Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 4 (2018). С. 706–722

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-4-706-722 УДК 517.982

О КОМПЛЕКСИФИКАЦИИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ И ЕЕ ПРОЯВЛЕНИЯХ В ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛОВ БОХНЕРА И ПЕТТИСА

© 2018 г. **М. Е. ЛУНА-ЭЛИЗАРРАРАС, Ф. РАМИРЕЗ-РЕЙЕС, М. ШАПИРО**

Аннотация. Данная работа является продолжением нашей работы [12], в которой рассматривались линейные пространства в следующих двух случаях: вещественное пространство допускает умножение на комплексные скаляры без изменения самого множества; вещественное пространство вложено в более широкое множество с умножением на комплексные скаляры. Мы также изучили, как они проявляются в случае, когда исходное пространство обладает дополнительными структурами: топологией, нормой, скалярным произведением, равно как и то, что происходит с линейными операторами, действующими в таких пространствах. Изменение линейности линейных пространств выявляет несколько довольно тонких свойств, не столь очевидных в случае, когда множество скаляров остается неизменным. В настоящей работе мы следуем той же идее, теперь уже при рассмотрении интегралов Бохнера и Петтиса для функций, принимающих значения в вещественных или комплексных банаховых и гильбертовых пространствах. В итоге это приводит нас к изучению сильных и слабых случайных величин со значениями в вещественных и комплексных банаховых и гильбертовых пространствах, в частности, к некоторым свойствам их математических ожиданий.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Данная работа является продолжением нашей предыдущей работы [12]; обе были вдохновлены работой [26], в которой авторы изучали некоторые явления для случайных величин, возникающие при вложении области, из которой берутся эти величины, т. е. гильбертова пространства, в более широкое комплексное гильбертово пространство, или когда данная область, будучи комплексным гильбертовым пространством, допускает существование «случайных собственных векторов». Более детальную информацию можно найти во введении к работе [12].

В [12] мы рассматривали линейные пространства в следующих четырех ситуациях: вещественное пространство допускает умножение на комплексные скаляры без изменения самого множества; вещественное пространство вложено в более широкое множество с умножением на комплексные скаляры; комплексное пространство имеет инволюцию и, таким образом, содержит «вещественные» и «мнимые» элементы; комбинация предыдущих ситуаций. Также мы изучили, как они проявляются в случае, когда исходное пространство обладает дополнительными структурами: топологией, нормой, скалярным произведением, равно как и то, что происходит с линейными операторами, действующими в таких пространствах.

В настоящей работе мы развиваем результаты, полученные в [12], и устанавливаем связи между интегралами Бохнера и Петтиса для функций, принимающих значения в вещественных и комплексных банаховых и гильбертовых пространствах. Проведенный анализ мы применяем к изучению сильных и слабых случайных величин со значениями в вещественных и комплексных банаховых и гильбертовых пространствах, в частности, некоторых свойств их математических ожиданий.

Необходимо заметить, что за работой [26] последовала работа [24], в которой вместо комплексных скаляров рассматриваются кватернионные. Наш подход в этом отношении будет опубликован позднее, где мы частично применим техники, разработанные в [4, 13, 14, 16]. Также отметим, что рассмотрение иных классов скаляров, гиперболических и бикомплексных чисел можно найти в [15].

Стоит упомянуть и о том, что исследование комплексификации вещественных линейных пространств содержится в работах М. Риса [18] и Г. О. Торина [23], поскольку во многих областях математики (например, в теории интерполяции, квантовой механике или теории стохастических процессов) она необходима для решения определенных задач. Данная тема вызывала интерес и в последующем, см., например, работы И. Э. Вербицкого и П. П. Середы [1, 2], Г. А. Сухомлинова [20], А. Дефанта [5], Дж. И. Кривина [10, 11] и Т. Фигеля, Т. Иванца и А. Пельтшински [7]. Также см. книгу А. Зигмунда [27].

2. Пространства функций со значениями в линейных пространствах

2.1. Внутренняя комплексификация. Начнем с напоминания о том, что $\mathbb{R}$-линейное пространство X допускает умножение на комплексные скаляры тогда и только тогда, когда существует автоморфизм u пространства X такой, что $u^2 = -Id_X$ — тождественный автоморфизм, т. е. u выполняет роль умножения на $\mathbf{i}$. В этом случае X называется *внутренне комплексифицируемым*, а возникающее $\mathbb{C}$-линейное пространство называется *внутренней алгебраической комплексификацией* пространства X. Автоморфизм u носит название «*комплексифицирующего автоморфизма*».

Пусть Ω — это произвольное непустое множество, X — $\mathbb{R}$-линейное пространство. Рассмотрим множество

$$\Phi := \{\phi|\ \phi : \Omega \to X\}. \tag{2.1}$$

С поточечным сложением и умножением на вещественные скаляры Φ превращается в вещественное линейное пространство. И хотя мы заинтересованы в изучении пространств X с большим количеством структур, но даже на таком общем уровне можно сделать некоторое утверждение.

Теорема 2.1. *При соблюдении вышеизложенных условий и предположении, что X допускает комплексифицирующий автоморфизм u, множество Φ также допускает внутреннюю комплексификацию.*

Доказательство. Определим отображение $u_\Phi : \Phi \to \Phi$ как

$$u_\Phi(\phi) := u \circ \phi \quad \forall\ \phi \in \Phi.$$

Так как u обратим, то u_Φ является взаимно-однозначным отображением. Это очевидным образом подтверждает, что u_Φ обладает всеми необходимыми свойствами. □

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, однако можно делать выводы, «управляя» постоянными функциями в Φ. Прежде всего, возьмем $x \in X$ и соответствующую постоянную функцию в Φ

$$\psi_x : \omega \in \Omega \mapsto x \in X.$$

Определим множество

$$C_\Phi := \{\phi \in \Phi \mid \phi \text{ является постоянной}\}$$

и отображение $\varphi : X \to C_\Phi$, заданное как

$$\varphi(x) := \psi_x.$$

Это отображение является биективным $\mathbb{R}$-линейным отображением. В самом деле:

- $\varphi(x + y) = \psi_{x+y} = \psi_x + \psi_y = \varphi(x) + \varphi(y)$.
- Даны $x \in X$, $a \in \mathbb{R}$, и тогда

$$\varphi(ax) = \psi_{ax} = a\psi_x = a\varphi(x).$$

- Биективность φ очевидна.

Конечно, обратное к φ отображение φ^{-1} из C_Φ в X также является $\mathbb{R}$-линейным.

Теорема 2.2. *Пусть X — вещественное линейное пространство и Φ — такое же, как в* (2.1). *Если Φ допускает комплексифицирующий автоморфизм u_Φ, переводящий постоянные функции в постоянные функции, то X допускает комплексифицирующий автоморфизм.*

Доказательство. Вспомним, что автоморфизм u_Φ определяет на Φ умножение на $\mathbf{i}$, а именно,

$$u_\Phi(\phi) = \mathbf{i}\phi \quad \forall \phi \in \Phi.$$

Тот факт, что u_Φ переводит постоянные функции из Φ в постоянные функции, означает, что для любого $x \in X$ существует $\widehat{x} \in X$ такой, что

$$u_\Phi(\psi_x) = \psi_{\widehat{x}}$$

т. е.

$$u_\Phi \circ \varphi(x) = \varphi(\widehat{x}).$$

Зададим $u : X \to X$ как

$$u(x) := (\varphi^{-1} \circ u_\Phi \circ \varphi)(x) := \widehat{x}.$$

Таким образом, u является $\mathbb{R}$-линейным отображением и удовлетворяет

$$u^2 = (\varphi^{-1} \circ u_\Phi \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ u_\Phi \circ \varphi) = -Id_X,$$

следовательно, отображение u — комплексифицирующий автоморфизм для X. □

Если X — это вещественное линейное пространство, не допускающее комплексифицирующий автоморфизм, то по теореме 2.2 существуют два возможных варианта для пространства функций Φ: оно либо не допускает комплексифицирующий автоморфизм, либо допускает, но при этом комплексифицирующий автоморфизм не переводит постоянные функции в постоянные функции.

В качестве примера рассмотрим множество $\Omega = \{1, 2\}$ и вещественное линейное пространство $X = \mathbb{R}$. В этом случае вещественное линейное пространство

$$\Phi = \{f : \{1, 2, \} \to \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^2 \tag{2.2}$$

допускает комплексифицирующий автоморфизм

$$u_\Phi(x, y) := (-y, x).$$

Пусть задана постоянная функция $\psi_a \in \Phi$, тогда, используя (2.2), получаем, что

$$\psi_a = (a, a)$$

и

$$u_\Phi(\psi_a) = (-a, a),$$

что не является постоянной функцией. Этот пример противоречит тому факту, что $X = \mathbb{R}$ не допускает комплексифицирующий автоморфизм.

2.2. Внешняя комплексификация. Вспомним, что внешняя комплексификация вещественного линейного пространства X предполагает поиск более широкого комплексного пространства $\widehat{X}_\mathbb{C}$ такого, что $X \subset \widehat{X}_\mathbb{C}$. Обычный способ построения внешней комплексификации (см. [12, п. 2.2]) заключается в рассмотрении прямой суммы $X \oplus X$ (которая является $\mathbb{R}$-линейным пространством) и определении операции умножения на комплексные скаляры следующим образом:

$$(a + \mathbf{i}b) \cdot (x, y) := (ax - by, ay + bx), \quad \forall (x, y) \in X \oplus X, \ a + \mathbf{i}b \in \mathbb{C}.$$

В силу того, что определена операция умножения на комплексные скаляры, $X \oplus X$ можно обозначить как $\widehat{X}_\mathbb{C}$. Также известно, что подмножество

$$\{(x, 0) \mid x \in X\}$$

является $\mathbb{R}$-линейным пространством, изоморфным X; подмножество $\{(0, x) \mid x \in X\}$ можно записать как

$$\mathbf{i} \cdot \{(x, 0) \mid x \in X\},$$

и, ассоциируя $\{(x, 0) \mid x \in X\}$ с X, получаем изоморфизм двух $\mathbb{C}$-линейных пространств:

$$\widehat{X}_\mathbb{C} = X + \mathbf{i}X.$$

Пространство функций Φ, заданное в (2.1), является $\mathbb{R}$-линейным пространством. Таким образом, мы вправе рассмотреть его внешнюю комплексификацию

$$\widehat{\Phi}_{\mathbb{C}} = \Phi + \mathbf{i}\Phi;$$

тогда всякий элемент $\phi_1 + \mathbf{i}\phi_2 \in \Phi$ умножается на произвольное комплексное число $a + \mathbf{i}b$ по правилу:

$$(a + ib)(\phi_1 + i\phi_2) = (a\phi_1 - b\phi_2) + i(a\phi_2 + b\phi_1).$$

3. Интегралы Бохнера и Петтиса для функций со значениями в вещественных и комплексных банаховых пространствах

3.1. Случай внутренней комплексификации. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — это вещественное банахово пространство с комплексифицирующим автоморфизмом u, а $X_{\mathbb{C}}$ — его внутренняя алгебраическая комплексификация. Имеются примеры, показывающие, что норма $\|\cdot\|$ в X необязательно совместима с комплексной структурой $X_{\mathbb{C}}$ (см. [12, п. 4]). Однако существуют некоторые способы определения новых норм на X, которые уже будут совместимы с комплексной структурой. Рассмотрим следующую формулу:

$$\|x\|_{\mathbb{C}} := \sup_{\theta}\{\|x\cos\theta + u(x)\sin\theta\| : \theta \in [0, 2\pi]\ \}, \tag{3.1}$$

Следующее утверждение было доказано в [3]. Для удобства приведем доказательство и здесь.

Лемма 3.1. *Формула* (3.1) *задает норму на внутренней комплексификации* $X_{\mathbb{C}}$ *пространства* X; *кроме того, если* u *непрерывен, то*

$$\|x\| \leqslant \|x\|_{\mathbb{C}} \leqslant (1 + \|u\|)\|x\|. \tag{3.2}$$

Доказательство. Доказательство того, что (3.1) обладает всеми свойствами нормы на $X_{\mathbb{C}}$, является прямым, кроме доказательства факта, что $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

$$\|\lambda x\|_{\mathbb{C}} = |\lambda| \cdot \|x\|_{\mathbb{C}}. \tag{3.3}$$

Возьмем $\lambda \in \mathbb{C}$ и представим

$$\lambda = |\lambda| \cdot (\cos\theta_\lambda + \mathbf{i}\sin\theta_\lambda),$$

тогда

$$\begin{aligned}
\|\lambda x\|_{\mathbb{C}} &= \||\lambda| \cdot (\cos\theta_\lambda + \mathbf{i}\sin\theta_\lambda) \cdot x\|_{\mathbb{C}} = |\lambda| \cdot \|x\cos\theta_\lambda + u(x)\sin\theta_\lambda\|_{\mathbb{C}} = \\
&= |\lambda| \cdot \sup_{\theta}\{\|(x\cos\theta_\lambda + u(x)\sin\theta_\lambda) \cdot \cos\theta + u(x\cos\theta_\lambda + u(x)\sin\theta_\lambda) \cdot \sin\theta\| : \theta \in [0, 2\pi]\} = \\
&= |\lambda| \cdot \sup_{\theta}\{\|x(\cos\theta_\lambda \cdot \cos\theta - \sin\theta_\lambda \cdot \sin\theta) + u(x)(\sin\theta_\lambda \cdot \cos\theta + \cos\theta_\lambda \cdot \sin\theta\| : \theta \in [0, 2\pi]\} = \\
&= |\lambda| \cdot \sup_{\theta}\{\|x\cos(\theta_\lambda + \theta) + u(x)\sin(\theta_\lambda + \theta)\| : \theta \in [0, 2\pi]\} = \\
&= |\lambda| \cdot \sup_{\widetilde{\theta}}\left\{\left\|x\cos\widetilde{\theta} + u(x)\sin\widetilde{\theta}\right\| : \widetilde{\theta} \in [0, 2\pi]\right\} = |\lambda| \cdot \|x\|_{\mathbb{C}},
\end{aligned}$$

что доказывает (3.3).

Наконец, чтобы доказать (3.2), отметим сперва, что

$$\|x\| = \|x\cos 0 + u(x)\sin 0\|$$

— это некоторый элемент множества

$$\{\|x\cos\theta + u(x)\sin\theta\| : \theta \in [0, 2\pi]\},$$

тогда

$$\|x\| \leqslant \|x\|_{\mathbb{C}}.$$

Возьмем теперь произвольный $\theta \in [0, 2\pi]$. Так как u непрерывно, получим, что

$$\|x\cos\theta + u(x)\sin\theta\| \leqslant (1 + \|u\|) \cdot \|x\|.$$

□

Замечание 3.1. Если u непрерывно, то из (3.2) можно заключить:

1. если $(X, \|\cdot\|)$ — вещественное банахово пространство, то $(X_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|\mathbb{C})$ — комплексное банахово пространство;
2. нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ порождают эквивалентные топологии;
3. нельзя утверждать, что нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ эквивалентны, потому что понятие эквивалентности норм применимо только к нормам, действующим на линейных пространствах с одинаковыми скалярами.

Обозначим, как обычно, через $\mathcal{B}(X)$ и $\mathcal{B}(X_{\mathbb{C}})$ соответствующие борелевские σ-алгебры. Очевидно, что $(X, \mathcal{B}(X))$ и $(X_{\mathbb{C}}, \mathcal{B}(X_{\mathbb{C}}))$ — измеримые пространства.

В дальнейшем речь пойдет о $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, конечном пространстве с мерой $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$, и об X, вещественном нормированном пространстве с непрерывным комплексифицирующим автоморфизмом u.

Как известно, функция $\psi : \Omega \longrightarrow X$ называется простой, если она имеет форму

$$\psi = \sum_{j=1}^{k} v_j \chi_{A_j}$$

где $v_j \in X$, $A_j \in \mathcal{A}$, $j = 1, \ldots, k$ — непересекающиеся множества такие, что $\Omega = \bigcup_{j=1}^{k} A_j$. Интеграл от простой функции ψ по $A \in \mathcal{A}$ определяется как

$$\int_A \psi d\mu = \sum_{j=1}^{k} v_j \ \mu(A \cap A_j).$$

Обозначим через $\mathcal{J}$ и $\mathcal{J}_{\mathbb{C}}$ множества простых функций из Ω в X и из Ω в $X_{\mathbb{C}}$, соответственно; ясно, что $\mathcal{J}$ — это $\mathbb{R}$-линейное пространство, а $\mathcal{J}_{\mathbb{C}}$ — $\mathbb{C}$-линейное пространство.

Если задана функция $\psi : \Omega \to X$, записываем $\psi_{\mathbb{C}}$, если X рассматривается как $X_{\mathbb{C}}$. Скажем, что $\psi_{\mathbb{C}}$ — комплексная версия ψ. Очевидно, что значения $\psi_{\mathbb{C}}$ и ψ одинаковы, однако они принадлежат линейным пространствам различной природы, т. е. ψ принадлежит множеству $\{\varphi : \Omega \longrightarrow X \mid \varphi \text{ является функцией}\}$, являющемуся вещественным линейным пространством, а $\psi_{\mathbb{C}}$ принадлежит $\{\varphi_{\mathbb{C}} : \Omega \longrightarrow X_{\mathbb{C}} \mid \varphi_{\mathbb{C}} \text{ является функцией}\}$, которое является комплексным линейным пространством.

Вспомним также следующее определение (см. [19]).

Определение 3.1. Функция $\psi : \Omega \to X$ называется *сильно измеримой*, если существует такая последовательность $\{\psi_n\}$ из $\mathcal{J}$, что

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_n(\omega) - \psi(\omega)\| = 0 \quad \mu\text{-п.в. в } \Omega.$$

Далее приведем аналогичное определение:

Определение 3.2. Функция $\psi_{\mathbb{C}} : \Omega \to X_{\mathbb{C}}$ называется *сильно измеримой*, если существует такая последовательность $\{\psi_{n\mathbb{C}}\}$ из $\mathcal{J}_{\mathbb{C}}$, что

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_{n\mathbb{C}}(\omega) - \psi_{\mathbb{C}}(\omega)\|_{\mathbb{C}} = 0 \quad \mu\text{-п.в. в } \Omega.$$

Обозначим через $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ множества всех функций $\psi : \Omega \longrightarrow X$ и $\psi_{\mathbb{C}} : \Omega \longrightarrow X_{\mathbb{C}}$, которые сильно измеримы.

Если заданы $\psi \in \mathcal{B}$ и $\psi_{\mathbb{C}} \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$, возьмем последовательности простых функций $\{\psi_n\}$ и $\{\psi_{n\mathbb{C}}\}$ такими, что

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_n(\omega) - \psi(\omega)\| = 0$$

почти всюду относительно μ (далее будем использовать обозначение «μ-п.в.») и

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_{n\mathbb{C}}(\omega) - \psi_{\mathbb{C}}(\omega)\|_{\mathbb{C}} = 0$$

μ-п.в. в Ω. Вспомним (см. [19]), что интегралы Бохнера от ψ и $\psi_{\mathbb{C}}$ определяются следующим образом:

$$(\mathcal{B})\int\limits_{\Omega}\psi := \lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega}\psi_n, \tag{3.4}$$

$$(\mathcal{B})\int\limits_{\Omega}\psi_{\mathbb{C}} := \lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega}\psi_{n\mathbb{C}}. \tag{3.5}$$

Как известно, интеграл Бохнера не зависит от выбора последовательности $\{\psi_n\}$ or $\{\psi_{n\mathbb{C}}\}$.

Из уравнения (3.2) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\|\psi_{n\mathbb{C}}(\omega)-\psi_{\mathbb{C}}(\omega)\|_{\mathbb{C}}=0 \ \text{ тогда и только тогда, когда } \ \lim_{n\to\infty}\|\psi_n(\omega)-\psi_(\omega)\|=0,$$

а учитывая замечание 3.1, получаем следующую теорему.

Теорема 3.1. *При вышеизложенных условиях ψ является сильно измеримой тогда и только тогда, когда сильно измерима $\psi_{\mathbb{C}}$; кроме того, если задано $A\in\mathcal{A}$, функция ψ интегрируема по Бохнеру на A тогда и только тогда, когда интегрируема по Бохнеру $\psi_{\mathbb{C}}$, и*

$$(\mathcal{B})\int\limits_{A}\psi\ d\mu = (\mathcal{B})\int\limits_{A}\psi_{\mathbb{C}}\ d\mu \quad \forall\ A\in\mathcal{A},$$

где

$$(\mathcal{B})\int\limits_{A}\psi\ d\mu$$

обозначает интеграл Бохнера от ψ на A.

Теперь вспомним понятие слабо измеримых функций. В первую очередь, как обычно, обозначим

$$X^* := \{\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ — вещественная линейная}\},$$

$$X^*_{\mathbb{C}} := \{\varphi : X_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \psi \text{ — комплексная линейная}\}.$$

Пусть даны $\psi\in X^*_{\mathbb{C}}$, $\psi=\psi_1+\mathbf{i}\psi_2$, где $\psi_1,\,\psi_2 : X\longrightarrow\mathbb{R}$. Так как ψ, в частности, $\mathbb{C}$-линейна, имеем:

$$\psi(\mathbf{i}x)=\mathbf{i}\psi(x)=\mathbf{i}(\psi_1(x)+\mathbf{i}\psi_2(x)),$$

или, что эквивалентно,

$$\psi_1(\mathbf{i}x)+\mathbf{i}\psi_2(\mathbf{i}x)=-\psi_2(x)+\mathbf{i}\psi_1(x),$$

откуда

$$\begin{cases}\psi_1(\mathbf{i}x) &=& -\psi_2(x),\\ \psi_1(x) &=& \psi_2(\mathbf{i}x),\end{cases}$$

что сводится к

$$\psi_2(x)=-\psi_1(\mathbf{i}x). \tag{3.6}$$

С учетом (3.6) и учитывая то, что автоморфизм u играет роль умножения на $\mathbf{i}$, имеем:

$$\psi(x)=\psi_1(x)-\mathbf{i}\psi_1(\mathbf{i}x)=\psi_1(x)-\mathbf{i}(\psi_1\circ u)(x). \tag{3.7}$$

Говоря иначе, существует взаимно-однозначное отношение между X^* и $X^*_{\mathbb{C}}$

$$X^*_{\mathbb{C}}\ni\psi\longleftrightarrow\psi_1\in X^*,$$

определяемое в (3.7).

Напомним еще немного определений.

Определение 3.3. Функция $f:\Omega\longrightarrow X$ является $\mathbb{R}$-*слабо измеримой*, если для любого $\varphi\in X^*$ вещественнозначная функция $\varphi\circ f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ измерима, а именно: существует $\{\varphi_n\}$, последовательность простых функций $\varphi:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ такая, что

$$\lim n\to\infty|\varphi_n(\omega)-(\varphi\circ f)(\omega)|=0$$

μ-п.в. на Ω.

Определение 3.4. Функция $g:\Omega\longrightarrow X_{\mathbb{C}}$ является $\mathbb{C}$-*слабо измеримой*, если для любого $\psi\in X^*_{\mathbb{C}}$ комплекснозначная функция $\psi\circ g:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ измерима.

Определение 3.5. Слабо измеримая функция $f : \Omega \longrightarrow X$ такая, что $x^* \circ f \in L_1$ для всех $x^* \in X^*$, называется *интегрируемой по Петтису*, если для всякого измеримого множества $A \in \mathcal{A}$ существует такой элемент $x_A \in X$, что

$$x^*(x_A) = \int\limits_A x^* \circ f \quad \forall x^* \in X^*.$$

В этом случае элемент x_A называется интегралом Петтиса от f и обозначается как

$$x_A = (\mathcal{P}) \int\limits_A f d\mu.$$

Здесь возникает вопрос: если $f : \Omega \longrightarrow X$ является $\mathbb{R}$-слабо измеримой, является ли функция $f_{\mathbb{C}} : \Omega \longrightarrow X_{\mathbb{C}}$ $\mathbb{C}$-слабо измеримой? Следующая теорема дает положительный ответ на этот вопрос и, помимо этого, устанавливает отношение между соответствующими интегралами Петтиса.

Теорема 3.2. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *определяется, как и ранее. Функция* $\psi : \Omega \longrightarrow X$ *является слабо измеримой тогда и только тогда, когда слабо измерима* $\psi_{\mathbb{C}} : \Omega \longrightarrow X_{\mathbb{C}}$. *Кроме того, на* $A \in \mathcal{A}$ *функции* ψ *и* $\psi_{\mathbb{C}}$ *интегрируются по Петтису одновременно, и*

$$(\mathcal{P}) \int\limits_A \psi_{\mathbb{C}}\ d\mu = (\mathcal{P}) \int\limits_A \psi\ d\mu. \tag{3.8}$$

Доказательство. Пусть дана слабо измеримая ψ, тогда $\varphi^* \circ \psi$ измерима для любых $\varphi^* \in X^*$. Возьмем $\phi^* \in X^*_{\mathbb{C}}$. Из (3.7) знаем их вид:

$$\phi^* = \phi_1^* - \mathbf{i}(\phi_1^* \circ u) \quad \text{при} \quad \phi_1^* \in X^*. \tag{3.9}$$

Очевидно, что $\phi_1^* \circ u \in X^*$, более того,

$$\phi^* \circ \psi_{\mathbb{C}} = (\phi_1^* - \mathbf{i}\phi_1^* \circ u) \circ \psi_{\mathbb{C}} = \phi_1^* \circ \psi - \mathbf{i}(\phi_1^* \circ u) \circ \psi.$$

Из этой зависимости можно заключить, что ψ слабо измерима тогда и только тогда, когда слабо измерима $\psi_{\mathbb{C}}$.

Предположим теперь, что $\psi_{\mathbb{C}}$ — слабо измеримая, а $\phi^* \circ \psi_{\mathbb{C}}$ интегрируема по Лебегу при любых $\phi^* \in X^*_{\mathbb{C}}$, тогда из (3.9) следует, что интегралы

$$\int\limits_A \phi^* \circ \psi_{\mathbb{C}}\ d\mu \quad \text{и} \quad \int\limits_A \phi_1^* \circ \psi\ d\mu, \int\limits_A (\phi_1^* \circ u) \circ \psi\ d\mu$$

существуют одновременно, т. е., $\phi^* \circ \psi_{\mathbb{C}}$ является интегрируемой по Лебегу тогда и только тогда, когда интегрируемы по Лебегу $\phi_1^* \circ \psi$ и $(\phi_1^* \circ u) \circ \psi$.

Предположим, что $\psi_{\mathbb{C}}$ интегрируема по Петтису. Возьмем $A \in \mathcal{A}$ и положим $x_A \in X_{\mathbb{C}}$ таким, что

$$\phi^*(x_A) = \int\limits_A \phi^* \circ \psi_{\mathbb{C}} \qquad \forall \phi^* \in X^*_{\mathbb{C}}.$$

Видим теперь, что x_A из X, и можем утверждать, что

$$\phi(x_A) = \int\limits_A \phi \circ \psi \qquad \forall \phi \in X^*.$$

Действительно, имея $\phi \in X^*$, возьмем

$$\phi^* := \phi - \mathbf{i}(\phi \circ u) \in X^*_{\mathbb{C}},$$

тогда

$$\phi^*(x_A) = \phi(x_A) - \mathbf{i}(\phi \circ u) = \int\limits_A (\phi - \mathbf{i}(\phi \circ u)) \circ \psi = \int\limits_A \phi \circ \psi - \mathbf{i} \int\limits_A (\phi \circ u) \circ \psi,$$

откуда следует

$$\int\limits_A \phi \circ \psi = \phi(x_A).$$

Так как $\phi \in X^*$ и $A \in \mathcal{A}$ были выбраны произвольными, можем заключить, что ψ также интегрируема по Петтису, и что для любого $A \in \mathcal{A}$

$$(\mathcal{P})\int_A \psi d\mu = (\mathcal{P})\int_A \psi_{\mathbb{C}} d\mu.$$

Аналогично доказывается и то, что, если ψ интегрируема по Петтису, то интегрируема по Петтису и $\psi_{\mathbb{C}}$, и что справедливо (3.8). □

3.2. Случай внешней комплексификации. Пусть, снова, X — это вещественное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Известно множество норм $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ в $\widehat{X}_{\mathbb{C}}$, которые продолжают исходную норму $\|\cdot\|$ на X, а именно, $\|x\|_{\mathbb{C}} = \|x\|$ для всех $x \in X$. Из того, что $\widehat{X}_{\mathbb{C}}$ допускает разложение $\widehat{X}_{\mathbb{C}} = X + \mathbf{i}X$, немедленно вытекают два следствия. Первое состоит в том, что X можно рассматривать как подмножество $\widehat{X}_{\mathbb{C}}$, а второе — что $\widehat{X}_{\mathbb{C}}$ обладает инволюцией:

$$Inv(x + \mathbf{i}y) := x - \mathbf{i}y \quad \forall x, y \in X.$$

Интересующие нас нормы должны сохраняться при инволюции:

$$\|x + \mathbf{i}y\|_{\mathbb{C}} = \|x - \mathbf{i}y\|_{\mathbb{C}} \qquad \forall x, y \in X. \tag{3.10}$$

В работе [12] было доказано, что норма, определяемая как

$$\|z\|_{\mathbb{C}} = \|x + \mathbf{i}y\|_{\mathbb{C}} := \sup\Big\{\big(\|x\cos\theta - y\sin\theta\|^2 + \|y\cos\theta - x\sin\theta\|^2\big)^{1/2} \mid \theta \in [0, 2\pi]\Big\}$$

для любых $z = x + \mathbf{i}y \in \widehat{X}_{\mathbb{C}}$, является нормой в $\mathbb{C}$-линейном пространстве $\widehat{X}_{\mathbb{C}}$ и обладает следующими свойствами:

1. она продолжает исходную норму $\|\cdot\|$ на X;
2. она сохраняет норму инволюции, т. е. удовлетворяет (3.10);
3. $\widehat{X}_{\mathbb{C}}$ с этой нормой является комплексным банаховым пространством.

Теперь рассмотрим топологию, порожденную $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$, и обозначим через $\mathcal{B}(\widehat{X}_{\mathbb{C}})$ борелевскую σ-алгебру на $\widehat{X}_{\mathbb{C}}$.

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ определяется, как и ранее. Вновь, в силу разложения $\widehat{X}_{\mathbb{C}}$ любая заданная функция $\psi : \Omega \longrightarrow \widehat{X}_{\mathbb{C}}$ принимает вид

$$\psi = \psi_1 + \mathbf{i}\psi_2,$$

где ψ_1, $\psi_2 : \Omega \longrightarrow X$. Тем самым вполне очевидно, что ψ является простой функцией тогда и только тогда, когда ψ_1 и ψ_2 также простые; следовательно, в данном случае ψ и ψ_1, ψ_2 интегрируемы одновременно, а в последнем случае

$$\int_A \psi \, d\mu = \int_A \psi_1 \, d\mu + \mathbf{i}\int_A \psi_2 \, d\mu \quad \forall\ A \in \mathcal{A}.$$

Следующая теорема описывает общую ситуацию.

Теорема 3.3. *При вышеизложенных условиях заданная функция $\psi : \Omega \to \widehat{X}_{\mathbb{C}}$ с разложением*

$$\psi = \psi_1 + \mathbf{i}\psi_2,$$

где $\psi_\ell : \Omega \to X$, $\ell \in \{1, 2\}$, является сильно измеримой тогда и только тогда, когда сильно измеримы ψ_1 и ψ_2. Кроме того, сильно измеримая функция ψ интегрируема по Бохнеру тогда и только тогда, когда интегрируемы по Бохнеру функции ψ_1 и ψ_2, и в этом случае

$$(\mathcal{B})\int_A \psi \, d\mu = (\mathcal{B})\int_A \psi_1 \, d\mu + \mathbf{i}(\mathcal{B})\int_A \psi_2 \, d\mu \quad \forall\ A \in \mathcal{A}.$$

Доказательство. Для сильно измеримой функции ψ существует последовательность функций $\{\psi_n\}$, сходящаяся к ψ μ-п.в. и разложимая в виде

$$\psi_n = \psi_{n1} + \mathbf{i}\psi_{n2}.$$

По определению нормы $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ имеем:

$$\begin{aligned}\|\psi_n(\omega)-\psi(\omega)\|_{\mathbb{C}} &= \|\,(\psi_{n1}(\omega)+\mathbf{i}\psi_{n2}(\omega))-(\psi_1(\omega)+\mathbf{i}\psi_2(\omega))\,\|_{\mathbb{C}} = \\ &= \|\,(\psi_{n1}(\omega)-\psi_1(\omega))+\mathbf{i}\,(\psi_{n2}(\omega)-\psi_2(\omega))\,\|_{\mathbb{C}} = \\ &= \sup\Big\{\big(\|\,(\psi_{n1}(\omega)-\psi_1(\omega))\cos\theta-(\psi_{n2}(\omega)-\psi_2(\omega))\sin\theta\|^2\ + \\ &\quad +\|\,(\psi_{n2}(\omega)-\psi_2(\omega))\cos\theta+(\psi_{n1}(\omega)-\psi_1(\omega))\sin\theta\|^2\big)^{1/2}\mid \theta\in[0,2\pi]\Big\}. \quad (3.11)\end{aligned}$$

Так как $\theta=0$ дает нам элемент из множества, по которому берется супремум, получим, что

$$\|\psi_{n1}(\omega)-\psi_1(\omega)\|^2+\|\psi_{n2}(\omega)-\psi_2(\omega)\|^2\leqslant\|\psi_n(\omega)-\psi(\omega)\|_{\mathbb{C}}, \quad (3.12)$$

что доказывает, что функции ψ_1 и ψ_2 являются сильно измеримыми. Аналогично в обратную сторону: если ψ_1 и ψ_2 — сильно измеримые функции, то существуют последовательности функций $\{\psi_{n1}\}$ и $\{\psi_{n2}\}$, которые сходятся к ψ_1 и ψ_2 μ-п.в., соответственно. Тогда, используя свойства нормы $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ и неравенство треугольника, можно непосредственно доказать сходимость последовательности $\{\psi_{n1}+\mathbf{i}\psi_{n2}\}$ к ψ μ-п.в.

Предполагая дополнительно, что ψ интегрируема по Бохнеру, получим:

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_A\|\psi_n-\psi\|_{\mathbb{C}}\,d\mu=0\quad\forall\,A\in\mathcal{A},$$

где ψ_n — простые функции. Из уравнений (3.11) и (3.12) можно сделать вывод, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_A\|\psi_n-\psi\|_{\mathbb{C}}\,d\mu=0\quad\Leftrightarrow\quad\lim_{n\to\infty}\int\limits_A\|\psi_{n\ell}-\psi_\ell\|\,d\mu=0,$$

для любых $A\in\mathcal{A}$ и $\ell\in\{1,2\}$. Таким образом, интегрируемость функции ψ эквивалентна интегрируемости функций ψ_1 и ψ_2. Отметим, что

$$\left\{\int\limits_A\psi_n\,d\mu\right\}\quad\text{и}\quad\left\{\int\limits_A\psi_{n\ell}\,d\mu\right\}$$

при $\ell=1,2$ являются последовательностями Коши в $\widehat{X}_{\mathbb{C}}$ и X, соответственно. Следовательно, для любого $A\in\mathcal{A}$ справедливо:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int\limits_A\psi_n\,d\mu &= \lim_{n\to\infty}\int\limits_A(\psi_{n1}+\mathbf{i}\psi_{n2})\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\left(\int\limits_A\psi_{n1}\,d\mu+\mathbf{i}\int\limits_A\psi_{n2}\,d\mu\right)= \\ &= \lim_{n\to\infty}\int\limits_A\psi_{n1}\,d\mu+\mathbf{i}\lim_{n\to\infty}\int\limits_A\psi_{n2}\,d\mu. \quad (3.13)\end{aligned}$$

Как следствие имеем:

$$(\mathcal{B})\int\limits_A\psi\,d\mu=(\mathcal{B})\int\limits_A\psi_1\,d\mu+\mathbf{i}(\mathcal{B})\int\limits_A\psi_2\,d\mu\quad\forall\,A\in\mathcal{A}.$$

□

Теперь мы хотим установить связь между функцией $\psi:\Omega\longrightarrow\widehat{X}_{\mathbb{C}}$ и ее компонентами ψ_1, $\psi_2:\Omega\longrightarrow X$, где $\psi=\psi_1+\mathbf{i}\psi_2$, в смысле слабой измеримости и интегрируемости по Петтису.

Теорема 3.4. *При вышеизложенных условиях заданная функция $\psi:\Omega\longrightarrow\widehat{X}_{\mathbb{C}}$ с разложением*

$$\psi=\psi_1+\mathbf{i}\psi_2,$$

где ψ_1, $\psi_2:\Omega\longrightarrow X$, является слабо измеримой тогда и только тогда, когда слабо измеримы ψ_1 and ψ_2. Кроме того, ψ интегрируема по Петтису тогда и только тогда, когда интегрируемы по Петтису ψ_1 и ψ_2, и

$$(\mathcal{P})\int\limits_A\psi\,d\mu=(\mathcal{P})\int\limits_A\psi_1\,d\mu+\mathbf{i}(\mathcal{P})\int\limits_A\psi_2\,d\mu\quad\forall\,A\in\mathcal{A}.$$

Доказательство. Возьмем $\psi : \Omega \to \widehat{X}_{\mathbb{C}}$. Для любой $\phi^* \in (\widehat{X}_{\mathbb{C}})^*$ при

$$\phi^* = \phi_1^* + i\phi_2^*,$$

где $\phi_\ell^* : \widehat{X}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$ — вещественные линейные функционалы при $\ell \in \{1, 2\}$, выполняется следующее:

$$\phi^* \circ \psi = \phi^* \circ (\psi_1 + \mathbf{i}\psi_2) = (\phi^* \circ \psi_1) + \mathbf{i}(\phi^* \circ \psi_2) = \\ = ((\phi_1^* + \mathbf{i}\phi_2^*) \circ \psi_1) + \mathbf{i}((\phi_1^* + \mathbf{i}\phi_2^*) \circ \psi_2) = (\phi_1^* \circ \psi_1 - \phi_2^* \circ \psi_2) + \mathbf{i}(\phi_1^* \circ \psi_2 + \phi_2^* \circ \psi_1). \quad (3.14)$$

Из уравнения (3.14) следует, что $\phi^* \circ \psi$ измерима по Лебегу тогда и только тогда, когда функции

$$\phi_1^* \circ \psi_1 - \phi_2^* \circ \psi_2 \quad \text{и} \quad \phi_1^* \circ \psi_2 + \phi_2^* \circ \psi_1 \quad (3.15)$$

измеримы по Лебегу. Таким образом, отсюда немедленно следует, что если ψ_1 и ψ_2 слабо измеримы, то слабо измерима и ψ. Аналогично в обратную сторону: если ψ слабо измерима, докажем, что слабо измеримы ψ_1 и ψ_2. Возьмем $\varphi^* \in X^*$ и определим $\widetilde{\varphi}^* : \widehat{X}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ как

$$\widetilde{\varphi}^*(x_1 + ix_2) := \varphi^*(x_1) + \mathbf{i}\varphi^*(x_2) \quad (3.16)$$

для любых $x_1 + \mathbf{i}x_2 \in \widehat{X}_{\mathbb{C}}$. Можно непосредственно показать, что $\widetilde{\varphi}^*$ является $\mathbb{C}$-линейным функционалом. Предположение о том, что $\phi^* \circ \psi$ интегрируема по Лебегу, вместе с (3.14) приводит к тому, что $\varphi^* \circ \psi_1 - \varphi^* \circ \psi_2$ и $\varphi^* \circ \psi_2 + \varphi^* \circ \psi_1$ измеримы по Лебегу; следовательно, их разность и сумма также измеримы, и, так как φ^* произвольна, это доказывает, что ψ_1 и ψ_2 слабо измеримы. Первая часть доказательства завершена.

Что касается интегрируемости по Лебегу, уравнение (3.14) означает, что интегралы

$$\int_A \phi^* \circ \psi \, d\mu$$

и

$$\int_A (\phi_1^* \circ \psi_1 - \phi_2^* \circ \psi_2) \, d\mu, \quad \int_A (\phi_1^* \circ \psi_2 + \phi_2^* \circ \psi_1) \, d\mu$$

имеют конечные значения одновременно. Этот факт, наравне со схожим рассуждением в предыдущем разделе, позволяет утверждать, что $\phi^* \circ \psi$ интегрируема по Лебегу для любой $\phi^* \in (\widehat{X}_{\mathbb{C}})^*$ тогда и только тогда, когда $\varphi^* \circ \psi_1$ и $\chi^* \circ \psi_2$ интегрируемы по Лебегу для любых φ^*, $\chi^* \in X^*$.

Предположим дополнительно, что ψ интегрируема по Петтису. Тогда для любого заданного $A \in \mathcal{A}$ существует единственный $x_A \in \widehat{X}_{\mathbb{C}}$ такой, что

$$\phi^*(x_A) = \int_A \phi^* \circ \psi \, d\mu \quad \forall\ \phi^* \in \left(\widehat{X}_{\mathbb{C}}\right)^*. \quad (3.17)$$

Из (3.14) имеем

$$\int_A \phi^* \circ \psi \, d\mu = \int_A [(\phi_1^* \circ \psi_1 - \phi_2^* \circ \psi_2) + \mathbf{i}((\phi_1^* \circ \psi_2 + \phi_2^* \circ \psi_1))] \, d\mu = \\ = \int_A (\phi_1^* \circ \psi_1 - \phi_2^* \circ \psi_2) \, d\mu + \mathbf{i} \int_A ((\phi_1^* \circ \psi_2 + \phi_2^* \circ \psi_1)) \, d\mu. \quad (3.18)$$

С другой стороны, поскольку $x_A = x_{1A} + \mathbf{i}x_{2A}$, выполняется:

$$\phi^*(x_A) = \phi^*(x_{1A} + \mathbf{i}x_{2A}) = \phi^*(x_{1A}) + \mathbf{i}\phi^*(x_{2A}) = \\ = (\phi_1^* + \mathbf{i}\phi_2^*)(x_{1A}) + \mathbf{i}(\phi_1^* + \mathbf{i}\phi_2^*)(x_{2A}) = (\phi_1^*(x_{1A}) - \phi_2^*(x_{2A})) + \mathbf{i}(\phi_1^*(x_{2A}) + \phi_2^*(x_{1A})). \quad (3.19)$$

Утверждаем, что

$$(\mathcal{P}) \int_A \psi_\ell \, d\mu = x_{\ell A}, \quad \ell \in \{1, 2\}.$$

Действительно, возьмем любую $\varphi^* \in X^*$ и рассмотрим, как в (3.16), $\mathbb{C}$-линейный функционал $\widetilde{\varphi}^* := \varphi^* + \mathbf{i}\varphi^*$. Таким образом, из (3.18) и (3.19) получим, что

$$\varphi^*(x_{1A}) - \varphi^*(x_{2A}) = \int\limits_A (\varphi^* \circ \psi_1 - \varphi^* \circ \psi_2)\, d\mu = \int\limits_A \varphi^* \circ \psi_1 d\mu - \int\limits_A \varphi^* \circ \psi_2 d\mu$$

и

$$\varphi^*(x_{2A}) + \varphi^*(x_{1A}) = \int\limits_A (\varphi^* \circ \psi_2 + \varphi^* \circ \psi_1)\, d\mu = \int\limits_A \varphi^* \circ \psi_2 d\mu + \int\limits_A \varphi^* \circ \psi_1 d\mu,$$

откуда следует, что

$$\varphi^*(x_{1A}) = \int\limits_A \varphi^* \circ \psi_1 d\mu \qquad \text{и} \quad \varphi^*(x_{2A}) = \int\limits_A \varphi^* \circ \psi_2 d\mu,$$

а поскольку φ^* была выбрана произвольно, то получаем доказательство утверждения.

Аналогично действуем и при доказательстве в обратную сторону. Предположим, что ψ_1 и ψ_2 интегрируемы по Петтису. Тогда для любого заданного $A \in \mathcal{A}$ существуют такие x_{1A} и x_{2A}, что для всех $\varphi \in X^*$ справедливо

$$(\mathcal{P})\int\limits_A \psi_1\, d\mu = x_{1A} \quad \text{и} \quad (\mathcal{P})\int\limits_A \psi_2\, d\mu = x_{2A}.$$

Покажем, что

$$(\mathcal{P})\int\limits_A \psi\, d\mu = x_{1A} + \mathbf{i}x_{2A}.$$

Действительно, как и ранее, возьмем $\phi^* \in (\widehat{X}_\mathbb{C})^*$, где $\phi^* = \phi_1^* + \mathbf{i}\phi_2^*$, $\phi_\ell^* : \widehat{X}_\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ при $\ell \in \{1, 2\}$. Из (3.18) и (3.19) имеем:

$$\int\limits_A \phi^* \circ \psi\ d\mu = \int\limits_A \phi_1^* \circ \psi_1 d\mu - \int\limits_A \phi_2^* \circ \psi_2 d\mu + \mathbf{i}\left(\int\limits_A \phi_1^* \circ \psi_2\, d\mu + \int\limits_A \phi_2^* \circ \psi_1\, d\mu\right) =$$
$$= (\phi_1^*(x_{1A}) - \phi_2^*(x_{2A})) + \mathbf{i}\ (\phi_1^*(x_{2A}) + \phi_2^*(x_{1A})) = \phi^*(x_{1A} + \mathbf{i}\, x_{2A}).$$

И вновь, поскольку $\phi^* \in (\widehat{X}_\mathbb{C})^*$ была выбрана произвольно, мы можем заключить, что утверждение верно. Таким образом, теорема доказана. □

4. Математические ожидания случайных величин, принимающих значения в вещественных и комплексных пространствах

Хотя данный раздел и является главным в нашей работе, введенные нами определения и доказанные теоремы позволяют описать и подать его содержание как немедленное следствие предыдущих разделов. Безусловно, все нижеизложенное по-прежнему сохраняет все мелкие детали и тонкости, представленные выше.

Начнем со случая банаховых пространств. В данном разделе $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ будет обозначать вероятностное пространство, т. е. теперь $\mu(\Omega) = 1$. Более того, будем использовать P вместо μ.

Выпишем для удобства некоторые определения, приведенные в [8, 17, 21, 22, 25].

Пусть Z — вещественное или комплексное банахово пространство.

1. Простая функция $\psi : \Omega \to Z$ называется *простой случайной величиной* (п.с.в. для краткости), если существуют $z_1, \ldots, z_n$ из Z и $A_1, \ldots, A_n$ из $\mathcal{A}$ такие, что

$$A_i \cap A_j = \varnothing \text{ при } i \neq j, \quad \Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad \psi = \sum_{i=1}^n z_i I_{A_i},$$

где I_{A_i} — характеристическая функция A_i.

2. Интеграл от простой случайной величины называется ее *математическим ожиданием* (или просто *ожиданием*) $E_S[\psi]$, т. е.
$$E_S[\psi] := \sum_{i=1}^{n} z_i P(A_i).$$
3. Отображение $\psi : \Omega \to Z$ называется *сильной случайной величиной* (с.с.в. для краткости), если ψ — сильно измеримая функция, а именно, существует последовательность п.с.в. $\{\psi_n\}$ такая, что
$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_n - \psi\| = 0 \quad P\text{-п.в.}$$
4. Если ψ — это с.с.в., и, кроме того,
$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} \|\psi_n - \psi\| \, dP = 0,$$
то ее математическое ожидание определяется через интеграл Бохнера:
$$E_{St}[\psi] := \lim_{n\to\infty} E_S[\psi_n].$$
5. Отображение $\psi : \Omega \to Z$ называется *слабой случайной величиной* (сл.с.в. для краткости), если ψ — слабо измеримая функция, т. е. для всякой $\phi^* \in Z^*$ композиция $\phi^* \circ \psi$ является измеримой функцией и в данном случае называется *случайной переменной* (с.п.).
6. Если ψ — это сл.с.в., и, кроме того, $E[\phi^* \circ \psi] < \infty$ для всех $\phi^* \in Z^*$ (другими словами, ψ — интегрируемая по Петтису функция), ее интеграл Петтиса называется *математическим ожиданием* ψ. Это означает, что существует единственный элемент $z_\psi \in Z$ такой, что
$$\phi^*(z_\psi) = E[\phi^* \circ \psi] \quad \forall\ \phi^* \in Z^*.$$
Такой элемент z_ψ обозначается через $E_W[\psi]$. Таким образом, выполняется следующее: для всякой $\phi^* \in Z^*$
$$\phi^*(E_W[\psi]) = E[\phi^* \circ \psi].$$

4.1. Случай внутренней комплексификации. Пусть теперь X — вещественное банахово пространство с комплексифицирующим автоморфизмом u; пусть $X_{\mathbb{C}}$ — его внутренняя алгебраическая комплексификация; напомним, что если u непрерывен, то $X_{\mathbb{C}}$ является комплексным банаховым пространством с нормой $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$, задаваемой уравнением (3.1), а $(X_{\mathbb{C}}, \mathcal{B}(X_{\mathbb{C}}))$ — измеримое пространство.

Из определений выше вытекают три теоремы, являющиеся прямыми следствиями ранее доказанных теорем.

Теорема 4.1. *Пусть ψ определяется, как и ранее, и пусть $\psi_{\mathbb{C}} : \Omega \to X_{\mathbb{C}}$. Тогда ψ является п.с.в тогда и только тогда, когда $\psi_{\mathbb{C}}$ тоже п.с.в., и в данном случае $E_S[\psi] = E_S[\psi_{\mathbb{C}}]$.*

Теорема 4.2. *При вышеизложенных условиях ψ является с.с.в. тогда и только тогда, когда $\psi_{\mathbb{C}}$ тоже с.с.в. Кроме того, ψ обладает математическим ожиданием тогда и только тогда, когда математическим ожиданием обладает и $\psi_{\mathbb{C}}$, и в данном случае $E_{St}[\psi] = E_{St}[\psi_{\mathbb{C}}]$.*

Теорема 4.3. *При вышеизложенных условиях ψ является сл.с.в. тогда и только тогда, когда $\psi_{\mathbb{C}}$ тоже сл.с.в. Кроме того, ψ и $\psi_{\mathbb{C}}$ обладают математическими ожиданиями одновременно, и в данном случае $E_W[\psi] = E_W[\psi_{\mathbb{C}}]$.*

4.2. Случай внешней комплексификации. Теперь перейдем к случайным величинам, принимающим значения из внешней комплексификации $\widehat{X}_{\mathbb{C}}$, которая является комплексным банаховым пространством с нормой $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$; кроме того, $(\widehat{X}_{\mathbb{C}}, \mathcal{B}(\widehat{X}_{\mathbb{C}}))$ является измеримым пространством.

Теорема 4.4. *Заданное отображение $\psi = \psi_1 + \mathbf{i}\psi_2 : \Omega \to \widehat{X}_{\mathbb{C}}$ является п.с.в. тогда и только тогда, когда ψ_1 и ψ_2 являются п.с.в., и для их математических ожиданий справедливо*:
$$E_S[\psi] = E_S[\psi_1] + \mathbf{i} E_S[\psi_2].$$

Теорема 4.5. *Заданное отображение $\psi = \psi_1 + \mathbf{i}\psi_2 : \Omega \to \widehat{X}_{\mathbb{C}}$ является с.с.в. тогда и только тогда, когда ψ_1 и ψ_2 являются с.с.в., и для их математических ожиданий справедливо*:

$$E_{St}[\psi] = E_{St}[\psi_1] + \mathbf{i}E_{St}[\psi_2].$$

Теорема 4.6. *Отображение $\psi = \psi_1 + \mathbf{i}\psi_2 : \Omega \to \widehat{X}_{\mathbb{C}}$ является сл.с.в. тогда и только тогда, когда ψ_1 и ψ_2 являются сл.с.в. Кроме того, математическое ожидание ψ существует тогда и только тогда, когда существуют математические ожидания ψ_1 и ψ_2, и выполняется*:

$$E_W[\psi] = E_W[\psi_1] + \mathbf{i}E_W[\psi_2].$$

4.3. Гильбертовы пространства и внутренняя комплексификация. Рассмотрим теперь случай, когда H — вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}}$, следовательно, H — это банахово пространство с нормой $\|h\| := \langle h, h\rangle_{\mathbb{R}}^{\frac{1}{2}}$. Будем считать u комплексифицирующим автоморфизмом в H. Таким образом, $H_{\mathbb{C}}$ теперь $\mathbb{C}$-линейное пространство.

Здесь возникает один нюанс. Скалярное произведение — это функция

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}} : H \times H \longrightarrow \mathbb{R};$$

если мы хотим, чтобы $H_{\mathbb{C}}$ также было комплексным гильбертовым пространством, нам необходимо комплексное скалярное произведение:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}} : H_{\mathbb{C}} \times H_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}$$

В работе [12] было доказано, что, если комплексифицирующий автоморфизм u удовлетворяет

$$\langle u(x_1), x_2\rangle_{\mathbb{R}} = -\langle x_1, u(x_2)\rangle_{\mathbb{R}} \quad \forall\, x_1,\, x_2 \in H, \tag{4.1}$$

то во внутренней алгебраической комплексификации $H_{\mathbb{C}}$ можно ввести следующее скалярное произведение:

$$\langle h_1, h_2\rangle_{\mathbb{C}} := \langle h_1, h_2\rangle_{\mathbb{R}} + \mathbf{i}\langle h_1, u(h_2)\rangle_{\mathbb{R}}. \tag{4.2}$$

Соответствующая норма $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ продолжает исходную, а именно, $\|h\|_{\mathbb{C}} = \|h\|$ для любого $h \in H_{\mathbb{C}}$; кроме того, $H_{\mathbb{C}}$ — комплексное гильбертово пространство. Так как, в частности, $H_{\mathbb{C}}$ — также и комплексное банахово пространство, то все полученные в разделе 3 результаты верны и в данном случае.

Теорема 4.7. *При вышеизложенных условиях справедливо*:

1. *Отображение $\psi : \Omega \to H$ является п.с.в., с.с.в. или сл.с.в. тогда и только тогда, когда $\psi_{\mathbb{C}}$ является п.с.в., с.с.в. или сл.с.в., соответственно. Кроме того, ψ и $\psi_{\mathbb{C}}$ обладают математическими ожиданиями $E_\bullet[\psi]$ одновременно, и*

$$E_\bullet[\psi_{\mathbb{C}}] = E_\bullet[\psi].$$

   Здесь мы используем символ $E_\bullet$ для обозначения E_S, E_{St} или E_W.
2. *Если ψ — это случайная величина (простая, сильная или слабая) с математическим ожиданием $E_\bullet[\psi]$, то для любых $h \in H_{\mathbb{C}}$ имеем*:

$$\langle E_\bullet[\psi_{\mathbb{C}}], h\rangle_{\mathbb{C}} := \langle E_\bullet[\psi], h\rangle + \mathbf{i}\langle E_\bullet[\psi], u(h)\rangle.$$

Доказательство. Доказательство пункта 1 немедленно вытекает из теорем 4.1, 4.2 и 4.3.

2. Пусть задан любой $h \in H_{\mathbb{C}}$, и пусть $\phi_h^* \in H_{\mathbb{C}}^*$ — соответствующий элемент такой, что

$$\phi_h^*(x) = \langle x, h\rangle_{\mathbb{C}}, \quad \forall x \in X_{\mathbb{C}}. \tag{4.3}$$

Если ψ — случайная величина (простая, сильная или слабая) с математическим ожиданием $E_\bullet[\psi]$, то по пункту 1 таковой является и $\psi_{\mathbb{C}}$, и

$$\phi_h^*(E_\bullet[\psi_{\mathbb{C}}]) = \int\limits_{\Omega} \phi_h^* \circ \psi \; dP = \langle E_\bullet[\psi_{\mathbb{C}}], h\rangle_{\mathbb{C}}. \tag{4.4}$$

Это уравнение совместно с (4.2) доказывает утверждение. □

4.4. Гильбертовы пространства и внешняя комплексификация. Перейдем ко внешней алгебраической комплексификации $\widehat{H}_{\mathbb{C}}$ пространства H. В работе [12] было доказано, что $\widehat{H}_{\mathbb{C}}$ допускает следующее скалярное произведение:

$$\langle v, h\rangle_{\mathbb{C}} = \langle v_1, h_1\rangle + \langle v_2, h_2\rangle + \mathbf{i}[\langle v_2, h_1\rangle - \langle v_1, h_2\rangle], \tag{4.5}$$

где $v = v_1 + \mathbf{i}v_2$ и $h = h_1 + \mathbf{i}h_2$ — это элементы из $H_{\mathbb{C}}$, что делает $H_{\mathbb{C}}$ гильбертовым пространством; следовательно, $\widehat{H}_{\mathbb{C}}$ является банаховым пространством с нормой $\|h\|_{\mathbb{C}} := \langle h, h\rangle_{\mathbb{C}}^{1/2}$, для которой выполнено

$$\|h\|_{\mathbb{C}}^2 = \|h_1\|^2 + \|h_2\|^2.$$

Как и ранее, $(\widehat{H}_{\mathbb{C}}, \mathcal{B}(\widehat{H}_{\mathbb{C}}))$ является измеримым пространством.

Теорема 4.8. *При вышеизложенных условиях справедливо*:

1. *Отображение* $\psi = \psi_1 + i\psi_2 : \Omega \to \widehat{H}_{\mathbb{C}}$ *является п.с.в., с.с.в. или сл.с.в. тогда и только тогда, когда таковыми являются и* ψ_1 *и* ψ_2; *кроме того,*
$$E_\bullet[\psi] = E_\bullet[\psi_1] + \mathbf{i}E_\bullet[\psi_2].$$
2. *Если* $\psi = \psi_1 + \mathbf{i}\psi_2 : \Omega \to \widehat{H}_{\mathbb{C}}$ — *случайная величина* (*простая, сильная или слабая*) *с математическим ожиданием* $E_\bullet[\psi]$, *то для любых* $h = h_1 + \mathbf{i}h_2 \in H_{\mathbb{C}}$ *имеем*:
$$\langle E_\bullet[\psi], h\rangle_{\mathbb{C}} := \langle E_\bullet[\psi_1], h_1\rangle + \langle E_\bullet[\psi_2], h_2\rangle + \mathbf{i}\left(\langle E_\bullet[\psi_2], h_1\rangle - \langle E_\bullet[\psi_1], h_2\rangle\right).$$

Доказательство. Пункт 1 вытекает непосредственно из теорем 4.4, 4.5 и 4.6. Пункт 2 доказывается аналогично пункту 2 из теоремы 4.7, теперь с использованием (4.5). □

5. Заключительное замечание

Следует отметить, что задачей данной работы является не определение математических объектов, рассматриваемых как комплекснозначные. Как отмечалось во введении, наша цель состоит в описании взаимосвязей между этими объектами при переходе от вещественно-линейных пространств к комплексно-линейным. Такая стратегия позволяет устанавливать некоторые свойства, которые иначе не обнаруживаются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вербицкий И. Э.* О некоторых соотношениях между нормами оператора и его комплексного расширения// Мат. иссл. — 1976. — *42*. — С. 3–12.
2. *Вербицкий И. Э., Середа П. П.* О норме комплексного расширения оператора// Мат. иссл. — 1995. — *37*. — С. 201–206.
3. *Abramovich Y. A., Aliprantis C. D., Sirotkin G., Troitsky G.* Some open problems and conjectures associated with the invariant subspace problem// Positivity. — 2005. — *9*, № 3. — С. 273–286.
4. *Alpay D., Luna-Elizarrarás M. E., Shapiro M.* Normes des extensions quaternionique d'operateurs réels// C.R. Math. Acad. Sci. Paris. — 2005. — *340*, № 9. — С. 639–643.
5. *Defant A.* Best constants for the norm of the complexification of operators between L_p-spaces// Lect. Notes Pure Appl. Math. — 1994. — *150*. — С. 173–180.
6. *Engelking R.* General topology. — Berlin: Heldermann Verlag, 1989.
7. *Figiel T., Iwaniec T., Pelczyński A.* Computing norms and critical exponents of some operators in L_p-spaces// Stud. Math. — 1984. — *79*, № 3. — С. 227–274.
8. *Fréchet M.* Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié// Ann. Inst. Henri Poincaré. — 1948. — *10*, № 4. — С. 215–310.
9. *Glazman I. M., Ljubič J. I.* Finite-dimensional linear analysis: a systematic presentation in problem form. — London: The MIT Press, 1974.
10. *Krivine J. I.* Sur la complexification des opérateurs de L_∞ dans L_1// C.R. Math. Acad. Sci. Paris. — 1977. — *284*. — С. 377–379.
11. *Krivine J. I.* Constantes de Grothendieck et fonctions de type positif sur les sphéres// Adv. Math. — 1979. — *31*. — С. 16–30.
12. *Luna-Elizarrarás M. E., Ramírez-Reyes F., Shapiro M.* Complexifications of real spaces: general aspects// Georgian Math. J. — 2012. — *19*. — С. 259–282.

13. *Luna-Elizarrarás M. E., Shapiro M.* On some properties of quaternionic inner product spaces// В сб.: «25th Int. Coll. Group theoretical methods in physics, Cocoyoc, México, 2–6 August 2004». — Bristol—Philadelphia: Inst. of Phys. Publ., 2005. — С. 371–376.
14. *Luna-Elizarrarás M. E., Shapiro M.* Preservation of the norms of linear operator acting on some quaternionic function spaces// Oper. Theory Adv. Appl. — 2005. — *157*. — С. 205–220.
15. *Luna-Elizarrarás M. E., Shapiro M.* On modules over bicomplex and hyperbolic numbers// В сб.: «Applied complex and quaternionic approximation». — Rome: Edizioni Nuova Cultura, 2009. — С. 76–92.
16. *Luna-Elizarrarás M. E., Shapiro M.* On some relations between real, complex and quaternionic linear spaces// В сб.: «More progresses in analysis». — Singapore: World Scientific, 2009. — С. 999–1008.
17. *Mourier E.* Éléments aléatoires dans un espace de Banach// Ann. Inst. Henri Poincaré. — 1953. — *13*, № 3. — С. 161–244.
18. *Riesz M.* Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionelles linéaires// Acta Math. — 1926. — *49*. — С. 465–497.
19. *Schwabik S., Gouju Y.* Topics in Banach space integration. — Hackensack: World Scientific, 2005.
20. *Soukhomlinoff G. A.* Über fortsetzung von linearen funktionalen in linearen komplexen räumen und linearen quaternionräumen// Mat. Sb. (N.S.). — 1938. — *3*. — С. 353–358.
21. *Taylor R. L.* Some weak laws for random elements in normed linear spaces// Ann. Math. Stat. — 1972. — *43*. — С. 1267–1274.
22. *Taylor R. L., Wei D.* Laws of large numbers for tight random elements in normed linear spaces// Ann. Probab. — 1979. — *7*, № 1. — С. 150–155.
23. *Thorin G. O.* Convexity theorems generalizing those of M. Riesz and Hadamard with some applications// Comm. Sem. Math. Univ. Lund Medd. Lunds Univ. Sem. — 1948. — *9*. — С. 1–58.
24. *Vakhania N. N.* Random vectors with values in quaternion Hilbert spaces// Theory Probab. Appl. — 1999. — *43*, № 1. — С. 99–115.
25. *Vakhania N. N., Chobanyan S. A., Tarieladze V. I.* Probability distributions on Banach spaces. — Dordrecht: D. Reidel Publ., 1987.
26. *Vakhania N. N., Kandelaki N. P.* Random vectors with values in complex Hilbert spaces// Theory Probab. Appl. — 1997. — *41*, № 1. — С. 116–131.
27. *Zygmund A.* Trigonometric series. Vol. I. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1968.

М. Е. Луна-Элизаррарас
Holon Institute of Technology, Holon, Israel
E-mail: `lunae@hit.ac.il`

Ф. Рамирез-Рейес
Departamento de Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional, Mexico City, Mexico
E-mail: `framirez@esfm.ipn.mx`

М. Шапиро
Holon Institute of Technology, Holon, Israel
E-mail: `shapiro1945@outlook.com`

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-4-706-722 UDC 517.982

On Complexification of Real Spaces and Its Manifestations in the Theory of Bochner and Pettis Integrals

© 2018 **M. E. Luna-Elizarrarás, F. Ramírez-Reyes, M. Shapiro**

Abstract. This work is a continuation of our work [12] where we considered linear spaces in the following two situations: a real space admits a multiplication by complex scalars without changing the set itself; a real space is embedded into a wider set with a multiplication by complex scalars. We studied there also how they manifest themselves when the initial space possesses additional structures: topology, norm, inner product, as well as what happens with linear operators acting between such spaces. Changing the linearities of the linear spaces unmasks some very subtle properties which are not so obvious when the set of scalars is not changed. In the present work, we follow the same idea considering now Bochner and Pettis integrals for functions ranged in real and complex Banach and Hilbert spaces. Finally, this leads to the study of strong and weak random elements with values in real and complex Banach and Hilbert spaces, in particular, some properties of their expectations.

REFERENCES

1. I. E. Verbitskiy, "O nekotorykh sootnosheniyakh mezhdu normami operatora i ego kompleksnogo rasshireniya" [Some relations between the norm of an operator and that of its complex extension], *Mat. issl.* [Math. Stud.], 1976, **42**, 3–12 (in Russian).
2. I. E. Verbitskiy and P. P. Sereda, "O norme kompleksnogo rasshireniya operatora" [About the norm of the complex extension of an operator], *Mat. issl.* [Math. Stud.], 1995, **37**, 201–206 (in Russian).
3. Y. A. Abramovich, C. D. Aliprantis, G. Sirotkin, and G. Troitsky, "Some open problems and conjectures associated with the invariant subspace problem," *Positivity*, 2005, **9**, No. 3, 273–286.
4. D. Alpay, M. E. Luna-Elizarrarás, and M. Shapiro, "Normes des extensions quaternionique d'operateurs réels," *Comtes Rendus de l'Acadèmie des Sciences Mathematique, Ser. I*, 2005, **340**, 639–643.
5. A. Defant, "Best constants for the norm of the complexification of operators between L_p-spaces," *Lect. Notes Pure Appl. Math.*, 1994, **150**, 173–180.
6. R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
7. T. Figiel, T. Iwaniec, and A. Pelczyński, "Computing norms and critical exponents of some operators in L_p-spaces," *Stud. Math.*, 1984, **79**, No. 3, 227–274.
8. M. Fréchet, "Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié," *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 1948, **10**, No. 4, 215–310.
9. I. M. Glazman and J. I. Ljubič, *Finite-Dimensional Linear Analysis: A Systematic Presentation in Problem Form*, The MIT Press, London, 1974.
10. J. I. Krivine, "Sur la complexification des opérateurs de L_∞ dans L_1," *C.R. Acad. Sci. Paris*, 1977, **284**, 377–379.
11. J. I. Krivine, "Constantes de Grothendieck et fonctions de type positif sur les sphéres," *Adv. Math.*, 1979, **31**, 16–30.
12. M. E. Luna-Elizarrarás, F. Ramírez-Reyes, and M. Shapiro, "Complexifications of real spaces: general aspects," *Georgian Math. J.*, 2012, **19**, 259–282.
13. M. E. Luna-Elizarrarás and M. Shapiro, "On some properties of quaternionic inner product spaces," In: *25th Int. Coll. Group Theoretical Methods in Physics, Cocoyoc, México, 2–6 August 2004*, Inst. of Phys. Publ., Bristol—Philadelphia, 2005, 371–376.
14. M. E. Luna-Elizarrarás and M. Shapiro, "Preservation of the norms of linear operator acting on some quaternionic function spaces," *Oper. Theory Adv. Appl.*, 2005, **157**, 205–220.
15. M. E. Luna-Elizarrarás and M. Shapiro, "On modules over bicomplex and hyperbolic numbers," In: *Applied Complex and Quaternionic Approximation*, Edizioni Nuova Cultura, Rome, 2009, 76–92.
16. M. E. Luna-Elizarrarás and M. Shapiro, "On some relations between real, complex and quaternionic linear spaces," In: *More Progresses in Analysis*, World Scientific, Singapore, 2009, 999–1008.

17. E. Mourier, "Éléments aléatoires dans un espace de Banach," *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 1953, **13**, No. 3, 161–244.
18. M. Riesz, "Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionelles linéaires," *Acta Math.*, 1926, **49**, 465–497.
19. S. Schwabik and Y. Gouju, *Topics in Banach Space Integration*, World Scientific, Hackensack, 2005.
20. G. A. Soukhomlinoff, "Über fortsetzung von linearen funktionalen in linearen komplexen räumen und linearen quaternionräumen," *Mat. Sb. (N.S.)*, 1938, **3**, 353–358.
21. R. L. Taylor, "Some weak laws for random elements in normed linear spaces," *The Annals Mathematical Statistics*, 1972, **43**, 1267–1274.
22. R. L. Taylor and D. Wei, "Laws of large numbers for tight random elements in normed linear spaces," *Ann. Probab.*, 1979, **7**, No. 1, 150–155.
23. G. O. Thorin, "Convexity theorems generalizing those of M. Riesz and Hadamard with some applications," *Comm. Sem. Math. Univ. Lund Medd. Lunds Univ. Sem.*, 1948, **9**, 1–58.
24. N. N. Vakhania, "Random vectors with values in quaternion Hilbert spaces," *Theory Probab. Appl.*, 1999, **43**, No. 1, 99–115.
25. N. N. Vakhania, S. A. Chobanyan, and V. I. Tarieladze, *Probability Distributions on Banach Spaces*, D. Reidel Publ., Dordrecht, 1987.
26. N. N. Vakhania and N. P. Kandelaki, "Random vectors with values in complex Hilbert spaces," *Theory Probab. Appl.*, 1997, **41**, No. 1, 116–131.
27. A. Zygmund, *Trigonometric Series. Vol. I*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1968.

M. E. Luna-Elizarrarás
Holon Institute of Technology, Holon, Israel
E-mail: lunae@hit.ac.il

F. Ramírez-Reyes
Departamento de Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional, Mexico City, Mexico
E-mail: framirez@esfm.ipn.mx

M. Shapiro
Holon Institute of Technology, Holon, Israel
E-mail: shapiro1945@outlook.com