Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 4 (2018). С. 650–681

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-4-650-681 УДК 517.982.42

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ МАКСИМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ, СВЯЗАННЫХ С ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯМИ

© 2018 г. **И. А. ИКРОМОВ, С. Э. УСМАНОВ**

Аннотация. В этой работе получены критерий ограниченности максимальных операторов, связанных с гладкими гиперповерхностями, а также точное значение показателя ограниченности этих операторов, связанных с произвольными выпуклыми аналитическими гиперповерхностями в случае, когда высота гиперповерхности в смысле А. Н. Варченко больше двух. Кроме того, получено точное значение показателя ограниченности для вырожденных гладких гиперповерхностей, т. е. для гиперповерхностей, удовлетворяющих условиям классической теоремы Хартмана—Ниренберга. Полученные результаты подтверждают справедливость гипотезы Стейна—Иосевича—Соера для произвольных выпуклых аналитических гиперповерхностей, а также для гладких вырожденных гиперповерхностей. В статье также обсуждаются некоторые смежные проблемы теории осцилляторных интегралов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В задачах, связанных с предельным переходом в интегралах и суммах, зависящих от параметров, в частности, с дифференцированием интеграла, часто применяются различного рода «максимальные операторы». Одним из таких операторов является классический максимальный оператор Харди—Литтлвуда, который появляется при решении различных задач гармонического анализа и математической физики. В современном гармоническом анализе встречаются максимальные операторы Шредингера, максимальные операторы, связанные с частичными суммами рядов Фурье, максимальные операторы, связанные с растяжениями гиперповерхностей и т. п.

В настоящей работе будем иметь дело с максимальными операторами, связанными (ассоциированными) с однородными растяжениями гиперповерхностей, называемыми максимальными операторами, связанными с гиперповерхностями. Впервые максимальный оператор, связанный с единичной сферой с центром в начале координат, исследовался в классической работе И. М. Стейна [40]. Он нашел точный показатель ограниченности (см. раздел 2 для определения показателя ограниченности) этого оператора в случае, когда размерность пространства не ниже трех. В более

Работа выполнена при поддержке Исполнительного Комитета по координации Науки и технологий при КМ Республики Узбекистан, грант ОТ-Ф-4-69.

поздней работе Дж. Бургена [20] получен точный показатель ограниченности соответствующего максимального оператора, связанного с окружностью.

Следует отметить, что свойства ограниченности максимальных операторов тесно связаны с геометрическими характеристиками соответствующей гиперповерхности. В работе Согги и Стейна [39] доказано, что если гауссова кривизна гиперповерхности не имеет нулей бесконечного порядка, то соответствующий максимальный оператор ограничен в L^p для некоторого конечного значения p. В этой работе одним из основных средств доказательства ограниченности максимальных операторов были так называемые осцилляторные интегралы с множителем гашения, в которых гауссова кривизна играет роль гасителя. В работе [9] введены множители гашения через главные кривизны гиперповерхности и получены условия ограниченности максимальных операторов, связанных с более общим классом гиперповерхностей.

Однако вопрос о необходимых и достаточных условиях L^p-ограниченности максимальных операторов при некотором конечном значении p оставался открытым. Более того, задача о минимальном значении p, для которого максимальные операторы ограничены в L^p, является одной из нерешенных проблем анализа.

В данной работе получен критерий ограниченности максимальных операторов, связанных с гладкими гиперповерхностями. Кроме того, явно указано множество всех тех значений p, для которых соответствующий максимальный оператор ограничен в L^p для широкого класса гиперповерхностей. Также получено подтверждение гипотезы Стейна—Иосевича—Соера для произвольных выпуклых аналитических гиперповерхностей и для сильно вырожденных гладких гиперповерхностей, доказано равенство трех совершенно по-разному определенных чисел, называемых показателем осцилляции, показателем ограниченности и контактным индексом таких гиперповерхностей.

Отметим, что для вырожденных гиперповерхностей (т. е. для гиперповерхностей, удовлетворяющих условию: ранг нормального отображения всюду не превосходит единицы) метод осцилляторных интегралов с множителем гашения непригоден, так как соответствующий осцилляторный интеграл с произвольным множителем гашения убывает медленнее, чем порядок $-\dfrac{1}{2}$. Поэтому теорема типа вложения Соболева, использованная в работе [39], а также более точная теорема, доказанная в работе [33], не позволяют получить свойства ограниченности соответствующего максимального оператора. Мы используем оценку максимальных операторов, связанных с гиперповерхностями с малой главной кривизной, доказанную в работе [27]. Эти результаты основываются на теореме К. Д. Согге [38], утверждающей ограниченность максимальных операторов, ассоциированных с гиперповерхностями с одной ненулевой главной кривизной. Аналогичные идеи использованы в работе [31].

2. Постановка задачи

Пусть $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — гладкая гиперповерхность, ψ — фиксированная неотрицательная бесконечно гладкая функция с компактным носителем, т. е. $0 \leqslant \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ и $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$.

Максимальным оператором, связанным (ассоциированным) с гиперповерхностью S, называется оператор, определяемый следующим соотношением:

$$\mathcal{M}f(y) := \sup_{t>0} |A_t f(y)|, \tag{2.1}$$

где

$$A_t f(y) := \int_S f(y - tx)\psi(x)dS(x) \tag{2.2}$$

— так называемый *оператор усреднения*.

В работе всюду предполагается выполнение следующего *условия трансверсальности*: для любой точки $x \in S$ аффинная касательная плоскость $x + T_x S$ к S в точке x не проходит через начало координат $\mathbb{R}^{n+1}$ (см. [27]). Следует отметить, что в случае, когда условие трансверсальности не выполняется, поведение максимальных операторов вида (2.1) отличается от нынешнего случая и может быть довольно экзотичным (см. [43]).

Через $L^p := L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ обозначается множество классов измеримых функций g, определенных в $\mathbb{R}^{n+1}$, для которых $|g(x)|^p$ интегрируема по $\mathbb{R}^{n+1}$.

Говорят, что максимальный оператор $\mathcal{M}$ *ограничен в* L^p (или L^p*-ограничен*), если существует положительное число C_p такое, что для любой функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, выполняется неравенство:

$$\|\mathcal{M}f\|_{L^p} \leqslant C_p\|f\|_{L^p},$$

где $\|\cdot\|_{L^p}$ — естественная норма пространства L^p. А также для данной гиперповерхности S и фиксированной плотности $0 \leqslant \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ естественно вводится *показатель ограниченности* соответствующего максимального оператора следующим соотношением:

$$p(S) := p_\psi(S) := \inf\{p : \text{оператор } (2.1) \text{ ограничен в } L^p\}.$$

Пусть $\mathbb{P}_{x^0}(S)$ (где $x^0 \in S$) — множество всех тех значений p, для которых существует окрестность $U_p(x^0)$ точки x^0 такая, что при любой фиксированной плотности $0 \leqslant \psi \in C_0^\infty(U_p(x^0))$ соответствующий максимальный оператор (2.1) ограничен в L^p. Затем, индивидуальный показатель ограниченности максимального оператора в точке x^0 определяется по соотношению

$$p_{x^0}(S) := \inf \mathbb{P}_{x^0}(S).$$

Разумеется, возможен случай $p(S) = \infty$, а также $p_{x^0}(S) = \infty$. Например, если S — гиперплоскость, не содержащая начало координат, то имеем $p(S) = \infty$ для любой ненулевой плотности ψ.

В настоящей работе рассматриваются следующие основные задачи: *для каких гиперповерхностей значение показателя ограниченности соответствующего максимального оператора является конечным числом? Если это число, т. е.* $p(S)$, *конечно, то как оно определяется для данной гиперповерхности?*

Отметим, что эти вопросы тесно связаны с геометрическими свойствами гиперповерхности S. В работах [20, 25, 27, 33, 34, 40] для некоторых классов гиперповерхностей получено точное значение показателя ограниченности соответствующего максимального оператора.

Оказывается, вопрос о точном значении $p(S)$ также связан с задачей о показателе осцилляции осцилляторного интеграла, определенного преобразованием Фурье поверхностной меры ψdS в случае, когда $p(S) \geqslant 2$. А также это число связано со значением так называемого контактного индекса гиперповерхности (см. [27, 33], а также см. раздел 8 настоящей работы). Имеется гипотеза Стейна—Иосевича—Соера [33], о том, что все эти числа — т. е. показатель ограниченности максимального оператора, показатель осцилляции преобразования Фурье поверхностной меры и контактный индекс гиперповерхности — совпадают.

Однако в случае, когда $p(S) < 2$, задача об определении показателя ограниченности максимального оператора является еще более тонкой проблемой и до сих остается открытой. Хотя имеются точные результаты для некоторых классов гиперповерхностей (см. [34, 35], а также см. [21]).

В настоящей работе получен критерий ограниченности максимальных операторов, а также, обобщая результаты Иосевича—Соера [33], получено точное значение $p(S)$ для произвольных выпуклых аналитических гиперповерхностей в случае, когда показатель осцилляции больше двух. Более того, получено точное значение показателя ограниченности для вырожденных гладких гиперповерхностей, т. е. для гиперповерхностей, удовлетворяющих условиям теоремы Хартмана—Ниренберга [26].

3. Краткая история и мотивы проблемы

Классические результаты о сферических средних в $\mathbb{R}^{n+1}$, доказанные в работе [40] И. М. Стейна и в статье [20] Дж. Бургена, стали отправной точкой для изучения различных классов максимальных операторов, связанных с подмногообразиями евклидова пространства.

А. Гринлиф (см. [25]) доказал, что если S — строго выпуклая и звездная относительно начала координат гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$ при $n \geqslant 2$ (это означает, что любой луч, исходящий из начала координат, пересекается с гиперповерхностью в единственной точке) и $K(x) > 0$ (где $K(x)$ — гауссова кривизна гиперповерхности), то справедливы утверждения теоремы И. М. Стейна. Более того, как он показал, если в каждой точке гиперповерхности S имеются хотя бы $k\,(k \geqslant 2)$ ненулевых главных кривизн, то при $p > (k+1)/k$ максимальный оператор ограничен в L^p. В более сложном случае при $k = 1$ аналогичный результат получен К. Д. Согги [38].

В работе [33] А. Иосевича и Э. Соера получены окончательные результаты относительно L^p-ограниченности $(p > 2)$ максимальных операторов в случае выпуклых гиперповерхностей, имеющих конечный линейный тип, т. е. получено точное значение $p(S)$ в зависимости от высоты

А. Н. Варченко $h(S)$ гиперповерхности (см. [6], а также [27]). Точнее, доказано, что при любом $p > \max\{h(S), 2\}$ максимальный оператор ограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$, причем, если $h(S) \geqslant 2$, то для $p \leqslant h(S)$ максимальный оператор неограничен. Аналогичные результаты для произвольных гладких гиперповерхностей в $\mathbb{R}^3$ получены в работе [27]. Однако, для произвольных гиперповерхностей, в частности, для выпуклых гиперповерхностей с высотой $h(S) < 2$, задача о точном значении $p(S)$ до сих пор остается открытой.

Как отметили выше, L^p-оценки максимальных операторов, ассоциированных с гиперповерхностями $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ связаны с поведением преобразования Фурье соответствующих мер [14]:

$$\widehat{\mu}(\xi) := \int\limits_S e^{i(\xi,x)}\psi(x)dS(x). \tag{3.1}$$

В работе [25] А. Гринлифа доказано, что, если $\widehat{\mu}(\xi) = O(|\xi|^{-\gamma})$ (при $|\xi| \longrightarrow +\infty$) и $\gamma > \frac{1}{2}$, то максимальный оператор (2.1) ограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ при $p > 1 + \frac{1}{2\gamma}$. Однако в случае, когда порядок убывания $\widehat{\mu}(\xi)$ на бесконечности $\gamma \leqslant \frac{1}{2}$, задача об L^p-ограниченности соответствующего максимального оператора до сих пор остается открытой. Имеется гипотеза И. М. Стейна о том, что соответствующий максимальный оператор ограничен в L^p при $p > \frac{1}{\gamma} \geqslant 2$. Частичное подтверждение этой гипотезы доказано в работах [27, 33, 38]. Необходимость условия $\gamma > \frac{1}{2}$ связана с применением метода, основанного на теореме вложения Соболева [25]. Фактически, в связи с этим в работе [39] Согги и Стейна введены следующие осцилляторные интегралы с множителем гашения:

$$\widehat{\mu_q}(\xi) := \int\limits_S e^{i(\xi,x)}|K(x)|^q\psi(x)dS(x), \tag{3.2}$$

где $K(x)$ — гауссова кривизна гиперповерхности в точке $x \in S$. Здесь $|K(x)|^q$ играет роль множителя гашения, который обеспечивает необходимое убывание преобразования Фурье меры μ_q. Они доказали, что если $q \geqslant 2n$, то интеграл (3.2) убывает в порядке $O(|\xi|^{-\frac{n}{2}})$ (при $|\xi| \to +\infty$). Отсюда при выполнении условия $|K(x)|^{-\varepsilon} \in L^1(S)$ (для некоторого $\varepsilon > 0$) доказана ограниченность максимального оператора в L^p при $p > p(q, \varepsilon)$. Более того, было установлено что чем меньше q и чем больше ε, тем меньше $p(q, \varepsilon)$. Таким образом, чтобы получить лучшую оценку сверху для показателя ограниченности $p(S)$, необходимо найти минимальное значение q, для которого $\widehat{\mu_q}(\xi)$ оптимально убывает, а также максимальное значение $\varepsilon > 0$ такое, что $|K(x)|^{-\varepsilon} \in L^1(S)$.

Однако, как показывают примеры, минимальное значение q и максимальное значение ε дают лишь оценку $p(q, \varepsilon)$ сверху для показателя ограниченности $p(S)$, но не совпадает с этим числом (см. [11]).

В работе [9] первого автора введены множители гашения Λ_1, Λ_2 следующим образом. Пусть $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — произвольная гладкая гиперповерхность. Для точки $x \in S$ через

$$G(x) = \{g_{ij}(x)\}, \quad B(x) = \{b_{ij}(x)\}$$

обозначаются матрицы первой и второй фундаментальной формы гиперповерхности S, соответственно. Естественно определяется тензор $\{g^{ij}(x)\}$ (см. [8]).

Пусть D — тензор, получаемый внешним умножением $B(x)$ на само себя: $B(x) \wedge B(x)$. Тензор $D = \{d_{i_1i_2i_3i_4}\}$ является тензором ранга $(0, 4)$. Введем функции, определенные следующими равенствами:

$$\Lambda_1(x) := \sum g^{i_1j_1}(x)g^{i_2j_2}(x)b_{i_1i_2}(x)b_{j_1j_2}(x),$$

$$\Lambda_2(x) := \sum g^{i_1j_1}(x)g^{i_2j_2}(x)g^{i_3j_3}(x)g^{i_4j_4}(x)d_{i_1i_2i_3i_4}(x)d_{j_1j_2j_3j_4}(x).$$

В этих формулах производится суммирование по всем индексам. В работе [9] получено, что если S — аналитическая гиперповерхность и $\Lambda_2 \not\equiv 0$, то существует некоторое число $p(S)$ такое, что при всех $p > p(S)$ максимальный оператор ограничен в L^p. Кроме того, если гауссова кривизна гиперповерхности не имеет нулей бесконечного порядка, то получена более точная оценка для $p(S)$.

Однако вопрос об ограниченности максимальных операторов в случае $\Lambda_2 \equiv 0$ оставался открытым. Следует отметить, что в этом случае методы осцилляторных интегралов неприменимы, так как соответствующий осцилляторный интеграл с любым множителем не может убывать быстрее порядка $O(|\xi|^{-\frac{1}{2}})$, поэтому теорема вложения Соболева [39] (а также см. [15]), более того, точный результат типа теоремы вложения, доказанный в работе [33], также неприменимы.

Поэтому, развивая методы работы [27] на максимальные операторы, связанные с гиперповерхностями в $\mathbb{R}^{n+1}$, получим ограниченность максимальных операторов, связанных с произвольными гиперповерхностями, имеющими конечный тип. Более того, найдем значение $p(S)$ для произвольных выпуклых аналитических гиперповерхностей, когда высота в смысле А. Н. Варченко больше двух. Эти результаты основываются на разложении Щульца, показывающего существование приспособленных систем координат для произвольных гладких выпуклых функций. Как показал А. Н. Варченко, для произвольных аналитических функций, зависящих от трех переменных, вообще говоря, аналогов приспособленных систем координат не существует. Далее, мы получим значение $p(S)$ для вырожденных гиперповерхностей. Оказывается, для таких гиперповерхностей также существуют аналоги приспособленных систем координат.

4. Многогранники Ньютона и приспособленные системы координат

В этом параграфе приведем соответствующие необходимые определения и обозначения.

Осцилляторным интегралом с гладкой, вещественнозначной фазой ϕ и амплитудой a называется интеграл вида

$$J(\lambda,\phi,a)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} a(x)e^{i\lambda\phi(x)}dx,$$

где $a\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\lambda\in\mathbb{R}$.

В частности, преобразование Фурье меры, т. е. интеграл (3.1), записывается в виде осцилляторного интеграла с фазой, зависящей от дополнительных параметров.

Если ϕ — аналитическая функция в начале координат и нуль является критической точкой этой функции, при этом носитель амплитуды a сосредоточен в достаточно малой окрестности начала координат, то справедливо следующее асимптотическое разложение осцилляторного интеграла $J(\lambda,\phi,a)$ (см. [5, 19] а также [6]):

$$J(\lambda,\phi,a)\approx e^{i\lambda\phi(0)}\sum_r\sum_{k=0}^{n-1}C_{r,k}(a)\lambda^r\ln^k\lambda \quad \text{при} \quad \lambda\to+\infty, \tag{4.1}$$

причем r принадлежит конечному числу арифметических прогрессий, состоящих из отрицательных рациональных чисел, и для каждой пары (r,k) коэффициент $C_{r,k}$ является распределением с носителем, принадлежащим критическому множеству фазы, т. е. множеству

$$\{x\in\mathbb{R}^n:\nabla\phi(x)=0\}.$$

Отметим, что задача об определении арифметических прогрессий, к которым принадлежат показатели r по данной фазе ϕ, является нетривиальной задачей. Классическая лемма Ван дер Корпута (см. [4]) показывает, что порядок убывания одномерного осцилляторного интеграла определяется кратностью критических точек фазовой функции. Более того, согласно классической лемме Эрдейи асимптотический ряд одномерного осцилляторного интеграла явно определяется фазой и амплитудой [17]. Исходя из этих соображений В. И. Арнольд [1] выдвинул гипотезу о том, что поведение кратных осцилляторных интегралов определяется многогранником Ньютона фазовой функции, построенным в подходящей системе координат.

Далее, в работе [6] исследована связь между многогранником Ньютона фазовой функции, построенным в подходящей системе координат, и главным членом асимптотического разложения осцилляторного интеграла. Также об оценках преобразования Фурье мер имеются многочисленные работы. О современном состоянии известных результатов см. [32].

Следуя [3, 6] (также см. [30]), введем некоторые обозначения. Пусть $\mathbb{N}_0\subset\mathbb{R}_+\subset\mathbb{R}$, соответственно множество всех неотрицательных целых, всех неотрицательных вещественных, и всех вещественных чисел. Допустим, что $K \subset \mathbb{N}_0^n$ — некоторое множество. *Многогранник Ньютона* множества K определяется как выпуклая оболочка в $\mathbb{R}_+^n$ совокупностей $\bigcup\limits_{k\in K}(k+\mathbb{R}_+^n)$.

Пусть ϕ — гладкая функция, определенная в начале координат. Рассмотрим ряд Маклорена этой функции:

$$\phi_x \approx \sum_{k\in\mathbb{N}_0^n} c_k x^k, \quad c_n \in \mathbb{R}.$$

Носитель этого ряда определяется как $\operatorname{supp}(\phi_x) = \{k \in \mathbb{N}_0^n \setminus \{0\} : c_k \neq 0\}$.

Многогранник Ньютона ряда Маклорена ϕ определен как многогранник Ньютона множества $\operatorname{supp}(\phi_x)$. Совершенно аналогично определяется многогранник Ньютона функции в любой критической точке фазы.

Фиксируем систему координат в $\mathbb{R}^n$ и обозначим через ϕ_x ряд Маклорена функции ϕ в этой системе координат. Пусть d — координата пересечения прямой $x_1 = \ldots = x_n = d$, $d \in \mathbb{R}$, с границей многогранника Ньютона. Это число будет называться *расстоянием* между многогранником Ньютона и началом координат. Расстояние обозначается через $d(x)$.

Главной гранью многогранника Ньютона называется грань минимальной размерности, содержащая точку $(d(x),\ldots,d(x))$. Следует отметить, что многогранник Ньютона функции и расстояние от начала координат до многогранника Ньютона зависят от выбора локальной системы координат. Под *локальной системой координат* мы подразумеваем бесконечно гладкое диффеоморфное отображение окрестности начала координат в себя, при этом начало координат является неподвижной точкой этого отображения.

Пусть ϕ — как выше, и пусть $x = (x_1,\ldots,x_n)$ — фиксированная система координат в нуле в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через ϕ_x ряд Маклорена ϕ, и через $d(x)$ расстояние между началом координат и многогранником Ньютона $N(\phi_x)$. Рассмотрим величину

$$h(\phi) = \sup\{d(x)\},$$

где супремум берется относительно набора всех локальных гладких систем координат x в начале координат. Число $h(\phi)$ называется *высотой* функции ϕ (см. [6]).

Локальная гладкая система координат называется *приспособленной* к функции ϕ, если выполняется равенство $h(\phi) = d(x)$. Из результатов А. Н. Варченко [6] следует, что в случае $n = 2$ существуют приспособленные системы координат для аналитической функции, не имеющей кратных компонент. Более того, главный член асимптотического разложения осцилляторного интеграла имеет вид

$$c|\lambda|^{-1/h(\phi)}\ln(1+|\lambda|)^m,$$

где $m = 1$ или $m = 0$ в зависимости от главной грани многогранника Ньютона в приспособленной системе координат. Иными словами, в двумерном случае главный член асимптотического разложения осцилляторного интеграла определяется через дискретные характеристики многогранника Ньютона в приспособленной системе координат. В работе [28] доказаны аналогичные утверждения для произвольных гладких фазовых функций, зависящих от двух переменных. Однако, как показывает пример А. Н. Варченко, если $n \geqslant 3$, то вообще говоря, аналога таких систем координат не существует.

Следует отметить, что если отказаться от гладкости замены переменных, то можно построить аналог приспособленных систем координат для произвольных аналитических функций (см. [42]).

Если в определении высоты функции ограничиться лишь линейными преобразованиями, то мы приходим к линейной высоте функции $h_{lin}(\phi)$ и линейно-приспособленным системам координат, соответственно. По определению мы имеем $h_{lin}(\phi) \leqslant h(\phi)$ (см. [30]).

С другой стороны, как показал Г. Щульц [37], приспособленные системы координат существуют в случае, когда ϕ — гладкая выпуклая функция конечного линейного типа. Более того, такие системы координат получаются из исходной ортогональной с помощью замены координат. В частности, для выпуклых функций конечного линейного типа имеет место равенство: $h_{lin}(\phi) = h(\phi)$.

Для формулировки результатов Г. Щульца приведем необходимые определения.

Пусть ϕ — гладкая функция в некоторой окрестности начала координат, и она удовлетворяет условиям: $\phi(0) = 0$, $\nabla\phi(0) = 0$. Функция ϕ называется *выпуклой*, если для любых векторов

$x, y \in U \subset \mathbb{R}^n$ (где U — некоторая выпуклая окрестность начала координат) и для любых неотрицательных чисел α, β, удовлетворяющих условию $\alpha + \beta = 1$, имеет место неравенство:

$$\phi(\alpha x + \beta y) \leqslant \alpha\phi(x) + \beta\phi(y).$$

Функция ϕ называется функцией *конечного линейного типа* в начале координат, если для любого единичного вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ существует $N \geqslant 2$ такое, что

$$D_\xi^N \phi(0) \neq 0,$$

где $D_\xi\phi(0)$ — производная функции ϕ по направлению вектора ξ в начале координат. Геометрически это условие означает, что любая касательная прямая, лежащая на гиперплоскости $x_{n+1} = 0$ (т. е. на касательной гиперплоскости), имеет конечный порядок касания с гиперповерхностью $x_{n+1} = \phi(x)$ в начале координат.

Пусть $\kappa := (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n) \in \mathbb{R}^n$ — упорядоченный набор n-положительных вещественных чисел. Обозначим через $\delta_\tau^\kappa(x)$ отображение $\delta_\tau^\kappa : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, определенное формулой

$$\delta_\tau^\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\tau^{\kappa_1}x_1, \tau^{\kappa_2}x_2, \ldots, \tau^{\kappa_n}x_n).$$

Функция $\phi(x)$ называется *квазиоднородной* степени m с весом κ, если для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ и для любого положительного числа τ выполняется равенство

$$\phi(\delta_\tau^\kappa(x)) = \tau^m\phi(x).$$

Произвольный моном x^α является квазиоднородной функцией со степенью (α, κ). В случае $\kappa_1 = \ldots = \kappa_n$ она называется *однородной*.

Пусть $\kappa \in \mathbb{R}_+^n$ — фиксированный вектор. Введем обозначение $\rho(\alpha) := (\alpha, \kappa)$, где $\alpha \in \mathbb{R}_+^n$ — мультииндекс и (α, κ) — скалярное произведение векторов α и κ.

Приведем определение порядка гладкой функции (см. [2]).

Определение 4.1. Многочлен от переменных $x_1, \ldots, x_n$ имеет *порядок* d с весом κ (при данном κ), если все его мономы имеют степень d и выше относительно данного веса κ. Говорят, что бесконечно гладкая функция имеет *порядок* d, если ее любой нетривиальный отрезок ряда Тейлора имеет порядок d при условии, что существует такой нетривиальный отрезок. В противном случае, то есть если гладкая функция плоская, то считается, что ее порядок равняется $+\infty$.

Пусть $\mathbf{A}$ алгебра ростков гладких функций в начале координат $\mathbb{R}^n$. Обозначим через I_κ идеал, порожденный мономами $\{x^\alpha\}_{\rho(\alpha)=1}$. А также $\mathfrak{m}$ означает идеал алгебры $\mathbf{A}$, порожденный функциями $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Многочлены (гладкие функции) порядка d образуют линейное пространство $\mathbf{A}_d$. А также имеет место включение $\mathbf{A}_{d'} \subset \mathbf{A}_d$ при $d < d'$. Так как порядок произведения равен сумме порядков сомножителей, то $\mathbf{A}_d$ является идеалом в алгебре ростков гладких функций (см. [1]).

Обозначим через $\mathbf{A}_{>d}$ пространство гладких функций порядка строго больше чем d. Иными словами, справедливо следующее соотношение:

$$\mathbf{A}_{>d} = \{\phi \in \mathbf{A} : N(\phi) \subset \{t \in \mathbb{R}_+^n : \rho(t) > d\}\}.$$

Лемма 4.1. *Пусть $\kappa := (\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$ — множество весов таких, что $\left\{\dfrac{1}{\kappa_j}\right\}_{j=1}^n$ — натуральные числа. Тогда имеет место включение*

$$\mathfrak{m}^{\frac{n}{\min\{\kappa_j\}}} \subset I_\kappa.$$

В частности, фактор-алгебра $\mathbf{A}/I_\kappa$ обладает структурой, конечной $\mathbb{R}$-модулю с образующими мономами x^α ($(\alpha, \kappa) < 1$), а также мономами $b_1, \ldots, b_s$, причем $\deg_\kappa(b_\nu) > 1$, где $\nu = 1, \ldots, s$.

Доказательство. Лемма 4.1 доказывается стандартными методами. □

Предложение 4.1. *Пусть вес $\kappa \in \mathbb{R}_+^n$ удовлетворяет условиям леммы* 4.1. *Тогда имеет место следующее равенство*:

$$\mathbf{A}_{>1} = I_\kappa\mathfrak{m} + < b_1, \ldots, b_s >,$$

где $< b_1, \ldots, b_s >$ линейная оболочка базисных мономов $b_1, \ldots, b_s$ фактор-алгебры $\mathbf{A}_{>1}/I_\kappa\mathfrak{m} = \mathbf{A}_{>1}/I_\kappa$.

Доказательство. Предложение 4.1 вытекает из леммы 4.1. □

Предложение 4.2. *Пусть F — семейство ростков гладких функций, зависящих от $(x,\sigma) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$. Тогда справедливо следующее соотношение*:

$$F(x,\sigma) = \sum_{\rho(\alpha)=1} x^\alpha R_\alpha(x,\sigma) + \sum_{\rho(\alpha)<1} c_\alpha(\sigma) x^\alpha + \sum_{\nu=1}^{s} C_\nu(\sigma) b_\nu(x).$$

В частности, если для любого достаточно малого $|\sigma|$ имеет место включение $F(\cdot,\sigma) \in \mathbf{A}_1$, то выполняется равенство

$$F(x,\sigma) = \sum_{\rho(\alpha)=1} x^\alpha R_\alpha(x,\sigma) + \sum_{\nu=1}^{s} C_\nu(\sigma) b_\nu(x),$$

с гладкими функциями R_α, c_α, C_ν. Здесь $\{b_\nu\}_{\nu=1}^s$ — образующие мономы фактор-алгебры $\mathbf{A}_{>1}/I_\kappa\mathfrak{m}$.

Доказательство. Предложение 4.2 вытекает из леммы 4.1. □

С учетом этих наблюдений результаты Г. Щульца [37] могут быть сформулированы в виде следующей теоремы.

Теорема 4.1. *Пусть ϕ — гладкая выпуклая функция конечного линейного типа в начале координат, и она удовлетворяет условиям $\phi(0) = 0$ и $\nabla\phi(0) = 0$. Тогда после возможных вращений системы координат имеют место следующие утверждения.*

(a) *Существуют четные натуральные числа $(k_1,\dots,k_n)$ и $\kappa := (\frac{1}{k_1},\dots,\frac{1}{k_n})$ такие, что функция ϕ имеет вид*:

$$\phi(x) = \sum_{\rho(\alpha)=1} c_\alpha x^\alpha + R(x),$$

где $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ — мультииндекс и $\rho(\alpha) = (\alpha,\kappa)$. Более того, остаточный член $R(x)$ может быть записан в виде

$$R(x) = \sum_{\rho(\alpha)=1} x^\alpha R_\alpha(x) + \sum_{j=1}^{s} C_j b_j(x),$$

где R_α — гладкая функция, удовлетворяющая условию $R_\alpha(0) = 0$ для любого мультииндекса α. Иными словами, для остаточного члена справедливо включение

$$R \in I_\kappa\mathfrak{m} + < b_1,\dots,b_s >,$$

где $\{b_1,\dots,b_s\}$ образующие мономы фактор-алгебры $\mathbf{A}_{>1}/(I_\kappa\mathfrak{m})$.

(b) *Полином*

$$p(x) := \sum_{\rho(\alpha)=1} a_\alpha x^\alpha$$

выпуклый и $p(x) > 0$ для любого вектора $x \neq 0$.

Замечание 4.1. Отметим, что полученная система координат является приспособленной к функции ϕ и выполняется равенство

$$h(\phi) = \frac{1}{|\kappa|},$$

где $|\kappa| = \kappa_1 + \ldots + \kappa_n$. Результаты теоремы 4.1 отличаются от классической теоремы Г. Щульца тем, что в ней явно описан вид остаточного члена. Другим преимуществом этой формулировки является то, что она может быть обобщена на случай произвольных гладких выпуклых функций.

5. Приспособленные системы координат для произвольных выпуклых функций

Теперь покажем, что аналог приспособленных систем координат существует в случае, когда ϕ — произвольная гладкая выпуклая функция. Более того, представим конечный алгоритм нахождения таких систем координат, основанный на решении полиномиальных уравнений.

Таким образом, мы получим аналог теоремы Г. Щульца [37] для произвольных гладких выпуклых функций. Более того, получим приспособленные системы координат для произвольных выпуклых аналитических функций.

Теорема 5.1. *Пусть ϕ — бесконечно гладкая выпуклая функция, определенная в некоторой выпуклой окрестности начала координат и удовлетворяющая условиям $\phi(0) = 0$ и $\nabla\phi(0) = 0$. Тогда существует ортонормальная система координат, для которой выполняются следующие условия.*

(a) *Имеются целое число $0 \leqslant m \leqslant n$ и четные натуральные числа $(k_1, \ldots, k_m)$ и $\kappa := \left(\frac{1}{k_1}, \ldots, \frac{1}{k_m}, 0, \ldots, 0\right)$ такие, что функция ϕ записывается в виде*

$$\phi(x', x'') = \sum_{\rho(\alpha)=1} c_\alpha x'^\alpha + R(x', x''),$$

где $x' = (x_1, \ldots, x_m)$, $x'' = (x_{m+1}, \ldots x_n)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ — мультииндекс и $\rho(\alpha) = (\alpha, \kappa)$. Более того, остаток $R(x', x'')$ может быть записан в виде

$$R(x', x'') = \sum_{\rho(\alpha)=1} x'^\alpha R_\alpha(x', x'') + \sum_{j=1}^{s} C_j(x'')b_j(x') + \sum_{\rho(\alpha)<1} x'^\alpha R_\alpha(x''),$$

где $R_\alpha(0,0) = 0$ для $\rho(\alpha) = 1$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ и для любого α с условием $\rho(\alpha) < 1$ функция $R_\alpha(x'')$ — плоская в нуле, где $\{b_1, \ldots, b_s\}$ образующие мономы фактор-алгебры $\mathbf{A}_{>1}/(I_\kappa\mathfrak{m})$, где $\mathbf{A}$ алгебра ростков гладких функций, зависящих от $x' = (x_1, \ldots, x_m)$.

(b) *Полином*

$$p(x') = \sum_{\rho(\alpha)=1} a_\alpha x'^\alpha$$

выпуклый, и $p(x') > 0$ для любого $x' \neq 0$.

Доказательство. Прежде приведем некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 5.1. *Пусть ϕ — выпуклая гладкая функция, определенная в некоторой выпуклой окрестности начала координат и удовлетворяющая условиям $\phi(0) = 0$, $\nabla\phi(0) = 0$, а также*

$$\phi(x) = P(x) + R(x),$$

где $P(x)$ — квазиоднородная полиномиальная функция с весом κ, и $R(x)$ — остаточный член в следующим смысле: справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\tau\to+0} \frac{R(\delta_\tau^\kappa(x))}{\tau^{1+\varepsilon}} = 0$$

с некоторым положительным числом ε. Тогда $P(x)$ также выпуклый полином.

Доказательство. Лемма 5.1 доказана в работе [37]. Фактически доказательство этой леммы вытекает из стандартных рассуждений. □

Лемма 5.2. *Пусть P — однородный полином от двух переменных степени $m \geqslant 2$ вида*

$$P(x_1, x_2) = x_1^m + a_1 x_1^{m-1} x_2 + \ldots + a_k x_1^{m-k} x_2^k.$$

Если $P(x_1, x_2)$ выпукла и $1 \leqslant k \leqslant m-1$, то m — четное натуральное число, а также $a_1 = \ldots = a_k = 0$.

Доказательство. Если $P(x_1,x_2)$ — выпуклый полином, то он имеет минимум в начале координат. Поэтому m — четное натуральное число. С другой стороны, если $a_{k_0}\neq 0$ для некоторого $1\leqslant k_0\leqslant m-1$, то существуют рациональные числа κ_1,κ_2 такие, что полином $P(x_1,x_2)$ может быть записан в виде $P(x_1,x_2)=a_{k_0}x_1^{m-k_0}x_2^{k_0}+R(x)$ с квазиоднородным полиномом $a_{k_0}x_1^{m-k_0}x_2^{k_0}$ и остаточным членом $R(x)$, удовлетворяющим условиям леммы 5.1. Так как $P(x_1,x_2)$ — выпуклая функция, то согласно лемме 5.1 $a_{k_0}x_1^{m-k_0}x_2^{k_0}$ также должна быть выпуклой, что неверно при $1\leqslant k_0\leqslant m-1$. Это противоречие доказывает лемму 5.2. □

Следствие 5.1. *Если P — однородный выпуклый полином от двух переменных степени $m\geqslant 2$, удовлетворяющий условию $P(0,x_2)\equiv 0$, то он имеет вид $P(x_1,x_2)=a_0x_1^m$.*

Лемма 5.3. *Пусть P — выпуклый однородный полином степени $m\geqslant 2$, зависящий от переменных $(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Если $P(x)=0$ при $x_1=x_2=\dots=x_k=0$, то он зависит лишь от переменных $(x_1,x_2,\dots,x_k)$. Точнее, существует выпуклый полином $Q(x_1,\dots,x_k)$ такой, что для любого $x\in\mathbb{R}^n$ имеет место равенство*

$$P(x_1,\dots,x_n)=Q(x_1,\dots,x_k).$$

Доказательство. Если $k=n$, то доказывать нечего. С другой стороны, при $n=2$ и $k=1$ утверждение леммы 5.3 вытекает из следствия 5.1. Теперь, предполагая $n>2$ и $k\leqslant n-1$, а также с учетом условия $P(0,\dots,0,x_{k+1},\dots,x_n)\equiv 0$, запишем полином P в виде:

$$P(x_1,x_2,\dots,x_n)=Q(x_1,x_2,\dots,x_k)+\sum_{0<|\alpha|<m}x'^{\alpha}a_\alpha(x''),$$

где $Q(x_1,x_2,\dots,x_k)$ — однородный полином степени m от переменных $x':=(x_1,x_2,\dots,x_k)$ и $\alpha:=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$ — мультииндекс, а также $a_\alpha(x'')$ — однородный полином степени $m-|\alpha|$ от переменных $x'':=(x_{k+1},\dots,x_n)$.

Фиксируем $x^0:=(x'^0,x''^0)$ и рассмотрим полином от двух переменных (t,τ), определенный по соотношению:

$$P_1(t,\tau):=P(tx'^0,\tau x''^0)=t^mQ(x'^0)+\sum_{0<|\alpha|<m}t^{|\alpha|}\tau^{m-|\alpha|}(x'^0)^\alpha a_\alpha(x''^0).$$

Заметим, что $P_1(t,\tau)$ — выпуклый однородный полином степени m от двух переменных (t,τ). Поэтому он имеет минимум в начале координат. Следовательно, $Q(x'^0)\geqslant 0$ и m — четное натуральное число. Если для любого x'^0 справедливо равенство $Q(x'^0)=0$, то согласно следствию 5.1 имеем:

$$P_1(t,\tau)=\sum_{0<|\alpha|<m}t^{|\alpha|}\tau^{m-|\alpha|}(x'^0)^\alpha a_\alpha(x''^0)\equiv 0 \tag{5.1}$$

для любых точек $x^0:=(x'^0,x''^0)$. Следовательно, $P(x_1,x_2,\dots,x_n)\equiv 0$ и утверждение леммы 5.3 тривиально выполняется. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда существует точка x'^0 такая, что $Q(x'^0)>0$. Тогда согласно следствию 5.1 выполняется равенство (5.1) для любого x''^0, когда x' принадлежит некоторой окрестности точки x'^0. Поэтому согласно теореме единственности имеет место равенство:

$$\sum_{0<|\alpha|<m}x'^{\alpha}a_\alpha(x'')\equiv 0,$$

которое завершает доказательство леммы 5.3. □

Предложение 5.1. *Пусть $f(x)=x_1^lg(x')$ — выпуклый однородный полином с $l\geqslant 1$, $x':=(x_2,\dots,x_n)$. Тогда $g(x')\equiv\mathrm{const}$.*

Доказательство. Доказательство предложения 5.1 легко следует из леммы 5.2. □

Лемма 5.4. *Пусть $P(x)$ — однородный ненулевой выпуклый полином. Тогда существует ортогональная матрица A такая, что справедливо соотношение*

$$P(Ax)=Q(x_1,\dots,x_k),$$

где $1\leqslant k\leqslant n$ и $Q(x_1,\dots,x_k)$ — также выпуклый полином, удовлетворяющий условию $Q(x_1,\dots,x_k)\neq 0$ для любого $(x_1,\dots,x_k)\neq 0$.

Доказательство. Если степень полинома $P(x)$ равняется единице, то доказательство леммы 5.4 тривиально. Далее предположим, что $\deg(P) \geqslant 2$. Рассмотрим множество

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n : P(x) = 0\}.$$

Как доказал Г. Щульц, S — линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$. Если $S = \{0\}$, то в качестве Q мы можем взять P, и этот полином удовлетворяет условиям леммы 5.4. Далее, рассмотрим случай $1 \leqslant \dim S < n$. Так как $P \not\equiv 0$, то $\dim S < n$. Обозначим через S_1 ортогональное дополнение этого подпространства. Предположим, что $e_1, \ldots, e_k$ — некоторый ортонормальный базис в S_1. Мы можем дополнить эту систему векторов до ортонормального базиса $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть A' (где A' — матрица, полученная транспонированием матрицы A) — ортогональная матрица перехода от стандартного базиса пространства $\mathbb{R}^n$ к этому базису. Тогда $P_1(x) := P(Ax)$ — выпуклый полином. Заметим, что подпространство S в новых координатах определяется уравнениями вида $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$. Следовательно, согласно лемме 5.3 в новых координатах существует выпуклый однородный полином $Q(x_1, \ldots, x_k)$ такой, что выполняется равенство:

$$P_1(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = Q(x_1, \ldots, x_k).$$

Так как множество нулей полинома P_1 совпадает с подпространством $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$, то при $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \neq 0$ имеем: $P_1(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = Q(x_1, \ldots, x_k) \neq 0$. Что и требовалось доказать. □

Теперь приступим к доказательству теоремы 5.1. Доказательство этой теоремы конструктивно. Оно основывается на построении нового базиса Щульца.

Построим многогранник Ньютона $N(\phi)$ функции ϕ по ряду Маклорена. Рассмотрим опорную к $N(\phi)$ гиперплоскость, заданную уравнением:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = N_1 \geqslant 2.$$

Пусть γ_1 — грань многогранника Ньютона, определенной следующим соотношением:

$$\gamma_1 := N(\phi) \cap \{x : x_1 + x_2 + \ldots + x_n = N_1\} \neq \varnothing.$$

Рассмотрим однородный полином ϕ_{γ_1} степени 1 относительно веса $(\frac{1}{N_1}, \ldots, \frac{1}{N_1})$, соответствующий этой грани, т. е.:

$$\phi_{\gamma_1} := \sum_{\alpha \in \gamma_1} a_\alpha x^\alpha.$$

Функция ϕ может быть записана в виде

$$\phi(x) = \phi_{\gamma_1}(x) + R(x),$$

где $R(x)$ остаточный член, удовлетворяющий условию:

$$R(\delta_\tau(x)) = O(\tau^{1+\varepsilon}) \quad (\text{при } \tau \to +0)$$

для некоторого положительного числа $\varepsilon > 0$. Согласно лемме 5.4 заключаем, что ϕ_{γ_1} — выпуклый однородный полином. Мы рассмотрим множество нулей этого полинома:

$$S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \phi_{\gamma_1}(x) = 0\}.$$

Согласно результатам работы [37] S_0 — линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$. Если $S_0 = \{0\}$, то исходная система координат является базисом Щульца для функции ϕ. В противном случае обозначим через S_1 ортогональное дополнение S_0, и $k_1 = \dim S_1 \geqslant 1$. Пусть $\{e_1, \ldots, e_{k_1}\}$ — некоторый ортонормальный базис S_1. Мы можем дополнить этот базис до базиса пространства $\mathbb{R}^n$. Обозначим через A_1' соответствующую ортогональную матрицу перехода от стандартного исходного базиса пространства $\mathbb{R}^n$ к этому новому базису. Тогда получим:

$$\phi(A_1 x) = Q_1(x_1, \ldots, x_{k_1}) + R_1(x),$$

где Q_1 — выпуклый однородный полином степени $N_1 \geqslant 2$, зависящий от переменных $x_1, \ldots, x_{k_1}$ и удовлетворяющий условию $Q_1(x_1, \ldots, x_{k_1}) \neq 0$ при $(x_1, \ldots, x_{k_1}) \neq 0$.

Запишем остаточный член в виде:

$$R_1(x', x'') := \sum_{|\alpha|=N_1} x'^{\alpha} a_\alpha(x) + \sum_{0<|\alpha|<N_1} x'^{\alpha} b_\alpha(x'') + r(x''),$$

где a_α, b_α, r — гладкие функции, а также $a_\alpha(0) = 0$ для любого мультииндекса α, удовлетворяющего условию $|\alpha| = N_1$. Если b_α при $0 < |\alpha| < N_1$, а также r — плоские функции, то мы приходим к доказательству теоремы 5.1. В противном случае среди этих функций существуют функции, имеющие конечный порядок в нуле.

Точно так же, как исходная функция ϕ, гладкие функции $b_\alpha(x'')$ и $r(x'')$ записываются в виде:

$$r(x'') = P(x'') + \tilde{R}(x''), \quad b_\alpha(x'') := P_\alpha(x'') + R_\alpha(x''),$$

где $P(x'')$ и $P_\alpha(x'')$ — однородные полиномиальные функции степени $N_2 > N_1$ и m_α, соответственно, т. е. порядок функции $b_\alpha(x'')$ и $r(x'')$ относительно веса $(1, \dots, 1)$ равен m_α и $N_2 > N_1$, соответственно. Отметим, что возможны случаи $N_2 = \infty$ или $m_\alpha = \infty$ для некоторого α. Но по нашему предположению среди этих чисел существуют конечные.

Лемма 5.5. *Если порядок N_2 функции r относительно веса $(1, \dots, 1)$ — конечное натуральное число, то для любого мультииндекса α из множества $\{0 < |\alpha| < N_1\}$ выполняется неравенство*

$$\frac{|\alpha|}{N_1} + \frac{m_\alpha}{N_2} \geqslant 1.$$

Более того, если $r(x'')$ — плоская функция, то функция

$$\sum_{0<|\alpha|<N_1} x'^{\alpha} b_\alpha(x'')$$

также является плоской функцией.

Доказательство. Предположим, что N_2 — конечное натуральное число, и существуют мультииндексы α и m_α такие, что

$$\frac{|\alpha|}{N_1} + \frac{m_\alpha}{N_2} < 1.$$

Пусть

$$\min\{\frac{|\alpha|}{N_1} + \frac{m_\alpha}{N_2}\} = \beta.$$

Так как $0 < |\alpha| < N_1$ и $0 < \beta < 1$, то функция ϕ в записывается в виде:

$$\phi(x', x'') = \sum_{\frac{|\alpha|}{N_1\beta} + \frac{m_\alpha}{N_2\beta} = 1} x'^{\alpha} P_\alpha(x'') + R_1(x', x'') := \tilde{P}_1(x', x'') + R_1(x', x''),$$

где

$$\tilde{P}_1(x', x'') := \sum_{\frac{|\alpha|}{N_1\beta} + \frac{m_\alpha}{N_2\beta} = 1} x'^{\alpha} P_\alpha(x'')$$

— ненулевой квазиоднородный полином степени единица относительно веса $(\frac{\mathbf{1}_k}{N_1\beta}, \frac{\mathbf{1}_{n-k}}{N_2\beta})$ (где $\mathbf{1}_k$ означает вектор $\mathbf{1}_k = (1, \dots, 1)$ в пространстве $\mathbb{R}^k$, аналогично определяется $\mathbf{1}_{n-k}$), и $R_1(x', x'')$ — остаточный член степени строго больше единицы относительно этого веса, иными словами, справедливо включение: $R_1 \in \mathbf{A}_{>1}$. Так как $r \in \mathbf{A}_{>1}$ и $Q_1 \in \mathbf{A}_{>1}$ относительно веса $(\frac{\mathbf{1}_k}{N_1\beta}, \frac{\mathbf{1}_{n-k}}{N_2\beta})$, то в сумме, определяющей $\tilde{P}_1(x', x'')$ для любого мультииндекса α, имеем: $N_1 > |\alpha| > 0$. Согласно лемме 5.1 $\tilde{P}_1(x', x'')$ — выпуклый квазиоднородный полином. Фиксируем (x'^0, x''^0) и рассмотрим выпуклый полином $\tilde{P}_1(tx'^0, \tau x''^0)$. Этот полином может быть записан в виде

$$\tilde{P}_1(tx'^0, \tau x''^0) = t^l R_{11}(t, \tau, x'^0, x''^0),$$

где R_{11} — однородный полином и $l \geqslant 1$. Согласно лемме 5.2 выполнено $\tilde{P}_1(x'^0, x''^0) = 0$ для любого фиксированного (x'^0, x''^0), т. е. $\tilde{P}_1(x) \equiv 0$. Это противоречит нашему предположению.

Наконец, если $r(x'')$ — плоская функция, то в качестве N_2 берем любое натуральное число, большее, чем N_1. И снова, повторяя вышеприведенные рассуждения, придем к противоречию существования конечного натурального числа m_α. Лемма 5.5 доказана. $\square$

Таким образом, если $r(x'')$ — плоская функция, то придем к базису Щульца и доказательство теоремы 5.1 завершается.

В противном случае рассмотрим функцию:

$$\phi_1(x'') := R_1(0, \dots, 0, x''),$$

где $x'' = (x_{k_1+1}, \dots, x_n)$.

Заметим, что новая функция $\phi_1(x'')$ удовлетворяет всем условиям, поставленным на функцию ϕ. Теперь повторим весь процесс, проделанный с функцией ϕ, с новой функцией $\phi_1(x'')$, которая зависит от меньшего числа переменных.

После конечного числа шагов получим подпространства $S_1, S_2, \dots, S_\nu$ (где $\nu \leqslant n$), удовлетворяющие условиям: S_i и S_j взаимно ортогональны при $i \neq j$ и

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{j=1}^{\nu} S_j.$$

При этом ограничение функции ϕ на $S_\nu \cap U$ является плоской функцией в начале координат при $m < n$.

Вес $\kappa := (\kappa_1, \dots, \kappa_m)$ определяется из соотношения $\kappa_l := \dfrac{1}{N_1}$ (где $l = \overline{1, \dim S_1}$, причем N_1 — четное натуральное число). Аналогично определяются $\kappa_{l+1}, \dots, \kappa_m$. Следовательно, для любого $1 \leqslant j \leqslant m$ имеем: $\dfrac{1}{\kappa_j}$ четное натуральное число, а также $\min\{\kappa_j\} = \kappa_m$.

Таким образом, определение базиса Щульца приводится к классической проблеме решения полиномиальных уравнений.

Теперь напишем вид остаточного члена. Функция ϕ в новой системе координат записывается в виде:

$$\phi(x', x'') = \phi_1(x', x'') + \phi_2(x''),$$

где $\phi_2(x'')$ — плоская функция, а $\phi_1(x', x'')$ имеет вид:

$$\phi_1(x', x'') = P(x') + R(x', x''),$$

где $R(x', x'')$ — остаточный член. По построению базиса Щульца для любой фиксированной точки x'' из окрестности нуля справедливо включение $R(\cdot, x'') \in \mathbf{A}_1$. Поэтому согласно предложению 4.2 он записывается в виде:

$$R(x', x'') = \sum_{\rho(\alpha)=1} x^\alpha R_\alpha(x', x'') + \sum_{\nu=1}^{s} C_s(x'') b_\nu(x') + \sum_{\rho(\alpha)<1} x'^\alpha R_\alpha(x'').$$

При этом согласно лемме 5.5 для любого мультииндекса α, удовлетворяющего условию $\rho(\alpha) < 1$, соответствующая функция $R_\alpha(x'')$ — плоская в начале координат. Этим завершается доказательство теоремы 5.1. $\square$

Следствие 5.2. *Пусть ϕ — выпуклая аналитическая функция в начале координат, удовлетворяющая условиям $\phi(0) = 0$ и $\nabla\phi(0) = 0$. Тогда существует ортонормальная система координат, для которой выполняются следующие условия.*

(a) *Имеются целое число $0 \leqslant m \leqslant n$ и четные натуральные числа $(k_1, \dots, k_m)$ и $\kappa := (\dfrac{1}{k_1}, \dots, \dfrac{1}{k_m}, 0, \dots, 0)$ такие, что функция ϕ записывается в виде*

$$\phi(x', x'') = \sum_{\rho(\alpha)=1} c_\alpha x'^\alpha + R(x', x''),$$

где $x' = (x_1, \dots, x_m)$, $x'' = (x_{m+1}, \dots, x_n)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ *— мультииндекс и* $\rho(\alpha) = (\alpha, \kappa)$. *Более того, остаток* $R(x', x'')$ *может быть записан в виде*

$$R(x', x'') = \sum_{\rho(\alpha)=1} x^\alpha R_\alpha(x', x'') + \sum_{\nu=1}^{s} C_s(x'') b_\nu(x'),$$

где $R_\alpha(0,0) = 0$ *для* $\rho(\alpha) = 1$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ *и* $\{b_1, \dots, b_s\}$ *— базисные мономы фактор-алгебры* $\mathbf{A}_{>1}/(I_\kappa \mathfrak{m})$.

(b) *Полином* $p(x') = \sum\limits_{\rho(\alpha)=1} a_\alpha x'^\alpha$ *— выпуклый, и* $p(x') > 0$ *для любого* $x' \neq 0$.

Доказательство. Доказательство следствия 5.2 вытекает из теоремы 5.1. □

В случае, когда ранг нормального отображения не превосходит единицы, справедливо следующее аналогичное утверждение.

Теорема 5.2. *Пусть* ϕ *— ненулевая бесконечно гладкая функция, определенная в окрестности нуля* U *и удовлетворяющая условиям* $\phi(0) = 0$ *и* $\nabla\phi(0) = 0$, *а также существует мультииндекс* α *такой, что* $D^\alpha\phi(0) \neq 0$. *Если для этой функции выполняется соотношение*

$$D^2\phi \wedge D^2\phi \equiv 0,$$

то существуют ортогональная матрица A *и гладкие функции* $g(y)$, $\{g_j\}_{j=0}^{h-1}$, *определенные в некоторой окрестности начала координат, такие, что справедливо следующее равенство*:

$$\phi(Ay) = y_1^h g(y) + \sum_{j=0}^{h-1} y_1^j g_j(y_2, \dots, y_n),$$

причем $g(0) \neq 0$ *и* $\{g_j\}_{j=0}^{h-1}$ *— плоские функции в начале координат, где* $2 \leqslant h$ *— натуральное число.*

При этом если ϕ *— ненулевая вещественно-аналитическая функция в начале координат, и она удовлетворяет условиям* $\phi(0) = 0$ *и* $\nabla\phi(0) = 0$, *а также* $D^2\phi \wedge D^2\phi \equiv 0$, *то существуют ортогональная матрица* A *и вещественно-аналитическая функция* $g(y)$ *в начале координат такие, что справедливо следующее равенство*:

$$\phi(Ay) = y_1^h g(y),$$

причем $g(0) \neq 0$, *где* $2 \leqslant h$ *— натуральное число.*

Доказательство. Отметим, что теорема 5.2 формально не следует из теоремы 5.1, потому что из выполнения условия теоремы 5.2 вообще говоря, не следует выпуклость функции ϕ. Однако методы доказательства теоремы 5.1 позволяют получить доказательство теоремы 5.2 (ср. с [26]). □

6. О показателе осцилляции осцилляторных интегралов с выпуклой фазой

В этом параграфе покажем, что показатель осцилляции осцилляторного интеграла с выпуклой аналитической фазой определяется расстоянием до многогранника Ньютона в приспособленной системе координат.

Теорема 6.1. *Пусть* ϕ *— выпуклая гладкая функция, определенная в некоторой выпуклой окрестности начала координат, и* $\phi(0) = 0$, *а также* $\nabla\phi(0) = 0$. *Тогда после возможных вращений координатных осей справедливы следующие утверждения*:

1. *если* ϕ *имеет конечный линейный тип в начале координат, то показатель осцилляции* $\beta(\phi) = -\dfrac{1}{h(\phi)}$, *где* $h(\phi) = \dfrac{1}{|\kappa|}$, $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ *— веса однородности, определенной из теоремы* 5.1;
2. *если* ϕ *— бесконечно гладкая функция, и* $h(\phi) > 1$ *— достаточно большое число, то показатель осцилляции* $\beta(\phi)$ *функции* ϕ *совпадает с отрицательным числом* $-\dfrac{1}{h(\phi)}$;
3. *при этом если* ϕ *— аналитическая функция в начале координат, то для показателя осцилляции функции* ϕ *имеем:* $\beta(\phi) = -\dfrac{1}{h(\phi)}$.

Доказательство.

1. Если в теореме 5.1 $m = n$ (этот случай соответствует классическому разложению Г. Щульца), то утверждение следует из результатов работы [37].

3. Сначала докажем теорему 6.1 в случае, когда ϕ — выпуклая аналитическая функция. Пусть $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_m)$ — вес квазиоднородности, определенный в теореме 5.1, и

$$\rho(x') := x_1^{k_1} + \ldots + x_m^{k_m}.$$

Так как $\{k_j\}_{j=1}^m$ четные натуральные числа, то множество

$$\Sigma := \{x' \in \mathbb{R}^m : \rho(x') := 1\}$$

является гладкой поверхностью. Мы назовем множество Σ *квазисферой*.

Введем квазиполярную систему координат:

$$x_j = \rho^{\kappa_j}\psi_j(\sigma), \quad j = 1, \ldots, m, \quad x_l = y_l, \quad l = m+1, \ldots, n,$$

где σ — точка на квазисфере и $\{\psi_j\}_{j=1}^m$ — гладкие функции, определенные на квазисфере Σ, и ранг дифференциала отображения ψ, заданного функциями $\{\psi_j\}_{j=1}^m$ всюду на квазисфере, равняется m (более подробно см. [13]). Тогда согласно следствию 5.2 функция ϕ записывается в виде:

$$\phi(\delta_\rho(\psi(s)), x'') = \rho\phi_1(\psi(\sigma), x'', \rho),$$

причем функция ϕ_1 оценивается снизу на квазисфере, точнее, для некоторого фиксированного числа $\delta > 0$ на квазисфере Σ выполняется неравенство

$$\phi_1(\psi(\sigma), 0, 0) \geqslant \delta > 0.$$

Таким образом, после замены переменных осцилляторный интеграл записывается в виде:

$$J(\lambda) = \int a(\delta_\rho(\psi(s)), x'')e^{i\lambda\rho\phi_1(\psi(s), x'', \rho)}\rho^{|\kappa|-1}d\rho dx''\Omega,$$

где Ω — форма объема на квазисфере $\{\rho(\sigma) = 1\}$ (см. [12], а также [13]). Она называется *формой Гельфанда—Лере* (см. [7]). Согласно лемме Эрдейи, для одномерного интеграла (см. [17])

$$J_1(\lambda, \sigma, x'') = \int a(\delta_\rho(\psi(s)), x'')e^{i\lambda\rho\phi_1(\psi(s), x'', \rho)}\rho^{|\kappa|-1}d\rho$$

получим:

$$J_1(\lambda, \sigma, x'') = Ca(0, x'')\lambda^{-|\kappa|} + O(\lambda^{-|\kappa|-\varepsilon}) \quad (\text{при}\, \lambda \to +\infty)$$

с некоторым положительным числом $\varepsilon > 0$. Отсюда для интеграла $J(\lambda)$ получим асимптотическое соотношение:

$$J(\lambda) = C(a, \phi)\lambda^{-|\kappa|} + O(\lambda^{-|\kappa|-\varepsilon}) \quad (\text{при}\, \lambda \to +\infty),$$

причем $C(a, \phi) \neq 0$, если a — неотрицательная финитная функция, сосредоточенная в достаточно малой окрестности начала координат, и $a(0) > 0$. Заметим, что фактически в аналитическом случае получим главный член асимптотического разложения. Существование таких разложений вытекает из классической теоремы Атьи—Бернштейна [19]. В частности, имеем:

$$\beta(\phi) = -|\kappa| = -\frac{1}{h(\phi)}.$$

2. В бесконечно гладком случае имеем дело с плоскими членами. Поэтому не удается получить оценку в общем случае с использованием метода многогранников Ньютона.

Рассмотрим функцию вида

$$\phi(x', x'') = p(x') + R(x', x'') + \sum_{0<\rho(\alpha)<1} (x')^\alpha R_\alpha(x''),$$

где R_α — плоская функция при $0 < \rho(\alpha) < 1$.

Обозначим через β_κ количество различных чисел $0 < \rho(\alpha) < 1$ для векторов α с неотрицательными целыми компонентами, т. е.

$$\beta_\kappa := \sharp\{\rho(\alpha) : \alpha \in \mathbb{N}_0^m, 0 < \rho(\alpha) < 1\},$$

где $\sharp X$ означает мощность конечного множества X.

Пусть $\{\rho(\alpha) : \alpha \in \mathbb{N}_0^m, 0 < \rho(\alpha) < 1\} = \{\nu_1, \ldots, \nu_{\beta_\kappa}\}$.

Рассмотрим осцилляторный интеграл:

$$J_1(\lambda) := \int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{i\lambda(b_0 r + \sum\limits_{l=1}^{\beta_\kappa} c_l r^{\nu_l})} r^{|\kappa|-1} a(r) dr,$$

где $a \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Лемма 6.1. *Для интеграла* $J_1(\lambda)$ *при* $|\lambda| > 2$ *справедлива следующая оценка*:

$$|J_1(\lambda)| \leqslant \frac{C \ln^l |\lambda|}{|\lambda|^\gamma}, \tag{6.1}$$

где $\gamma := \min\{\frac{1}{|\kappa|}, \frac{1}{\beta_\nu + 1}\}$, *причем* $l = 1$, *если* $|\kappa| = \dfrac{1}{\beta_\nu + 1}$, *в противном случае* $l = 0$.

Доказательство. Аналогичное утверждение для преобразования Фурье мер, сосредоточенных на выпуклых гиперповерхностях конечного линейного типа, доказано в работе [33].

Ради полноты изложения приведем доказательство леммы 6.1. Пусть $\omega \in C_0^\infty$ $(\frac{1}{2} \leqslant r \leqslant 2)$ — неотрицательная функция, удовлетворяющая условию

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \omega(2^j r) = 1 \quad \text{для любого} \quad r > 0.$$

С помощью этого разбиения единицы мы можем разложить интеграл $J_1(\lambda)$ в ряд:

$$J_1(\lambda) = \sum_{j=j_0}^{\infty} J^j(\lambda),$$

где j_0 — достаточно большое натуральное число (легко видеть, что чем меньше носитель амплитуды, тем больше j_0) и

$$J^j(\lambda) := \int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{i\lambda(b_0 r + \sum\limits_{l=1}^{\beta_\kappa} c_l r^{\nu_l})} r^{|\kappa|-1} a(r) \omega(2^j r) dr.$$

Рассмотрим оценку интеграла $J^j(\lambda)$. Используя замену переменных, определенную растяжением $2^j r \to r$, получим:

$$J^j(\lambda) := 2^{-j|\kappa|} \int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{i\lambda 2^{-j}(b_0 r + \sum\limits_{l=1}^{\beta_\kappa} c_l 2^{j(1-\nu_l)} r^{\nu_l})} r^{|\kappa|-1} a(2^{-j} r) \omega(r) dr.$$

Для оценки последнего интеграла отдельно рассмотрим случай, когда $j \in \{j_0 \leqslant j : \lambda 2^{-j} \leqslant M\}$, где M достаточно большое фиксированное число. В этом случае подынтегральная функция быстро не осциллирует, и мы используем тривиальную оценку:

$$|J^j(\lambda)| \leqslant c 2^{-j|\kappa|}. \tag{6.2}$$

Теперь предположим, что $\lambda 2^{-j} > M$. В этом случае осцилляторный интеграл $J^j(\lambda)$ может быть рассмотрен как преобразование Фурье меры, сосредоточенной на кривой $(b_0 r, \ldots, r^{\nu_{\beta_\kappa}})$. Эта кривая имеет ненулевое кручение. Следовательно интеграл $J^j(\lambda)$ оценивается следующим образом (см. [10]):

$$|J^j(\lambda)| \leqslant c 2^{-j|\kappa|} \frac{C}{|2^{-j}\lambda|^{\frac{1}{\beta_\nu + 1}}}. \tag{6.3}$$

В частности, если $|\kappa| = \dfrac{1}{\beta_\nu + 1}$, то имеем оценку

$$|J^j(\lambda)| \leqslant \frac{C}{|\lambda|^{\frac{1}{\beta_\nu + 1}}}. \tag{6.4}$$

Таким образом, если $|\kappa| \neq \dfrac{1}{\beta_\nu + 1}$, то для осцилляторного интеграла $J_1(\lambda)$ получим оценку:

$$|J_1(\lambda)| \leqslant \sum_{\lambda 2^{-j} \leqslant M} |J^j(\lambda)| + \sum_{\lambda 2^{-j} > M} |J^j(\lambda)| \leqslant$$

$$\leqslant C \left(\sum_{\lambda 2^{-j} \leqslant M} 2^{-|\kappa| j} + \sum_{\lambda 2^{-j} > M} \frac{2^{-|\kappa| j}}{|2^{-j}\lambda|^{\frac{1}{\beta_\nu+1}}} \right) \leqslant \frac{C}{|\lambda|^{\kappa}} + \frac{C}{|\lambda|^{\frac{1}{\beta_\nu+1}}} \leqslant \frac{C}{|\lambda|^{\gamma}}.$$

Если $|\kappa| = \dfrac{1}{\beta_\nu + 1}$, то используя оценку (6.4), получим аналогичную оценку с логарифмическим множителем. Что и завершает доказательство леммы 5.5. $\square$

Из леммы 5.5 вытекает доказательство части 2 теоремы 6.1 в случае выпуклых гладких фазовых функций. $\square$

7. Оценки максимальных операторов, зависящих от параметров (оценки типа Ван дер Корпута)

Пусть $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — гладкая гиперповерхность. Если она в точке $x^0 \in S$ имеет конечный порядок касания с аффинной касательной гиперплоскостью, то говорят, что она имеет *конечный тип* в этой точке (см. [41, стр. 350]). Можно дать аналитическое определение этого понятия. Действительно, в достаточно малой окрестности этой точки представим гиперповерхность в виде графика некоторой гладкой функции (см. [8]). Без ограничения общности можем считать, что $x^0 = 0$. Тогда вращением системы координат S представляется в виде графика функции $x_{n+1} = \phi(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющей условиям: $\phi(0) = 0, \nabla\phi(0) = 0$. Конечность типа означает существование мультииндекса α такого, что $D^\alpha \phi(0) \neq 0$ (ср. с [41, с. 350]). Минимальное число τ такое, что существует мультииндекс $\alpha \in \{\alpha : |\alpha| \leqslant \tau\}$, для которого выполняется условие $D^\alpha\phi(0) \neq 0$, называется *типом гиперповерхности* S в точке x^0. Обозначим этот тип через $\tau_{x^0}(S)$.

Далее мы рассмотрим семейство гладких гиперповерхностей, зависящих от дополнительных параметров $S(\sigma) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, где $\sigma \in \mathbb{R}^m$ — параметр. Пусть $S(\sigma) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — семейство гладких гиперповерхностей, гладко зависящих от параметра $\sigma \in \mathbb{R}^m$, и $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^m)$ — неотрицательная гладкая функция с компактным носителем.

В этом параграфе рассмотрим оценки типа Ван дер Корпута для максимальных операторов при условии, что функция плотности ψ сосредоточена в достаточно малой окрестности фиксированной точки x^0 гиперповерхности $S(0)$. Ради определенности можем считать, что $x^0 = (0, \ldots, 0, C)$, где $C \neq 0$ — фиксированное вещественное число, и семейство гиперповерхностей задано в виде:

$$x_{n+1} = C(\sigma, \varepsilon) + \varepsilon\phi(x, \sigma),$$

где $\phi(x, \sigma)$ — семейство гладких функций, удовлетворяющих условиям: $\phi(0, 0) = 0$ и $\nabla_x\phi(0, 0) = 0$, а также $C(\sigma, \varepsilon)$ — гладкая функция, такая, что $C(0, 0) \neq 0$, и ε — положительное вещественное число. Рассмотрим оператор усреднения, заданный в виде:

$$A_t^{\sigma,\varepsilon} f(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y_1 - tx_1, \ldots, y_n - tx_n, x_{n+1} - t(C(\sigma, \varepsilon) + \varepsilon\phi(x, \sigma)))\psi(x, \sigma)dx. \tag{7.1}$$

Соответствующий максимальный оператор определяется соотношением:

$$\mathcal{M}^{\sigma,\varepsilon} f(x) := \sup_{t>0} |A_t^{\sigma,\varepsilon} f(x)|. \tag{7.2}$$

Следующий результат является аналогом многомерной леммы Ван дер Корпута для максимальных операторов.

Теорема 7.1. *Пусть $\phi(x, \sigma)$ — семейство бесконечно гладких функций, удовлетворяющее условиям: $\phi(0, 0) = 0$ и $\nabla_x\phi(0, 0) = 0$, а также функция $\phi(x, 0)$ имеет конечный тип τ в начале координат. Тогда существуют окрестность нуля $U \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ и положительное число ε_0 такие, что для любой неотрицательной функции $\psi \in C_0^\infty(U \times V)$ максимальный оператор (7.2) ограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $p > \tau$.*

Более того, для любого $p > \tau$ существует постоянное число C_p такое, что при любом элементе $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ для оператора (7.2) *справедлива следующая равномерная по $\sigma \in V$ оценка*:

$$\|\mathcal{M}^{\sigma,\varepsilon} f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})} := \frac{C_p}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})}. \tag{7.3}$$

Замечание 7.1 (ср. с [41, с. 342])**.** Теорема 7.1 является аналогом теоремы К. Д. Согги. В работе [38] доказано аналогичное утверждение в случае, когда $\varepsilon = 1$ и ϕ — фиксированная функция, независящая от параметров, а также $\tau = 2$.

Доказательство. Сначала приведем доказательство следующей вспомогательной леммы.

Лемма 7.1. *Оператор усреднения $A_t^{\sigma,\varepsilon} f$ может быть записан в виде*

$$A_t^{\sigma,\varepsilon} f(y) = \int\limits_{-b_n}^{b_n}\int\limits_{-b_{n-1}}^{b_{n-1}}\dots\int\limits_{-b_2}^{b_2} R^\theta \mathcal{A}_t^{\sigma,\varepsilon,\theta} R^{-\theta} f(y)d\theta, \tag{7.4}$$

где $b_i > 0, i = \overline{2,n}$, $R^\theta := R^{\theta_2}R^{\theta_3}\dots R^{\theta_n}$, $R^{-\theta} := R^{-\theta_n}R^{-\theta_{n-1}}\dots R^{-\theta_2}$ и

$$\mathcal{A}_t^{\sigma,\varepsilon,\theta} f(y) := \int\limits_{\mathbb{R}} f\big(y_1 - tx_1, y_2 - t(\tilde{C}(\sigma,\varepsilon,\theta) + \varepsilon\phi_2(x_1,\theta,\sigma,\varepsilon)), y_3, \dots, y_{n+1}\big)\psi_2(x_1,\theta,\sigma,\varepsilon)dx_1, \tag{7.5}$$

где $\tilde{C}(\sigma,\varepsilon,\theta)$, $(\theta := (\theta_2,\dots,\theta_n))$ — гладкая функция, удовлетворяющая условию $C(0) \neq 0$, а также R^{θ_j} $(j = 2,\dots,n)$ — оператор вращения, определяемый формулой:

$$R^{\theta_j} f(x) := f(x_1,\dots,x_j, x_j\sin\theta_j + x_{j+1}\cos\theta_j, x_j\cos\theta_j - \sin\theta_j x_{j+2},\dots,x_n).$$

Доказательство. Так как аналогичное утверждение доказано в работе [9] при $n = 2$, мы ограничимся лишь схемой доказательства. Точки пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ запишем в виде (y, y_{n+1}), где $y \in \mathbb{R}^n$, $y_{n+1} \in \mathbb{R}$, а также используем обозначение $x' := (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, так что $x = (x', x_n)$, аналогично $y = (y', y_n)$.

Рассмотрим уравнение относительно x_n:

$$\sin\theta_n\big(C(\sigma,\varepsilon) + \varepsilon\phi(x,\sigma)\big) - \cos\theta_n x_n = 0. \tag{7.6}$$

Согласно теореме о неявной функции уравнение (7.6) имеет единственное гладкое решение $x_n(x',\theta_n,\sigma,\varepsilon)$ при малых $|x'|$, $|\sigma|$, $|\theta_n|$ и ε, причем

$$x_n(0,0,\dots,0) = 0,$$
$$x_n(x',\theta_n,\sigma,0) = C(\sigma,\varepsilon)\operatorname{tg}\theta_n,$$
$$\frac{\partial}{\partial\theta_n}x_n(0,0,\dots,0) = C(0,0) \neq 0.$$

Поэтому в интеграле (7.1) можем использовать замену переменных $x \mapsto (x', x_n(x',\theta_n,\sigma,\varepsilon))$ и получим:

$$\begin{aligned} A_t^{\sigma,\varepsilon} f(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\big(y' - tx', y_n - x_n(x',\theta_n,\sigma,\varepsilon),\\ y_{n+1} - t(C(\sigma,\varepsilon) + \varepsilon\phi(x', x_n(x',\theta_n,\sigma,\varepsilon),\sigma))\big)\psi_1(x',\theta_n,\sigma,\varepsilon)dx'd\theta_n, \end{aligned} \tag{7.7}$$

где

$$\psi_1(x',\sigma,\theta_n,\varepsilon) := \psi(x', x_n(x',\sigma,\theta_n,\varepsilon))|J(x',\sigma,\theta_n,\varepsilon)|,$$

а $J(x',\sigma,\theta_n,\varepsilon)$ — Якобиан замены переменных.

Теперь запишем интеграл (7.7) как повторный интеграл, т. е.

$$A_t^{\sigma,\varepsilon} f(y) = \int\limits_{-b_n}^{b_n} A_t^{\sigma,\varepsilon,\theta_n} f(y)d\theta_n,$$

где b_n некоторое положительное число и $A_t^{\sigma,\varepsilon,\theta_n}f$ — оператор усреднения, определяемый равенством:

$$A_t^{\sigma,\varepsilon,\theta_n}f(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f\big(y' - tx',\, y_n - x_n(x',\, \theta_n, \sigma,\, \varepsilon),$$

$$y_{n+1} - t(C(\varepsilon,\sigma) + \varepsilon\phi(x',\, x_n(x',\, \theta_n, \sigma,\, \varepsilon), \sigma))\big)\psi_1(x',\, \theta_n, \sigma, \varepsilon)dx'.$$

Теперь определим операторы, заданные вращением:

$$R^{\theta_n}f(x',\, x_n, x_{n+1}) := f(x', x_n\sin\theta_n + x_{n+1}\cos\theta_n, x_n\cos\theta_n - x_{n+1}\sin\theta_n),$$

и $R^{-\theta_n}f$ — обратный оператор. Очевидно, что это изометрические операторы в пространстве $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$.

Теперь, умножая оператор усреднения $A_t^{\sigma,\varepsilon,\theta_n}$ справа и слева на операторы вращения R^{θ_n} и $R^{-\theta_n}$, соответственно, получим новый оператор усреднения $\mathcal{A}_t^{\sigma,\varepsilon,\theta_n} := R^{-\theta_n}A_t^{\sigma,\varepsilon,\theta_n}R^{\theta_n}$. Непосредственными вычислениями имеем:

$$\mathcal{A}_t^{\sigma,\varepsilon,\theta_n}f(y',\, y_n, y_{n+1}) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f(y' - tx',\, y_n -$$

$$- t(x_n(x', \theta_n, \sigma, \varepsilon)\sin\theta_n + (C(\sigma,\varepsilon) + \varepsilon\phi(x',\, x_n(x',\, \theta_n, \sigma, \varepsilon), \sigma)\cos\theta_n, y_{n+1})\psi_1(x', \theta_n, \varepsilon)dx'.$$

Так как $x_n(x', \theta_n, \sigma, \varepsilon)$ — решение уравнения (7.6), то оно удовлетворяет условиям:

$$x_n(x', \theta_n, \sigma, 0) = C(\sigma, 0)\operatorname{tg}\theta_n.$$

Следовательно, согласно теореме деления (см. [18]), функция $x_n(x',\, \theta_n, \sigma, \varepsilon) - C(\sigma, \varepsilon)\operatorname{tg}\theta_n$ записывается в виде:

$$x_n(x',\, \theta_n, \sigma, \varepsilon) - C(\sigma, 0)\operatorname{tg}\theta_n = \varepsilon\theta_n g(x', \theta_n, \sigma, \varepsilon),$$

где g — некоторая гладкая функция.

Таким образом, оператор усреднения $\mathcal{A}_t^{\sigma,\varepsilon,\theta_n}$ приводится к виду:

$$\mathcal{A}_t^{\sigma,\varepsilon,\theta_n}f(y',\, y_n, y_{n+1}) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f(y' - tx', y_n - t(C(\sigma,\, \varepsilon, \theta_n) + \varepsilon\phi_1(x',\, \theta_n, \sigma, \varepsilon), y_{n+1})\psi_1(x',\, \theta_n, \varepsilon)dx',$$

где

$$C_1(\sigma,\, \varepsilon, \theta_n) := C(\sigma,\, \varepsilon)\cos\theta_n + \sin\theta_n\operatorname{tg}\theta_n C(\sigma, 0),$$

$$\phi_1(x', \theta_n, \sigma, \varepsilon) := \phi(x', x_n(x', \theta_n, \sigma, \varepsilon), \sigma)\cos\theta_n + \theta_n\sin\theta_n g(x', \theta_n, \sigma, \varepsilon).$$

Следовательно, первоначальный оператор усреднения $A_t^{\sigma,\varepsilon}$ записывается в виде:

$$A_t^{\sigma,\varepsilon}f(y) = \int\limits_{-b_n}^{b_n} (R^{\theta_n}\mathcal{A}_t^{\sigma,\varepsilon,\theta_n}R^{-\theta_n})f(y)d\theta_n.$$

В частности, в случае $n = 2$ придем к доказательству леммы 7.1. В случае $n > 2$ используется метод индукции и доказательство леммы 7.1 завершается. □

Доказательство теоремы 7.1. Если $\phi(x, \sigma)$ удовлетворяет условиям теоремы 7.1, то вращением системы координат можем считать, что $\alpha := (\tau, 0, \ldots, 0)$, иными словами,

$$\partial_1^\tau\phi(0, 0) \neq 0.$$

Теперь, применяя лемму 7.1, можно записать оператор усреднения в виде (7.4). Если $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, то $\mathcal{A}_t^{\sigma,\varepsilon}f(y)$ — непрерывная функция от $(t, y, \sigma, \varepsilon)$, и $\mathcal{A}_t^{\sigma,\varepsilon,\theta}f(y)$ — также непрерывная функция от $(t, y, \sigma, \theta, \varepsilon)$. Заметим, что согласно лемме 7.1 для полученной функции $\phi_2(x_1, \theta, \sigma, \varepsilon)$ выполняется условие

$$\partial_1^\tau\phi_2(0, 0, 0, 0) \neq 0.$$

Поэтому, фиксируя y, можем записать следующее очевидное неравенство:

$$\sup_{t>0}|A_t^{\sigma,\varepsilon}f(y)| \leqslant \int\limits_{-b_n}^{b_n}\int\limits_{-b_{n-1}}^{b_{n-1}}\dots\int\limits_{-b_2}^{b_2}\sup_{t>0}|R^\theta\mathcal{A}_t^{\sigma,\varepsilon,\theta}R^{-\theta}f(y)|d\theta.$$

Так как θ не зависит от t, то для фиксированного θ можем использовать «монотонность» оператора вращения и имеем:

$$\sup_{t>0}|R^\theta\mathcal{A}_t^{\sigma,\varepsilon,\theta}R^{-\theta}f(y)| \leqslant R^\theta\sup_{t>0}|\mathcal{A}_t^{\sigma,\varepsilon,\theta}R^{-\theta}f(y)|.$$

Введем максимальный оператор, зависящий от параметров $(\sigma,\varepsilon,\theta)$:

$$\mathcal{M}^{\sigma,\varepsilon,\theta}f(y)| := \sup_{t>0}|\mathcal{A}_t^{\sigma,\varepsilon,\theta}R^{-\theta}f(y)|. \tag{7.8}$$

Согласно [27, теорема 4.2], для максимального оператора (7.8) при любом фиксированном $p>\tau$ получим оценку:

$$\|\mathcal{M}^{\sigma,\varepsilon,\theta}f(y)|\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})} \leqslant C_p\varepsilon^{-\frac{1}{p}}\|R^{-\theta}f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})} = C_p\varepsilon^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})}.$$

Наконец, интегрируя последнюю оценку по множеству $\{|\theta_n|<b_n, |\theta_{n-1}|<b_{n-1}\dots,|\theta_2|<b_2\}$, получим искомую оценку. Что завершает доказательство теоремы 7.1. □

8. Оценки максимальных операторов, ассоциированных с выпуклыми гиперповерхностями

В этом разделе докажем аналог теоремы Иосевича—Соера [33] для произвольных выпуклых аналитических гиперповерхностей.

Теорема 8.1. *Пусть S — произвольная выпуклая аналитическая гиперповерхность, удовлетворяющая условиям трансверсальности в каждой точке носителя плотности $0\leqslant\psi\in C_0^\infty(S)$, и*

$$h_\psi(S) := \sup_{x\in\mathrm{supp}(\psi)} h_x(S).$$

Тогда для любого $p>\max\{h_\psi(S),2\}$ максимальный оператор $\mathcal{M}$ ограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$.

Более того, если для некоторой точки $x^0\in S$ выполняется неравенство

$$\psi(x^0)>0,$$

то для любого $1\leqslant p\leqslant h_{x^0}(S)$ максимальный оператор $\mathcal{M}$ неограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$. В частности, если $h_{x^0}(S)\geqslant 2$, то имеет место равенство

$$\mathbb{P}_{x^0}(S)=h_{x^0}(S).$$

Доказательство. Используя стандартное разбиение единицы, мы можем считать, что плотность ψ сосредоточена в достаточно малой окрестности фиксированной точки x^0, скажем, $x^0=(0,\dots,0,1)$, а также гиперповерхность S задана в виде графика выпуклой вещественно-аналитической функции, т. е.

$$x_{n+1}=1+\phi(x).$$

Здесь ϕ — вещественно-аналитическая выпуклая функция, удовлетворяющая условиям: $\phi(0)=0$, $\nabla\phi(0)=0$. Тогда покажем, что существует окрестность U точки $x^0:=(0,\dots,0,1)$ такая, что для любой неотрицательной функции $\psi\in C_0^\infty(S\bigcap U)$ и $p>\max\{h(\phi),2\}$ максимальный оператор $\mathcal{M}$ ограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$. Более, того, если $\psi(0)\neq 0$, а также $h(\phi)\geqslant 2$, то для любого $1\leqslant p\leqslant h(\phi)$ максимальный оператор $\mathcal{M}$ неограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$.

Как известно, поведение максимальных операторов инвариантно относительно линейной замены переменных пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. С другой стороны, согласно следствию 5.2 функция ϕ приводится к специальному виду

$$\phi(x)=p(x')+R(x',x''),$$

где $p(x')$ — выпуклый полином и $R(x', x'')$ — остаточный член. Поэтому без ограничения общности можем считать, что первоначальная функция приведена к этому виду и, следовательно, исходная система координат приспособлена к функции ϕ. Исследуем поведение оператора усреднения

$$A_t f(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y - tx, y_{n+1} - t(1 + \phi(x)))\psi_1(x)dx, \tag{8.1}$$

где

$$\psi_1(x) = \psi(x)\sqrt{1 + |\nabla\phi(x)|^2},\ \psi_1 \in C_0^\infty(V),$$

а $V \subset \mathbb{R}^n$ — некоторая окрестность начала координат.

Пусть $\rho(x')$ — квазиоднородная «норма», определяемая весом κ:

$$\rho(x') = x_1^{k_1} + \ldots + x_m^{k_m},$$

и ω — бесконечно гладкая функция, удовлетворяющая условиям $0 \leqslant \omega \leqslant 1$,

$$\omega(x') = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \rho(x') \leqslant 1, \\ 0 & \text{при} \quad \rho(x') \geqslant 2. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию:

$$\chi(x') := \omega(x') - \omega(\delta_2(x')).$$

Тогда

$$\operatorname{supp}(\chi) \subset D := \{\frac{1}{2} \leqslant \rho(x') \leqslant 2\}.$$

Пусть $\chi_j(x') := \chi(\delta_{2^j}(x'))$. Легко показать, что выполняется следующее равенство:

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} \chi_j(x') = 1 \quad \text{при} \quad 0 < \rho(x') \leqslant 2^{1-j_0}.$$

В соответствии с этим разложением для оператора усреднения $A_t f$ получим

$$A_t f = \sum_{j=j_0}^{\infty} A_t^j f(y),$$

где

$$A_t^j f(y) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y - tx, y_{n+1} - t(1 + \phi(x)))\psi_1(x)\chi_j(x')dx.$$

Соответствующий максимальный оператор обозначается через $\mathcal{M}^j$.

Теперь используем замену переменных, заданную растяжением $x' = \delta_{2^{-j}}(w')$, $x_i = w_i$, где $w' \in D$, $i = \overline{m+1, n}$. В результате для оператора усреднения $A_t^j f$ получим выражение

$$A_t^j f(y) = 2^{-j|\kappa|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y' - t\delta_{2^{-j}}(w'), y_{m+1} - tw_{m+1}, \ldots, y_n - tw_n,$$
$$y_{n+1} - t(1 + 2^{-j}(p(w') + R_j(w)))\tilde{\psi}_1((\delta_{2^{-j}}w'), w'')\chi(w')dw,$$

где $R_j(w) = 2^j R(\delta_{2^{-j}}w', w'')$, $\tilde{\psi}_j(w) = \psi_1(\delta_{2^{-j}}(w'), w'')$, $|\kappa| = \dfrac{1}{h(\phi)}$. Здесь $j \geqslant j_0$, и в зависимости от малости носителя ψ_1 можем выбрать j_0 достаточно большим.

Следующий оператор растяжения

$$T^j f(y) := 2^{\frac{j|\kappa|}{p}} f(\delta_{2^j}(y'),\, y'',\, y_{n+1})$$

преобразуют оператор усреднения $A_t^j f$ к новому оператору:

$$T^{-j} A_t^j T^j f(y) = 2^{-j|\kappa|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\Big(y - tw, y_{n+1} - t(1 + 2^{-j}(p(w') + R_j(w))\Big)\tilde{\psi}_1(w)\chi(w')dw.$$

Так как $\operatorname{supp}(\chi) \subset \{\frac{1}{2} \leqslant \rho(w') \leqslant 2\}$, то тип гиперповерхности S, заданной уравнением

$$w_{n+1} = p(w') \neq 0,$$

в каждой точке w' носителя функции χ совпадает с 2, т. е. $\tau_{w'}(S) = 2$ (см. [33]). Поэтому, используя подходящее разбиение единицы, можем применить теорему 7.1 к максимальному оператору $\mathcal{M}^j$, так что этот оператор ограничен в L^p при $p > 2$. Более того, справедлива следующая оценка:

$$\|\mathcal{M}^j f\|_{L^p} \leqslant \|\sup_{t>0} |A_t^j f|\|_{L^p} \leqslant D_p 2^{-\frac{j}{h(\phi)} + \frac{j}{p}} \|f\|_{L^p}.$$

Следовательно,

$$\sum_{j \geqslant j_0} \|M^j f\|_{L^p} \leqslant \sum_{j \geqslant j_0} D_p 2^{-\frac{j}{h(\phi)} + \frac{j}{p}} \|f\|_{L^p},$$

где D_p — некоторое положительное число.

Последний ряд сходится при $p > \max\{2, h(\phi)\}$. Поэтому для произвольного $p > \max\{2, h(\phi)\}$ справедлива следующая оценка:

$$\|\mathcal{M} f\|_{L^p} \leqslant \sum_{j \geqslant j_0} \|M^j f\|_{L^p} \leqslant C_p \|f\|_{L^p}.$$

Следовательно, максимальный оператор $\mathcal{M}$ ограничен в L^p при $p > \max\{2, h(\phi)\}$.

Теперь, предполагая $\psi_1(0) > 0$, покажем, что максимальный оператор $\mathcal{M}$ не ограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ при $p \leqslant h$. Рассмотрим следующую функцию:

$$f(x, x_{n+1}) = \frac{\eta_1(x)\eta_2(x_{n+1})}{|x_{n+1}|^{\frac{1}{p}} |\ln |x_{n+1}||}$$

(см. [41]), где η_1, η_2 — некоторые неотрицательные финитные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\eta_1(x)\eta_2(x_{n+1}) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant \dfrac{\delta}{2}, \\ 0, & |x| \geqslant \delta. \end{cases}$$

Тогда $f \in L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ при $p > 1$. Здесь κ — достаточно малое число. Значение оператора усреднения в этой функции записывается в виде:

$$A_t f(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\eta_1(y - tz)\eta_2(y_{n+1} - t(1 + p(x') + R(x', x'')))}{|y_{n+1} - t(1 + p(x') + R(x', x''))|^{\frac{1}{p}} |\ln |y_{n+1} - t(1 + p(x') + R(x', x''))||} \psi_1(x) dx.$$

Следовательно, при $t = y_{n+1} > 0$ и достаточно малых $(y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1})$ получим:

$$\sup_{t>0} |A_t^1 f(y)| \geqslant C_1 \int_{|x| \leqslant \frac{\delta}{2}} \frac{1}{||p(x') + R(x', x'')|^{\frac{1}{p}} \ln |p(x') + R(x', x'')||^{\frac{1}{p}}} dx,$$

где C_1 — некоторое положительное число.

Таким образом, если $\psi_1(0) \neq 0$, то последний интеграл в правой части неравенства расходится при $p \leqslant h(\phi)$. Поэтому для таких значений y имеем $\mathcal{M} f(y) = +\infty$ и, следовательно, $\mathcal{M} f \notin L^q(\mathbb{R}^{n+1})$ для произвольного $q \geqslant 1$. Мы можем заключить, что для $h(\phi) \geqslant p > 1$ имеет место включение $f \in L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ и $\mathcal{M} f \notin L^q(\mathbb{R}^{n+1})$ для произвольного числа $q \geqslant 1$. В частности, максимальный оператор неограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$.

Наконец, стандартные методы разбиения единицы завершают доказательство теоремы 8.1. □

Пусть S — гладкая гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$, и пусть $\mathfrak{B}_u(x^0, S)$ обозначает множество всех $\beta \leqslant 0$, для которых существует окрестность U_β точки x^0 в S такая, что для всех функций $\psi \in C_0^\infty(U_\beta)$ выполняется следующая оценка:

$$\left| \int_S e^{i(x,\xi)} \psi(x) dS(x) \right| \leqslant C_\beta(\psi)(1 + |\xi|)^\beta \quad \text{для каждого} \quad \xi \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{8.2}$$

Тогда

$$\beta_u(x^0, S) := \inf\{\beta : \beta \in \mathfrak{B}_u(x^0, S)\}.$$

Число $\beta_u(x^0, S)$ называется *равномерным показателем осцилляции* преобразования Фурье поверхностной меры dS в точке x^0.

Это определение близко первоначальному определению В. И. Арнольда [1].

Если мы ограничимся нормальным направлением к гиперповерхности S в точке x^0, то можем определить аналогичное понятие: *индивидуальный показатель осцилляции* гиперповерхности S в этой точке $x^0 \in S$. Точнее, если $N(x^0)$ — единичный вектор нормали к S в точке x^0, то определим $\mathfrak{B}(x^0, S)$ как множество всех $\beta \leqslant 0$ таких, что существует окрестность U_β точки x^0 в S такая, что для произвольной функции $\psi \in C_0^\infty(U_\beta)$, выполняется оценка (8.2) вдоль направления $\mathbb{R}\, N(x^0)$, т. е.

$$\left| \int\limits_S e^{i\lambda(x, N(x^0))} \psi(x) dS(x) \right| \leqslant C_\beta \, (1 + |\lambda|)^\beta \text{ для любого } \lambda \in \mathbb{R}. \tag{8.3}$$

Тогда

$$\beta(x^0, S) := \inf\{\beta : \beta \in \mathfrak{B}(x^0, S)\}.$$

Это число называется *индивидуальным показателем осцилляции* преобразования Фурье поверхностной меры dS в точке x^0. Здесь аналитичность фазы не предполагается. Следует отметить, что определение, данное в монографии [3], более точное. Однако оно основывается на явном виде асимптотического разложения осцилляторного интеграла с аналитической фазой и, как следствие, не применимо для случая, когда фаза является произвольной гладкой функцией, так как асимптотическое поведение осцилляторных интегралов с гладкой фазой может быть довольно экзотичным.

В случае, когда S задается в виде графика функции ϕ, то понятие $\beta_u(\phi)$ совпадает с определением равномерного показателя осцилляции, данным в монографии [3, с. 148], если мы ограничимся с «линейными» деформациями, и $\beta(\phi)$ совпадает с индивидуальным показателем осцилляции для ϕ, данным в работе [1] (ср. с [27]).

В работе [16] доказано равенство

$$\beta_u(x^0, S) = \max\{\beta(x^0, S), -\frac{1}{2}\}$$

для произвольных выпуклых аналитических гиперповерхностей.

Теперь мы определим *равномерный контактный индекс* $\gamma_u(x^0, S)$ гиперповерхности S в точке $x^0 \in S$ следующим образом (см. [27]). Пусть $\mathfrak{C}_u(x^0, S)$ обозначает множество всех вещественных чисел $\gamma \geqslant 0$, для которых существует открытая окрестность U_γ точки x^0 на S такая, что для произвольной аффинной гиперплоскости H в $\mathbb{R}^{n+1}$ выполняется оценка

$$\int\limits_{U_\gamma} d_H(x)^{-\gamma} \, dS(x) < \infty, \tag{8.4}$$

где $d_H(x)$ — расстояние от точки x до гиперплоскости H.

Наконец, положим

$$\gamma_u(x^0, S) := \sup\{\gamma : \gamma \in \mathfrak{C}_u(x^0, S)\}.$$

Аналогично, пусть $\mathfrak{C}(x^0, S)$ обозначает множество всех $\gamma \geqslant 0$, для которых существует окрестность U_γ точки x^0 на S такая, что

$$\int\limits_{U_\gamma} d_{T,x^0}(x)^{-\gamma} \, dS(x) < \infty, \tag{8.5}$$

где T — касательная плоскость к S в точке x^0, и назовем число

$$\gamma(x^0, S) := \sup\{\gamma : \gamma \in \mathfrak{C}(x^0, S)\}$$

контактным индексом $\gamma(x^0, S)$ гиперповерхности S в точке $x^0 \in S$.

Ясно, что

$$\beta_u(x^0, S) \geqslant \beta(x^0, S), \quad \gamma_u(x^0, S) \leqslant \gamma(x^0, S). \tag{8.6}$$

Следующее утверждение подтверждает гипотезу Стейна—Иосевича—Соера для выпуклых аналитических гиперповерхностей.

Теорема 8.2. *Пусть S — аналитическая выпуклая гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$, и пусть $x^0 \in S$ — фиксированная точка такая, что $h(x^0, S) \geqslant 2$. Тогда справедливы следующие равенства*:

$$-\beta_u(x^0, S) = -\beta(x^0, S) = \gamma_u(x^0, S) = \gamma(x^0, S) = 1/h(x^0, S) = 1/p_{x^0}(S).$$

Заметим, что для аналитических гиперповерхностей оценка $\gamma(x^0, S) \geqslant 1/h(x^0, S)$ в случае $h(x^0, S) \geqslant 1$ доказана в классической работе А. Н. Варченко [6], а также в работе [36] рассмотрены аналогичные задачи. Частные результаты содержатся в работах [23, 24].

Как следствие теоремы 8.2, получим

Следствие 8.1. *Пусть S — аналитическая выпуклая гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$, и пусть $x^0 \in S$ — фиксированная точка такая, что $h(x^0, S) \geqslant 2$. Тогда существует окрестность $U \subset S$ такая, что для произвольной точки $x \in U$ выполняется неравенство*

$$h(x, S) \leqslant h(x^0, S).$$

9. Критерий L^p-ограниченности максимальных операторов

Результаты следующей теоремы отвечают на следующий вопрос: для каких гиперповерхностей соответствующий максимальный оператор ограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ при некотором конечном значении p?

Теорема 9.1. *Пусть S — гладкая гиперповерхность, удовлетворяющая условию трансверсальности в каждой точке носителя плотности $0 \leqslant \psi \in C_0^\infty(S)$, и*

$$\tau_\psi(S) := \sup_{x \in \operatorname{supp}(\psi)} \tau_x(S).$$

Тогда для любого $p > \tau_\psi(S)$ максимальный оператор $\mathcal{M}$ ограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$. Обратно, если максимальный оператор ограничен в L^p при некотором конечном p, то гиперповерхность S имеет конечный тип в каждой точке x^0 такой, что $\psi(x^0) > 0$.

Доказательство. Используя стандартное разбиение единицы, мы можем считать, что плотность ψ сосредоточена в достаточно малой окрестности фиксированной точки x^0, скажем, $x^0 = (0, \dots, 0, 1)$, а также гиперповерхность S задана в виде графика гладкой функции, т. е.

$$x_{n+1} = 1 + \phi(x).$$

Здесь ϕ — гладкая функция, удовлетворяющая условиям: $\phi(0) = 0$, $\nabla\phi(0) = 0$ см. [8]. Покажем, что существует окрестность U точки $(0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ такая, что для любой неотрицательной функции $\psi \in C_0^\infty(S \bigcap U)$ и $p > \tau_{x^0}(S)$ максимальный оператор $\mathcal{M}$ ограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$.

Свойство $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$-ограниченности максимальных операторов инвариантно относительно линейной замены переменных пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Поэтому без ограничения общности можем считать, что

$$\partial_1^m \phi(0) \neq 0,$$

где $m = \tau_{x^0}(S)$.

Пусть $0 \leqslant \omega \leqslant 1$ — бесконечно гладкая сферически-симметричная функция, удовлетворяющая условиям:

$$\omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{при} \quad |x| \geqslant 2. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$\chi(x) := \omega(x) - \omega(2x).$$

Тогда

$$\operatorname{supp}(\chi) \subset D := \{\frac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 2\}.$$

Пусть $\chi_j(x) := \chi(2^j x)$. Легко показать, что выполняется следующее равенство:

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} \chi_j(x) = 1 \quad \text{при} \quad 0 < |x| \leqslant 2^{1-j_0}.$$

В соответствии с этим разложением для оператора усреднения $A_t f$ получим

$$A_t f = \sum_{j=j_0}^{\infty} A_t^j f(y),$$

где

$$A_t^j f(y) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y - tx, y_{n+1} - t(1 + \phi(x)))\psi(x)\chi_j(x)dx.$$

Соответствующий максимальный оператор обозначается через $\mathcal{M}^j$.

Теперь используем замену переменных, заданную растяжением $x = 2^{-j}w$. В результате для оператора усреднения $A_t^j f$ получим выражение

$$A_t^j f(y) = 2^{-jn} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y - t2^{-j}w,\, y_{n+1} - t(1 + 2^{-jm}(p(w) + R_j(w))) \times \times \tilde{\psi}(2^{-jm}w)\chi(w)dw,$$

где

$$R_j(w) = 2^j R(2^{-j}w), \quad \tilde{\psi}_j(w) = \psi(2^{-j}w),$$

здесь $j \geqslant j_0$, и в зависимости от малости носителя ψ мы можем выбрать j_0 достаточно большим.

Операторы растяжений

$$T^j f(y) := 2^{\frac{jn}{p}} f(2^j y)$$

преобразуют операторы усреднения $A_t^j f$ в новые операторы:

$$T^{-j} A_t^j T^j f(y) = 2^{-jn} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\Bigg(y - tw, y_{n+1} - t(1 + 2^{-jm}(p(w) + R_j(w))\Bigg)\tilde{\psi}(w)\chi(w)dw.$$

Теперь, согласно теореме 7.1 при $p > m$, получим:

$$\|\mathcal{M}^j f\|_{L^p} \leqslant \|\sup_{t>0} |A_t^j f|\|_{L^p} \leqslant D_p 2^{-jn + \frac{jm}{p}} \|f\|_{L^p}. \tag{9.1}$$

Следовательно,

$$\sum_{j \geqslant j_0} \|M^j f\|_{L^p} \leqslant \sum_{j \geqslant j_0} D_p 2^{-jn + \frac{jm}{p}} \|f\|_{L^p}, \tag{9.2}$$

где D_p — некоторое положительное число. Последний ряд сходится при $p > m$. Поэтому для произвольного $p > m$ справедлива следующая оценка:

$$\|\mathcal{M} f\|_{L^p} \leqslant \sum_{j \geqslant j_0} \|M^j f\|_{L^p} \leqslant C_p \|f\|_{L^p}. \tag{9.3}$$

Следовательно, максимальный оператор $\mathcal{M}$ ограничен в L^p при $p > m$.

Теперь, предполагая $\psi(0) > 0$, покажем, что максимальный оператор $\mathcal{M}$ неограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ при $p < \infty$, если функция ϕ плоская в начале координат. Действительно, если ϕ — плоская в начале координат, то для любого конечного q следующий интеграл расходится:

$$\int\limits_U \frac{dx}{|\phi(x)|^{\frac{1}{q}}} = \infty,$$

где U — произвольная окрестность начала координат. Поэтому, согласно необходимому условию, приведенному в работе [33], соответствующий максимальный оператор неограничен в L^p при $p < q$. Таким образом, если максимальный оператор ограничен в некотором конечном значении $p < q$, то гиперповерхность в каждой точке x^0 такой, что $\psi(x^0) > 0$, имеет конечный тип. $\square$

Теперь приведем критерий L^p-ограниченности максимального оператора в терминах инварианта Λ_1 гиперповерхности S.

Следствие 9.1. *Если для гладкой гиперповерхности, удовлетворяющей условиям трансверсальности, инвариант $\Lambda_1(x)$ не имеет нулей бесконечного порядка, то существует конечное число $p(S)$ такое, что при любом $p > p(S)$ соответствующий максимальный оператор ограничен в L^p.*

Обратно, если максимальный оператор ограничен в L^p для некоторого конечного p, то инвариант $\Lambda_1(x)$ не имеет нулей бесконечного порядка в точках, где плотность положительна.

В частности, для максимального оператора $\mathcal{M}$, ассоциированного с аналитической гиперповерхностью S, показатель ограниченности $p(S)$ является конечным числом тогда и только тогда, когда для S выполняется соотношение $\Lambda_1 \not\equiv 0$.

Следствие 9.1 является обобщением теоремы С. Д. Согги. Он доказал, что если S — гладкая гиперповерхность и $\Lambda_1 \neq 0$, то максимальный оператор ограничен в L^p при $p > 2$.

10. Максимальные операторы, ассоциированные с вырожденными гиперповерхностями

В этом заключительном разделе мы рассмотрим оценку максимальных операторов, ассоциированных с вырожденными гиперповерхностями. Это такие гиперповерхности, для которых ранг нормального отображения всюду не превосходит единицы.

Теорема 10.1. *Пусть S — гладкая гиперповерхность, удовлетворяющая условию $\Lambda_2 \equiv 0$, а также условию трансверсальности в каждой точке носителя плотности $0 \leqslant \psi \in C_0^\infty(S)$, и*

$$h_\psi(S) := \sup_{x\in\operatorname{supp}(\psi)} h_x(S).$$

Тогда для любого $p > h_\psi(S)$ максимальный оператор $\mathcal{M}$ ограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$. Более того, если $\psi(x^0) > 0$, то для любого числа p, принадлежащего интервалу $(1, h_{x^0})$, максимальный оператор $\mathcal{M}$ неограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$. При этом, если S — аналитическая гиперповерхность в точке x^0 и $\psi(x^0) > 0$, то для $p = h_{x^0}(S)$ максимальный оператор $\mathcal{M}$ также неограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$.

Доказательство. Снова ограничимся исследованием максимального оператора, когда носитель плотности находится в достаточно малой окрестности фиксированной точки. Следовательно, можем предполагать, что гиперповерхность задана в виде графика функции $1 + \phi$. Как известно, поведение максимальных операторов инвариантно относительно линейной замены переменных пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. С другой стороны, согласно теореме 5.2, функция ϕ приводится к следующему специальному виду:

$$\phi(x) = x_1^h g(x) + \sum_{j=0}^{h-1} x_1^j g_j(x_2, \ldots, x_n),$$

где $g(x)$ — бесконечно гладкая функция, такая что $g(0) \neq 0$, а также $\{g_j(x_2, \ldots, x_n)\}_{j=0}^{h-1}$ — бесконечно гладкие плоские функции в нуле. Теперь, применяя теорему 7.1, получим, что при $p > h(\phi)$ максимальный оператор $\mathcal{M}$ ограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$.

Наконец, докажем неограниченность максимального оператора $\mathcal{M}$ в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ при $1 < p < h(\phi)$. Согласно необходимому условию ограниченности максимальных операторов [33], достаточно доказать соотношение

$$\int_U \frac{dx}{|\phi(x)|^{\frac{1}{p}}} = \infty$$

при $p < h$. При доказательстве этого соотношения используем следующую лемму.

Лемма 10.1. *Пусть γ — вещественное число, удовлетворяющее условию*

$$\frac{1}{h} < \gamma < \frac{1}{h-1},$$

и $\rho(b) \leqslant 1$, где

$$\rho(b) := |b_0| + |b_1|^{\frac{h-1}{h}} + \ldots + |b_{h-2}|^{\frac{2}{h}}.$$

Тогда существует положительное число c такое, что справедливо следующее неравенство:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx_1}{|x_1^h + \sum\limits_{j=0}^{h-2} b_j x_1^j|^\gamma} \geqslant \frac{c}{\rho(b)^{\gamma - \frac{1}{n}}}.$$

Доказательство. Фактически справедлива аналогичная оценка сверху. Это утверждение можно рассмотреть как аналог результатов Дж. Дж. Дейстермата [22]. В рассматриваемом интеграле сделаем замену переменных, заданную растяжением $x_1 = \rho(b)^{\frac{1}{h}} y_1$ и получим:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx_1}{|x_1^h + \sum\limits_{j=0}^{h-2} b_j x_1^j|^\gamma} = \rho(b)^{\frac{1}{n} - \gamma} \int\limits_0^{\rho(b)^{-\frac{1}{h}}} \frac{dy_1}{|y_1^h + \sum\limits_{j=0}^{h-2} \tilde{b}_j y_1^j|^\gamma},$$

где

$$\tilde{b}_j := \frac{b_j}{\rho(b)^{\frac{h-j}{h}}}.$$

Заметим, что для любого $b \neq 0$ выполняется равенство $\rho(\tilde{b}_j) = 1$. Поскольку $\rho(\tilde{b}_j) = 1$, то

$$y_1^h + \sum_{j=0}^{h-2} \tilde{b}_j y_1^j$$

— равномерно ограниченная функция при $y_1 \in [0, 1]$. Таким образом, мы имеем:

$$\rho(b)^{\frac{1}{n} - \gamma} \int\limits_0^{\rho(b)^{-\frac{1}{h}}} \frac{dy_1}{|y_1^h + \sum\limits_{j=0}^{h-2} \tilde{b}_j y_1^j|^\gamma} \geqslant \rho(b)^{\frac{1}{n} - \gamma} \int\limits_0^1 \frac{dy_1}{|y_1^h + \sum\limits_{j=0}^{h-2} \tilde{b}_j y_1^j|^\gamma} \geqslant C\rho(b)^{\frac{1}{n} - \gamma}.$$

Что и требовалось доказать. □

Следующее утверждение является простым следствием теоремы о приведении нормальной формы функции (см. [2], а также [18, теорема 7.5.13, с. 247]).

Лемма 10.2. *Пусть бесконечно гладкая функция $\phi(x)$ имеет вид*

$$\phi(x) = x_1^h g(x) + \sum_{j=0}^{h-1} x_1^j g_j(x_2, \ldots, x_n),$$

где $g(x)$ — бесконечно гладкая функция, удовлетворяющая условию $g(0) \neq 0$, а также $\{g_j(x_2, \ldots, x_n)\}_{j=0}^{h-1}$ — бесконечно гладкие плоские функции в нуле. Тогда в некоторой окрестности нуля существует бесконечно гладкая функция $X_1 = X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая условиям

$$X_1(0) = 0, \quad \partial_1 X_1(0, \ldots, 0) \neq 0,$$

и выполняется соотношение

$$\phi(x_1(X_1, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n)) = \pm X_1^h + \sum_{j=0}^{h-2} X_1^j b_j(x_2, \ldots, x_n),$$

где $x_1 = x_1(X_1, x_2, \ldots, x_n)$ — обратная функция, причем $\{b_j\}_{j=0}^{h-2}$ — бесконечно гладкие плоские функции в начале координат.

Теперь покажем, что для функции

$$\phi(x) = x_1^h g(x) + \sum_{j=0}^{h-1} x_1^j g_j(x_2, \ldots, x_n)$$

в любой достаточно малой окрестности нуля U имеет место соотношение

$$\int\limits_U \frac{dx}{|\phi(x)|^{\frac{1}{p}}} = \infty$$

при только $p < h$. Действительно, в интеграле

$$\int\limits_U \frac{dx}{|\phi(x)|^{\frac{1}{p}}}$$

можем считать, что $U = [-\delta, \delta]^n$ для некоторого достаточно малого положительного числа δ. Теперь используем замену переменных

$$x_1 = x_1(X_1, x_2, \ldots, x_n), \quad x_2 = X_2, \ldots x_n = X_n$$

и согласно лемме 10.2 имеем:

$$\int\limits_U \frac{dx}{|\phi(x)|^{\frac{1}{p}}} = \int\limits_V \frac{|\partial_1 x_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)| dX}{|\pm X_1^h + \sum\limits_{j=0}^{h-2} X_1^j b_j(X_2, \ldots, X_n)|^{\frac{1}{p}}}.$$

Теперь предположим, что $h - 1 < p < h$. Так как в некоторой окрестности нуля выполняется следующая оценка снизу:

$$|\partial_1 x_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)| \geqslant \varepsilon > 0,$$

то, применяя лемму 10.1, получим:

$$\int\limits_U \frac{dx}{|\phi(x)|^{\frac{1}{p}}} \geqslant C \int\limits_{[-\delta,\delta]^{n-1}} \frac{dX_2 \ldots dX_n}{(|b_0(X_2, \ldots, X_n)| + |b_1(X_2, \ldots, X_n)|^{\frac{h-1}{h}} + \ldots + |b_{h-2}(X_2, \ldots, X_n)|^{\frac{2}{h}})^{\frac{1}{p} - \frac{1}{h}}}.$$

Поскольку $\{b_j\}_{j=0}^{h-2}$ — бесконечно гладкие плоские функции в начале координат, то последний интеграл расходится для любого $p < h$. Для аналитических функций соответствующий интеграл также расходится при $p = h(\phi)$. Таким образом, согласно результатам работы [33], максимальный оператор неограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ при $1 < p < h(\phi)$ для гладких гиперповерхностей. При этом, если ϕ аналитична, то соответствующий максимальный оператор также неограничен в $L^{h(\phi)}(\mathbb{R}^{n+1})$. Что и требовалось доказать. □

Заметим, что в случае, когда ϕ — бесконечно гладкая функция, удовлетворяющая условиям теоремы 10.1, вопрос об ограниченности в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ максимального оператора $\mathcal{M}$ при $p = h(\phi)$ остается открытым. В работе [33] приведен пример, когда при $p = h(\phi)$ максимальный оператор ограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$. Таким образом, теорема 10.1 подтверждает гипотезу Иосевича—Соера для вырожденных гиперповерхностей.

Аналогом результатов работы [27] является следующая теорема.

Теорема 10.2. *Если S — бесконечно гладкая гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$, удовлетворяющая условиям трансверсальности в каждой точке, $\Lambda_2 \equiv 0$ и $x^0 \in S$ фиксированная точка, то справедливы следующие равенства*:

$$-\beta_u(x^0, S) = -\beta(x^0, S) = \gamma_u(x^0, S) = \gamma(x^0, S) = 1/h(x^0, S) = 1/\mathbb{P}_{x^0}(S).$$

Таким образом, задача, об L^p-ограниченности максимальных операторов для некоторого конечного значения p имеет окончательное решение. Однако проблема о точном значении показателя ограниченности максимальных операторов в общем случае остается открытой.

Основные результаты настоящей статьи доложены на Узбекско-Израильской международной конференции «Contemporary problems in mathematics and physics», проходившей в Ташкенте 6–10 октября 2017 года. Авторы благодарят академика А. С. Садуллаева и профессора Э. Х. Якубова за полезное обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И.* Замечания о методе стационарной фазы и числах Кокстера// Усп. мат. наук. — 1973. — *28*, № 5. — С. 17–44.
2. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений. Т. 1. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. — М.: Наука, 1982.
3. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений. Т. 2. Монодромия и асимптотики интегралов. — М.: Наука, 1984.
4. *Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н.* Тригонометрические интегралы// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1979. — *43*, № 5. — С. 971–1003.
5. *Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М.* Мероморфность функции P^λ// Функц. анализ и его прилож. — 1969. — *3*, № 1. — С. 84–86.
6. *Варченко А. Н.* Многогранники Ньютона и оценки осциллирующих интегралов// Функц. анализ и его прилож. — 1976. — *10*, № 3. — С. 13–38.
7. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. — М.: Физматгиз, 1959.
8. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
9. *Икромов И. А.* Демпфированные осцилляторные интегралы и максимальные операторы// Мат. заметки. — 2005. — *78*, № 6. — С. 833–852.
10. *Икромов И. А.* Суммируемость осцилляторных интегралов по параметрам и проблема об ограничении преобразования Фурье на кривых// Мат. заметки. — 2010. — *87*, № 5. — С. 734–755.
11. *Икромов И. А., Муранов Ш. А.* Об оценках осцилляторных интегралов с множителем гашения// Мат. заметки. — 2018. — *104*, № 2. — С. 200–215.
12. *Карпушкин В. Н.* Равномерные оценки осциллирующих интегралов с параболической и гиперболической фазой// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 1983. — *9*. — С. 3–39.
13. *Карпушкин В. Н.* Теорема о равномерных оценках осциллирующих интегралов с фазой, зависящей от двух переменных// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 1983. — *10*. — С. 150–169.
14. *Паламодов В. П.* Обобщенные функции и гармонический анализ// Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. Фундам. направл. — 1991. — *72*. — С. 5–134.
15. *Соболев С. Л.* Об одной теореме функционального анализа// Мат. сб. — 1938. — *4*. — № 3. — С. 471–497.
16. *Туракулов Д. Д.* Равномерные оценки осцилляторных интегралов с выпуклой фазой// Вестн. Башкир. ун-та. — 2008. — *13*, № 2. — С. 236–240.
17. *Федорюк М. В.* Метод перевала. — М.: Наука, 1977.
18. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. — М.: Мир, 1986.
19. *Atiyah M. F.* Resolution of singularities and division of distributions// Commun. Pure Appl. Math. — 1970. — *23*, № 2. — С. 145–150.
20. *Bourgain J.* Averages in the plane convex curves and maximal operators// J. Anal. Math. — 1986. — *47*. — С. 69–85.
21. *Buschenhenke S., Dendrinos S., Ikromov I. A., Müller D.* Estimates for maximal functions associated to hypersurfaces in $\mathbb{R}^3$ with height $h < 2$: Part I// arXiv: 1704.06520 [math.CA].
22. *Duistermaat J. J.* Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities// Commun. Pure Appl. Math. — 1974. — *27*. — С. 207–281.
23. *Greenblatt M.* Newton polygons and local integrability of negative powers of smooth functions in the plane// Trans. Am. Math. Soc. — 2006. — *358*, № 2. — С. 657–670.
24. *Greenblatt M.* L^p boundedness of maximal averages over hypersurfaces in $\mathbb{R}^3$// Trans. Am. Math. Soc. — 2013. — *365*, № 4. — С. 1875–1900.
25. *Greenleaf A.* Principal curvature and harmonic analysis// Indiana Univ. Math. J. — 1981. — *30*, № 4. — С. 519–537.
26. *Hartman P., Nirenberg L.* On spherical image maps whose Jacobians do not change sign// Am. J. Math. — 1959. — *81*. — С. 901–920.
27. *Ikromov I. A., Kempe M., Müller D.* Estimates for maximal functions associated to hypersurfaces in $\mathbb{R}^3$ and related problems of harmonic analysis// Acta Math. — 2010. — *204*. — С. 151–271.
28. *Ikromov I. A., Müller D.* On adapted coordinate systems// Trans. Am. Math. Soc. — 2011. — *363*, № 6. — С. 2821–2848.
29. *Ikromov I. A., Müller D.* Uniform estimates for the Fourier transform of surface carried measures in $\mathbb{R}^3$ and an application to Fourier restriction// J. Fourier Anal. Appl. — 2011. — *17*, № 6. — С. 1292–1332.
30. *Ikromov I. A., Müller D.* Fourier restriction for hypersurfaces in three dimensions and Newton polyhedra. — Princeton—Oxford: Princeton Univ. Press, 2016.

31. *Iosevich A.* Maximal operators associated to families of flat curves in the plane// Duke Math. J. — 1994. — *76*, № 2. — С. 633–644.
32. *Iosevich A., Liflyand E.* Decay of the Fourier transform. Analytic and geometric aspects. — Basel: Birkhäuser/Springer, 2014.
33. *Iosevich A., Sawyer E.* Maximal averages over surfaces// Adv. Math. — 1997. — *132*, № 1. — С. 46–119.
34. *Iosevich A., Sawyer E., Seeger A.* On averaging operators associated with convex hypersurfaces of finite type// J. Anal. Math. — 1999. — *79*. — С. 159–187.
35. *Nagel A., Seeger A., Wainger S.* Averages over convex hypersurfaces// Am. J. Math. — 1993. — *115*, № 4. — С. 903–927.
36. *Phong D. H., Stein E. M., Sturm J. A.* On the growth and stability of real-analytic functions// Am. J. Math. — 1999. — *121*, № 3. — С. 519–554.
37. *Schulz H.* Convex hypersurfaces of finite type and the asymptotics of their Fourier transforms// Indiana Univ. Math. J. — 1999. — *40*, № 4. — С. 1267–1275.
38. *Sogge C. D.* Maximal operators associated to hypersurfaces with one nonvanishing principal curvature// В сб.: «Fourier analysis and partial differential equations». — Boca Raton: CRC, 1995. — С. 317–323.
39. *Sogge C. D., Stein E. M.* Averages of functions over hypersurfaces in $\mathbb{R}^n$// Invent. Math. — 1985. — *82*, № 3. — С. 543–556.
40. *Stein E. M.* Maximal functions. I. Spherical means// Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 1976. — *73*, № 7. — С. 2174–2175.
41. *Stein E. M.* Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.
42. *Tristan C., Greenleaf A., Pramanik M.* A multi-dimensional resolution of singularities with applications to analysis// Am. J. Math. — 2013. — *135*, № 5. — С. 1179–1252.
43. *Zimmermann E.* On L^p-estimates for maximal averages over hypersurfaces not satisfying the transversality condition// Doctoral PhD thesis. — Kiel: Christian-Albrechts-Universität, 2014.

И. А. Икромов
Самаркандский государственный университет им. А. Навои,
Узбекистан, 703004, г. Самарканд, Университетский бульвар, д. 15
E-mail: `ikromov1@rambler.ru`

С. Э. Усманов
Самаркандский государственный университет им. А. Навои,
Узбекистан, 703004, г. Самарканд, Университетский бульвар, д. 15
E-mail: `usmanov-salim@mail.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-4-650-681 UDC 517.982.42

On Boundedness of Maximal Operators Associated with Hypersurfaces

© 2018 **I. A. Ikromov, S. E. Usmanov**

Abstract. In this paper, we obtain the criterion of boundedness of maximal operators associated with smooth hypersurfaces. Also we compute the exact value of the boundedness index of such operators associated with arbitrary convex analytic hypersurfaces in the case where the height of a hypersurface in the sense of A. N. Varchenko is greater than 2. Moreover, we obtain the exact value of the boundedness index for degenerated smooth hypersurfaces, i.e., for hypersurfaces satisfying conditions of the classical Hartman—Nirenberg theorem. The obtained results justify the Stein—Iosevich—Sawyer hypothesis for arbitrary convex analytic hypersurfaces as well as for smooth degenerated hypersurfaces. Also we discuss some related problems of the theory of oscillatory integrals.

REFERENCES

1. V. I. Arnold, "Zamechaniya o metode statsionarnoy fazy i chislakh Kokstera" [Remarks on the stationary phase method and the Coxeter numbers], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1973, **28**, No. 5, 17–44 (in Russian).
2. V. I. Arnold, A. N. Varchenko, and S. M. Guseyn-Zade, *Osobennosti differentsiruemykh otobrazheniy. T. 1. Klassifikatsiya kriticheskikh tochek, kaustik i volnovykh frontov* [Singularities of Differentiable Mappings. Vol. 1. Classification of singular points, caustics, and wave fronts], Nauka, Moscow, 1982 (in Russian).
3. V. I. Arnold, A. N. Varchenko, and S. M. Guseyn-Zade, *Osobennosti differentsiruemykh otobrazheniy. T. 2. Monodromiya i asimptotiki integralov* [Singularities of Differentiable Mappings. Vol. 2. Monodromy and Asymptotics of Integrals], Nauka, Moscow, 1984 (in Russian).
4. G. I. Arkhipov, A. A. Karatsuba, and V. N. Chubarikov, "Trigonometricheskie integraly" [Trigonometric integrals], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1979, **43**, No. 5, 971–1003 (in Russian).
5. I. N. Bernshteyn and I. M. Gel'fand, "Meromorfnost' funktsii P^{λ}" [Meromorphic property of the function P^{λ}], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1969, **3**, No. 1, 84–86 (in Russian).
6. A. N. Varchenko, "Mnogogranniki N'yutona i otsenki ostsilliruyushchikh integralov" [Newton's polyhedrons and estimates of oscillating integrals], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1976, **10**, No. 3, 13–38 (in Russian).
7. I. M. Gel'fand and G. E. Shilov, *Obobshchennye funktsii i deystviya nad nimi* [Generalized Functions and Operations on Them], Fizmatgiz, Moscow, 1959 (in Russian).
8. B. A. Dubrovin, S. P. Novikov, and A. T. Fomenko, *Sovremennaya geometriya* [Contemporary Geometry], Nauka, Moscow, 1979 (in Russian).
9. I. A. Ikromov, "Dempfirovannye ostsillyatornye integraly i maksimal'nye operatory" [Dampened oscillatory integrals and maximal operators], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2005, **78**, No. 6, 833–852 (in Russian).
10. I. A. Ikromov, "Summiruemost' ostsillyatornykh integralov po parametram i problema ob ogranichenii preobrazovaniya Fur'e na krivykh" [Summability of oscillatory integrals with respect to parameters and the problem on boundedness of the Fourier transformation on curves], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2010, **87**, No. 5, 734–755 (in Russian).
11. I. A. Ikromov and Sh. A. Muranov, "Ob otsenkakh ostsillyatornykh integralov s mnozhitelem gasheniya" [On estimates of oscillatory integrals with fading factor], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2018, **104**, No. 2, 200–215 (in Russian).
12. V. N. Karpushkin, "Ravnomernye otsenki ostsilliruyushchikh integralov s parabolicheskoy i giperbolicheskoy fazoy" [Uniform estimates of oscillating integrals with parabolic and hyperbolic phase], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 1983, **9**, 3–39 (in Russian).
13. V. N. Karpushkin, "Teorema o ravnomernykh otsenkakh ostsilliruyushchikh integralov s fazoy, zavisyashchey ot dvukh peremennykh" [Theorem on uniform estimates of oscillating integrals with phase depending on two variables], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 1983, **10**, 150–169 (in Russian).
14. V. P. Palamodov, "Obobshchennye funktsii i garmonicheskiy analiz" [Generalized functions and harmonic analysis], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. probl. mat. Fundam. napravl.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math. Fundam. Napravl.], 1991, **72**, 5–134 (in Russian).
15. S. L. Sobolev, "Ob odnoy teoreme funktsional'nogo analiza" [On one theorem of functional analysis], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1938, **4**, No. 3, 471–497 (in Russian).
16. D. D. Turakulov, "Ravnomernye otsenki ostsillyatornykh integralov s vypukloy fazoy" [Uniform estimates of oscillating integrals with convex phase], *Vestn. Bashkir. un-ta* [Bull. Bashkir Univ.], 2008, **13**, No. 2, 236–240 (in Russian).
17. M. V. Fedoryuk, *Metod perevala* [Saddle-Point Method], Nauka, Moscow, 1977 (in Russian).
18. L. Hörmander, *Analiz lineynykh differentsial'nykh operatorov s chastnymi proizvodnymi. T. 1. Teoriya raspredeleniy i analiz Fur'e* [The Analysis of Linear Partial Differential Operators. I. Distribution Theory and Fourier Analysis], Mir, Moscow, 1986 (Russian translation).
19. M. F. Atiyah, "Resolution of singularities and division of distributions," *Commun. Pure Appl. Math.*, 1970, **23**, No. 2, 145–150.
20. J. Bourgain, "Averages in the plane convex curves and maximal operators," *J. Anal. Math.*, 1986, **47**, 69–85.
21. S. Buschenhenke, S. Dendrinos, I. A. Ikromov, and D. Müller, "Estimates for maximal functions associated to hypersurfaces in $\mathbb{R}^3$ with height $h < 2$: Part I," *arXiv: 1704.06520 [math.CA].*

22. J. J. Duistermaat, “Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1974, **27**, 207–281.
23. M. Greenblatt, “Newton polygons and local integrability of negative powers of smooth functions in the plane,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 2006, **358**, No. 2, 657–670.
24. M. Greenblatt, “L^p boundedness of maximal averages over hypersurfaces in $\mathbb{R}^3$,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 2013, **365**, No. 4, 1875–1900.
25. A. Greenleaf, “Principal curvature and harmonic analysis,” *Indiana Univ. Math. J.*, 1981, **30**, No. 4, 519–537.
26. P. Hartman and L. Nirenberg, “On spherical image maps whose Jacobians do not change sign,” *Am. J. Math.*, 1959, **81**, 901–920.
27. I. A. Ikromov, M. Kempe, and D. Müller, “Estimates for maximal functions associated to hypersurfaces in $\mathbb{R}^3$ and related problems of harmonic analysis,” *Acta Math.*, 2010, **204**, 151–271.
28. I. A. Ikromov and D. Müller, “On adapted coordinate systems,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 2011, **363**, No. 6, 2821–2848.
29. I. A. Ikromov and D. Müller, “Uniform estimates for the Fourier transform of surface carried measures in $\mathbb{R}^3$ and an application to Fourier restriction,” *J. Fourier Anal. Appl.*, 2011, **17**, No. 6, 1292–1332.
30. I. A. Ikromov and D. Müller, *Fourier restriction for hypersurfaces in three dimensions and Newton polyhedra*, Princeton Univ. Press, Princeton—Oxford, 2016.
31. A. Iosevich, “Maximal operators associated to families of flat curves in the plane,” *Duke Math. J.*, 1994, **76**, No. 2, 633–644.
32. A. Iosevich and E. Liflyand, *Decay of the Fourier transform. Analytic and geometric aspects*, Birkhäuser/Springer, Basel, 2014.
33. A. Iosevich and E. Sawyer, “Maximal averages over surfaces,” *Adv. Math.*, 1997, **132**, No. 1, 46–119.
34. A. Iosevich, E. Sawyer, and A. Seeger, “On averaging operators associated with convex hypersurfaces of finite type,” *J. Anal. Math.*, 1999, **79**, 159–187.
35. A. Nagel, A. Seeger, and S. Wainger, “Averages over convex hypersurfaces,” *Am. J. Math.*, 1993, **115**, No. 4, 903–927.
36. D. H. Phong, E. M. Stein and J. A. Sturm, “On the growth and stability of real-analytic functions,” *Am. J. Math.*, 1999, **121**, No. 3, 519–554.
37. H. Schulz, “Convex hypersurfaces of finite type and the asymptotics of their Fourier transforms,” *Indiana Univ. Math. J.*, 1999, **40**, No. 4, 1267–1275.
38. C. D. Sogge, “Maximal operators associated to hypersurfaces with one nonvanishing principal curvature,” In: *Fourier analysis and partial differential equations*, CRC, Boca Raton, 1995, pp. 317–323.
39. C. D. Sogge and E. M. Stein, “Averages of functions over hypersurfaces in $\mathbb{R}^n$,” *Invent. Math.*, 1985, **82**, No. 3, 543–556.
40. E. M. Stein, “Maximal functions. I. Spherical means,” *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1976, **73**, No. 7, 2174–2175.
41. E. M. Stein, *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1993.
42. C. Tristan and A. Greenleaf, M. Pramanik, “A multi-dimensional resolution of singularities with applications to analysis,” *Am. J. Math.*, 2013, **135**, No. 5, 1179–1252.
43. E. Zimmermann, “On L^p-estimates for maximal averages over hypersurfaces not satisfying the transversality condition,” Doctoral PhD thesis, Christian-Albrechts-Universität, Kiel, 2014.

I. A. Ikromov
Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan
E-mail: `ikromov1@rambler.ru`

S. E. Usmanov
Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan
E-mail: `usmanov-salim@mail.ru`