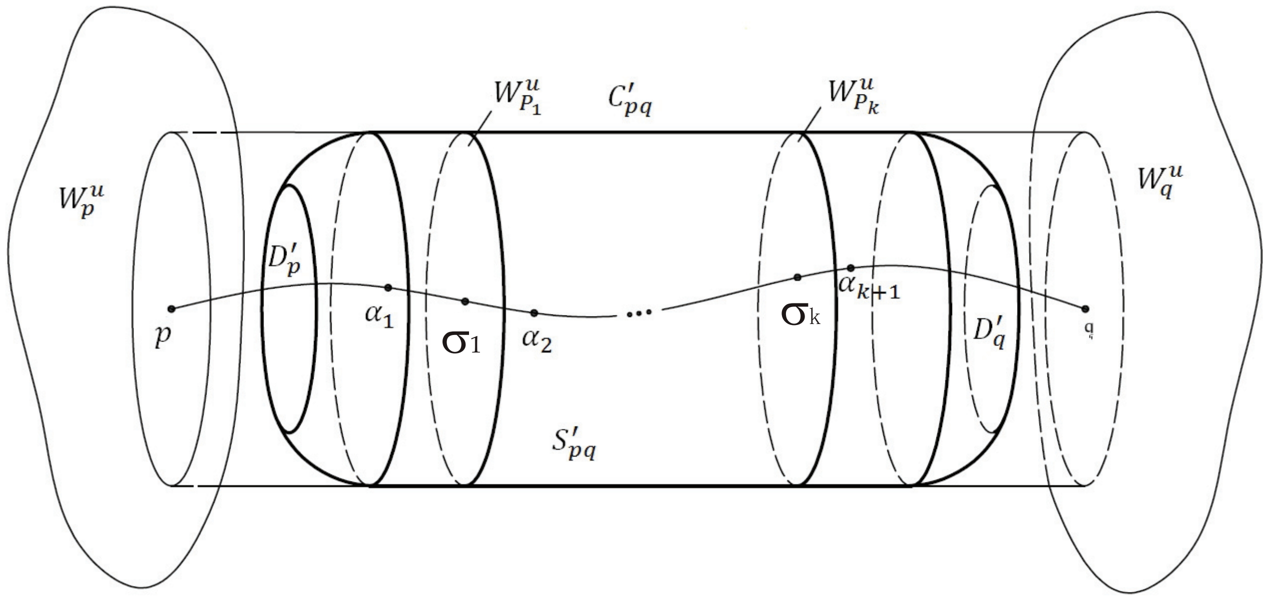

Рис. 11. Окрестность P^-_{pq}

$U_A = M^3 \setminus \check{M}$ и $\varphi_{_A} = \varphi|_{U_A}$. По построению $\varphi_{_A}(U_A) = [0,1]$ и $\varphi^{-1}_{_A}(0) = A$. Из леммы 4.1 следует, что существует функция $g_{_A} : [0,1] \to [0,1]$, такая что функция $\psi_{_A} = g_{_A} \circ \varphi_{_A}$ является энергетической функцией на U_A для f. Тогда функция

$$\psi(z) = \begin{cases} \varphi(z), \text{ если } z \in (M^3 \setminus U_A); \\ \psi_{_A}(z), \text{ если } z \in U_A \end{cases}$$

является искомой энергетической функцией на M^3 для диффеоморфизма f. □

4.3. Ω-устойчивые 3-диффеоморфизмы с двумерным неблуждающим множеством. В этом разделе рассматривается множество $Q(M^3)$, состоящее из Ω-устойчивых диффеоморфизмов на замкнутом ориентируемом 3-многообразии, все базисные множества которых имеют топологическую размерность два. Опишем динамику таких диффеоморфизмов, следуя работам [4, 6, 25].

В силу [6], каждая компонента связности каждого базисного множества диффеоморфизма $f \in Q(M^3)$ является двумерным тором, ручно вложенным[1] в M^3, и все компоненты связности имеют один и тот же период $k_f \geqslant 1$, а отображение $f^{k_f}|_B$ топологически сопряжено с *гиперболическим автоморфизмом тора*. Напомним, что *алгебраическим автоморфизмом* тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ называется диффеоморфизм $\widehat{C}$, задаваемый матрицей $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ из множества $GL(2,\mathbb{Z})$ целочисленных матриц с определителем ± 1, то есть $\widehat{C}(x,y) = (ax+by, cx+dy)\ (mod\ 1)$. Алгебраический автоморфизм $\widehat{C}$ называется *гиперболическим*, если собственные значения λ_1, λ_2 матрицы C удовлетворяют условиям $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$. При этом матрица C также называется *гиперболической*.

Обозначим через $\mathcal{A}$ ($\mathcal{R}$) объединение всех гиперболических аттракторов (репеллеров) диффеоморфизма f. Множества $\mathcal{A}$, $\mathcal{R}$ непусты, и граница каждой компоненты связности V множества $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ состоит в точности из одной периодической компоненты $A \subset \mathcal{A}$ и одной периодической компоненты $R \subset \mathcal{R}$. При этом замыкание $cl\ V$ гомеоморфно многообразию $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$. Таким образом, объемлющее многообразие M^3, допускающее диффеоморфизмы рассматриваемого класса, является объединением конечного числа копий $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$ таким, что каждое базисное множество является тором, по которому пересекаются в точности две копии. Однако, базисное множество диффеоморфизма f, будучи ручным тором, тем не менее может не быть гладким ни в одной точке (см., например, [29]). Однако, в следующей теореме утверждается факт существования энергетической функции у любого такого диффеоморфизма.

[1] Двумерный тор B называется *ручно вложенным* в многообразие M, если существует гомеоморфизм на образ $g : \mathbb{T}^2 \times [-1,1] \to M^3$ такой, что $g(\mathbb{T}^2 \times \{0\}) = B$.

Теорема 4.3. *Любой диффеоморфизм $f \in Q(M^3)$ обладает энергетической функцией.*

Доказательство. Пусть V — компонента связности множества $M^3 \backslash (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ такая, что $\partial V = A \cup R$, где $A \in \mathcal{A}$, $R \in \mathcal{R}$. Для доказательства теоремы достаточно построить энергетическую функцию $\varphi : cl\ V \to [0,1]$ для f^{k_f}.

Согласно работе [25] существует диффеоморфизм $\chi : \mathbb{T}^2 \times (0,2) \to V$ такой, что расслоение на двумерные торы $\{T_t = \chi(\mathbb{T}^2 \times \{t\}), t \in (0,2)\}$ является f^{k_f}-инвариантным. Определим функцию $\varphi : cl\ V \to [0,2]$ следующим образом:

$$\varphi(z) = \begin{cases} t, \text{ если } z \in T_t; \\ 0, \text{ если } z \in A; \\ 2, \text{ если } z \in R. \end{cases}$$

По построению функция φ является гладкой на V, непрерывной на $cl\ V$, убывающей вдоль траекторий системы, а также не имеет критических точек на множестве M. Положим $U_A = \chi(\mathbb{T}^2 \times (0,1]) \cup A$ и $\varphi_A = \varphi|_{U_A}$. Из леммы 4.1 следует, что существует функция $g_{_A} : [0,1] \to [0,1]$ такая, что функция $\psi_{_A} = g_{_A} \circ \varphi_{_A}$ является энергетической функцией на U_A для f^{k_f}. Положим $U_R = \chi(\mathbb{T}^2 \times (1,2]) \cup R$ и $\varphi_R = 2 - \varphi|_{U_R}$. Из леммы 4.1 следует, что существует функция $g_{_R}$: $[0,1] \to [0,1]$ такая, что функция $\psi_{_R} = g_{_R} \circ \varphi_{_R}$ является энергетической функцией на U_A для f^{-k_f}. Так как функции $g_{_A}$ и $g_{_R}$ являются тождественными на отрезке $[1/2,1]$, то функция

$$\psi(z) = \begin{cases} \varphi_{_A}(z), \text{ если } z \in U_A; \\ 2 - \varphi_{_R}(z), \text{ если } z \in U_R; \end{cases}$$

является искомой энергетической функцией на $cl\ V$ для диффеоморфизма f^{k_f}. $\square$

4.4. Процедура сглаживания непрерывной функции.

Докажем основной технический момент построения энергетических функций для диффеоморфизмов с хаотическим поведением.

Лемма 4.1 (см. [7, Лемма 2.1]). *Пусть M — гладкое компактное n-многообразие, $K \subset M$ — замкнутое подмножество M и U — некоторая замкнутая окрестность множества K такая, что $K \subset \operatorname{int} U$. Пусть задана непрерывная функция $\varphi : U \to [0;1]$, гладкая на $U \setminus K$ и $\varphi^{-1}(0) = K$. Тогда существует C^2-гладкая функция $g : [0;1] \to [0;1]$ такая, что суперпозиция $\psi = g \circ \varphi$ гладкая на всем множестве U, причем функция g удовлетворяет следующим свойствам*:

- *g — монотонно возрастающая на $[0;1]$;*
- *$g'(0) = 0$ и $g'(c) \neq 0$ $\forall c \in (0;1]$;*
- *$g(c) = c,\ \forall c \in [1/2;1]$.*

Доказательство. Пусть d — метрика на многообразии M. Для любого компактного подмножества $C \subset (U \setminus K)$ под максимумом модуля градиента функции φ в точке $x \in C$ будем понимать наибольший из модулей градиентов этой функции, посчитанных в картах конечного покрытия множества C. Для $c \in (0,1]$ положим $\alpha(c) = \min\{1, d^2(\varphi^{-1}(c), K)\}$ и $\beta(c) = \max\{1, \max\limits_{x \in \varphi^{-1}([c,1])} |\operatorname{grad} \varphi(x)|\}$. По построению функции $\alpha(c)$ и $\beta(c)$ являются непрерывными, причем $\alpha(c)$ — неубывающая на $(0;1]$ и существует значение $c^* \in (0;1]$ такое, что $\alpha(c)$ — монотонно возрастает на $(0;c^*]$, а $\beta(c)$ — невозрастающая. Тогда функция $\gamma(c) = \dfrac{\alpha(c)}{\beta(c)}$ является непрерывной неубывающей на полуинтервале $(0;1]$ функцией и $\lim\limits_{c \to 0} \dfrac{\alpha(c)}{\beta(c)} = 0$.

Построим C^2-гладкую функцию $g : [0;1] \to [0;1]$ такую, что

a) $g'(c) > 0$ для любого $c \in (0;1)$;
b) $g(c) \leqslant \gamma(c)$ для любого $c \in (0;1/8)$;
c) $g'(c) \leqslant \gamma(c)$ для любого $c \in (0;1/8)$;
d) $g(c) = c$ для любого $c \in [1/2;1]$.

Для построения такой функции будем использовать разбиение единицы. Напомним, что для данного открытого покрытия топологического пространства M открытыми множествами U_α с индексами α из множества $\mathcal{A}$ *разбиением единицы, подчиненным покрытию* $\{U_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\}$, называется набор гладких функций $\sigma_j : M \to \mathbb{R}$, где j принадлежит некоторому множеству индексов J, обладающих следующими свойствами:

- для каждого $j \in J$ существует $\alpha \in \mathcal{A}$ такое, что $\mathrm{Supp}(\sigma_j) \subset U_\alpha$, где $\mathrm{Supp}(\sigma_j)$ — замыкание множества, на котором функция σ_j отлична от нуля;
- $0 \leqslant \sigma_j(x) \leqslant 1$ для любого $x \in M, j \in J$;
- $\sum\limits_{j \in J} \sigma_j(x) = 1$ для любого $x \in M$.

Если для любой точки $x \in M$ существует окрестность W_x такая, что пересечение $W_x \cap \mathrm{Supp}(\sigma_j)$ непусто не более чем для конечного числа индексов j, то такое разбиение единицы называется *локально конечным*.

Возьмем открытое покрытие полуинтервала $(0;1]$ множествами

$$U_1 = \{x \in \mathbb{R} : \ \frac{1}{2} < x \leqslant 1\},$$
$$U_2 = \{x \in \mathbb{R} : \ \frac{1}{4} < x \leqslant 1\},$$
$$U_i = \{x \in \mathbb{R} : \ \frac{1}{2^i} < x < \frac{1}{2^{i-2}}\}, \quad i = 3, 4, \ldots,$$

и следующее локально конечное разбиение единицы, подчиненное этому покрытию:

$$\forall i = 2, 4, \ldots, \quad \sigma_i(x) = \begin{cases} e^{\frac{\left(x - \frac{1}{2^{i-1}}\right)^4}{\left(x - \frac{1}{2^i}\right)\left(x - \frac{1}{2^{i-2}}\right)}}, \text{ если } x \in \left(\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i-2}}\right); \\ 0, \text{ если } x \notin \left(\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i-2}}\right); \end{cases}$$

$$\sigma_1(x) = \begin{cases} 1 - \sigma_2(x), \text{ если } x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right]; \\ 0, \text{ если } x \notin \left(\frac{1}{2}; 1\right]; \end{cases}$$

$$\forall i = 3, 5, \ldots, \quad \sigma_i(x) = \begin{cases} 1 - \sigma_{i-1}(x), \text{ если } x \in \left[\frac{1}{2^{i-1}}, \frac{1}{2^{i-2}}\right); \\ 1 - \sigma_{i+1}(x), \text{ если } x \in \left(\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i-1}}\right); \\ 0, \text{ если } x \notin \left(\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i-2}}\right). \end{cases}$$

Положим $\varepsilon_i = \gamma\left(\frac{1}{2^i}\right)$ для всех $i = 4, 5, \ldots$. Поскольку каждая точка $x \in (0, 1]$ принадлежит носителям не более чем трех отображений из построенного выше разбиения единицы, то сумма $\sigma_0(x) = \sum\limits_{i=4}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(x)$ является гладкой на интервале $(0, 1/2]$ функцией, которая по непрерывности доопределяется в нуле нулем, как и все функции $\sigma_i, i \in \mathbb{N}$. Также по непрерывности доопределяется в нуле нулем гладкая функция $S(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(x)$. Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ и

$$\varepsilon_3 = \frac{\frac{1}{2} - \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sigma_0(x)dx - \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sigma_2(x)dx}{\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sigma_3(x)dx}.$$

Определим функцию g формулой

$$g(c) = \begin{cases} \int\limits_0^c S(x)dx, \text{ если } c \in (0;1]; \\ 0, \text{ если } c = 0. \end{cases}$$

Заметим, что она является C^2-гладкой, так как ее производная — сумма гладких функций. Покажем, что она является искомой, проверив условия a)-d).

a) Поскольку $g'(c) = S(c) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(c)$, то $g'(c) > 0$ для любого $c \in (0;1)$.

b) Для $i = 4, 5, \ldots$ последовательность $\{\varepsilon_i\}$ — убывающая. Заметим, что для любого $c \in (0;1]$ существует единственный номер i^* такой, что $c \in \left(\dfrac{1}{2^{i^*-1}}; \dfrac{1}{2^{i^*-2}}\right]$. Тогда $\sigma_{i^*}(c) \neq 0$ и $\sigma_i(c) = 0$ для всех $i \notin \{i^*, i^*+1\}$. Из выбора параметров ε_i для $c \in (0, 1/8)$ получаем цепочку неравенств $g(c) = S(c) = \int\limits_0^c \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(x)\right) dx = \int\limits_0^c \left(\sum\limits_{i=i^*}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(x)\right) dx < \int\limits_0^c \left(\sum\limits_{i=i^*}^{\infty} \varepsilon_{i^*} \sigma_i(x)\right) dx = \varepsilon_{i^*} \int\limits_0^c \left(\sum\limits_{i=i^*}^{\infty} \sigma_i(x)\right) dx < \varepsilon_{i^*} \int\limits_0^c \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sigma_i(x)\right) dx = \varepsilon_{i^*} \int\limits_0^c 1dx = \varepsilon_{i^*} c < \varepsilon_{i^*} = \gamma\left(\dfrac{1}{2^{i^*}}\right) < \gamma(c)$.

c) Для $g'(c)$, $c \in (0, 1/4)$ справедлива следующая оценка: $g'(c) = \sum\limits_{i=i^*}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(c) < \varepsilon_{i^*} \sum\limits_{i=i^*}^{\infty} \sigma_i(c) = \varepsilon_{i^*} < \gamma(c)$.

d) При $c \in [1/2; 1]$ верна цепочка равенств $g(c) = \int\limits_0^c \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(x)\right) dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum\limits_{i=4}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(x)\right) dx + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \varepsilon_3 \sigma_3(x) dx + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \varepsilon_2 \sigma_2(x) dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^c (\varepsilon_1 \sigma_1(x) + \varepsilon_2 \sigma_2(x)) dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum\limits_{i=4}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(x)\right) dx + \varepsilon_3 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sigma_3(x) dx + \varepsilon_2 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sigma_2(x) dx + \varepsilon_2 \int\limits_{\frac{1}{2}}^c (\sigma_1(x) + \sigma_2(x)) dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum\limits_{i=4}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(x)\right) dx + \dfrac{\frac{1}{2} - \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum\limits_{i=4}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(x)\right) dx - \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sigma_2(x) dx}{\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sigma_3 dx} \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sigma_3(x) dx + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sigma_2(x) dx + \left(c - \dfrac{1}{2}\right) = c$. Таким образом, $g(c) = c$ для $c \in [1/2; 1]$.

Покажем, что суперпозиция $\psi = g \circ \varphi$ является гладкой функцией на U.

Для начала заметим, что $\operatorname{grad} \psi = g' \cdot \operatorname{grad} \varphi$, это нам пригодится для дальнейших рассуждений. Так как на множестве $U \setminus K$ функция ψ является гладкой как суперпозиция гладких функций, то нам осталось показать, что функция ψ — гладкая на множестве K.

Рассмотрим любую точку $a \in K$ и локальную карту (U_a, h_a), где окрестность выбрана таким образом, что $\varphi(w) < 1/8$ для всех $w \in U_a$ и $h_a : U_a \to \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм, отображающий некоторую окрестность $U_a \in U$ точки a в $\mathbb{R}^n$, причем точка a переходит в начало координат O. Сначала покажем дифференцируемость. Если функция $\psi_a = \psi(h_a^{-1}(x))$ дифференцируема в точке O, то функция ψ дифференцируема в точке a. При этом функция ψ_a дифференцируема в точке O и имеет частные производные, равные нулю в этой точке, тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{s \to O} \dfrac{\psi_a(s)}{\rho(s, O)} = 0$, где $s(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и ρ — евклидова метрика в $\mathbb{R}^n$, определенная формулой $\rho(s^1, s^2) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i^1 - x_i^2)^2}$ для $s^1(x_1^1, \ldots, x_n^1), s_2(x_1^2, \ldots, x_n^2) \in \mathbb{R}^n$. Проверка равенства $\lim\limits_{s \to O} \dfrac{\psi_a(s)}{\rho(s, O)} = 0$ и завершит доказательство дифференцируемости.

Введем на $\mathbb{R}^n$ метрику d_a формулой $d_a(s^1, s^2) = d(h_a^{-1}(s^1), h_a^{-1}(s^2))$ для $s^1, s^2 \in \mathbb{R}^n$. В силу [15, лекция 15] метрики ρ и d_a эквивалентны в некоторой компактной окрестности $U(O)$ точки O, т. е. существуют константы $0 < c_1 \leqslant c_2$ такие, что

$$\forall s^1, s^2 \in U(O) \quad c_1 d_a(s^1 s^2) \leqslant \rho(s^1, s^2) \leqslant c_2 d_a(s^1, s^2).$$

Для $s \in U(O)$ положим $w = h_a^{-1}(s)$ и $c = \varphi(h_a^{-1}(s)) = \varphi(w)$. Тогда

$$\lim_{s\to O} \frac{\psi_a(s)}{\rho(s,O)} = \lim_{s\to O} \frac{\psi(h_a^{-1}(s))}{c_1 d(h_a^{-1}(s),a)} = \lim_{w\to a} \frac{\psi(w)}{c_1 d(w,a)} = \lim_{w\to a} \frac{g(\varphi(w))}{c_1 d(w,a)} = \lim_{w\to a} \frac{g(c)}{c_1 d(w,a)} <$$

$$< \lim_{w\to a} \frac{\alpha(c)}{\beta(c) c_1 d(w,a)} \leqslant \lim_{w\to a} \frac{d^2(w,a)}{c_1 d(w,a)} = \lim_{w\to a} \frac{d(w,a)}{c_1} = 0.$$

Теперь покажем, что частные производные $(\psi_a)'_{x_i}, i \in \{1,\ldots,n\}$ непрерывны в точке O, т. е. $\lim\limits_{s\to O}(\psi_a)'_{x_i}(s) = 0$, что эквивалентно $\lim\limits_{s\to O} |\operatorname{grad}\psi_a(s)| = 0$. Обозначим через $J_{h_a^{-1}}$ якобиан отображения h_a^{-1}, через $||J_{h_a^{-1}}||$ — его норму, подчиненную евклидовой норме вектора в $\mathbb{R}^n$, и через B константу такую, что $||J_{h_a^{-1}}(s)|| \leqslant B$ для всех точек s в некоторой окрестности точки O. Тогда $\lim\limits_{s\to O} |\operatorname{grad}\psi_a(s)| = \lim\limits_{s\to O} |J_{h_a^{-1}}(s) \cdot g'(c) \cdot \operatorname{grad}\varphi(w)| \leqslant \lim\limits_{s\to O} ||J_{h_a^{-1}}(s)|| \cdot |g'(c)| \cdot |\operatorname{grad}\varphi(w)| \leqslant$ $\lim\limits_{s\to O} B \cdot \dfrac{\alpha(c)}{\beta(c)} \cdot |\operatorname{grad}\varphi(w)| \leqslant \lim\limits_{w\to a} B \cdot \dfrac{d^2(w,a)}{|\operatorname{grad}\varphi(w)|} \cdot |\operatorname{grad}\varphi(w)| \leqslant \lim\limits_{w\to a} B \cdot d^2(w,a) = 0$.

Таким образом, функция ψ — гладкая на U. □

Благодарности. Результаты работы, посвященные построению энергетических функций для каскадов с регулярной динамикой (раздел 3 данной работы), выполнены при финансовой поддержке программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ (проект 90) в 2017 году, результаты работы, посвященные построению энергетических функций для каскадов с хаотической динамикой (раздел 4 данной работы), выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17-11-01041).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гринес В. З.* О топологической классификации структурно устойчивых диффеоморфизмов поверхностей с одномерными аттракторами и репеллерами// Мат. сб. — 1997. — *188*. — С. 57–94.
2. *Гринес В. З., Жужома Е. В.* Структурно устойчивые диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один// Изв. РАН. Сер. Мат. — 2002. — *66*, № 2. — С. 3–66.
3. *Гринес В. З., Жужома Е. В., Медведев В. С., Починка О. В.* Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса— Смейла// Тр. МИАН. — 2010. — *271*. — С. 111–133.
4. *Гринес В. З., Жужома Е. В., Починка О. В.* Грубые диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *57*. — С. 5–30.
5. *Гринес В. З., Лауденбах Ф., Починка О.* Квази-энергетическая функция для диффеоморфизмов с дикими сепаратрисами// Мат. заметки. — 2009. — *86*, № 2. — С. 175–183.
6. *Гринес В. З., Медведев В. С., Жужома Е. В.* О поверхностных аттракторах и репеллерах на 3-многообразиях// Мат. заметки. — 2005. — *78*, № 6. — С. 813–826.
7. *Гринес В. З., Носкова М. К., Починка О. В.* Построение энергетической функции для A-диффеоморфизмов с двумерным неблуждающим множеством на 3-многообразиях// Тр. Средневолжск. Мат. об-ва. — 2015. — *17*, № 3. — С. 12–17.
8. *Гринес В. З., Носкова М. К., Починка О. В.* Построение энергетической функции для трехмерных каскадов с двумерным растягивающимся аттрактором// Тр. Моск. Мат. об-ва. — 2015. — *76*, № 2. — С. 271–286.
9. *Медведев В. С., Жужома Е. В.* О неориентируемых двумерных базисных множествах на 3-многообразиях// Мат. сб. — 2002. — *193*, № 6. — С. 83–104.
10. *Милнор Дж.* Теория Морса. — Волгоград: Платон, 1969.
11. *Митрякова Т. М., Починка О. В., Шишенкова А. Е.* Энергетическая функция для диффеоморфизмов поверхностей с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством// Журн. Средневолжск. Мат. об-ва. — 2012. — *14*, № 1. — С. 98–107.
12. *Ошемков А. А., Шарко В. В.* О классификации потоков Морса—Смейла на двумерных многообразиях// Мат. сб. — 1998. — *189*, № 8. — С. 93–140.
13. *Плыкин Р. В.* Источники и стоки A-диффеоморфизмов поверхностей// Мат. сб. — 1974. — *94*. — С. 243–264.
14. *Плыкин Р. В.* О структуре централизаторов аносовских диффеоморфизмов тора// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 6. — С. 259–260.
15. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр V. Риманова геометрия. — М.: Факториал, 1998.
16. *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы// Усп. мат. наук. — 1970. — *25*, № 1. — С. 113–185.

17. *Artin E., Fox R. H.* Some wild cells and spheres in three-dimensional space// Ann. Math. — 1948. — *49*. — С. 979–990.
18. *Bonatti Ch., Grines V.* Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3// J. Dyn. Control Syst. — 2000. — *6*. — С. 579–602.
19. *Conley C.* Isolated invariant sets and Morse index. — Providence: Am. Math. Soc., 1978.
20. *Debrunner H., Fox R.* A mildly wild imbedding of an n-frame// Duke Math. J. — 1960. — *27*. — С. 425–429.
21. *Franks J.* Nonsingular Smale flow on S^3// Topology. — 1985. — *24*, № 3. — С. 265–282.
22. *Franks J.* A variation on the Poincare—Birkhoff theorem// Hamiltonian dynamical systems, Proc. AMS-INS-SIAM Jt. Summer Res. Conf., Contemporary Math. — 1988. — *81*. — С. 111–117.
23. *Grines V., Laudenbach F., Pochinka O.* Self-indexing energy function for Morse—Smale diffeomorphisms on 3-manifolds// Mosc. Math. J. — 2009. — *9*, № 4. — С. 801–821.
24. *Grines V. Z., Laudenbach F., Pochinka O. V.* Dynamically ordered energy function for Morse—Smale diffeomorphisms on 3-manifolds// Proc. Steklov Inst. Math. — 2012. — *278*, № 1. — С. 27–40.
25. *Grines V., Levchenko Y., Medvedev V., Pochinka O.* The topological classification of structural stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets// Nonlinearity. — 2015. — *28*, № 11. — С. 4081–4102.
26. *Grines V., Medvedev T., Pochinka O.* Dynamical systems on 2- and 3-manifolds. — Cham: Springer, 2016.
27. *Grines V., Zhuzhoma E.* On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors// Trans. Am. Math. Soc. — 2005. — *357*, № 2. — С. 617–667.
28. *Harrold O. G., Griffith H. C., Posey E. E.* A characterization of tame curves in three-space// Trans. Am. Math. Soc. — 1955. — *79*. — С. 12–34.
29. *Kaplan J., Mallet-Paret J., Yorke J.* The Lyapunov dimension of nowhere differentiable attracting torus// Ergodic Theory Dynam. Systems. — 1984. — *2*. — С. 261–281.
30. *Meyer K. R.* Energy functions for Morse—Smale systems// Amer. J. Math. — 1968. — *90*. — С. 1031–1040.
31. *Palis J.* On Morse—Smale dynamical systems// Topology. — 1969. — *8*. — С. 385–404.
32. *Pixton D.* Wild unstable manifolds// Topology. — 1977. — *16*. — С. 167–172.
33. *Robinson C.* Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. — Boca Raton: CRC Press, 1999.
34. *Shub M.* Morse—Smale diffeomorphisms are unipotent on homology// Dynamical Syst., Proc. Sympos. Univ. Bahia, Salvador 1971. — 1973. — С. 489–491.
35. *Shub M., Sullivan D.* Homology theory and dynamical systems// Topology. — 1975. — *4*. — С. 109–132.
36. *Smale S.* Morse inequalities for a dynamical system// Bull. Am. Math. Soc. — 1960. — *66*. — С. 43–49.
37. *Smale S.* On gradient dynamical systems// Annals Math. — 1961. — *74*. — С. 199–206.
38. *Smale S.* Differentiable dynamical systems// Bull. Am. Math. Soc. — 1967. — *73*. — С. 747–817.
39. *Wilson W.* Smoothing derivatives of functions and applications// Trans. Am. Math. Soc. — 1969. — *139*. — С. 413–428.

В. З. Гринес
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
603155, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12
E-mail: `vgrines@yandex.ru`

О. В. Починка
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
603155, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12
E-mail: `olga-pochinka@yandex.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2-191-222 UDC 517.938

Construction of Energetic Functions for Ω-Stable Diffeomorphisms on 2- and 3-Manifolds

© 2017 **V. Z. Grines, O. V. Pochinka**

Abstract. In this paper, we review the results connected to existence of the energetic function for discrete dynamical systems. Also we consider technique of construction of such functions for some classes of Ω-stable and structurally stable diffeomorphisms on manifolds of dimension 2 and 3.

REFERENCES

1. V. Z. Grines, “O topologicheskoi klassifikatsii strukturno ustoichivykh diffeomorfizmov poverkhnostei s odnomernymi attraktorami i repellerami” [On topological classification of structurally stable diffeomorphisms of surfaces with one-dimensional attractors and repellers], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1997, **188**, 57–94 (in Russian).
2. V. Z. Grines and E. V. Zhuzhoma, “Strukturno ustoichivye diffeomorfizmy s bazisnymi mnozhestvami korazmernosti odin” [Structurally stable diffeomorphisms with basic sets of codimension one], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2002, **66**, No. 2, 3–66 (in Russian).
3. V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, and O. V. Pochinka, “Global’nye attraktor i repeller diffeomorfizmov Morsa—Smeyla” [Global attractor and repeller of Morse–Smale diffeomorphisms], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2010, **271**, 111–133 (in Russian).
4. V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, and O. V. Pochinka, “Grubye diffeomorfizmy s bazisnymi mnozhestvami korazmernosti odin” [Rough diffeomorphisms with basic sets of codimension one], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **57**, 5–30 (in Russian).
5. V. Z. Grines, F. Laudenbakh, and O. Pochinka, “Kvazi-energeticheskaia funktsiia dlia diffeomorfizmov s dikimi separatrisami” [Quasi-energy function for diffeomorphisms with wild separatrices], *Mat. zametki.* [Math. Notes], 2009, **86**, No. 2, 175–183 (in Russian).
6. V. Z. Grines, V. S. Medvedev, and E. V. Zhuzhoma, “O poverkhnostnykh attraktorakh i repellerakh na 3-mnogoobraziiakh” [On surface attractors and repellers on 3-manifolds], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2005, **78**, No. 6, 813–826 (in Russian).
7. V. Z. Grines, M. K. Noskova, and O. V. Pochinka, “Postroenie energeticheskoi funktsii dlia A-diffeomorfizmov s dvumernym nebluzhdaiushchim mnozhestvom na 3-mnogoobraziiakh” [Construction of the energy function for A-diffeomorphisms with two-dimensional nonwandering set on 3-manifolds], *Tr. Srednevolzhsk. Mat. ob-va* [Proc. Srednevolzhsk. Math. Soc.], 2015, **17**, No. 3, 12–17 (in Russian).
8. V. Z. Grines, M. K. Noskova, and O. V. Pochinka, “Postroenie energeticheskoi funktsii dlia trekhmernykh kaskadov s dvumernym rastiagivaiushchimsia attraktorom” [Construction of the energy function for three-dimensional cascades with two-dimensional expanding attractor], *Tr. Mosk. Mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 2015, **76**, No. 2, 271–286 (in Russian).
9. V. S. Medvedev, and E. V. Zhuzhoma, “O neorientiruemykh dvumernykh bazisnykh mnozhestvakh na 3-mnogoobraziiakh” [On nonorientable two-dimensional basic sets on 3-manifolds], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2002, **193**, No. 6, 83–104 (in Russian).
10. Dzh. Milnor, *Teoriia Morsa* [The Morse Theory], Platon, Volgograd, 1969 (in Russian).
11. T. M. Mitriakova, O. V. Pochinka, and A. E. Shishenkova, “Energeticheskaia funktsiia dlia diffeomorfizmov poverkhnostei s konechnym giperbolicheskim tsepno rekurrentnym mnozhestvom” [Energy function for diffeomorphisms of surfaces with finite hyperbolic chain recurrent set], *Zhurn. Srednevolzhsk. Mat. ob-va* [J. Srednevolzhsk. Math. Soc.], 2012, **14**, No. 1, 98–107 (in Russian).
12. A. A. Oshemkov and V. V. Sharko, “O klassifikatsii potokov Morsa—Smeyla na dvumernykh mnogoobraziyakh” [On classification of Morse–Smale flows on two-dimensional manifolds], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1998, **189**, No. 8, 93–140 (in Russian).
13. R. V. Plykin, “Istochniki i stoki A-diffeomorfizmov poverkhnostei” [Sources and sinks of A-diffeomorphisms of surfaces], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1974, **94**, 243–264 (in Russian).

14. R. V. Plykin, "O strukture tsentralizatorov anosovskikh diffeomorfizmov tora" [On the structure of centralizers of Anosov diffeomorphisms of the torus], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1998, **53**, No. 6, 259–260 (in Russian).
15. M. M. Postnikov, *Lektsii po geometrii. Semestr V. Rimanova geometriia* [Lectures in Geometry. Semester V. Riemannian Geometry], Faktorial, Moscow, 1998 (in Russian).
16. S. Smale, "Differentsiruemye dinamicheskie sistemy" [Differentiable dynamical systems], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1970, **25**, No. 1, 113–185 (in Russian).
17. E. Artin and R. H. Fox, "Some wild cells and spheres in three-dimensional space," *Ann. Math.*, 1948, **49**, 979–990.
18. Ch. Bonatti and V. Grines, "Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3," *J. Dyn. Control Syst.*, 2000, **6**, 579–602.
19. C. Conley, *Isolated Invariant Sets and Morse Index*, Am. Math. Soc., Providence, 1978.
20. H. Debrunner and R. Fox, "A mildly wild imbedding of an n-frame," *Duke Math. J.*, 1960, **27**, 425–429.
21. J. Franks, "Nonsingular Smale flow on S^3," *Topology*, 1985, **24**, No. 3, 265–282.
22. J. Franks, "A variation on the Poincare—Birkhoff theorem," *Hamiltonian dynamical systems, Proc. AMS-INS-SIAM Jt. Summer Res. Conf., Contemporary Math.*, 1988, **81**, 111–117.
23. V. Grines, F. Laudenbach, and O. Pochinka, "Self-indexing energy function for Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds," *Mosc. Math. J.*, 2009, **9**, No. 4, 801–821.
24. V. Z. Grines, F. Laudenbach, and O. V. Pochinka, "Dynamically ordered energy function for Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds," *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2012, **278**, No. 1, 27–40.
25. V. Grines, Y. Levchenko, V. Medvedev, and O. Pochinka, "The topological classification of structural stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets," *Nonlinearity*, 2015, **28**, No. 11, 4081–4102.
26. V. Grines, T. Medvedev, and O. Pochinka, *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds*, Springer, Cham, 2016.
27. V. Grines and E. Zhuzhoma, "On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors," *Trans. Am. Math. Soc.*, 2005, **357**, No. 2, 617–667.
28. O. G. Harrold, H. C. Griffith, and E. E. Posey, "A characterization of tame curves in three-space," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1955, **79**, 12–34.
29. J. Kaplan, J. Mallet-Paret, and J. Yorke, "The Lyapunov dimension of nowhere differentiable attracting torus," *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 1984, **2**, 261–281.
30. K. R. Meyer, "Energy functions for Morse–Smale systems," *Amer. J. Math.*, 1968, **90**, 1031–1040.
31. J. Palis, "On Morse–Smale dynamical systems," *Topology*, 1969, **8**, 385–404.
32. D. Pixton, "Wild unstable manifolds," *Topology*, 1977, **16**, 167–172.
33. C. Robinson, *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, CRC Press, Boca Raton, 1999.
34. M. Shub, "Morse–Smale diffeomorphisms are unipotent on homology," *Dynamical Syst., Proc. Sympos. Univ. Bahia, Salvador 1971*, 1973, 489–491.
35. M. Shub and D. Sullivan, "Homology theory and dynamical systems," *Topology*, 1975, **4**, 109–132.
36. S. Smale, "Morse inequalities for a dynamical system," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1960, **66**, 43–49.
37. S. Smale, "On gradient dynamical systems," *Annals Math.*, 1961, **74**, 199–206.
38. S. Smale, "Differentiable dynamical systems," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1967, **73**, 747–817.
39. W. Wilson, "Smoothing derivatives of functions and applications," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1969, **139**, 413–428.

V. Z. Grines
National Research University — Higher School of Economics
25/12 Bolshaya Pecherskaya str., 603155 Nizhnii Novgorod, Russia
E-mail: `vgrines@yandex.ru`

O. V. Pochinka
National Research University — Higher School of Economics
25/12 Bolshaya Pecherskaya str., 603155 Nizhnii Novgorod, Russia
E-mail: `olga-pochinka@yandex.ru`