Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 4 (2018). С. 736–748

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-4-736-748 УДК 517.983

СВЯЗЬ МЕЖДУ ОДНОСТОРОННИМИ ШАРОВЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

© 2018 г. **М. У. ЯХШИБОЕВ**

Аннотация. В работе устанавливается связь между односторонними шаровыми потенциалами с помощью радиально-сингулярных операторов в шаровом слое. Кроме того, построены новые односторонние шаровые потенциалы типа Чженя.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В работах [6,7,13,16,17] были рассмотрены односторонние шаровые потенциалы (о.ш.п.) B_{a+}^{α} и B_{b-}^{α} — многомерные аналоги операторов дробного интегрирования Римана—Лиувилля. Ряд свойств односторонних шаровых потенциалов можно найти в работах [6,7] (см. также [12, § 29]).

Хорошо известна связь между левосторонними и правосторонними дробными интегралами Римана—Лиувилля: интегралы первого типа выражаются через интегралы второго типа и наоборот с помощью сингулярных интегралов. Такие связи (в случае оси, полуоси и отрезка) рассматривались Л. фон Вольферёдорфром [18], С. Г. Самко [9, 10], Х. Кобером [15], А. А. Килбасом [2], Б. Рубином [5] (см. также [12, § 11]).

Эти связи применяются при решении обобщенных интегральных уравнений Абеля [9, 10, 18]. Кроме того, в теории вырождающихся дифференциальных уравнений смешанного и параболического типов уравнений в частных производных знаковую роль играют и законы композиции операторов дробного интегрирования и дифференцирования с различными началами [3].

В работе [13] устанавливается связь односторонних шаровых потенциалов с помощью радиально-сингулярного оператора в $L_p(\mathbb{R}^n)$. Мы увидим, что она содержит радиальный сингулярный оператор, ядро которого является однородным степени $-n$ и инвариантным относительно вращений.

Показывается, что символ получаемого сингулярного оператора удовлетворяет условиям соответствующей теоремы о Фурье-мультипликаторах, откуда следует ограниченность этого оператора в $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ (см. [13]).

В этой работе показано распространение подобных связей в шаровой слой, т. е. устанавливается связь между односторонними шаровыми потенциалами разных типов. Вопрос заключается в следующем: к какому результату приводят композиции $(B_{a+}^{\alpha})^{-1}B_{b-}^{\alpha}$ и $(B_{b-}^{\alpha})^{-1}B_{a+}^{\alpha}$? Естественно ожидать, что операторы $(B_{a+}^{\alpha})^{-1}\cdot B_{b-}^{\alpha}$, $(B_{b-}^{\alpha})^{-1}\cdot B_{a+}^{\alpha}$ в каком-то смысле уничтожают действие друг друга и их композиция является оператором, ограниченным в пространстве $L_p(U(a,b))$.

Эта статья структурирована следующим образом. В пункте 2.1 приводятся предварительные сведения о преобразовании Меллина коэффициентов Фурье—Лапласа. Теорема о радиально-сферическом мультипликаторе Фурье изучается в пункте 2.2. В пункте 2.3 рассматривается разложение односторонних шаровых потенциалов в ряды Фурье—Лапласа. Связи односторонних шаровых потенциалов друг с другом с помощью радиально-сингулярного оператора приведены в пункте 2.4. В пункте 2.5 показывается ограниченность радиально-сингулярного оператора в $L_P(\mathbb{R}^n)$. Основные утверждения приведены в пунктах 3.1 и 3.2.

Основные обозначения.

- $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$;
- $(x \cdot y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$;
- $r = |x| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$;
- $x' = \dfrac{x}{|x|}$;
- $f(x) = f(r, x')$;
- $U(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant a < |x| < b \leqslant \infty\}$ — шаровой слой в $\mathbb{R}^n$;
- S^{n-1} — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$;
- $\omega_{n-1} = 2\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma^{-1}(\frac{n}{2})$ — площадь ее поверхности;
- $Y_{k,v}(x')(k = 0, 1, 2, \ldots;\ v = 1, 2, \ldots, d_n(k))$ — полная ортонормированная система сферических гармоник;
- $d_n(k)$ — размерность подпространства сферических гармоник порядка k;
- всюду ниже $\sum\limits_{k,v} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum\limits_{v=1}^{d_n(k)}$;
- $C_{0,0}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ — класс бесконечно-дифференцируемых финитных функций с носителем вне начала координат.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

2.1. Предварительные сведения о преобразовании Меллина коэффициентов Фурье—Лапласа. Пусть

$$\varphi(x) \approx \sum_{k,v} \varphi_{k,v}(r)\, Y_{k,v}(x'), \quad \varphi_{k,v}(r) = \int\limits_{S^{n-1}} \varphi(r, \sigma)\, Y_{k,\nu}(\sigma)\, d\sigma, \quad r = |x|$$

есть разложение функции в ряд Фурье—Лапласа по сферическим гармоникам.

Пусть $x = (r, x')$, $r = |x|$. Заменим в соответствии функцию $\varphi(x) = \varphi(r, x')$ последовательностью $\left\{\varphi_{k,v}^{*}(z)\right\}$ в преобразовании Меллина коэффициентов Фурье—Лапласа:

$$\varphi_{k,v}^{*}(z) = m\left\{\varphi_{k,v}(r); z\right\} = \int\limits_{0}^{\infty} r^{z-1}\varphi_{k,v}(r)dr,$$

где

$$\varphi_{k,v}(r) = \int\limits_{S^{n-1}} \varphi(r, \sigma) Y_{k,v}(\sigma) d\sigma.$$

Следуя [8], отображение $\varphi(x) \to \left\{\varphi_{k,v}^{*}(z)\right\}$ назовем *радиально-сферическим преобразованием Фурье* (*Р.С.Ф.-преобразованием*) функции $\varphi(x)$, а ряд

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{k,v} Y_{k,v}(x') \int\limits_{\operatorname{Re} z=\vartheta} r^{-z}\varphi_{k,v}^{*}(z)dz, \tag{2.1}$$

где ϑ выбирается подходящим образом, *радиально-сферическим разложением Фурье* (*Р.С.Ф.-разложением*) этой функции. Справедлива следующая лемма (см. [8]).

Лемма 2.1. *Если* $\varphi(x) \in C_{0,0}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, *то при любом* $\vartheta \in \mathbb{R}^1$ *ряд* (2.1) *сходится к* $\varphi(x)$ *абсолютно и равномерно в произвольном слое* $0 < \alpha \leqslant |x| \leqslant \beta < \infty$.

2.2. Теорема о радиально-сферическом мультипликаторе Фурье. Рассмотрим оператор

$$A_\vartheta \varphi = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k,v} Y_{k,v}(x') \int_{\operatorname{Re} z = \vartheta} r^{-z} a_k(z) \varphi^*_{k,v}(z) dz, \tag{2.2}$$

порожденный последовательностью измеримых функций $a_k(z)$ заданных на прямой $\operatorname{Re} z = \vartheta$. Можно показать, что для $\varphi \in C^\infty_{0,0}(\mathbb{R}^n)$ ряд в правой части (2.2) сходится, если

$$\sup \left\{ |a_k(z)| : k \in \mathbb{Z}^0_+, \operatorname{Re} z = \vartheta \right\} < \infty, \tag{2.3}$$

где $\mathbb{Z}^0_+ = \{0, 1, \ldots\}$.

Определение 2.1. Последовательность измеримых функций, заданных на прямой

$$\operatorname{Re} z = \vartheta = \lambda + \frac{n}{p}$$

и удовлетворяющих условию (2.3), называется *радиально-сферическим мультипликатором Фурье в* $L_p(\mathbb{R}^n)$, если для любой функции $\varphi \in C^\infty_{0,0}(\mathbb{R}^n)$ выполняется оценка

$$||A_\vartheta \varphi||_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \, ||\varphi||_{L_p(\mathbb{R}^n)} ,$$

где C не зависит от φ.

Совокупность всех мультипликаторов обозначим через $m(L_p(\mathbb{R}^n))$.

Следующая теорема (см. [8, с. 13-14]) содержит достаточное условие принадлежности последовательности $\{a_k(z)\}$, $k \in \mathbb{Z}^+_0$ классу $m(L_p(\mathbb{R}^n))$.

Теорема 2.1. *Пусть* $w \in a^\lambda_p$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$, $1 < p < \infty$. *Предположим, что для заданной последовательности* $\{a_k(z)\}$, $k \in \mathbb{Z}^+_0$ *найдутся числа* $N_0 \in \mathbb{Z}^0_+$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, *удовлетворяющие следующим условиям*:

1. $\left| \xi^j \dfrac{\partial^j}{\partial \xi^j} a_k(\lambda + \dfrac{n}{p} + i\xi) \right| < c_1$ *для всех* $\xi \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}, k = 0, 1, \ldots, N_0$ *и* $j = 0, 1$;
2. *существует функция* $m(\xi, r) : \mathbb{R}^1 \times [N_0, \infty) \to \mathbb{C}$ *такая, что*

$$m(\xi, k) = a_k(\lambda + \frac{n}{p} + i\xi) \quad \text{для всех} \quad k \geqslant \vartheta,$$

$$\left| \xi^j \eta^l \frac{\partial^j}{\partial \xi^j} \frac{\partial^l}{\partial \eta^l} m(\xi, \eta) \right| \leqslant c_2 \quad \text{для всех} \quad \xi \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}, \eta \geqslant N_0, \ l = 0, 1, \ldots, \left[\frac{n+1}{2} \right], \ j = 0, 1.$$

Тогда $\{a_k(z)\} \in m(L_p(\mathbb{R}^n), w)$.

2.3. Разложение односторонних шаровых потенциалов в ряды Фурье—Лапласа. *Односторонние шаровые потенциалы* (*шаровые дробные интегралы*, *ball fractional integrals*) порядка α ($\alpha > 0$) в шаровом слое $U(a, b)$, $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant \infty$, определим равенством

$$\left(B^\alpha_{a+} \varphi \right)(x) = \gamma_{n,\alpha} \int_{a \leqslant |y| < |x|} \frac{\left(|x|^2 - |y|^2 \right)^\alpha}{|x - y|^n} \varphi(y) \, dy, \ |x| > a,$$

$$\left(B^\alpha_{b-} \varphi \right)(x) = \gamma_{n,\alpha} \int_{|x| < |y| < b} \frac{\left(|y|^2 - |x|^2 \right)^\alpha}{|x - y|^n} \varphi(y) \, dy, \ |x| < b,$$

где

$$\gamma_{n,\alpha} = \frac{2}{\omega_{n-1} \Gamma(\alpha)} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi^n} \, \Gamma(\alpha)}.$$

Потенциалы $B^\alpha_{a+}\varphi$ назовем *левосторонними*, а $B^\alpha_{b-}\varphi$ *правосторонними*. При $a = 0$, $b = \infty$ будем писать соответственно $B^\alpha_+\varphi$, $B^\alpha_-\varphi$.

Обратные односторонние шаровые потенциалы порядка $\alpha\,(0<\alpha<1)$ и шаровой слой $U\,(a,b)\,,\ 0\leqslant a<b\leqslant\infty$, определим равенством

$$(B^{\alpha}_{a+})^{-1}f=\frac{f\,(x)}{\Gamma\,(1-\alpha)\left(|x|^2-a^2\right)^{\alpha}}+\frac{2\alpha}{\Gamma\,(1-\alpha)\,\omega_{n-1}}\int\limits_{a<|y|<|x|}\frac{\left(\frac{|x|}{|y|}\right)^{n-2}f\,(x)-f\,(y)}{\left(|x|^2-|y|^2\right)^{\alpha}|x-y|^n}dy,$$

$$\left(B^{\alpha}_{b-}\right)^{-1}f=\frac{f\,(x)}{\Gamma\,(1-\alpha)\left(|b|^2-|x|^2\right)^{\alpha}}+\frac{2\alpha}{\Gamma\,(1-\alpha)\,\omega_{n-1}}\int\limits_{|x|<|y|<b}\frac{f\,(x)-f\,(y)}{\left(|y|^2-|x|^2\right)^{\alpha}}\frac{dy}{|x-y|^n}.$$

Известно, что действие операторов $B^{\alpha}_{a+}\varphi$ и $B^{\alpha}_{b-}\varphi$ сводится к дробному интегрированию (*типа Эрдейи—Кобера*) по радиальной переменной. А именно,

$$(B^{\alpha}_{a+}\varphi)_{k,v}(r)=\frac{2r^{2-n-k}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^r\frac{\rho^{n+k-1}\varphi_{k,v}\,(\rho)}{(r^2-\rho^2)^{1-\alpha}}d\rho, \tag{2.4}$$

$$(B^{\alpha}_{b-}\varphi)_{k,v}(r)=\frac{2r^{k}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_r^b\frac{\rho^{1-k}\varphi_{k,v}\,(\rho)}{(\rho^2-r^2)^{1-\alpha}}d\rho.$$

Для обратных односторонних шаровых потенциалов порядка α $(0<\alpha<1)$ $\left(B^{\alpha}_{a+}\right)^{-1}$, $\left(B^{\alpha}_{b-}\right)^{-1}$ имеем:

$$\left(\left(B^{\alpha}_{a+}\right)^{-1}f\right)_{k,\nu}(r)=\frac{r^{1-n-k}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dr}\int\limits_a^r\frac{\rho^{n+k-1}f_{k,\nu}\,(\rho)}{\left(r^2-\rho^2\right)^{\alpha}}d\rho, \tag{2.5}$$

$$\left(\left(B^{\alpha}_{b-}\right)^{-1}f\right)_{k,\nu}(r)=-\frac{r^{k-1}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dr}\int\limits_r^b\frac{\rho^{1-k}f_{k,\nu}\,(\rho)}{\left(\rho^2-r^2\right)^{\alpha}}d\rho. \tag{2.6}$$

Будем предполагать, что функция $f_{k,\nu}\,(r)$ достаточно «хорошая», тогда (2.5), (2.6) можно привести к другому виду:

$$\left(\left(B^{\alpha}_{a+}\right)^{-1}f\right)_{k,\nu}(r)=\frac{f_{k,\nu}\,(r)}{\Gamma(1-\alpha)(r^2-a^2)^{\alpha}}+\frac{2\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_a^r\frac{f_{k,\nu}\,(r)-\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+k-2}f_{k,\nu}\,(\rho)}{\left(r^2-\rho^2\right)^{\alpha+1}}\rho d\rho, \tag{2.7}$$

$$\left(\left(B^{\alpha}_{b-}\right)^{-1}f\right)_{k,\nu}(r)=\frac{f_{k,\nu}\,(r)}{\Gamma(1-\alpha)(b^2-r^2)^{\alpha}}+\frac{2\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_r^b\frac{f_{k,\nu}\,(r)-\left(\frac{r}{\rho}\right)^{k}f_{k,\nu}\,(\rho)}{\left(\rho^2-r^2\right)^{\alpha+1}}\rho d\rho. \tag{2.8}$$

Конструкции (2.7), (2.8) будем называть *дробными производными типа Маршо*. Справедлива следующая лемма (см. [7,8]).

Лемма 2.2. *Пусть* $1<p<\infty$, $r=|x|$. *Операторы* $B^{\alpha}_{\substack{+\\+a+}}$ *и* $B^{\alpha}_{\substack{-\\-b-}}$ *ограничены в следующих пространствах*:

1. $B^{\alpha}_{\pm}:L_p\left(\mathbb{R}^n;r^{\lambda^{\pm}}\right)\to L_q\left(\mathbb{R}^n;r^{\beta}\right)$, *где* $\alpha-\frac{n}{p}<\lambda^{+}<\frac{n}{p}$, $2\alpha-\frac{n}{p}<\lambda^{-}<\frac{n}{p'}+\alpha$, $\beta\leqslant\lambda^{\pm}-\alpha$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}+\frac{\lambda^{\pm}-2\alpha-\beta}{n}$, $p\leqslant q<\infty$;
2. $B^{\alpha}_{+}:L_p\left(\mathbb{R}^n;r^{\lambda}\right)\to L_p\left(\mathbb{R}^n;r^{\lambda-2\alpha}\right)$, *где* $\lambda<\frac{n}{p'}$;
3. $B^{\alpha}_{\substack{a+\\+b-}}:L_p\left(U\,(a,b)\,;\omega^{\lambda}\right)\to L_p\left(U\,(a,b)\,;\omega^{\lambda-\alpha}\right)$, *где* $0<a<b<\infty$, $\lambda<\frac{n}{p'}$, $\omega=r^2-a^2$ *для оператора* $B^{\alpha}_{a+}\varphi$, $\omega=b^2-r^2$ *для оператора* $B^{\alpha}_{b-}\varphi$.

2.4. Связь односторонних шаровых потенциалов друг с другом с помощью радиально-сингулярного оператора.

Теорема 2.2 (см. [13]). *Пусть* $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \dfrac{n}{2\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. *Тогда односторонние шаровые потенциалы* B_+^α, B_-^α *и сингулярные операторы* S, $\tilde{S}$, *связаны между собой соотношениями*

$$\begin{aligned} &B_-^\alpha\varphi = \cos\alpha\pi\, B_+^\alpha\varphi + \sin\alpha\pi\, B_+^\alpha\, |x|^{-2\alpha}\, S\, |y|^{2\alpha}\, \varphi,\\ &B_+^\alpha\varphi = \cos\alpha\pi\, B_-^\alpha\varphi - \sin\alpha\pi\, B_-^\alpha\tilde{S}\varphi,\\ &B_-^\alpha\varphi = \cos\alpha\pi\, B_+^\alpha\varphi + \sin\alpha\pi\, SB_+^\alpha\varphi,\\ &B_+^\alpha\varphi = \cos\alpha\pi\, B_-^\alpha\varphi - \sin\alpha\pi\, |x|^{2\alpha}\, \tilde{S}\, |y|^{-2\alpha}\, B_-^\alpha\varphi, \end{aligned} \tag{2.9}$$

где

$$\begin{aligned} &(S\varphi)(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{G\left(\frac{|y|}{|x|}, x'\cdot y'\right)}{|y|^2-|x|^2}\frac{\varphi(y)}{|y|^{n-2}}dy,\\ &\left(\tilde{S}\varphi\right)(x) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{|x|^{n-2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{G\left(\frac{|x|}{|y|}, x'y'\right)}{|y|^2-|x|^2}\varphi(y)\,dy, \end{aligned} \tag{2.10}$$

S *— оператор* (2.10) *с «характеристикой»* $G(t,w)$ $(t \in \mathbb{R}_+^1, w \in [-1,1])$, *вычисляемой по формуле*

$$G(t,w) = \frac{2}{(n-2)\omega_{n-1}}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{n}{2}+k-1)C_k^{\frac{n}{2}-1}(w)\Lambda_k(t),$$

где

$$\begin{aligned} &\Lambda_k(t) = \begin{cases} A_k(t) & \text{при } 0<t<1,\\ B_k(t) & \text{при } t>1,\end{cases}\\ &A_k(t) = \alpha B(\alpha, \frac{n}{2}+k)t^{n+k-2}{}_2F_1(\alpha, \frac{n}{2}+k-1; \frac{n}{2}+k+\alpha; t^2),\\ &B_k(t) = (\frac{n}{2}+k-\alpha)B(1-\alpha, \frac{n}{2}+k)t^{-k}{}_2F_1(-\alpha, \frac{n}{2}+k-1; \frac{n}{2}+k-\alpha; t^{-2}), \end{aligned}$$

$C_k^\lambda(w)$ *— многочлены Генебауэра, или ультрасферические многочлены,* ${}_2F_1(a,b;c;z)$ *— гипергеометрическая функция Гаусса* [1, 11].

Возникающий сингулярный оператор $(S\varphi)(x)$ можем интерпретировать в смысле главного значения по радиальной переменной

$$(S\varphi)(x) = \frac{2}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\left|\frac{|y|}{|x|}-1\right|>\varepsilon} \frac{G\left(\frac{|y|}{|x|}, x'\cdot y'\right)}{|y|^2-|x|^2}\frac{\varphi(y)}{|y|^{n-2}}dy.$$

2.5. Об ограниченности в $L_p(\mathbb{R}^n)$ радиально-сингулярного оператора.

Лемма 2.3 (см. [13]). *Справедливо равенство*

$$m\left\{r^{2\alpha}((B_+^\alpha)^{-1}B_-^\alpha\varphi)_{k,v}(r); z\right\} = a_k(z)\cdot\varphi_{k,v}^*(z+2\alpha)$$

для всех $n+k-\operatorname{Re}z > 0$, $k+\operatorname{Re}z > 0$ *и* $\varphi \in C_{0,0}^\infty(\mathbb{R}^n)$, *где*

$$a_k(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{z+k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+k-z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{z+k}{2}+\alpha\right)\Gamma\left(\frac{n+k-z}{2}-\alpha\right)},\ z = \frac{n}{p}+i\xi. \tag{2.11}$$

Лемма 2.4 (см. [13]). *Справедливо равенство*

$$m\left\{r^{2\alpha}((B_-^\alpha)^{-1}B_+^\alpha\varphi)_{k,v}(r);\ z\right\} = b_k(z)\varphi_{k,v}^*(z+2\alpha)$$

для всех $\frac{n+k}{2} - \alpha - \frac{1}{2}\operatorname{Re} z > 0$, $\frac{k}{2} + \alpha + \frac{1}{2}\operatorname{Re} z > 0$ *и* $\varphi \in C^{\infty}_{0,0}(\mathbb{R}^n)$, *где*

$$b_k(z) = -\frac{\Gamma\left(\frac{n+k-z}{2} - \alpha\right)\Gamma\left(\frac{z+k}{2} + \alpha\right)}{\Gamma\left(\frac{n+k-z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+k}{2}\right)} = \frac{1}{a_k(z)}, \quad z = \frac{n}{p} + i\xi. \tag{2.12}$$

Теорема 2.3 (см. [13]). *Пусть* $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$. *Тогда последовательности* (2.11) *и* (2.12) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.1 *при* $w = 1$, *так что для операторов* S, $\tilde{S}$ *справедливы оценки*

$$||S\varphi||_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\,||\varphi||_{L_p(\mathbb{R}^n)}\,,$$

$$\left|\left|\tilde{S}\varphi\right|\right|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\,||\varphi||_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

для любой функции $\varphi \in C^{\infty}_{0,0}(\mathbb{R}^n)$.

3. Основное утверждение

3.1. Связь между односторонними шаровыми потенциалами через радиально-сингулярные операторы в шаровом слое.

Лемма 3.1. *Пусть* $0 < \alpha < 1$ *и* $\varphi(x) \in C^{\infty}_{0,0}(U(a,b))$. *Справедливы равенства*

$$((B^{\alpha}_{a+})^{-1}B^{\alpha}_{b-}\varphi)(x) = \cos\alpha\pi\,\varphi(x) + \sin\alpha\pi(N^{a}_{\alpha}\varphi)(x), \tag{3.1}$$

$$((B^{\alpha}_{b-})^{-1}B^{\alpha}_{a+}\varphi)(x) = \cos\alpha\pi\varphi(x) - \sin\alpha\pi(N^{b}_{\alpha}\varphi)(x), \tag{3.2}$$

где

$$\begin{aligned}(N^{\alpha}_{a}\varphi)(x) :=& \frac{2}{\pi}\left(\frac{a}{|x|}\right)^{n-2}\int\limits_{a<|y|<b}\left(\frac{|y|^2-a^2}{|x|^2-a^2}\right)^{\alpha}\frac{P(x',\frac{a^2}{|x||y|}y')}{|y|^2-|x|^2}\frac{\varphi(y)}{|y|^{n-2}}dy + \\ &+\frac{2}{\pi}\int\limits_{a<|y|<b}\frac{F(|y|,|x|,x'y')}{|y|^2-|x|^2}\varphi(y)dy.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь

$$P(x',\xi\,y') = \frac{1}{\omega_{n-1}}\frac{1-\xi^2}{|x'-\xi\,y'|^n}, \quad 0<\xi<1, \tag{3.4}$$

есть ядро Пуассона для единичного шара,

$$F_1(\rho,r,w) = \frac{2}{\omega_{n-1}(n-2)}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{n}{2}+k-1)C_k^{\frac{n}{2}-1}(w)R_k(\rho,r),$$

$$R_k(\rho,r) = \begin{cases} Q_k(\rho,r) & \text{при}\ \rho<r,\\ P_k(\rho,r) & \text{при}\ \rho>r,\end{cases} \tag{3.5}$$

$$Q_k(\rho,r) = (\frac{n}{2}+k-1)(\rho r)^{2-k-n}\int\limits_0^{\rho^2-a^2}\left(\frac{t}{r^2-\rho^2+t}\right)^{\alpha}(\rho^2-t)^{\frac{n}{2}+k-2}dt, \tag{3.6}$$

$$P_k(\rho,r) = (\frac{n}{2}+k-1)(\rho r)^{2-k-n}\int\limits_0^{r^2-a^2}\left(\frac{\rho^2-r^2+t}{t}\right)^{\alpha}(r^2-t)^{\frac{n}{2}+k-2}dt. \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}(N^{\alpha}_{b}\varphi)(x) =& \frac{2}{\pi\,b^{n-2}}\int\limits_{a<|y|<b}\left(\frac{b^2-|y|^2}{b^2-|x|^2}\right)^{\alpha}\frac{P\left(x',\frac{|x||y|}{b^2}y'\right)}{|y|^2-|x|^2}\varphi(y)dy + \\ &+\frac{2}{\pi}\int\limits_{a<|y|<b}\frac{F_2(|y|,|x|,x'y')}{|y|^2-|x|^2}\varphi(y)dy.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Здесь

$$F_2(\rho,r,w)=\frac{2}{\omega_{n-1}(n-2)}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{n}{2}+k-1\Big)C_k^{\frac{n}{2}-1}(w)\tilde{R}_k\left(\rho,r\right),$$

$$\tilde{R}_k(\rho,r)=\begin{cases}\tilde{Q}_k(\rho,r) & \textit{при}\ \rho<r,\\ \tilde{P}_k(\rho,r) & \textit{при}\ \rho>r,\end{cases}$$

$$\tilde{Q}_k(\rho,r)=\Big(\frac{n}{2}+k-1\Big)(\rho\, r)^k\int\limits_0^{b^2-r^2}\left(\frac{r^2-\rho^2+t}{t}\right)^{\alpha}\left(r^2+t\right)^{-k-\frac{n}{2}}dt,$$

$$\tilde{P}_k(\rho,r)=\Big(\frac{n}{2}+k-1\Big)(\rho\, r)^k\int\limits_0^{b^2-\rho^2}\left(\frac{t}{\rho^2-r^2+t}\right)^{\alpha}\left(\rho^2+t\right)^{-k-\frac{n}{2}}dt.$$

Доказательство. Вычислим композицию $(B_{a+}^{\alpha})^{-1}B_{b-}^{\alpha}$. Для этого рассмотрим действие этой композиции по радиальной переменной (т. е. на коэффициентах Фурье—Лапласа). Согласно (2.4) и (2.5) имеем

$$((B_{a+}^{\alpha})^{-1}B_{b-}^{\alpha}\varphi)_{k,v}(r)=\frac{2r^{1-k-n}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dr}\int\limits_a^r\frac{\rho^{2k+n-1}}{(r^2-\rho^2)^{\alpha}}d\rho\int\limits_{\rho}^{b}\frac{\xi^{1-k}\varphi_{k,v}(\xi)}{(\xi^2-\rho^2)^{1-\alpha}}d\xi.$$

Поменяв порядок интегрирования по формуле Дирихле, придем к равенству:

$$\begin{gathered}((B_{a+}^{\alpha})^{-1}B_{b-}^{\alpha}\varphi)_{k,v}(r)=\frac{2\sin\alpha\pi}{\pi}r^{1-k-n}\times\\ \times\frac{d}{dr}\int\limits_a^b\xi^{1-k}\varphi_{k,v}(\xi)d\xi\int\limits_a^{\min(\xi,r)}\rho^{2k+n-1}\frac{(\xi^2-\rho^2)^{\alpha-1}}{(r^2-\rho^2)^{\alpha}}d\rho=\lim_{\varepsilon\to0}J_\varepsilon(r),\end{gathered}\tag{3.9}$$

где

$$J_\varepsilon(r)=\frac{2\sin\alpha\pi}{\pi}r^{1-k-n}\frac{d}{dr}\left\{\int\limits_a^{r(1-\varepsilon)}\xi^{1-k}\varphi_{k,v}(\xi)d\xi\int\limits_a^{\xi}\frac{\rho^{2k+n-1}}{(r^2-\rho^2)^{\alpha}}(\xi^2-\rho^2)^{\alpha-1}d\rho+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{r(1+\varepsilon)}^{b}\xi^{1-k}\varphi_{k,v}(\xi)d\xi\int\limits_a^r\rho^{2k+n-1}\,\frac{(\xi^2-\rho^2)^{\alpha-1}}{(r^2-\rho^2)^{\alpha}}\right\}d\rho.$$

Замены $\dfrac{\xi^2-\rho^2}{r^2-\xi^2}=s$ и $\dfrac{r^2-\rho^2}{\xi^2-r^2}=s$ дают:

$$J_\varepsilon(r)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}r^{1-k-n}\frac{d}{dr}\left\{\int\limits_a^{r(1-\varepsilon)}\xi^{1-k}\varphi_{k,v}(\xi)d\xi\int\limits_0^{\frac{\xi^2-0^2}{r^2-\xi^2}}\frac{s^{\alpha-1}}{(1+s)^{\alpha}}(\xi^2-(r^2-\xi^2)s)^{\frac{n}{2}+k-1}ds+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{r(1+\varepsilon)}^{b}\xi^{1-k}\varphi_{k,v}(\xi)d\xi\int\limits_0^{\frac{r^2-0^2}{\xi^2-r^2}}s^{-\alpha}(1+s)^{\alpha-1}(r^2-s(\xi^2-r^2))^{\frac{n}{2}+k-1}ds\right\}.$$

Отсюда

$$J_\varepsilon(r)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}r^{1-k-n}\frac{d}{dr}\left\{\int\limits_a^{r(1-\varepsilon)}\xi^{1-k}\varphi_{k,v}(\xi)K_1(\xi,r)dS+\int\limits_{r(1+\varepsilon)}^{b}\xi^{1-k}\varphi_{k,v}(\xi)K_2(\xi,r)d\xi\right\},\tag{3.10}$$

где

$$K_1(\xi,r)=\int\limits_0^{\frac{\xi^2-a^2}{r^2-\xi^2}} s^{\alpha-1}(1+s)^{-\alpha}(\xi^2-(r^2-\xi^2)s)^{\frac{n}{2}+k-1}ds,$$

$$K_2(\xi,r)=\int\limits_0^{\frac{r^2-a^2}{\xi^2-r^2}} s^{-\alpha}(1+s)^{\alpha-1}(r^2-(\xi^2+r^2)s)^{\frac{n}{2}+k-1}ds.$$

Из (3.10) имеем:

$$\begin{gathered}J_\varepsilon(r)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}r^{1-k-n}\left\{\int\limits_a^{r(1-\varepsilon)}\xi^{1-k}\varphi_{k,v}(\xi)[K_1(\xi,r)]'_r d\xi+\int\limits_{r(1+\varepsilon)}^{b}\xi^{1-k}\varphi_{k,v}(\xi)[K_2(\xi,r)]'_r d\xi\right\}+\\+\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}r^{2-2k-n}\Big\{(1-\varepsilon)^{2-k}\varphi_{k,v}(r(1-\varepsilon))K_1(r(1-\varepsilon),r)-\\-(1-\varepsilon)^{2-k}\varphi_{k,v}(r(1+\varepsilon))K_2(r(1+\varepsilon),r)\Big\}=J_\varepsilon^1(r)+J_\varepsilon^2(r).\end{gathered}\tag{3.11}$$

Вычисляя предел второго слагаемого, имеем:

$$\begin{gathered}\lim_{\varepsilon\to0}J_\varepsilon^2(r)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\varphi_{k,v}(r)\lim_{\varepsilon\to0}\left\{\int\limits_0^{\frac{r^2(1-\varepsilon)^2-a^2}{r^2((1+\varepsilon)^2-1)}}s^{\alpha-1}(1+s)^{-\alpha}((1-\varepsilon)^2-(1-(1-\varepsilon)^2)s)^{\frac{n}{2}+k-1}ds-\right.\\ \left.-\int\limits_0^{\frac{r^2-a^2}{r^2(1-(1-\varepsilon)^2)}}s^{-\alpha}(1+s)^{\alpha-1}(1-((1+\varepsilon)^2-1)s)^{\frac{n}{2}+k-1}ds\right\}.\end{gathered}$$

Здесь возможен предельный переход под знаком интеграла на основании мажорантной теоремы Лебега. Получим

$$\lim_{\varepsilon\to0}J_\varepsilon^2(r)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\varphi_{k,v}(r)\int\limits_0^\infty\left[\frac{s^{\alpha-1}}{(1+s)^\alpha}-\frac{(1+s)^{\alpha-1}}{s^\alpha}\right]ds=\cos\alpha\pi\varphi_{k,v}(r)\tag{3.12}$$

в силу [4, формулы 2.2 и 12.3, с. 317].

Переходим к вычислению предела $\lim\limits_{\varepsilon\to0}J_\varepsilon^1(r)$. Известна формула

$$\frac{d}{dy}\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)}f(x,y)dx=\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)}f_y'(x,y)dx+\psi'(y)f(\psi(y),y)-\varphi'(y)f(\varphi(y),y),$$

в силу которой

$$[K_1(\xi,r)]'_r=\frac{2r(\frac{n}{2}+k-1)}{\xi^2-r^2}\int\limits_0^{\xi^2-a^2}\left(\frac{y}{r^2-\xi^2+y}\right)^\alpha(\xi^2-y)^{\frac{n}{2}+k-2}dy+\frac{2ra^{2k+n-2}}{\xi^2-r^2}\left(\frac{\xi^2-a^2}{r^2-a^2}\right)^\alpha,$$

$$[K_2(\xi,r)]'_r=\frac{2r(\frac{n}{2}+k-1)}{\xi^2-r^2}\int\limits_0^{r^2-a^2}\left(\frac{\xi^2-r^2+y}{y}\right)^\alpha(r^2-y)^{\frac{n}{2}+k-2}dy+\frac{2ra^{2k+n-2}}{\xi^2-r^2}\left(\frac{\xi^2-a^2}{r^2-a^2}\right)^\alpha.$$

Поэтому слагаемое $J_\varepsilon^1(r)$ из (3.11) имеет вид

$$\begin{aligned} J_\varepsilon^1(r) = \frac{2\sin\alpha\pi}{\pi} \Bigg\{ \left(\int\limits_a^{r(1-\varepsilon)} + \int\limits_{r(1+\varepsilon)}^{b} \right) \frac{\xi^{1-k}a^{2k+n-2}}{\xi^2 - r^2} r^{2-k-n} \left(\frac{\xi^2 - a^2}{r^2 - a^2} \right)^{\alpha} \varphi_{k,v}(\xi)d\xi + \\ + \int\limits_a^{r(1-\varepsilon)} \frac{Q_k(\xi,r)}{\xi^2 - r^2}\varphi_{k,v}(\xi)\xi^{n-1}d\xi + \int\limits_{r(1+\varepsilon)}^{b} \frac{P_k(\xi,r)}{\xi^2 - r^2}\varphi_{k,v}(\xi)\xi^{n-1}d\xi \Bigg\}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

где $Q_k(\xi,r)$, $P_k(\xi,r)$ — функции (3.6) и (3.7). Прямые вычисления показывают, что

$$Q_k(r,r) = P_k(r,r) = \frac{r^{n+2k-2} - a^{n+2k-2}}{r^{2n+2k-4}}.$$

Это означает, что при переходе к пределу в (3.13) мы можем интерпретировать интеграл

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int\limits_a^{r(1-\varepsilon)} + \int\limits_{r(1+\varepsilon)}^{b} \right) = \int\limits_a^b$$

в смысле главного значения и записать, что

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon^1(r) = \frac{2\sin\alpha\pi}{\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^{n-2} \times \\ \times \times \int\limits_a^b \left(\frac{\xi^2 - a^2}{r^2 - a^2} \right)^{\alpha} \frac{\varphi_{k,v}(\xi)}{\xi^2 - r^2} \left(\frac{a^2}{\xi\, r} \right)^k \xi\, d\xi + \frac{2\sin\alpha\pi}{\pi} \int\limits_a^b \frac{R_k(\xi,r)}{\xi^2 - r^2}\varphi_{k,v}(\xi)\xi^{n-1}d\xi, \end{aligned} \tag{3.14}$$

где $R_k(\xi,r)$ — функция (3.5).

В силу (3.12), (3.14) мы получаем из (3.9) и (3.11):

$$\begin{aligned} ((B_{a+}^{\alpha})^{-1}B_{b-}^{\alpha}\varphi)_{k,v}(r) = \cos\alpha\pi\,\varphi_{k,v}(r) + \\ + \frac{2\sin\alpha\pi}{\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^{n-2} \int\limits_a^b \left(\frac{\xi^2 - a^2}{r^2 - a^2} \right)^{\alpha} \frac{\varphi_{k,v}(\xi)}{\xi^2 - r^2} \left(\frac{a^2}{\xi\, r} \right)^k \xi\, d\xi + \\ + \frac{2\sin\alpha\pi}{\pi} \int\limits_a^b \frac{R_k(\xi,r)}{\xi^2 - r^2}\varphi_{k,v}(\xi)\xi^{n-1}d\xi. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Так как

$$((B_{a+}^{\alpha})^{-1}B_{b-}^{\alpha}\varphi)(x) \sim \sum_{k,v} ((B_{a+}^{\alpha})^{-1}B_{b-}^{\alpha}\varphi)_{k,v}(r) Y_{k,v}(x'),$$

то согласно (3.15) получаем (на достаточно хороших функциях $\varphi(x)$)

$$\begin{aligned} ((B_{a+}^{\alpha})^{-1}B_{b-}^{\alpha}\varphi)(x) = \cos\alpha\pi\varphi(x) + \frac{2\sin\alpha\pi}{\pi} \left(\frac{a}{|x|}\right)^{n-2} \int\limits_a^b \left(\frac{\xi^2 - a^2}{r^2 - a^2} \right)^{\alpha} \frac{\xi}{\xi^2 - r^2} d\xi \times \\ \times \int\limits_{S^{n-1}} \varphi(\xi, y') \sum_{k,v} \left(\frac{a^2}{\xi\, r} \right)^k Y_{k,v}(x')Y_{k,v}(y')d\sigma(y') + \\ + \frac{2\sin\alpha\pi}{\pi} \int\limits_a^b \frac{\xi^{n-1}}{\xi^2 - r^2} d\xi \int\limits_{S^{n-1}} \varphi(\xi, y') \sum_{k,v} R_k(\xi,r) Y_{k,v}(y')Y_{k,v}(x')d\sigma(y'). \end{aligned} \tag{3.16}$$

В силу формулы сложения для сферических гармоник (см., например, [11, с. 38]) и с учетом равенства из [10, с. 165]

$$P(x', \xi z') = \sum_{k,v} \xi^k Y_{k,v}(x') Y_{k,v}(z'), \quad 0 < \xi < 1,$$

где $P(x', \xi z')$ — функция (3.4), из (3.16) имеем

$$(B^\alpha_{a+})^{-1} B^\alpha_{b-}\varphi(x) = \cos\alpha\pi\varphi(x) + \frac{2\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{a}{|x|}\right)^{n-2}\int\limits_a^b \left(\frac{\xi^2 - a^2}{r^2 - a^2}\right)^\alpha \frac{1}{\xi^{n-2}}\frac{\xi^{n-1}d\xi}{\xi^2 - r^2}\times$$

$$\times \int\limits_{S^{n-1}} \varphi(\xi, y') P(x', \frac{a^2}{\xi\, r} y') d\sigma(y') +$$

$$+\frac{2\sin\alpha\pi}{\pi}\int\limits_a^b \frac{\xi^{n-1}}{\xi^2 - r^2}d\xi \int\limits_{S^{n-1}} \varphi(\xi, y')\frac{2}{\omega_{n-1}\,(n-2)}\sum_{k=0}^\infty \left(\frac{n}{2} + k - 1\right) C_k^{\frac{n}{2}-1}(x'y') R_k(\xi, r) d\sigma(y'),$$

откуда и вытекает равенство (3.1).

Тождество (3.2) устанавливается точно также, как тождество (3.1). □

Теорема 3.1. *Пусть* $0 < \alpha < 1$, $\varphi \in L_p\left(U\left(a, b\right), \omega\right)$, $1 < p < \infty$. *Тогда о.ш.п.* $B^\alpha_{a+}, B^\alpha_{b-}$ *и сингулярные операторы* N^α_a, N^b_a *связаны между собой соотношениями*:

$$B^\alpha_{b-}\varphi = \cos\alpha\pi B^\alpha_{a+}\varphi + \sin\alpha\pi B^\alpha_{a+} N^\alpha_a \varphi, \tag{3.17}$$

$$B^\alpha_{a+}\varphi = \cos\alpha\pi B^\alpha_{b-}\varphi - \sin\alpha\pi B^\alpha_{b-} N^\alpha_b \varphi, \tag{3.18}$$

где N^α_a, N^α_b *— сингулярные операторы* (3.3), (3.7).

Доказательство. Пусть вначале $\varphi \in C^\infty_{0,0}\left(U\left(a, b\right)\right)$. Тождество (3.17) вытекает из (3.1), поскольку $B^\alpha_{a+}(B^\alpha_{a+})^{-1}f = f$, но может быть проверено и непосредственной перестановкой порядка интегрирования в правой части в (3.17). Соотношение (3.18) вытекает из (3.2). Подобным же образом обосновывается равенство (3.18).

Итак, тождества (3.17) и (3.18) установлены для $\varphi \in C^\infty_{0,0}(U(a, b))$. Операторы N^α_a, N^b_a ограничены в L_p при $1 < p < \infty$ в силу теоремы 2.2. Тогда ввиду ограниченности операторов $B^\alpha_{a+}, B^\alpha_{b-}$ из $L_p\left(U\left(a, b\right), \omega\right)$ в $L_p\left(U\left(a, b\right), \omega\right)$ (см. лемму 2.2) можно сделать вывод о справедливости тождеств (3.17) и (3.18) на плотном в L_p множестве $\varphi \in C^\infty_{0,0}$. Ввиду теоремы Банаха получаем их справедливость на всех функциях $\varphi \in L_p\left(U\left(a, b\right), \omega\right)$, $1 < p < \infty$. □

3.2. Сведения об односторонних шаровых потенциалах типа Чженя.

Определение 3.1. Зафиксируем произвольную точку $c \in \mathbb{R}^1_+$, и для функции $\varphi(x)$, заданной на $\mathbb{R}^n$, интегралы

$$(B^\alpha_c\varphi)(x) := \begin{cases} \gamma_{n,\alpha} \displaystyle\int\limits_{c<|y|<|x|} \frac{\left(|x|^2 - |y|^2\right)^\alpha}{|x - y|^n}\varphi\left(y\right) dy, & |x| > c, \\ \gamma_{n,\alpha} \displaystyle\int\limits_{|x|<|y|<c} \frac{\left(|y|^2 - |x|^2\right)^\alpha}{|x - y|^n}\varphi\left(y\right) dy, & |x| < c \end{cases} \tag{3.19}$$

будем называть *односторонними шаровыми потенциалами порядка* $\alpha\,(\alpha > 0)$ *типа Чженя.*

Введя функции

$$\left(P_{c+}\varphi\right)\ (x) = \varphi_{c+}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & |x| > c, \\ 0, & |x| < c, \end{cases}$$

$$\left(P_{c-}\varphi\right)(x) = \varphi_{c-}(x) = \begin{cases} 0, & |x| > c, \\ \varphi(x), & |x| < c \end{cases}$$

можно записать односторонние шаровые потенциалы порядка $\alpha\,(\alpha > 0)$ типа Чженя (3.19) в виде

$$(B_c^\alpha \varphi)(x) = (B_+^\alpha \varphi_{c+})(x) + (B_-^\alpha \varphi_{c-})(x)$$

или в операторной форме

$$B_c^\alpha = B_+^\alpha P_{c+} + B_-^\alpha P_{c-} = P_{c+} B_+^\alpha P_{c+} + P_{c-} B_-^\alpha P_{c-}. \tag{3.20}$$

Из (3.20) нетрудно заключить, что операторы B_c^α обладают полугрупповым свойством:

$$B_c^\alpha B_c^\beta \varphi = B_c^{\alpha+\beta}\varphi$$

для любой локально интегрируемой функции $\varphi(t)$ и $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Теорема 3.2. *Пусть* $f\,(x)$ *представима в виде* $f\,(x) = (B_c^\alpha \varphi)\,(x))$, *где* $\varphi \in L_p\,(U\,(a,b))$, $1 < p < \dfrac{n}{2\alpha}$. *Тогда*

$$f\,(x) = \left(B_+^\alpha \psi_C\right)(x),$$

$$\psi_c(x) = N_c\varphi = \nu_c\,(x)\,\varphi\,(x) + \frac{2\sin\alpha\pi}{\pi}\int\limits_{|x|<c} \frac{G\left(\frac{|y|}{|x|}, x'y'\right)}{|y|^2 - |x|^2}\,\frac{\varphi\,(y)}{|y|^{n-2}}dy, \tag{3.21}$$

где $\nu_c\,(x) = 1$ *при* $x > c$ *и* $\nu_c\,(x) = \cos\alpha\pi$ *при* $x < c$, *а* $\psi_c(x) \in L_p\,(U\,(a,b))$. *Если* $\varphi \in L_p\,(\mathbb{R}^n)$, *то и* $\psi_c(x) \in L_p\,(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. В равенстве (3.20) заменим B_-^α по формуле (2.9) с учетом $SB_+^\alpha\varphi = B_+^\alpha S\varphi$ на B_+^α. Тогда получим

$$B_c^\alpha\varphi = B_+^\alpha[P_{c+}\varphi + \cos\alpha\pi\,P_{c-}\varphi + \sin\alpha\pi\,SP_{c-}\varphi],$$

что совпадает с (3.21). Оператор

$$N_c = P_{c+} + \cos\alpha\pi P_{c-} + \sin\alpha\pi\,SP_{c-}$$

ограничен в $L_p\,(\mathbb{R}^n)$ согласно теореме 2.2. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. — М.: Наука, 1965.
2. *Килбас А.А.* Об интегральных уравнениях первого рода с логарифмическими ядрами произвольного порядка// Докл. АН БССР. — 1977. — *21*, № 12. — С. 1078–1081.
3. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003.
4. *Прудников А.Г., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды: элементарные функции. — М.: Наука, 1981.
5. *Рубин Б.С.* Общий метод исследования на непрерывность операторов типа потенциала со степенно-логарифмическими ядрами на конечном отрезке// Изв. АН АрмССР. Мат. — 1977. — *12*, № 6. — С. 447–461.
6. *Рубин Б.С.* Односторонние шаровые потенциалы и обращение потенциалов Рисса по n-мерному шару и его внешности// Деп. ВИНИТИ. — 1984. — 18.07.84, № 5150.
7. *Рубин Б.С.* Обращение потенциалов Рисса по n-мерному шару и его внешности// Изв. вузов. Сер. Мат. — 1985. — № 6. — С. 81–85.
8. *Рубин Б.С.* Гармонический анализ операторов, коммутирующих с вращениями и растяжениями в $\mathbb{R}^n$// Деп. ВИНИТИ. — 1988. — 6.01.88, № 294.
9. *Самко С.Г.* Обобщенное уравнение Абеля и уравнение с ядром Коши// Докл. АН СССР. — 1967. — *176*, № 5. — С. 1019–1022.
10. *Самко С.Г.* Об обобщенном уравнении Абеля и операторах дробного интегрирования// Дифф. уравн. — 1968. — *4*, № 2. — С. 298–314.
11. *Самко С.Г.* Гиперсингулярные интегралы и их приложения. — Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та, 1984.
12. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
13. *Самко С.Г., Яхшибоев М.У.* Связи между односторонними шаровыми потенциалами через радиально сингулярные операторы// Деп. ВИНИТИ. — 1992. — 16.01.91, № 172.
14. *Стейн Е.М., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. — М.: Мир, 1974.

15. *Kober H.* A modification of Hilbert transforms, the Weyl integral and functional equations// J. London Math. Soc. — 1967. — *42*, № 1. — С. 42–50.
16. *Rubin B. S.* Fractional integrals and weakly singular equations of the first king in the n-dimensional ball// J. Anal. Math. — 1994. — *63*. — С. 55–102.
17. *Rubin B. S.* Fractional integrals and potential. — Harlow—Essex: Addison Wesley Longman, 1996.
18. *von Wolfersdorf L.* Über eine Beziehung zwischen Integralen nichtganzer Ordnung// Math. Z. — 1965. — *90*, № 1. — С. 24–28.

М. У. Яхшибоев
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
Узбекистан, 700174, г. Ташкент, ВУЗ городок
E-mail: `yaxshiboyev@rambler.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-4-736-748 UDC 517.983

Relation between One-Sided Ball Potentials

© 2018 **M. U. Yakhshiboev**

Abstract. In this paper, we establish the relation between one-sided ball potentials by means of radially singular operators in a spherical layer. Moreover, we construct new Chern-type one-sided ball potentials.

REFERENCES

1. H. Bateman and A. Erdélyi, *Vysshie transtsendentnye funktsii. T.* 1 [Higher transcendental functions. Vol. 1], Nauka, Moscow, 1965 (Russian translation).
2. A. A. Kilbas, “Ob integral'nykh uravneniyakh pervogo roda s logarifmicheskimi yadrami proizvol'nogo poryadka” [On integral equations of the first kind with logarithmic kernels of arbitrary type], *Dokl. AN BSSR* [Rep. Acad. Sci. Belorus. SSR], 1977, **21**, No. 12, 1078–1081 (in Russian).
3. A. M. Nakhushev, *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional Calculus and Its Application], Fizmatlit, Moscow, 2003 (in Russian).
4. A. G. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, and O. I. Marichev, *Integraly i ryady: elementarnye funktsii* [Integrals and Series: Elementary Functions], Nauka, Moscow, 1981 (in Russian).
5. B. S. Rubin, “Obshchiy metod issledovaniya na nepreryvnost' operatorov tipa potentsiala so stepenno-logarifmicheskimi yadrami na konechnom otrezke” [General method of investigation of continuity for potential-type operators with power-logarithmic kernels on a finite segment], *Izv. AN ArmSSR. Mat.* [Bull. Acad. Sci. Arm. SSR. Math.], 1977, **12**, No. 6, 447–461 (in Russian).
6. B. S. Rubin, “Odnostoronnie sharovye potentsialy i obrashchenie potentsialov Rissa po n-mernomu sharu i ego vneshnosti” [One-sided ball potentials and inversion of Riesz potentials with respect to an n-dimensional sphere and its exterior], *Dep. VINITI*, 1984, 18.07.84, No. 5150 (in Russian).
7. B. S. Rubin, “Obrashchenie potentsialov Rissa po n-mernomu sharu i ego vneshnosti” [Inversion of Riesz potentials with respect to an n-dimensional sphere and its exterior], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1985, No. 6, 81–85 (in Russian).
8. B. S. Rubin, “Garmonicheskiy analiz operatorov, kommutiruyushchikh s vrashcheniyami i rastyazheniyami v $\mathbb{R}^n$” [Harmonic analysis of operators commuting with rotations and dilatations in $\mathbb{R}^n$], *Dep. VINITI*, 1988, 6.01.88, No. 294 (in Russian).
9. S. G. Samko, “Obobshchennoe uravnenie Abelya i uravnenie s yadrom Koshi” [Generalized Abel equation and an equation with the Cauchy kernel], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1967, **176**, No. 5, 1019–1022 (in Russian).
10. S. G. Samko, “Ob obobshchennom uravnenii Abelya i operatorakh drobnogo integrirovaniya” [On generalized Abel equation and operators of fractional integration], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1968, **4**, No. 2, 298–314 (in Russian).

11. S. G. Samko, *Gipersingulyarnye integraly i ikh prilozheniya* [Hypersingular Integrals and Their Applications], Rostov Univ., Rostov-na-Donu, 1984 (in Russian).
12. S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some Their Applications], Nauka i tekhnika, Minsk, 1987 (in Russian).
13. S. G. Samko and M. U. Yakhshiboev, "Svyazi mezhdu odnostoronnimi sharovymi potentsialami cherez radial'no singulyarnye operatory" [Relations between one-sided ball potentials via radially singular operators], *Dep. VINITI*, 1992, 16.01.91, No. 172 (in Russian).
14. E. M. Stein and G. Weiss, *Vvedenie v garmonicheskiy analiz na evklidovykh prostranstvakh* [Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces], Mir, Moscow, 1974 (Russian translation).
15. H. Kober, "A modification of Hilbert transforms, the Weyl integral and functional equations," *J. London Math. Soc.* , 1967, **42**, No. 1, 42–50.
16. B. S. Rubin, "Fractional integrals and weakly singular equations of the first king in the n-dimensional ball," *J. Anal. Math.*, 1994, **63**, 55–102.
17. B. S. Rubin, *Fractional integrals and potential*, Addison Wesley Longman, Harlow—Essex, 1996.
18. L. von Wolfersdorf, "Über eine Beziehung zwischen Integralen nichtganzer Ordnung," *Math. Z.*, 1965, **90**, No. 1, 24–28.

M. U. Yakhshiboev
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: `yaxshiboyev@rambler.ru`