Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 4 (2018). С. 723–735

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-4-723-735 УДК 519.652

ПОСТРОЕНИЕ ФОРМУЛ ОПТИМАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

© 2018 г. **Х.М. ШАДИМЕТОВ, А.Р. ХАЁТОВ, Ф.А. НУРАЛИЕВ**

Аннотация. В данной работе строятся формулы оптимальной интерполяции в пространстве $L_2^{(4)}(0,1)$ с помощью дискретного аналога дифференциального оператора $\dfrac{d^{2m}}{dx^{2m}}$. Также нами были получены явные формулы для коэффициентов формул оптимальной интерполяции.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение: постановка задачи

Задача интерполяции является одной из самых распространенных задач в теории приближений. Классический метод ее решения заключается в построении интерполяционных полиномов. Однако интерполяционные полиномы имеют ряд недостатков при использовании их для функций с сингулярностями или для недостаточно гладких функций. Доказано, что последовательность интерполяционных полиномов Лагранжа, построенных для конкретной непрерывной функции, не сходится к самой функции. В связи с этим на практике вместо интерполяционных полиномов высокого порядка используются сплайн-функции.

Первые сплайновые функции формировались из отдельных кусков кубических полиномов. Затем это построение было преобразовано, была увеличена степень полинома, изменены граничные значения, но сама идея осталась неизменной. Следующим шагом в развитии теории сплайнов стал результат Д. Холладея [12], связывающий кубический сплайн И. Шенберга с решением задачи нахождения минимума нормы функции из пространства $L_2^{(2)}$. Далее Карл Де Боор в работе [10] обобщил результат Д. Холладея. Полученные результаты вызвали огромный интерес, в связи с чем появилось большое количество работ, в которых в зависимости от конкретных требований вариационный функционал подвергался изменениям. Теория сплайнов, основанная на вариационных методах, была изучена и получила развитие в работах Дж. Элберга, Э. Нельсона и Дж. Уолша [7], Р. Аркангели, Лопеса де Силаньес и Дж. Дж. Торреса [8], М. Аттея [9], К. де Боора [10, 11], М.И. Игнатова и А.Б. Певного [2], П. Дж. Лоурента [3], Дж. Мастроянни и Г.В. Миловановича [13], И.Я. Шенберга [14], Л.Л. Шумакера [15], С.Б. Стечкина и Ю.Н. Субботина [5], В.А. Василенко [1] и других. Вполне исчерпывающий список литературы по теории сплайновых функций можно найти, например, в [15].

Настоящая же работа посвящена построению формул оптимальной интерполяции.

Предположим, что у нас имеется таблица значений $\varphi(x_\beta)$, $\beta = 0, 1, \ldots, N$ функций φ в точках $x_\beta \in [0, 1]$. Требуется аппроксимировать функции φ другими, более простыми функциями P_φ, т. е.

$$\varphi(z) \cong P_\varphi(z) = \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z)\varphi(x_\beta) + \sum_{\alpha=1}^{2}(A_\alpha(z)\varphi^{(2\alpha-1)}(0) + B_\alpha(z)\varphi^{(2\alpha-1)}(1)), \tag{1.1}$$

что удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\varphi(x_\beta) = P_\varphi(x_\beta),\ \ \beta = 0, 1, \ldots, N. \tag{1.2}$$

Здесь $C_\beta(z)$, $\beta = \overline{0, N}$, $A_\alpha(z)$, $B_\alpha(z)$ и x_β $(\in [0, 1])$ — *коэффициенты* и *узлы* интерполяционной формулы (1.1), соответственно.

Теперь, следуя Соболеву [18], можем поставить задачу нахождения формул оптимальной интерполяции.

Предположим, что функции φ принадлежат пространству Соболева $L_2^{(m)}(0, 1)$, где $L_2^{(m)}(0, 1)$ — это пространство интегрируемых с квадратом функций с m-ой обобщенной производной и с нормой

$$\left\|\varphi | L_2^{(m)}(0, 1)\right\| = \left\{\int_0^1 \left(\varphi^{(m)}(x)\right)^2 dx\right\}^{1/2}, \tag{1.3}$$

где

$$\int_0^1 \left(\varphi^{(m)}(x)\right)^2 dx < \infty.$$

Разность $\varphi - P_\varphi$ называется *погрешностью* формулы интерполяции (1.1). Значение этой погрешности в конкретной точке $z \in [0, 1]$ определяется линейным функционалом на пространстве $L_2^{(m)}(0, 1)$, т. е.

$$\begin{aligned}(\ell, \varphi) \ &= \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x, z)\varphi(x)dx = \varphi(z) - P_\varphi(z) = \\ &= \varphi(z) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z)\varphi(x_\beta) - \sum_{\alpha=1}^{2}(A_\alpha(z)\varphi^{(2\alpha-1)}(0) + B_\alpha(z)\varphi^{(2\alpha-1)}(1)),\end{aligned} \tag{1.4}$$

где δ — это дельта-функция Дирака, и

$$\ell(x, z) = \delta\left(x - z\right) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z)\delta(x - h\beta) + \sum_{\alpha=1}^{2}(A_\alpha(z)\delta^{(2\alpha-1)}(x) + B_\alpha(z)\delta^{(2\alpha-1)}(x - 1)) \tag{1.5}$$

— это *функционал погрешности* интерполяционной формулы (1.1), и он принадлежит пространству $L_2^{(m)*}(0, 1)$. Пространство $L_2^{(m)*}(0, 1)$ является сопряженным к пространству $L_2^{(m)}(0, 1)$. Далее для простоты обозначим $\ell(x, z)$ как $\ell(x)$.

Абсолютное значение погрешности (1.4) оценивается с помощью неравенства Коши—Шварца следующим образом:

$$|(\ell, \varphi)| \leqslant \|\varphi | L_2^{(m)}\| \cdot \|\ell | L_2^{(m)*}\|,$$

где

$$\left\|\ell | L_2^{(m)*}\right\| = \sup_{\varphi, \|\varphi\| \neq 0} \frac{|(\ell, \varphi)|}{\|\varphi\|}.$$

Следовательно, чтобы оценить погрешность интерполяционной формулы (1.1) для функций из пространства $L_2^{(m)}(0, 1)$, необходимо найти норму функционала погрешности ℓ в сопряженном пространстве $L_2^{(m)*}(0, 1)$.

Отсюда получаем

Задача 1.1. Найти норму функционала погрешности ℓ интерполяционной формулы (1.1) в пространстве $L_2^{(m)*}(0, 1)$.

Очевидно, что норма функционала погрешности ℓ зависит от коэффициентов $C_\beta(z)$, $\beta = \overline{0,N}$, $A_\alpha(z)$, $B_\alpha(z)$, $\alpha = 1,2$, и узлов x_β. Задача минимизации величины $\|\ell\|$ по коэффициентам $C_\beta(z)$, $\beta = \overline{0,N}$, $A_\alpha(z)$, $B_\alpha(z)$ является линейной задачей, а по узлам x_β, вообще говоря, является задачей нелинейной и довольно трудной. Рассмотрим задачу минимизации величины $\|\ell\|$ по коэффициентам $C_\beta(z)$, $\beta = \overline{0,N}$, $A_\alpha(z)$, $B_\alpha(z)$ при фиксированных узлах x_β.

Коэффициенты $\mathring{C}_\beta(z)$, $\beta = \overline{0,N}$, $\mathring{A}_\alpha(z), \mathring{B}_\alpha(z)$ (если таковые существуют), удовлетворяющие уравнению

$$\left\|\mathring{\ell}|L_2^{(m)*}\right\| = \inf_{C_\beta(z),A_\alpha(z),B_\alpha(z)} \left\|\ell|L_2^{(m)*}\right\|, \tag{1.6}$$

называются *оптимальными коэффициентами*, а соответствующая интерполяционная формула

$$\mathring{P}_\varphi(z) = \sum_{\beta=0}^{N} \mathring{C}_\beta(z)\varphi(x_\beta) + \sum_{\alpha=1}^{2}(\mathring{A}_\alpha(z)\varphi^{(2\alpha-1)}(0) + \mathring{B}_\alpha(z)\varphi^{(2\alpha-1)}(1))$$

называется *формулой оптимальной интерполяции* в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$.

Таким образом, для построения формулы оптимальной интерполяции в форме (1.1) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ нам необходимо решить следующую задачу.

Задача 1.2. Найти коэффициенты $\mathring{C}_\beta(z)$, $\beta = \overline{0,N}$, $\mathring{A}_\alpha(z), \mathring{B}_\alpha(z)$, $\alpha = 1,2$, удовлетворяющие уравнению (1.6) при фиксированных узлах x_β.

Основная цель настоящей работы заключается в построении формул оптимальной интерполяции в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$. Впервые данная задача была опубликована и изучена С. Л. Соболевым в работе [18]; в ней была найдена экстремаль интерполяционной формулы в пространстве $L_2^{(m)}$.

Остальная часть нашей работы построена следующим образом. В разделе 2 мы находим экстремаль, которая соответствует функционалу погрешности ℓ, и с ее помощью вычисляем норму функционала погрешности (1.5), т. е. решаем, таким образом, задачу 1.1. В разделе 3 для нахождения минимума $\|\ell\|^2$ по коэффициентам $C_\beta(z)$, $\beta = \overline{0,N}$, $A_\alpha(z), B_\alpha(z)$ мы рассматриваем систему линейных уравнений для коэффициентов формул оптимальной интерполяции (1.1) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$; кроме того, в этом разделе обсуждаются существование и единственность решения такой системы. Раздел 4 приведены некоторые предварительные сведения. Раздел 5 посвящен вычислению коэффициентов формулы оптимальной интерполяции в форме (1.1) для случая $m = 4$.

2. Экстремальная функция и норма функционала погрешности (1.5)

В этом разделе мы решаем задачу 1.1, т. е. мы ищем явный вид нормы функционала погрешности ℓ.

Для нахождения явного вида нормы функционала погрешности ℓ в пространстве $L_2^{(m)}$ мы используем его экстремаль [4,18]. Функция ψ_ℓ из пространства $L_2^{(m)}(0,1)$ называется *экстремальной* для функционала погрешности ℓ, если выполняется следующее равенство:

$$(\ell, \psi_\ell) = \left\|\ell\left|L_2^{(m)*}\right.\right\| \cdot \left\|\psi_\ell\left|L_2^{(m)}\right.\right\|.$$

Пространство $L_2^{(m)}(0,1)$ является гильбертовым, и скалярное произведение в этом пространстве определяется следующей формулой:

$$\langle\varphi, \psi\rangle = \int_0^1 \varphi^{(m)}(x)\psi^{(m)}(x)dx. \tag{2.1}$$

Согласно теореме Риса любой линейный непрерывный функционал ℓ в гильбертовом пространстве представляется в виде скалярного произведения. Таким образом, в нашем случае для любой функции φ из пространства $L_2^{(m)}(0,1)$ имеем

$$(\ell, \varphi) = \langle\psi_\ell, \varphi\rangle. \tag{2.2}$$

Здесь ψ_ℓ — функция из $L_2^{(m)}(0,1)$, и она определяется единственным образом с помощью функционала ℓ и его экстремали.

Из (2.2) достаточно легко видеть, что функционал погрешности ℓ, определенный на пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$, удовлетворяет равенствам

$$(\ell, x^p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ell(x) x^p dx = 0, \quad p = 0, 1, \dots, m-1. \tag{2.3}$$

Равенства (2.3) означают, что наша интерполяционная формула точна для любого полинома степени $\leqslant m-1$.

Уравнение (2.2) было решено в [18], и для экстремальной функции ψ_ℓ было получено следующее выражение:

$$\psi_\ell(x) = (-1)^m \ell(x) * G_m(x) + P_{m-1}(x), \tag{2.4}$$

где

$$G_m(x) = \frac{x^{2m-1} \operatorname{sgn} x}{2(2m-1)!}, \tag{2.5}$$

$P_{m-1}(x)$ — это полином степени $m-1$, а $*$ означает операцию свертки, определяемую для функций f и g таким образом:

$$f(x) * g(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy.$$

Итак, мы получили норму функционала погрешности ℓ. Так как пространство $L_2^{(m)}(0,1)$ является гильбертовым, то по теореме Риса имеем

$$(\ell, \psi_\ell) = \|\ell\| \cdot \|\psi_\ell\| = \|\ell\|^2.$$

Следовательно, используя (1.5) и (2.4), с учетом (2.3) получаем

$$\|\ell\|^2 = (\ell, \psi_\ell) = (\ell(x), (-1)^m \ell(x) * G_m(x)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \left((-1)^m \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ell(y) G_m(x-y) dy \right) dx.$$

Отсюда, принимая во внимание, что $G_m(x)$, определяемая по формуле (2.5), является четной функцией, имеем

$$\begin{aligned}
\|\ell\|^2 \;=\; (\ell, \psi_\ell) = \Bigg[& \sum_{\beta=0}^{N} \sum_{\gamma=0}^{N} C_\beta(z) C_\gamma(z) \frac{|h\beta - h\gamma|^{2m-1}}{2(2m-1)!} - \\
& - 2 \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z) \frac{(z-h\beta)^{2m-1} \operatorname{sgn}(z-h\beta)}{2(2m-1)!} - \\
& - 2 \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z) \left(A_\alpha(z) \frac{(h\beta)^{2m-2\alpha}}{2(2m-2\alpha)!} - B_\alpha(z) \frac{(1-h\beta)^{2m-2\alpha}}{2(2m-2\alpha)!} \right) + \\
& + 2 \sum_{\alpha=1}^{2} \left(A_\alpha(z) \frac{z^{2m-2\alpha}}{2(2m-2\alpha)!} - B_\alpha(z) \frac{(1-z)^{2m-2\alpha}}{2(2m-2\alpha)!} \right) - \\
& - \frac{A_1(z)B_1(z)}{(2m-3)!} - \frac{A_1(z)B_2(z)}{(2m-5)!} - \frac{A_2(z)B_1(z)}{(2m-5)!} - \frac{A_2(z)B_2(z)}{(2m-7)!} \Bigg].
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Таким образом, задача 1.1 решена.

В следующих разделах будет представлено решение задачи 1.2.

3. Существование и единственность формулы оптимальной интерполяции

Предположим, что узлы x_β интерполяционной формулы (1.1) фиксированы. Функционал погрешности (1.5) удовлетворяет условиям (2.3). Норма функционала погрешности ℓ — это функция многих переменных относительно коэффициентов $C_\beta(z)$, $\beta=\overline{0,N}$, $A_1(z)$, $A_2(z)$, $B_1(z)$, $B_2(z)$. Для нахождения точки условного минимума выражения (2.6) с соблюдением условий (2.3) мы применим метод Лагранжа.

Рассмотрим функцию

$$\Psi(C_0(z),C_1(z),\dots,C_N(z),A_1(z),A_2(z),B_1(z),B_2(z),\lambda_0(z),\dots,\lambda_{m-1}(z)) = \\ = \|\ell\|^2-2(-1)^m\sum_{\alpha=0}^{m-1}\lambda_\alpha(z)\,(\ell,x^\alpha)\,.$$

Приравнивая частные производные функции Ψ по $C_\beta(z)$, $\beta=\overline{0,N}$, $A_1(z)$, $A_2(z)$, $B_1(z)$ и $B_2(z)$, $\lambda_0(z),\lambda_1(z),\dots,\lambda_{m-1}(z)$ к нулю, мы получаем следующую систему линейных уравнений:

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)\frac{|h\beta-h\gamma|^{2m-1}}{2(2m-1)!}-A_1(z)\frac{(h\beta)^{2m-2}}{2(2m-2)!}+B_1(z)\frac{(1-h\beta)^{2m-2}}{2(2m-2)!}-A_2(z)\frac{(h\beta)^{2m-4}}{2(2m-4)!}+ \\ +B_2(z)\frac{(1-h\beta)^{2m-4}}{2(2m-4)!}+\sum_{\alpha=0}^{m-1}\lambda_\alpha(z)(h\beta)^\alpha=\frac{|z-h\beta|^{2m-1}}{2(2m-1)!},\ \ \beta=\overline{0,N}, \tag{3.1}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)\frac{(h\gamma)^{2m-2}}{2(2m-2)!}+\frac{B_1(z)}{2(2m-3)!}+\frac{B_2(z)}{2(2m-5)!}-\lambda_1(z)=\frac{z^{2m-2}}{2(2m-2)!}, \tag{3.2}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)\frac{(h\gamma-1)^{2m-2}}{2(2m-2)!}-\frac{A_1(z)}{2(2m-3)!}-\frac{A_2(z)}{2(2m-5)!}+\sum_{\alpha=1}^{m-1}\alpha\lambda_\alpha(z)=\frac{(1-z)^{2m-2}}{2(2m-2)!}, \tag{3.3}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)\frac{(h\gamma)^{2m-4}}{2(2m-4)!}+\frac{B_1(z)}{2(2m-5)!}+\frac{B_2(z)}{2(2m-7)!}-6\lambda_3(z)=\frac{z^{2m-4}}{2(2m-4)!}, \tag{3.4}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)\frac{(h\gamma-1)^{2m-4}}{2(2m-4)!}-\frac{A_1(z)}{2(2m-5)!}-\frac{A_2(z)}{2(2m-7)!}+6\lambda_3(z)+ \\ +\sum_{\alpha=4}^{m-1}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\lambda_\alpha(z)=\frac{(1-z)^{2m-4}}{2(2m-4)!}, \tag{3.5}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)=1, \tag{3.6}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)^2+2B_1(z)=z^2, \tag{3.7}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)^3+3B_1(z)+6A_2(z)+6B_2(z)=z^3, \tag{3.8}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)^\alpha+\alpha B_1(z)+\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)B_2(z)=z^\alpha,\quad \alpha=\overline{4,m-1}. \tag{3.9}$$

Система (3.1)–(3.9) называется *дискретной системой типа Винера—Хопфа* для оптимальных коэффициентов [4, 20]. В системе (3.1)–(3.9) коэффициенты $C_\beta(z)$, $\beta=\overline{0,N}$, $A_1(z)$, $A_2(z)$, $B_1(z)$, $B_2(z)$ и $\lambda_\alpha(z)$, $\alpha=\overline{0,m-1}$ неизвестны. Система (3.1)–(3.9) имеет единственное решение, и это решение дает минимум для $\|\ell\|^2$ при условиях (3.6)–(3.9), когда $N+5\geqslant m$. Здесь мы опустим доказательство существования и единственности решения системы (3.1)–(3.9), так как доказательство для этой системы проводится аналогично доказательству существования и единственности решения дискретной системы типа Винера—Хопфа для оптимальных коэффициентов в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ для квадратурных формул (см. [4,20]).

Тем самым, в фиксированных значениях узлов x_β квадрат нормы функционала погрешности ℓ, будучи квадратичной функцией коэффициентов $C_\beta(z)$, $\beta=\overline{0,N}$, $A_1(z)$, $A_2(z)$, $B_1(z)$ и $B_2(z)$, имеет единственный минимум для некоторого значения

$$C_\beta(z)=\mathring{C}_\beta(z),\quad A_1(z)=\mathring{A}_1(z),\quad A_2(z)=\mathring{A}_2(z),\quad B_1(z)=\mathring{B}_1(z),\quad B_2(z)=\mathring{B}_2(z).$$

Ниже для удобства сохраним прежние обозначения коэффициентов $\mathring{C}_\beta(z)$, $\beta=\overline{0,N}$, $\mathring{A}_1(z)$, $\mathring{A}_2(z)$, $\mathring{B}_1(z)$ и $\mathring{B}_2(z)$, т. е. $C_\beta(z)$, $A_1(z)$, $A_2(z)$, $B_1(z)$, $B_2(z)$.

Замечание 3.1. Легко проверить, что для оптимальных коэффициентов $C_\beta(z)$, $A_1(z)$, $A_2(z)$, $B_1(z)$, $B_2(z)$ и $\lambda_\alpha(z)$, $\alpha=\overline{1,m-1}$ справедливо следующее:

$$\begin{aligned}
&C_\beta(h\gamma)=\begin{cases}1, & \gamma=\beta,\\ 0, & \gamma\neq\beta,\end{cases}\quad \gamma=0,1,\ldots,N,\ \beta=0,1,2,\ldots,N,\\
&A_1(h\beta)=0,\ A_2(h\beta)=0,\ B_1(h\beta)=0,\ B_2(h\beta)=0,\ \beta=0,1,\ldots,N,\\
&\lambda_\alpha(h\beta)=0,\ \alpha=0,1,\ldots,m-1,\ \beta=0,1,\ldots,N.
\end{aligned}$$

4. Предварительные сведения

Далее в основном будут использоваться понятия, касающиеся функций с дискретным аргументом и операций над ними. Теория функций дискретного переменного представлена в [4,20]. Для полноты дадим несколько определений, относящихся к функциям дискретного переменного.

Пусть узлы x_β — равноотстоящие, т. е.

$$x_\beta=h\beta,\quad h=\frac{1}{N},\quad N=1,2,\ldots.$$

Определение 4.1. Функция $\varphi(h\beta)$ является *функцией дискретного переменного*, если она задается на некотором множестве целых значений β.

Определение 4.2. *Скалярное произведение* двух функций дискретного переменного $\varphi(h\beta)$ и $\psi(h\beta)$ задается таким образом:

$$[\varphi(h\beta),\psi(h\beta)]=\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}\varphi(h\beta)\cdot\psi(h\beta),$$

если ряд в правой части сходится абсолютно.

Определение 4.3. *Сверткой* двух функций $\varphi(h\beta)$ и $\psi(h\beta)$ называется скалярное произведение

$$\varphi(h\beta)*\psi(h\beta)=[\varphi(h\gamma),\psi(h\beta-h\gamma)]=\sum_{\gamma=-\infty}^{\infty}\varphi(h\gamma)\cdot\psi(h\beta-h\gamma).$$

Нам необходим дискретный аналог $D_m(h\beta)$ дифференциального оператора d^{2m}/dx^{2m}, который удовлетворял бы следующему равенству:

$$hD_m(h\beta)*G_m(h\beta)=\delta(h\beta),$$

где $G_m(h\beta)$ — это функция дискретного переменного, соответствующая функции $G_m(x)$, определяемой в (2.5), $\delta(h\beta)$ — это дискретная дельта-функция. Дискретный аналог $D_m(h\beta)$ был построен, и следующий результат был доказан в работе [6].

Теорема 4.1. *Дискретный аналог дифференциального оператора d^{2m}/dx^{2m} имеет вид*

$$D_m(h\beta) = \frac{(2m-1)!}{h^{2m}} \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{m-1} \dfrac{(1-q_k)^{2m+1} q_k^{|\beta|}}{q_k E_{2m-1}(q_k)} & \text{при} \quad |\beta| \geqslant 2, \\ 1 + \sum\limits_{k=1}^{m-1} \dfrac{(1-q_k)^{2m+1}}{E_{2m-1}(q_k)} & \text{при} \quad |\beta| = 1, \\ -2^{2m-1} + \sum\limits_{k=1}^{m-1} \dfrac{(1-q_k)^{2m+1}}{q_k E_{2m-1}(q_k)} & \text{при} \quad \beta = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

где $E_{2m-1}(q)$ — это полином Эйлера—Фробениуса степени $2m-1$, q_k — корни полинома Эйлера—Фробениуса $E_{2m-2}(q)$, $|q_k| < 1$, h — малый положительный параметр.

Кроме того, в [6] было доказано несколько свойств функции дискретного переменного $D_m(h\beta)$. Здесь мы приводим свойства функции дискретного переменного $D_m(h\beta)$, необходимые для наших последующих вычислений.

Теорема 4.2. *Функция дискретного переменного $D_m(h\beta)$ и мономы $(h\beta)^k$ связаны друг с другом следующим образом*:

$$\sum_{\beta=-\infty}^{\infty} D_m(h\beta)(h\beta)^k = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant k \leqslant 2m-1, \\ (2m)! & \text{при} \quad k = 2m, \\ 0 & \text{при} \quad 2m+1 \leqslant k \leqslant 4m-1, \\ \dfrac{h^{2m}(4m)! B_{2m}}{(2m)!} & \text{при} \quad k = 4m. \end{cases} \tag{4.2}$$

5. Вычисление коэффициентов формул оптимальной интерполяции (1.1) в случае $m = 4$

В этом разделе мы решаем задачу 1.2 для случая $m = 4$, а также ищем явные формулы для коэффициентов $C_\beta(z)$, $\beta = 0, 1, \ldots, N$, $A_\alpha(z), B_\alpha(z)$, $\alpha = 1, 2$ формул оптимальной интерполяции в пространстве $L_2^{(4)}(0,1)$.

Справедливо следующее:

Теорема 5.1. *Коэффициенты $C_\beta(z)$, $\beta = 0, 1, \ldots, N$, $A_\alpha(z)$, $B_\alpha(z)$, $\alpha = 1, 2$ формул оптимальной интерполяции в форме* (1.1) *в пространстве $L_2^{(4)}(0,1)$ представляются в следующем виде*:

$$\begin{aligned} C_0(z) &= \frac{1}{2h^7}\Bigg[-128z^7 + |z-h|^7 + (z+h)^7 - 14h^6 A_1(z) - 420h^4 A_2(z) + \\ &\quad + 10080(\lambda_1(z) + 2\lambda_2(z))h^2 + \sum_{k=1}^{3} \frac{A_k}{q_k} \left(\sum_{\gamma=0}^{N} q_k^\gamma |z-h\gamma|^7 + M_k(z) + q_k^N N_k(z) \right) \Bigg], \\ C_\beta(z) &= \frac{1}{2h^7}\Bigg[|z-h(\beta-1)|^7 - 128|z-h\beta|^7 + |z-h(\beta+1)|^7 + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{3} \frac{A_k}{q_k} \left(\sum_{\gamma=0}^{N} q_k^{|\beta-\gamma|} |z-h\gamma|^7 + q_k^\beta M_k(z) + q_k^{N-\beta} N_k(z) \right) \Bigg], \qquad \beta = \overline{1, N-1}, \\ C_N(z) &= \frac{1}{2h^7}\Bigg[-128(1-z)^7 + |z-h(N-1)|^7 + (h+1-z)^7 + 14h^6 B_1(z) + 420h^4 B_2(z) - \\ &\quad - 10080h^2 \lambda_1(z) + \sum_{k=1}^{3} \frac{A_k}{q_k} \left(\sum_{\gamma=0}^{N} q_k^{N-\gamma} |z-h\gamma|^7 + q_k^N M_k(z) + N_k(z) \right) \Bigg], \end{aligned}$$

где

$$M_k(z) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} q_k^\gamma \left((z+h\gamma)^7 - 14(h\gamma)^6 A_1(z) - 420(h\gamma)^4 A_2(z) + 10080 \left(\lambda_1(z) + 2(h\gamma)^2 \lambda_2(z) \right) \right),$$

$$N_k(z) \;=\; \sum_{\gamma=1}^{\infty} q_k^{\gamma}\left((h\gamma+1-z)^7+14(h\gamma)^6B_1(z)+420(h\gamma)^4B_1(z)-10080(h\gamma)^2\lambda_1(z)\right),$$

$A_1(z)$, $A_2(z)$, $B_1(z)$, $B_2(z)$, $\lambda_1(z)$ и $\lambda_2(z)$ удовлетворяют системе линейных уравнений

$$A_1(z)\left[-h^6\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_4(h\gamma+h\beta)\gamma^6\right]+B_1(z)\left[h^6\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_4(h(N+\gamma)-h\beta)\gamma^6\right]+$$
$$+A_2(z)\left[-30h^4\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_4(h\gamma+h\beta)\gamma^4\right]+B_2(z)\left[30h^4\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_4(h(N+\gamma)-h\beta)\gamma^4\right]+$$
$$+6!\lambda_1(z)\left[h^2\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_4(h\gamma+h\beta)\gamma^2-h^2\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_4(h(N+\gamma)-h\beta)\gamma^2\right]+$$
$$+2\cdot 6!\lambda_2(z)\left[h^2\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_4(h\gamma+h\beta)\gamma^2\right]=-\frac{1}{14}\sum_{\gamma=-\infty}^{\infty}D_4(h\beta-h\gamma)|z-h\gamma|^7,$$

$\beta=-1,\beta=-2,\beta=-3,\beta=N+1,\beta=N+2,\beta=N+3.$

Доказательство. В случае $m=4$ система (3.1)–(3.9) дает следующее:

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)\frac{|h\beta-h\gamma|^7}{2\cdot 7!}-A_1(z)\frac{(h\beta)^6}{2\cdot 6!}+B_1(z)\frac{(h\beta-1)^6}{2\cdot 6!}-A_2(z)\frac{(h\beta)^4}{2\cdot 6!}+$$
$$+B_2(z)\frac{(h\beta-1)^4}{2\cdot 6!}+\sum_{\alpha=0}^{2}\lambda_\alpha(z)(h\beta)^\alpha=\frac{|z-h\beta|^7}{2\cdot 7!},\quad \beta=\overline{0,N}, \tag{5.1}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)^6+6B_1(z)+120B_2(z)-2\cdot 6!\lambda_1(z)=z^6, \tag{5.2}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)^5+5B_1(z)+60B_2(z)-4\cdot 5!\lambda_1(z)-4\cdot 5!\lambda_2(z)=z^5, \tag{5.3}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)^4+4B_1(z)+24B_2(z)=z^4, \tag{5.4}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)^3+3B_1(z)+6A_2(z)+6B_2(z)=z^3, \tag{5.5}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)^2+2B_1(z)=z^2, \tag{5.6}$$

$$\sum_{\beta=0}^{N}C_\gamma(z)(h\beta)+A_1(z)+B_1(z)=z, \tag{5.7}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)=1. \tag{5.8}$$

Далее мы решаем систему (5.1)–(5.8). Введем следующие обозначения:

$$v(h\beta) \;=\; \sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)\frac{|h\beta-h\gamma|^7}{2\cdot 7!}, \tag{5.9}$$

$$u(h\beta) \;=\; v(h\beta)-A_1(z)\frac{(h\beta)^6}{2\cdot 6!}+B_1(z)\frac{(h\beta-1)^6}{2\cdot 6!}-$$

$$-A_2(z)\frac{(h\beta)^4}{2\cdot 4!}+B_2(z)\frac{(h\beta-1)^4}{2\cdot 4!}+\sum_{\alpha=0}^{2}\lambda_\alpha(z)(h\beta)^\alpha. \qquad (5.10)$$

В этом утверждении следует выразить $C_\gamma(z)$, $\beta=0,1,\ldots,N$ через функцию $u(h\beta)$. Для этого нам необходим дискретный аналог $D_4(h\beta)$ дифференциального оператора $\frac{d^8}{dx^8}$, который удовлетворял бы уравнению

$$hD_4(h\beta)*\frac{|h\beta|^7}{2\cdot 7!}=\delta(h\beta),$$

где $\delta(h\beta)$ — дискретная дельта-функция. Из теоремы 4.1 в случае $m=4$ получаем следующую форму дискретного аналога $D_4(h\beta)$ оператора $\frac{d^8}{dx^8}$:

$$D_4(h\beta)=\frac{7!}{h^8}\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{3}A_k\;q_k^{|\beta|-1} & \text{при} \quad |\beta|\geqslant 2,\\ 1+\sum\limits_{k=1}^{3}A_k & \text{при} \quad |\beta|=1,\\ C+\sum\limits_{k=1}^{3}\frac{A_k}{q_k} & \text{при} \quad \beta=0,\end{cases} \qquad (5.11)$$

где

$$A_k=\frac{(1-q_k)^9}{E_7(q_k)},\ C=-128,$$
$$E_6(x)=x^6+120x^5+1191x^4+2416x^3+1191x^2+120x+1,$$
$$E_7(x)=x^7+247x^6+4293x^5+15619x^4+15619x^3+4293x^2+247x+1$$

являются полиномами Эйлера—Фробениуса, а $q_k,\ k=1,2,3$ — корнями полинома $E_6(x)$, причем $|q_k|<1$, $k=1,2,3$.

Применяя дискретный аналог (5.11) к коэффициентам C_β, $\beta=0,1,\ldots,N$, интерполяционной формулы (1.1), получаем следующее равенство:

$$C_\beta(z)=hD_4(h\beta)*u(h\beta). \qquad (5.12)$$

Отсюда можно заключить, что, если мы найдем функцию $u(h\beta)$, то коэффициенты C_β, $\beta=0,1,\ldots,N$, из формулы (1.1) будут получены из (5.12).

Теперь отыщем явное представление функции $u(h\beta)$. Так как

$$C_\beta(z)=0 \ \text{ для } \ h\beta\notin[0,1],$$

то из (5.12) получаем

$$C_\beta(z)=hD_4(h\beta)*u(h\beta)=0 \text{ при } h\beta\notin[0,1]. \qquad (5.13)$$

Рассмотрим равенство (5.9) для $h\beta\notin[0,1]$.

Положим $\beta<0$. Тогда, с учетом (5.2)–(5.8), имеем

$$\begin{aligned}v(h\beta) \;=\; &-\frac{1}{2\cdot 7!}\Big((h\beta)^7-7(h\beta)^6(z-A_1(z)-B_1(z))+21(h\beta)^5(z^2-2B_1(z))-\\ &-35(h\beta)^4(z^3-3B_1(z)-6A_2(z)-6B_2(z))+35(h\beta)^3(z^4-4B_1-24B_2)-\\ &-21(h\beta)^2(z^5-5B_1-60B_2+4\cdot 5!\lambda_1+4\cdot 5!\lambda_2)+\\ &+7(h\beta)(z^6-6B_1-120B_2+2\cdot 6!\lambda_1)-\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)^7\Big).\end{aligned} \qquad (5.14)$$

Теперь положим $\beta>N$, и тогда схожим образом из (5.9) получим

$$\begin{aligned}v(h\beta) \;=\; &\frac{1}{2\cdot 7!}\Big((h\beta)^7-7(h\beta)^6(z-A_1(z)-B_1(z))+21(h\beta)^5(z^2-2B_1(z))-\\ &-35(h\beta)^4(z^3-3B_1(z)-6A_2(z)-6B_2(z))+35(h\beta)^3(z^4-4B_1-24B_2)-\\ &-21(h\beta)^2(z^5-5B_1-60B_2+4\cdot 5!\lambda_1+4\cdot 5!\lambda_2)+\end{aligned}$$

$$+ 7(h\beta)(z^6 - 6B_1 - 120B_2 + 2 \cdot 6!\lambda_1) - \sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma(z)(h\gamma)^7\Bigg). \tag{5.15}$$

Далее, используя (5.14) и (5.15), из (5.10) получаем

$$u(h\beta) = \begin{cases} \dfrac{(z-h\beta)^7}{2\cdot 7!} - \dfrac{A_1(z)}{6!}(h\beta)^6 - \dfrac{A_2(z)}{4!}(h\beta)^4 + (\lambda_1(z) + 2\lambda_2(z))(h\beta)^2, & \beta < 0, \\ \dfrac{|z-h\beta|^7}{2\cdot 7!}, \qquad 0 \leqslant \beta \leqslant N, & \\ -\dfrac{(z-h\beta)^7}{2\cdot 7!} + \dfrac{B_1(z)}{6!}(1-h\beta)^6 + \dfrac{B_2(z)}{4!}(1-h\beta)^4 - \lambda_1(z)(1-h\beta)^2, & \beta > N. \end{cases} \tag{5.16}$$

Здесь $A_1(z), A_2(z)$, $B_1(z)$ и $B_2(z)$ неизвестны. Они могут быть получены из (5.13).

Теперь, с учетом (5.16), из (5.13) получаем

$$D_4(h\beta) * u(h\beta) = 0, \qquad \beta < 0, \quad \beta > N,$$

т. е., для $\beta < 0$ и $\beta > N$

$$\sum_{\gamma=1}^{\infty} D_4(h\gamma + h\beta)\left(\frac{(z+h\gamma)^7}{2\cdot 7!} - \frac{A_1(z)}{6!}(h\gamma)^6 - \frac{A_2(z)}{4!}(h\gamma)^4 + (\lambda_1(z) + 2\lambda_2(z))(h\gamma)^2\right) +$$
$$+ \sum_{\gamma=0}^{N} D_4(h\gamma - h\beta)\frac{|z-h\gamma|^7}{2\cdot 7!} +$$
$$+ \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_4(h(N+\gamma) - h\beta)\left(\frac{-(z-1-h\gamma)^7}{2\cdot 7!} + \frac{B_1(z)}{6!}(h\gamma)^6 + \frac{B_2(z)}{4!}(h\gamma)^4 - \lambda_1(z)(h\gamma)^2\right) = 0.$$

Из последнего равенства для $\beta < 0$ и $\beta > N$ имеем

$$A_1(z)\left(-h^6\sum_{\gamma=1}^{\infty} D_4(h\gamma + h\beta)\gamma^6\right) + B_1(z)\left(h^6\sum_{\gamma=1}^{\infty} D_4(h(N+\gamma) - h\beta)\gamma^6\right) +$$
$$+ A_2(z)\left(-30h^4\sum_{\gamma=1}^{\infty} D_4(h\gamma + h\beta)\gamma^4\right) + B_2(z)\left(30h^4\sum_{\gamma=1}^{\infty} D_4(h(N+\gamma) - h\beta)\gamma^4\right) +$$
$$+ 6!\lambda_1(z)\left(h^2\sum_{\gamma=1}^{\infty} D_4(h\gamma + h\beta)\gamma^2 - h^2\sum_{\gamma=1}^{\infty} D_4(h(N+\gamma) - h\beta)\gamma^2\right) +$$
$$+ 2\cdot 6!\lambda_2(z)\left(h^2\sum_{\gamma=1}^{\infty} D_4(h\gamma + h\beta)\gamma^2\right) = -\sum_{\gamma=0}^{N} D_4(h\gamma - h\beta)\frac{|z-h\gamma|^7}{14} -$$
$$-\sum_{\gamma=1}^{\infty} D_4(h\gamma + h\beta)\frac{(h\gamma + z)^7}{14} - \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_4(h(N+\gamma) - h\beta)\frac{(h\gamma + (1-z))^7}{14}.$$

Следовательно, при

$$\beta = -1, \quad \beta = -2, \quad \beta = -3, \quad \beta = N+1, \quad \beta = N+2, \quad \beta = N+3,$$

после ряда упрощений, получим $A_1(z)$, $A_2(z)$, $B_1(z)$, $B_2(z)$, $\lambda_1(z)$ и $\lambda_2(z)$, которые были даны в утверждении теоремы.

Затем из (5.12), используя (5.11) и (5.16), для $\beta = 0, 1, 2, \ldots, N$ мы получаем аналитические формулы для коэффициентов $C_\beta(z)$, $\beta = \overline{0, N}$, данные в утверждении теоремы. Теорема 5.1 доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Василенко В. А.* Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. — Новосибирск: Наука, 1983.
2. *Игнатьев М. И., Певний А. Б.* Натуральные сплайны многих переменных. — Л.: Наука, 1991.
3. *Лоран П.-Ж.* Аппроксимация и оптимизация. — М.: Мир, 1975.
4. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. — М.: Наука, 1974.
5. *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике. — М.: Наука, 1976.
6. *Шадиметов Х. М.* Дискретный аналог дифференциального оператора d^{2m}/dx^{2m} и его построение// В сб.: «Вопросы вычислительной и прикладной математики». — Ташкент: АН УзССР, 1985. — *79*. — С. 22–35. — ArXiv:1001.0556.v1 [math.NA] Jan. 2010.
7. *Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L.* The theory of splines and their applications. — New York: Academic Press, 1967.
8. *Arcangeli R., Lopez de Silanes M. C., Torrens J. J.* Multidimensional minimizing splines. — Boston: Kluwer Academic publishers, 2004.
9. *Attea M.* Hilbertian kernels and spline functions. — Amsterdam: North-Holland, 1992.
10. *de Boor C.* Best approximation properties of spline functions of odd degree// J. Math. Mech. — 1963. — *12*. — С. 747–749.
11. *de Boor C.* A practical guide to splines. — New York—Heidelberg—Berlin: Springer, 1978.
12. *Holladay J. C.* Smoothest curve approximation// Math. Tables Aids Comput. — 1957. — *11*. — С. 223–243.
13. *Mastroianni G., Milovanović G. V.* Interpolation processes. Basic theory and applications. — Berlin: Springer, 2008.
14. *Schoenberg I. J.* On trigonometric spline interpolation// J. Math. Mech. — 1964. — *13*. — С. 795–825.
15. *Schumaker L. L.* Spline functions: basic theory. — Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
16. *Shadimetov Kh. M., Hayotov A. R., Nuraliev F. A.* On an optimal quadrature formula in Sobolev space $L_2^{(m)}(0,1)$// J. Comput. Appl. Math. — 2013. — *243*. — С. 91–112.
17. *Sobolev S. L.* Formulas of mechanical cubature in n-dimensional space// В сб.: «Selected works of S. L. Sobolev». — New York: Springer, 2006. — С. 445–450.
18. *Sobolev S. L.* On interpolation of functions of n variables// В сб.: «Selected works of S. L. Sobolev». — New York: Springer, 2006. — С. 451–456.
19. *Sobolev S. L.* The coefficients of optimal quadrature formulas// В сб.: «Selected works of S. L. Sobolev». — New York: Springer, 2006. — С. 561–566.
20. *Sobolev S. L., Vaskevich V. L.* The theory of cubature formulas. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. Group, 1997.

Х. М. Шадиметов
Институт математики АН Узбекистана,
Узбекистан, 100170, Ташкент, ул. М. Улугбека, 81
E-mail: kholmatshadimetov@mail.ru

А. Р. Хаётов
Институт математики АН Узбекистана,
Узбекистан, 100170, Ташкент, ул. М. Улугбека, 81
E-mail: hayotov@mail.ru

Ф. А. Нуралиев
Институт математики АН Узбекистана,
Узбекистан, 100170, Ташкент, ул. М. Улугбека, 81
E-mail: nuraliyevf@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-4-723-735 UDC 519.652

Construction of Optimal Interpolation Formulas in the Sobolev Space

© 2018 **Kh. M. Shadimetov, A. R. Hayotov, F. A. Nuraliev**

Abstract. In the present paper, using the discrete analog of the differential operator $\dfrac{d^{2m}}{dx^{2m}}$, optimal interpolation formulas are constructed in $L_2^{(4)}(0,1)$ space. The explicit formulas for coefficients of optimal interpolation formulas are obtained.

REFERENCES

1. V. A. Vasilenko, *Splayn-funktsii: teoriya, algoritmy, programmy* [Spline-Functions: Theory, Algorithms, Programs], Nauka, Novosibirsk, 1983 (in Russian).
2. M. I. Ignat'ev, A. B. Pevniy, *Natural'nye splayny mnogikh peremennykh* [Natural Splines of Many Variables], Nauka, L., 1991 (in Russian).
3. P.-J. Laurent, *Approksimatsiya i optimizatsiya* [Approximation and Optimization], Mir, Moscow, 1975 (Russian translation).
4. S. L. Sobolev, *Vvedenie v teoriyu kubaturnykh formul* [Introduction to the Theory of Cubature Formulas], Nauka, Moscow, 1974 (in Russian).
5. S. B. Stechkin, Yu. N. Subbotin, *Splayny v vychislitel'noy matematike* [Splines in Computational Mathematics], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
6. Kh. M. Shadimetov, "Diskretnyy analog differentsial'nogo operatora d^{2m}/dx^{2m} i ego postroenie" [The discrete analogue of the differential operator d^{2m}/dx^{2m} and its construction], In: *Voprosy vychislitel'noy i prikladnoy matematiki* [Questions of Computations and Applied Mathematics], AN UzSSR, Tashkent, 1985, **79**, 22–35, ArXiv:1001.0556.v1 [math.NA] Jan. 2010 (in Russian).
7. J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, J. L. Walsh, *The theory of splines and their applications*, Academic Press, New York, 1967.
8. R. Arcangeli, M. C. Lopez de Silanes, J. J. Torrens, *Multidimensional minimizing splines*, Kluwer Academic publishers, Boston, 2004.
9. M. Attea, *Hilbertian kernels and spline functions*, North-Holland, Amsterdam, 1992.
10. C. de Boor, "Best approximation properties of spline functions of odd degree," *J. Math. Mech.*, 1963, **12**, 747–749.
11. C. de Boor, *A practical guide to splines*, Springer, New York—Heidelberg—Berlin, 1978.
12. J. C. Holladay, "Smoothest curve approximation," *Math. Tables Aids Comput.*, 1957, **11**, 223–243.
13. G. Mastroianni, G. V. Milovanović, *Interpolation processes. Basic theory and applications*, Springer, Berlin, 2008.
14. I. J. Schoenberg, "On trigonometric spline interpolation," *J. Math. Mech.*, 1964, **13**, 795–825.
15. L. L. Schumaker, *Spline functions: basic theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
16. Kh. M. Shadimetov, A. R. Hayotov, F. A. Nuraliev, "On an optimal quadrature formula in Sobolev space $L_2^{(m)}(0,1)$," *J. Comput. Appl. Math.*, 2013, **243**, 91–112.
17. S. L. Sobolev, "Formulas of mechanical cubature in n-dimensional space," In: *Selected works of S. L. Sobolev*, Springer, New York, 2006, pp. 445–450.
18. S. L. Sobolev, "On interpolation of functions of n variables," In: *Selected works of S. L. Sobolev*, Springer, New York, 2006, pp. 451–456.
19. S. L. Sobolev, "The coefficients of optimal quadrature formulas," In: *Selected works of S. L. Sobolev*, Springer, New York, 2006, pp. 561–566.
20. S. L. Sobolev, V. L. Vaskevich, *The theory of cubature formulas*, Kluwer Acad. Publ. Group, Dordrecht, 1997.

Kh. M. Shadimetov
Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: kholmatshadimetov@mail.ru

A. R. Hayotov
Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: hayotov@mail.ru

F. A. Nuraliev
Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: nuraliyevf@mail.ru