Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 4 (2018). С. 637–649

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-4-637-649 УДК 517.5

НЕРАВЕНСТВО ШВАРЦА И ФОРМУЛА ШВАРЦА ДЛЯ A-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© 2018 г. **Н. М. ЖАББОРОВ, Т. У. ОТАБОЕВ, Ш. Я. ХУРСАНОВ**

Аннотация. В статье исследуются A-аналитические функции. Приводятся основные фундаментальные теоремы теории A-аналитических функций, доказываются аналог неравенства Шварца, формулы Шварца и Пуассона для A-аналитических функций.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Настоящая работа посвящена аналитической теории решения уравнения Бельтрами

$$f_{\bar z}(z) = \mu(z) f_z(z), \tag{1.1}$$

имеющего непосредственное отношение к квазиконформным отображениям. Относительно функции $\mu(z)$ в общем случае предполагается, что она измерима и

$$|\mu(z)| \leqslant C < 1$$

почти всюду в рассматриваемой области $D \subset \mathbb{C}$. В литературе решение уравнения (1.1) принято называть *A-аналитическими функциями*.

В случае $|\mu(z)| < 1$ п. в. в D гомеоморфные решения не меняют ориентацию, а в случае $|\mu(z)| > 1$ п. в. в D меняют. Эти случаи уравнения Бельтрами различаются лишь формально. Интерес представляет ситуация, когда одновременно существуют подобласти D, в которых п. в. выполнено $|\mu(z)| < 1$ и подобласти D, в которых п. в. $|\mu(z)| > 1$. В этом случае говорится, что уравнений Бельтрами имеет *переменный тип*. Его решения описывают со складками, сборками и т. п. Задача исследования уравнений Бельтрами переменного типа ставилась Л. И. Волковыским [6].

Изучение уравнения (1.1) в общем случае было связано с изучением классического уравнения Бельтрами

$$f_{\bar z}(z) = \mu^*(z) f_z(z)$$

с комплексной дилатацией

$$\mu^*(z) = \begin{cases} \mu(z) & \text{при } |\mu(z)| \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{\overline{\mu}(z)} & \text{при } |\mu(z)| > 1. \end{cases}$$

Это уравнение называем в дальнейшем уравнением, *ассоциированным* с уравнением (1.1). Очевидно, $|\mu(z)| < 1$ п. в. в D, причем в классическом случае уравнение Бельтрами и ассоциированное уравнение совпадает с самим уравнением, так как $\mu(z) = \mu^*(z)$. Связь между уравнениями Бельтрами переменного типа и ассоциированными уравнениями Бельтрами впервые отмечена Э. Х. Якубовым [13].

В работе Ю. Сребро и Э. Х. Якубова [17] была установлена локальная теорема существования и единственности гомеоморфных решений вырождающихся уравнений Бельтрами, записанная в геометрических терминах.

В работе Д. А. Ковтонюка, И. В. Петкова, В. И. Рязанова, Р. Р. Салимова [10] доказано существование регулярных решений задачи Дирихле для вырожденных уравнений Бельтрами в произвольных жордановых областях и псевдорегулярных, а также многозначных решений в произвольных конечносвязных областях, ограниченных попарно непересекающимися жордановыми кривыми. Дальнейшее развитие в этом направлении получено А. Н. Кондрашовым в работе [11], где доказана теорема о локальном существовании решений ассоциированного уравнения в окрестности дуги вырождения, записанная в геометрических терминах.

Одной из фундаментальных работ в теории уравнений Бельтрами является монография В. Гутлянского, В. Рязанова, Ю. Сребро и Э. Якубова [15], в которой рассматривается геометрический подход к исследованию уравнения Бельтрами.

Теорема 1.1 (см. [14]). *Для любой измеримой на плоскости* $\mathbb{C}$ *функции*

$$A(z): \ \|A\|_\infty < 1$$

существует единственное гомеоморфное решение $\chi(z)$ *уравнения* (1.1) *такое, что* χ *оставляет неподвижными точки* $0,\ 1,\ \infty$.

Отметим, что если функция $A(z)$ $(|A(z)| \leqslant C < 1)$ определена только в области $D \subset \mathbb{C}$, то ее можно продолжать на всю плоскость $\mathbb{C}$, полагая $A \equiv 0$ вне D, так что теорема 1.1 верна для любой области $D \subset \mathbb{C}$.

Теорема 1.2 (см. [1,2]). *Множество всех обобщенных решений уравнения* (1.1) *исчерпывается формулой*

$$f(z) = \Phi[\chi(z)],$$

где $\chi(z)$ — *гомеоморфное решение из теоремы* 1.1, *а* $\Phi(\xi)$ — *голоморфная функция от* ξ *в* $\chi(D)$. *Более того, голоморфная функция*

$$\Phi = f \circ \chi^{-1}$$

наследует особенности f *с сохранением типов.*

Из теоремы 1.2 вытекает, что A-аналитическая функция f осуществляет внутреннее отображение, т. е. она переводит открытое множество в открытое. Отсюда вытекает справедливость принципа максимума: для любой ограниченной области $D \subset \mathbb{C}$ максимум модуля достигается только на границе,

$$|f(z)| < \max_{z \in \partial D} |f(z)|, \ \ z \in D.$$

Если функция не обращается в нуль, то верен и принцип минимума:

$$|f(z)| > \min_{z \in \partial D} |f(z)|, \ \ z \in D.$$

Теорема 1.3 (см. [5]). *Если функция* $A(z)$ *принадлежит классу* m *раз непрерывно дифференцируемых функций*: $A(z) \in C^m(D)$, *то всякое решение* f *уравнения* (1.1) *тоже принадлежит, как минимум, этому же классу, т. е.* $f \in C^m(D)$.

Целью данной статьи является исследование A-аналитических функций в одном частном случае, когда функция $A(z)$ является антианалитической функцией в рассматриваемой области. В разделе 3 доказывается аналог неравенства Шварца для A-аналитических функций, в разделе 4 доказываются аналоги формулы Шварца и интегральная формула Пуассона для A-аналитических функций.

2. Основные свойства A-аналитических функций

Изучение A-аналитических функций инициировано их применениями в задачах томографии. Так, в цикле работ А. Л. Бухгейма и С. Г. Казанцева (см. [4]) задача Радона интерпретируется при помощи краевых задач для бесконечномерного аналога уравнения

$$f_{\bar{z}} - A f_z = 0,$$

где f — функция комплексного аргумента z со значениями в некотором банаховом пространстве X и A — линейно непрерывный оператор:

$$A:\, X \to X,\ \|A\| < 1.$$

A-аналитические функции, когда A — линейно непрерывный оператор в конечномерном или бесконечномерном пространствах, применяются в теории эллиптических уравнений (см. работы [3,7]). В упомянутых работах A является линейно-непрерывным оператором. В тех случаях, когда пространство $X = \mathbb{C}$, оператор A является константой, $A = \mathrm{const}$.

Пусть $A(z)$ — антианалитическая, $\partial A = 0$, в области $D \subset \mathbb{C}$ и такая, что

$$|A\,(z)| \leqslant C < 1,\ \forall z \in D.$$

Положим

$$D_A = \frac{\partial}{\partial z} - \bar{A}\,(z)\,\frac{\partial}{\partial\,\bar{z}},\quad \bar{D}_A = \frac{\partial}{\partial\,\bar{z}} - A\,(z)\,\frac{\partial}{\partial z}.$$

Тогда согласно (1.1) класс A-аналитических функций $f\,(z) \in \mathcal{O}_A\,(D)$ характеризуется тем, что

$$\bar{D}_A f\,(z) = 0.$$

Так как антианалитическая функция является бесконечно гладкой, то из теоремы 1.3 вытекает, что

$$\mathcal{O}_A\,(D) \subset C^{\infty}\,(D)\,.$$

Теорема 2.1 (аналог теоремы Коши, см. [8]). *Если $f\,(z) \in \mathcal{O}_A\,(D) \cap C\left(\bar{D}\right)$, где $D \subset \mathbb{C}$ — область со спрямляемой границей ∂D, то*

$$\int\limits_{\partial D} f\,(z)\,(dz + A\,(z)\,d\,\bar{z}) = 0.$$

В изучении A-аналитических функций, когда функция $A(z)$ — антианалитическая, большую роль играет ядро

$$K\,(z,\xi) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z - \xi + \overline{\int\limits_{\gamma(\xi,z)} \bar{A}\,(\tau)\,d\tau}}, \tag{2.1}$$

где $\gamma\,(\xi, z)$ — гладкая кривая, соединяющая точки ξ, $z \in D$. Так как область D — односвязная и $\bar{A}\,(z)$ — голоморфная функция, то интеграл

$$I\,(z) = \int\limits_{\gamma(\xi,z)} \bar{A}\,(\tau)\,d\tau$$

не зависит от пути интегрирования; он совпадает с первообразной, $I'\,(z) = \bar{A}\,(z)$. Если, кроме того, область $D \subset \mathbb{C}$ выпуклая, то имеет место

Теорема 2.2 (см. [16]). *$K\,(z,\xi)$ является A-аналитической функцией вне точки $z = \xi$, т. е.*

$$K \in \mathcal{O}_A\,(D \setminus \{\xi\})\,.$$

Более того, в точке $z = \xi$ функция $K\,(z,\xi)$ имеет полюс первого порядка.

Замечание 2.1. Если область $D \subset \mathbb{C}$ не является выпуклой, а лишь односвязной, то хотя функция

$$\psi\,(z,\,\xi) = z - \xi + \overline{\int\limits_{\gamma(\xi,z)} \bar{A}\,(\tau)\,d\tau}$$

однозначно определена в области D, но априори она может иметь другие изолированные нули $\xi\,:\,\psi\,(z,\,\xi) = 0,\, z \in P = \{\xi,\,\xi_1,\,\xi_2,\ldots\}\,$. Однако $\psi \in \mathcal{O}_A\,(D)\,,\, \psi\,(z,\,\xi) \neq 0$ при $z \notin P$, и $K\,(z,\xi)$ является A-аналитической функцией в $D\backslash P$ с простыми полюсами в точках ξ, ξ_1, $\xi_2, \ldots$ (см. [16]). В связи с этим ниже мы рассматриваем класс A-аналитических функций только в выпуклых областях $D \subset \mathbb{C}$.

Теорема 2.3 (формула Коши, см. [9]). *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — выпуклая область и $G \subset D$ — произвольная подобласть с кусочно гладкой границей ∂G. Тогда для любой функции $f(z) \in \mathcal{O}_A(G) \cap C(\bar{G})$ имеет место формула*

$$f(z) = \int_{\partial G} K(\xi, z) f(\xi) \left(d\xi + A(\xi)\, d\bar{\xi}\right), \quad z \in G. \tag{2.2}$$

При помощи формулы Коши доказывается

Теорема 2.4 (аналог теоремы Вейерштрасса, см. [18]). *Если ряд из A-аналитических в области D функций*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \quad f_n(z) \in \mathcal{O}_A(D), \tag{2.3}$$

сходится равномерно на любом компактном подмножестве этой области, то

1. $f(z) \in \mathcal{O}_A(D)$;
2. *ряд* (2.3) *можно почленно дифференцировать по* z:

$$\partial f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \partial f_n(z), \quad \bar{\partial} f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\partial} f_n(z), \quad D_A f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} D_A f_n(z); \tag{2.4}$$

3. *ряды* (2.4) *сходятся равномерно на любом компактном подмножестве* D.

Здесь уместно отметить, что от того, что функциональный ряд из произвольных (не обязательно из A-аналитических) функций сходится равномерно, вообще говоря, его нельзя продифференцировать. Для этого требуется еще равномерная сходимость ряда из дифференциалов.

Теперь мы вкратце остановимся на степенных рядах в классе A-аналитических функций, когда $A(z)$ — антианалитическая в некоторой выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$. В этом случае функция $\psi(z, \xi)$ имеет вид

$$\psi(z, \xi) = z - \xi + \overline{\int_{\gamma(\xi, z)} \bar{A}(\tau)\, d\tau} \in \mathcal{O}_A(D),$$

и согласно теореме 1.2 она осуществляет внутреннее отображение. В частности, множество

$$L(\xi, r) = \left\{ z \in D : |\psi(z, \xi)| = \left| z - \xi + \overline{\int_{\gamma(\xi, z)} \bar{A}(\tau)\, d\tau} \right| < r \right\}, \quad r > 0,$$

для достаточно маленьких r компактно принадлежит D и содержит точку ξ. Это множество называется A-*лемнискатой* с центром в точке ξ и обозначается как $L(\xi, r)$. Она является односвязной областью (см. [16]).

Сначала заметим, что аналогом степенных рядов для A-аналитических функций будут ряды

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j \psi^j(z, a), \quad a \in D, \quad c_j \text{ — константы.} \tag{2.5}$$

Областью сходимости ряда (2.5) будет лемниската $L(a, r) = \{|\psi(z, a)| < R\}$, где радиус сходимости R находится по формуле Коши—Адамара:

$$\frac{1}{R} = \lim_{j \to \infty} \sqrt[j]{|c_j|}.$$

Покажем, что ряд (2.5) сходится абсолютно и равномерно внутри

$$|\psi(z, a)| = \left| z - a + \int_{\gamma(a, z)} \bar{A}(\tau)\, d\tau \right| < R.$$

Пусть $r < R$. Для

$$|\psi(z, a)| = \frac{R + r}{2}$$

ряд (2.5) сходится и поэтому существует n_0, такое что для $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{|c_n|} \leqslant \frac{2}{r+R}.$$

Тогда для таких $n \geqslant n_0$ и для $|\psi(z,a)| \leqslant r$ имеем

$$|c_n \psi(z,a)^n| \leqslant |c_n| \, |\psi(z,a)|^n \leqslant \left(\frac{2r}{r+R}\right)^n.$$

Поэтому ряд (2.5) мажорируется сходящимся числовым рядом и он абсолютно и равномерно сходится в $\{|\psi(z,a)| \leqslant r\}$. Имеет место обратное утверждение.

Теорема 2.5 (см. [16]). *Если* $f(z) \in \mathcal{O}_A(L(a, r))$, *где* $L(a, r) = \{\xi \in D : |\psi(\xi, a)| < r\} \Subset D$ — *лемниската, то в* $L(a, r)$ *функция* $f(z)$ *разлагается в ряд Тейлора*:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi^k(z, a). \tag{2.6}$$

Коэффициенты ряда определяются по формулам

$$c_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f(z)}{\partial z^k}\bigg|_{z=a} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial L(a,\rho)} \frac{f(\xi)}{[\psi(\xi,a)]^{k+1}} \left(d\xi + A(\xi)\, d\bar{\xi}\right), \ 0 < \rho < r, \ \ k = 0, 1, \ldots$$

Для полноты изложения приведем разложение A-аналитических функций в ряд Лорана.

Теорема 2.6. (см. [16]). *Пусть функция* $f(z)$ A*-аналитична в кольце из лемнискат*:

$$f(z) \in \ \in \mathcal{O}_A(L(a,R) \setminus L(a,r)), \ \ r < R.$$

Тогда в этом кольце $f(z)$ *разлагается в ряд Лорана*:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \psi^k(z, a), \tag{2.7}$$

где коэффициенты ряда определяются по формулам

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial L(a,\rho)} \frac{f(\xi)}{[\psi(\xi,a)]^{k+1}} \left(d\xi + A(\xi)\, d\bar{\xi}\right), \ r < \rho < R, \ \ k = 0, \pm 1, \ldots$$

Ряд (2.7) *сходится равномерно и абсолютно внутри кольца*

$$L(a,R) \setminus L(a,r) = \{z \in D : \ r < |\psi(z,a)| < R\}.$$

Теорема (неравенства Коши, см. [16]). *Для коэффициентов Тейлора—Лорана справедливы неравенства*

$$|c_k| \leqslant \frac{\max\{|f(z)| : z \in \partial L(a,\rho)\}}{\rho^k}, \ \ r < \rho < R, \ \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{2.8}$$

3. Аналог неравенства Шварца для A-аналитических функций

Известно, что неравенство Шварца имеет многочисленные приложения в геометрической теории аналитических функций: в теории конформных изоморфизмов, оценках модулей непрерывности, вариационных задачах, теории аппроксимаций и др.

Лемма 3.1. (Аналог леммы Шварца). *Пусть* $f \in \mathcal{O}_A(L(a,R))$, $|f(z)| \leqslant M$ *и* $f(a) = 0$. *Тогда для всех* $z \in L(a,R)$

$$|f(z)| \leqslant \frac{M}{R} |\psi(z,a)|. \tag{3.1}$$

Доказательство. Так как $f(a) = 0$, то

$$g(z) := \frac{f(z)}{\psi(z,a)} \in \mathcal{O}_A\left(L(a,R)\right).$$

Фиксируем $r < R$. По принципу максимума функция $g(z)$ достигает своего максимума на $\partial L(a,r)$. Тогда

$$|g(z)| \leqslant \frac{\max\left\{|f(z)| : z \in L(a,r)\right\}}{|\psi(z,a)|} \leqslant \frac{M}{r}.$$

Устремим $r \to R$ и в пределе получим, что $|g(z)| \leqslant \dfrac{M}{R}$, т. е. $|f(z)| \leqslant \dfrac{M}{R}|\psi(z,a)|$ для всех $z \in L(a,r)$ и для всех $r < R$. □

Следствие 3.1. *Пусть* $f \in \mathcal{O}_A\left(L(a,R)\right)$, $|f(z)| \leqslant M$ *и*

$$f(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a) = \ldots = \frac{\partial^{n-1} f}{\partial z^{n-1}}(a) = 0.$$

Тогда для всех $z \in L(a,R)$

$$|f(z)| \leqslant \frac{M}{R}|\psi(z,a)|^n.$$

Доказательство. Следствие доказывается аналогично лемме 3.1. Так как

$$f(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a) = \ldots = \frac{\partial^{n-1} f}{\partial z^{n-1}}(a) = 0,$$

то

$$g(z) := \frac{f(z)}{\psi^n(z,a)} \in \mathcal{O}_A\left(L(a,R)\right),$$

ибо $\psi(z,a)$ имеет единственный простой нуль в точке $z = a$. Фиксируем $r < R$. По принципу максимума функция $g(z)$ достигает своего максимума на $\partial L(a,r) = \left\{|\psi(z,a)| = r\right\}$. Тогда

$$|g(z)| \leqslant \frac{\max\left\{|f(z)| : z \in L(a,r)\right\}}{r^n} \leqslant \frac{M}{r^n}.$$

Устремим $r \to R$ и в пределе получим, что $|g(z)| \leqslant \dfrac{M}{R^n}$, т. е. $|f(z)| \leqslant \dfrac{M}{R^n}|\psi(z,a)|$ для всех $z \in L(a,R)$. □

Следствие 3.2. *Пусть* $f \in \mathcal{O}_A\left(L(a,R)\right)$, $|f(z)| \leqslant M$ *и* $f(b) = 0$ *для* $b \in L(a,R)$. *Тогда для всех* $z \in L(a,R)$

$$|f(z)| \leqslant MR\left|\frac{\psi(z,a) - \psi(b,a)}{R^2 - \bar{\psi}(b,a)\psi(z,a)}\right|.$$

Доказательство. Отображение

$$w = R^2\frac{\psi(z,a) - \psi(b,a)}{R^2 - \bar{\psi}(b,a)\psi(z,a)}$$

является изоморфизмом между лемнискатой $L(a,R)$ и кругом $U(0,R)$. Действительно, если $z \in L(a,R)$, то

$$|w|^2 = R^4\frac{|\psi(z,a)|^2 + |\psi(b,a)|^2 - \psi(z,a)\bar{\psi}(b,a) - \bar{\psi}(z,a)\psi(b,a)}{R^4 + |\bar{a}|^2|\psi(z,a)|^2 - R^2(\psi(z,a)\bar{\psi}(b,a) + \bar{\psi}(z,a)\psi(b,a))} \leqslant$$

$$\leqslant R^2\frac{R^2\Big(|\psi(z,a)|^2 + |\psi(b,a)|^2 - \psi(z,a)\bar{\psi}(b,a) - \bar{\psi}(z,a)\psi(b,a)\Big) + \Big(|a|^2 - R^2\Big)\Big(|\psi(z,a)|^2 - R^2\Big)}{R^4 + |\bar{a}|^2|\psi(z,a)|^2 - R^2(\psi(z,a)\bar{\psi}(b,a) + \bar{\psi}(z,a)\psi(b,a))} = R^2.$$

Отсюда следует, что $|w| < R$. Рассмотрим

$$g(z) := \frac{1}{M}f\left(w^{-1}(\psi(z,a))\right) \in \mathcal{O}_A\left(L(a,R)\right),$$

где легко видеть, что $w^{-1}(\psi(z,a)) : L(a,R) \to L(a,R)$ является автоморфизмом. Функция $g(z)$ удовлетворяет условиями леммы Шварца и, следовательно, $|g(z)| \leqslant \frac{M}{R}|\psi(z,a)|$. Тогда получаем, что

$$|g(\psi(w(z),a))| = |f(z)| \leqslant \frac{M}{R}\left|R^2\frac{\psi(z,a)-\psi(b,a)}{R^2-\bar{\psi}(b,a)\psi(z,a)}\right| = MR\left|\frac{\psi(z,a)-\psi(b,a)}{R^2-\bar{\psi}(b,a)\psi(z,a)}\right|.$$

□

4. Формулы Шварца и Пуассона

Начнем со следующей теоремы.

Теорема 4.1. *Действительная часть A-аналитической функции $f(z) \in \mathcal{O}_A(D)$ удовлетворяет в области D уравнению*

$$\Delta_A u \equiv \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{1-|A|^2}\left[(1+|A|^2)\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - 2A\frac{\partial u}{\partial z}\right]\right] + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left[\frac{1}{1-|A|^2}\left[(1+|A|^2)\frac{\partial u}{\partial z} - 2\bar{A}\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\right]\right] = 0. \quad (4.1)$$

Доказательство. Пусть $f = u + iv$. Из бесконечной дифференцируемости A-аналитической функции следует, что функции u и v имеют в каждой точке области D частные производные любых порядков.

Запишем условия Коши—Римана для A-аналитических функций

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = A\dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = \bar{A}\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \bar{z}} + i\dfrac{\partial v}{\partial \bar{z}} = A\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + i\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} - i\dfrac{\partial v}{\partial z} = \bar{A}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \bar{z}} - i\dfrac{\partial v}{\partial \bar{z}}\right). \end{cases}$$

Найдем частные производные v'_z и $v'_{\bar{z}}$:

$$\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = \frac{i}{1-|A|^2}\left[\left(1+|A|^2\right)\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - 2A\frac{\partial u}{\partial z}\right], \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{i}{1-|A|^2}\left[\left(1+|A|^2\right)\frac{\partial u}{\partial z} - 2\bar{A}\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\right]. \quad (4.2)$$

Продифференцируем первое равенство в (4.2) по z, второе — по $\bar{z}$ и сложим полученное, приняв во внимание, что

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{z} \partial z}.$$

Имеем:

$$0 = \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{z} \partial z} = i\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{1-|A|^2}\left[(1+|A|^2)\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - 2A\frac{\partial u}{\partial z}\right]\right] +$$

$$+ i\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left[\frac{1}{1-|A|^2}\left[(1+|A|^2)\frac{\partial u}{\partial z} - 2\bar{A}\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\right]\right] = -i\Delta_A u.$$

Отсюда следует, что $\Delta_A u = 0$. Аналогично, получаем равенство $\Delta_A v = 0$. □

В связи с теоремой 4.1 естественно дать определение A-гармонической функции следующим образом.

Определение 4.1. Дважды дифференцируемая функция $u \in C^2(D)$, $u : D \to \mathbb{R}$ называется *A-гармонической* в области D, если она удовлетворяет в D дифференциальному уравнению (4.1).

Класс A-гармонических в области D функций обозначаем как $h_A(D)$. Таким образом, действительная часть, а значит и мнимая часть A-аналитической функции $f \in \mathcal{O}_A(D)$ является A-гармонической функцией в области D. Для односвязных областей верна и обратная теорема.

Теорема 4.2. *Если функция $u(z) \in h_A(D)$, где D — односвязная область, то существует $f \in \mathcal{O}_A(D) :\ u = \operatorname{Re} f$.*

Доказательство. Рассмотрим следующий дифференциальный оператор:

$$d_A^c := \frac{i}{1-|A|^2}\left(\left[(1+|A|^2)\frac{\partial}{\partial \bar z} - 2A\frac{\partial}{\partial z}\right]d\bar z - \left[(1+|A|^2)\frac{\partial}{\partial z} - 2\bar A\frac{\partial}{\partial \bar z}\right]dz\right).$$

Он удовлетворяет следующему равенству:

$$dd_A^c u = -\left(i\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{1-|A|^2}\left[(1+|A|^2)\frac{\partial u}{\partial \bar z} - 2A\frac{\partial u}{\partial z}\right]\right] + \right.$$
$$\left. + i\frac{\partial}{\partial \bar z}\left[\frac{1}{1-|A|^2}\left[(1+|A|^2)\frac{\partial u}{\partial z} - 2\bar A\frac{\partial u}{\partial \bar z}\right]\right]\right) dz\wedge d\bar z = -i\Delta_A u dz\wedge d\bar z = 2\Delta_A u dV.$$

Значит,

$$dd_A^c u = 2\Delta_A u dV. \tag{4.3}$$

Значение интеграла

$$\int_a^z d_A^c u$$

не зависит от выбора пути интегрирования, потому что для любых гомотопных кривых $\gamma_1(a,z)$ и $\gamma_2(a,z)$ имеет место следующее равенство:

$$\int_{\gamma_1(a,z)} d_A^c u - \int_{\gamma_2(z,a)} d_A^c u = \oint_\gamma d_A^c u = \iint_{D'} dd_A^c u = -2\iint_{D'} \Delta_A u dV = 0,$$

где $D' \subset D$ — область, ограниченная кривыми $\gamma_1(a,z)$ и $\gamma_2(a,z)$, $\partial D' = \gamma = \gamma_1(a,z)\cup\gamma_2(a,z)$.

$$v(z) = \int_a^z \left(\frac{1}{1-|A|^2}\left[\left(1+|A|^2\right)\frac{\partial u}{\partial \bar z} - 2A\frac{\partial u}{\partial z}\right] + \frac{1}{1-|A|^2}\left[\left(1+|A|^2\right)\frac{\partial u}{\partial z} - 2\bar A\frac{\partial u}{\partial \bar z}\right]\right)dx +$$
$$+ i\int_a^z \left(\frac{1}{1-|A|^2}\left[\left(1+|A|^2\right)\frac{\partial u}{\partial \bar z} - 2A\frac{\partial u}{\partial z}\right] - \frac{1}{1-|A|^2}\left[\left(1+|A|^2\right)\frac{\partial u}{\partial z} - 2\bar A\frac{\partial u}{\partial \bar z}\right]\right)dy =$$
$$= \int_a^z \left(\frac{1}{1-|A|^2}\left[\left(1+|A|^2\right)\frac{\partial u}{\partial \bar z} - 2A\frac{\partial u}{\partial z}\right] + \overline{\frac{1}{1-|A|^2}\left[\left(1+|A|^2\right)\frac{\partial u}{\partial \bar z} - 2A\frac{\partial u}{\partial z}\right]}\right)dx +$$
$$+ i\int_a^z \left(\frac{1}{1-|A|^2}\left[\left(1+|A|^2\right)\frac{\partial u}{\partial \bar z} - 2A\frac{\partial u}{\partial z}\right] - \overline{\frac{1}{1-|A|^2}\left[\left(1+|A|^2\right)\frac{\partial u}{\partial \bar z} - 2A\frac{\partial u}{\partial z}\right]}\right)dy =$$
$$= 2\int_a^z \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-|A|^2}\left[\left(1+|A|^2\right)\frac{\partial u}{\partial \bar z} - 2A\frac{\partial u}{\partial z}\right]\right)dx + 2\int_a^z \operatorname{Im}\left(\frac{1}{1-|A|^2}\left[\left(1+|A|^2\right)\frac{\partial u}{\partial \bar z} - 2A\frac{\partial u}{\partial z}\right]\right)dy.$$

Это означает, что v является действительнозначной функцией и она удовлетворяет следующим равенствам:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{i}{1-|A|^2}\left[\left(1+|A|^2\right)\frac{\partial u}{\partial z} - 2\bar A\frac{\partial u}{\partial \bar z}\right],$$

и

$$\frac{\partial v}{\partial \bar z} = \frac{i}{1-|A|^2}\left[\left(1+|A|^2\right)\frac{\partial u}{\partial \bar z} - 2A\frac{\partial u}{\partial z}\right].$$

Теперь покажем, что $f(z) = u(z) + iv(z)$ является A-аналитической функцией в области D, $f \in \mathcal{O}_A(D)$:

$$D_A f = \frac{\partial f}{\partial \bar z} - A\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial \bar z} + i\frac{\partial v}{\partial \bar z} - A\left(\frac{\partial u}{\partial z} + i\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0.$$

Это означает, что $f \in \mathcal{O}_A(D)$. □

Замечание 4.1. Как и в теории аналитических функций, для многосвязных областей теорема 4.2 может не иметь место в связи возникновением многозначности функции f.

В теории A-аналитических и A-гармонических функций естественно рассматривается следующая задача.

Задача Дирихле. Задана ограниченная область $G \subset D$, и на границе ∂G задана непрерывная функция $\varphi(\xi)$. Требуется найти A-гармоническую в области G, непрерывную на замыкании $\bar{G}$ функцию $u(z) \in h_A(G) \cap C(\bar{G}):\ u|_{\partial D} = \varphi$.

В случае, когда область G является лемнискатой, $G = L(a, R)$, имеет место следующая теорема.

Теорема 4.3 (аналог формулы Пуассона для A-гармонических функций)**.** *Если функция* $\varphi(\xi)$ *непрерывна на границе лемнискаты* $L(a, R) \subset D$, *то функция*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi r} \oint\limits_{|\psi(\xi,a)|=R} \varphi(\xi) \frac{r^2 - |\psi(z,a)|^2}{|\psi(\xi,z)|^2} \left| d\xi + A(\xi) d\bar{\xi} \right| \tag{4.4}$$

является решением задачи Дирихле в $L(a, r)$.

Доказательство. Функция

$$f(\xi, z) = \frac{\psi(a,\xi) + \psi(a,z)}{\psi(z,\xi)}$$

является A-аналитической функцией по $z \in L(a, R)$, где $\xi \in \partial L(a, R)$. Тогда

$$\Pi(\xi, z) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} f(\xi, z) \in h_A(L(a, R)),$$

$$\Pi(\xi, z) = \frac{1}{2\pi} \left(f(\xi, z) + \bar{f}(z, \xi) \right) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\psi(a,\xi) + \psi(a,z)}{\psi(a,\xi) - \psi(a,z)} + \frac{\bar{\psi}(a,\xi) + \bar{\psi}(a,z)}{\bar{\psi}(a,\xi) - \bar{\psi}(a,z)} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{|\psi(a,\xi)|^2 - |\psi(a,z)|^2}{|\psi(\xi,z)|^2} \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{R^2 - |\psi(a,z)|^2}{|\psi(\xi,z)|^2} \right].$$

Следовательно, функция $u \in h_A(L(a, R))$. Покажем, что она непрерывна в $\bar{L}(a, R)$, причем $u|_{\partial L(a,R)} = \varphi$. Воспользуемся следующими двумя очевидными фактами:

1. $\displaystyle \frac{1}{2\pi R} \oint\limits_{|\psi(\xi,a)|=R} \frac{R^2 - |\psi(z,a)|^2}{|\psi(\xi,z)|^2} \left| d\xi + A(\xi) d\bar{\xi} \right| = 1;$
2. При $z \to \xi_0 \in \partial L(a, r)$ и $\xi \neq \xi_0$ функция $\Pi(\xi, z) \to 0$ равномерно на любой дуге $\gamma_\delta = \partial L(a, R) \setminus U(\xi, \delta)$.

Положим $\psi(\xi, a) = Re^{it}$. Тогда

$$|dz + A d\bar{z}| = \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} dz + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right| = |d\psi(\xi, a)| = \left| dRe^{it} \right| = \left| Rie^{it} dt \right| = Rdt,$$

и

$$\frac{1}{2\pi r} \oint\limits_{|\psi(\xi,a)|=r} \varphi(\xi) \frac{R^2 - |\psi(z,a)|^2}{|\psi(\xi,z)|^2} \left| d\xi + A(\xi) d\bar{\xi} \right| = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi(\xi) \frac{R^2 - |\psi(z,a)|^2}{|\psi(\xi,z)|^2} dt.$$

Оценим разность:

$$\sigma = u(z) - \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi(\xi) \frac{R^2 - |\psi(z,a)|^2}{|\psi(\xi,z)|^2} dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(u(z) - \varphi(\xi) \right) \frac{R^2 - |\psi(z,a)|^2}{|\psi(\xi,z)|^2} dt.$$

Из непрерывности $\varphi(\xi)$ в точке $\xi_0 : \psi(a, \xi_0) = Re^{it_0}$ следует, что $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall \xi \in \partial L(a, R) \setminus U(a, \delta) \Rightarrow |\varphi(\xi) - \varphi(\xi_0)| < \varepsilon$.

Пусть $I_1 = \{t \in [0; 2\pi] : Re^{it} \in \partial L(a, R) \setminus U(a, \delta)\}$ и $I_2 = \{t \in [0; 2\pi] : Re^{it} \in \partial L(a, R) \cap U(a, \delta)\}$. Тогда $I_1 \cup I_2 = [0; 2\pi]$ и

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{I_1} \left(u(z) - \varphi(\xi) \right) \frac{R^2 - |\psi(z,a)|^2}{|\psi(\xi,z)|^2} dt + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{I_2} \left(u(z) - \varphi(\xi) \right) \frac{R^2 - |\psi(z,a)|^2}{|\psi(\xi,z)|^2} dt = J_1 + J_2.$$

Оценим J_2:

$$|J_2| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{I_2} |u(z)-\varphi(\xi)|\,\frac{R^2-|\psi(z,a)|^2}{|\psi(\xi,z)|^2}dt \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varepsilon\frac{R^2-|\psi(z,a)|^2}{|\psi(\xi,z)|^2}dt < \varepsilon.$$

Пусть $\psi(z,a)=re^{i\theta}$. Теперь предложим, что $|\theta-t_0|<\dfrac{\delta}{2}$. Тогда для всех $t\in I_1$ в силу условия 2 из леммы 3.1 найдется $\rho\in(R-r;R)$ и выполняется неравенство $\Pi\,(\xi,z)<\varepsilon$. Тогда для всех $z:|\psi(a,z)|=r>R-\rho, |\theta-t_0|<\dfrac{\delta}{2}$ получаем

$$|J_1| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{I_1} |u(z)-\varphi(\xi)|\,\frac{R^2-|\psi(z,a)|^2}{|\psi(\xi,z)|^2}dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}2\max\{\varphi(\xi)\}\int\limits_0^{2\pi} \frac{R^2-|\psi(z,a)|^2}{|\psi(\xi,z)|^2}dt < 2\varepsilon\max\{\varphi(\xi)\}.$$

Отсюда следует, что $|\sigma|<\varepsilon(1+2\max\{\varphi(\xi)\})$ и $\lim\limits_{z\to\xi_0} u(z)=\varphi(\xi_0)$. □

Формула (4.4) называется аналогом формулы Пуассона для A-гармонических функций.

Следствие 4.1. (аналог формула Шварца для A-аналитических функций). *Пусть $L(a,R)\Subset D$ и $f(z)=u(z)+iv(z)\in O_A(L(a,R))\cap C\left(\bar L(a,R)\right)$. Тогда имеет место следующий аналог формулы Шварца*:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi R}\oint\limits_{|\psi(\xi,a)|=R} u(\xi)\frac{\psi(a,\xi)+\psi(a,z)}{\psi(z,\xi)}\left|d\xi+A(\xi)d\bar\xi\right|+i\operatorname{Im} f(a). \tag{4.5}$$

Теорема 4.4. *Если функция u является A-гармонической в лемнискате $L(z,R)\Subset D$, то для любого $r<R$ значение u в центре лемнискаты равно среднему ее значению на лемнискате $L(z,r)$*:

$$u(z)=\frac{1}{2\pi ir^2}\iint\limits_{|\psi(z,\xi)|\leqslant r} u(\xi)d\mu(\xi)=\frac{1}{2\pi ir^2}\iint\limits_{|\psi(z,\xi)|\leqslant r} u(\xi)\left(1-|A(\xi)|^2\right)d\xi\wedge d\bar\xi,$$

где $d\mu=\left(1-|A(\xi)|^2\right)d\xi\wedge d\bar\xi$ — мера на лемнискате.

Доказательство. Рассмотрим меру $d\mu$:

$$d\mu=\left(1-|A(\xi)|^2\right)d\xi\wedge d\bar\xi=\left(d\xi+A(\xi)d\bar\xi\right)\wedge\left(d\bar\xi+\bar A(\xi)d\xi\right)=$$

$$=d\psi(\xi,z)\wedge d\bar\psi(\xi,z)=2idt\otimes|d\psi(\xi,z)|\,.$$

Из равенства $d\mu=2idt\otimes\left|d\xi+A(\xi)d\bar\xi\right|$, из теорем о среднем и Фубини, мы получаем, что

$$\frac{1}{2\pi ir^2}\iint\limits_{|\psi(z,\xi)|\leqslant r} u(\xi)d\mu(\xi)=\frac{1}{\pi r^2}\int\limits_0^r dt\int\limits_{|\psi(z,\xi)|=t} u(\xi)\left|d\xi+A(\xi)d\bar\xi\right|=\frac{1}{\pi r^2}\int\limits_0^r 2\pi t u(z)dt=u(z).$$

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боярский Б. В.* Гомеоморфные решения систем Бельтрами// Докл. АН СССР. — 1955. — *102*, № 4. — С. 661–664.
2. *Боярский Б. В.* Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами// Мат. сб. — 1957. — *43*, № 85. — С. 451–503.
3. *Бухгейм А. Л.* Формулы обращения в обратных задачах. Дополнение к книге: *Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я.* Линейные операторы и некорректные задачи. — М.: Наука, 1991.
4. *Бухгейм А. Л., Казанцев С. Г.* Эллиптические системы типа Бельтрами и задачи томографии// Докл. АН СССР. — 1990. — *315*, № 1. — С. 15–19.
5. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. — М.: Наука, 1988.

6. *Волковыский Л. И.* Некоторые вопросы теории квазиконформных отображений// В сб.: «Некоторые проблемы математики и механики. К семидесятилетию М. А. Лаврентьева». — Л.: Наука, 1970. — С. 128–134.
7. *Жабборов Н. М., Имомназаров Х. Х.* Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред. — Ташкент: Изд-во НУУз, 2012.
8. *Жабборов Н. М., Отабоев Т. У.* Теорема Коши для $A(z)$-аналитических функций// Узб. мат. ж. — 2014. — № 1. — С. 15–18.
9. *Жабборов Н. М., Отабоев Т. У.* Аналог интегральной формулы Коши для A-аналитических функций// Узб. мат. ж. — 2016. — № 4. — С. 50–59.
10. *Ковтонюк Д. А., Петков И. В., Рязанов В. И., Салимов Р. Р.* Граничное поведение и задача Дирихле для уравнений Бельтрами// Алгебра и анализ. — 2013. — *25*, № 4. — С. 101–124.
11. *Кондрашов А. Н.* Уравнения Бельтрами, вырождающиеся на дуге// Вестн. Волгоград. гос. ун-та. Сер. 1. Мат. Физ. — 2014. — *24*, № 5. — С. 24–39.
12. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Физматгиз, 1958.
13. *Якубов Э. Х.* О решениях уравнения Бельтрами с вырождением// Докл. АН СССР. — 1978. — *243*, № 5. — С. 1148–1149.
14. *Ahlfors L.* Lectures on quasiconformal mappings. — Toronto—New York—London: Springer, 1966.
15. *Gutlyanski V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation. A geometric approach. — Berlin: Springer, 2011.
16. *Sadullaev A., Jabborov N. M.* On a class of A-analytic functions// J. Sib. Fed. Univ. Maths. Phys. — 2016. — *9*, № 3. — С. 374–383.
17. *Srebro U., Yakubov E.* μ-Homeomorphisms// Contemp. Math. — 1997. — *211*. — С. 473–479.
18. *Zhabborov N. M.* Morer's theorem and functional series in the class of A-analytic functions// J. Sib. Fed. Univ. Maths. Phys. — 2018. — *9*, № 3. — С. 374–383.

Н. М. Жабборов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
Узбекистан, 700174, г. Ташкент, ВУЗ городок
E-mail: jabborov61@mail.ru

Т. У. Отабоев
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
Узбекистан, 700174, г. Ташкент, ВУЗ городок
E-mail: tolib.fgi@gmail.com

Ш. Я. Хурсанов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
Узбекистан, 700174, г. Ташкент, ВУЗ городок
E-mail: shohruhmath@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-4-637-649 UDC 517.5

The Schwarz Inequality and the Schwarz Formula for A-Analytic Functions

© 2018 **N. M. Zhabborov, T. U. Otaboev, Sh. Ya. Khursanov**

Abstract. In this paper, we study A-analytic functions. We consider main fundamental theorems of the theory of A-analytic functions and prove analogs of the Schwarz inequality, the Schwars formula, and the Poisson formula for A-analytic functions.

REFERENCES

1. B. V. Boyarskiy, "Gomeomorfnye resheniya sistem Bel'trami" [Homeomorphic solutions of Beltrami systems], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1955, **102**, No. 4, 661–664 (in Russian).
2. B. V. Boyarskiy, "Obobshchennye resheniya sistemy differentsial'nykh uravneniy pervogo poryadka ellipticheskogo tipa s razryvnymi koeffitsientami" [Generalized solutions of a first-order system of differential equations of elliptic type with discontinuous coefficients], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1957, **43**, No. 85, 451–503 (in Russian).
3. A. L. Bukhgeym, *Formuly obrashcheniya v obratnykh zadachakh. Dopolnenie k knige: M. M. Lavrent'ev, L. Ya. Savel'ev, Lineynye operatory i nekorrektnye zadachi* [Inversion Formulas in Inverse Problems. Addition to the Book: M. M. Lavrentyev, L. Ya. Savelyev, Linear Operators and Ill-Posed Problems], Nauka, Moscow, 1991 (in Russian).
4. A. L. Bukhgeym and S. G. Kazantsev, "Ellipticheskie sistemy tipa Bel'trami i zadachi tomografii" [Elliptic systems of Beltrami type and problems of tomograpy], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1990, **315**, No. 1, 15–19 (in Russian).
5. I. N. Vekua, *Obobshchennye analiticheskie funktsii* [Generalized Analytic Functions], Nauka, Moscow, 1988 (in Russian).
6. L. I. Volkovyskiy, "Nekotorye voprosy teorii kvazikonformnykh otobrazheniy" [Some questions of the theory of quasiconformal mappings], In: *Nekotorye problemy matematiki i mekhaniki. K semidesyatiletiyu M. A. Lavrent'eva* [Some Problems of Mathematics and Mechanics. Dedicated to 70th anniversary of M. A. Lavrent'ev], Nauka, Leningrad, 1970, pp. 128–134 (in Russian).
7. N. M. Zhabborov and Kh. Kh. Imomnazarov, *Nekotorye nachal'no-kraevye zadachi mekhaniki dvukhskorostnykh sred* [Some Initial Boundary-Value Problems of Mechanics of Two-Velocity Media], Izd-vo NUUz, Tashkent, 2012 (in Russian).
8. N. M. Zhabborov and T. U. Otaboev, "Teorema Koshi dlya $A(z)$-analiticheskikh funktsiy" [The Cauchy theorem for $A(z)$-analytic functions], *Uzb. mat. zh.* [Uzb. Math. J.], 2014, No. 1, 15–18 (in Russian).
9. N. M. Zhabborov and T. U. Otaboev, "Analog integral'noy formuly Koshi dlya A-analiticheskikh funktsiy" [An analog of the Cauchy integral formula for A-analytic functions], *Uzb. mat. zh.* [Uzb. Math. J.], 2016, No. 4, 50–59 (in Russian).
10. D. A. Kovtonyuk, I. V. Petkov, V. I. Ryazanov, and R. R. Salimov, "Granichnoe povedenie i zadacha Dirikhle dlya uravneniy Bel'trami" [Boundary behavior and the Dirichlet problem for the Beltrami equations], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2013, **25**, No. 4, 101–124 (in Russian).
11. A. N. Kondrashov, "Uravneniya Bel'trami, vyrozhdayushchiesya na duge" [Beltrami equations degenerating on an arc], *Vestn. Volgograd. gos. un-ta. Ser. 1. Mat. Fiz.* [Bull. Volgograd State Univ. Ser. 1. Math. Phys.], 2014, **24**, No. 5, 24–39 (in Russian).
12. M. A. Lavrent'ev and B. V. Shabat, *Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo* [Method of the Theory of Functions of Complex Variable], Fizmatgiz, Moscow, 1958 (in Russian).
13. E. Kh. Yakubov, "O resheniyakh uravneniya Bel'trami s vyrozhdeniem" [On solutions of the Beltrami equations with degeneration], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1978, **243**, No. 5, 1148–1149 (in Russian).
14. L. Ahlfors, *Lectures on quasiconformal mappings*, Springer, Toronto—New York—London, 1966.
15. V. Gutlyanski, V. Ryazanov, U. Srebro, and E. Yakubov, *The Beltrami equation. A geometric approach*, Springer, Berlin, 2011.

16. A. Sadullaev and N. M. Jabborov, "On a class of A-analytic functions," *J. Sib. Fed. Univ. Maths. Phys.*, 2016, **9**, No. 3, 374–383.
17. U. Srebro and E. Yakubov, "μ-Homeomorphisms," *Contemp. Math.*, 1997, **211**, 473–479.
18. N. M. Zhabborov, "Morer's theorem and functional series in the class of A-analytic functions," *J. Sib. Fed. Univ. Maths. Phys.*, 2018, **9**, No. 3, 374–383.

N. M. Zhabborov
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: jabborov61@mail.ru

T. U. Otaboev
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: tolib.fgi@gmail.com

Sh. Ya. Khursanov
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: shohruhmath@mail.ru