Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 4 (2018). С. 591–602

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-4-591-602 УДК 519.633

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2018 г. **Р. Д. АЛАЕВ, М. У. ХУДАЙБЕРГАНОВ**

Аннотация. Мы изучаем разностную схему расщепления для численного нахождения устойчивых решений двумерной линейной системы гиперболических уравнений с диссипативными краевыми условиями в случае постоянных коэффициентов и с младшими членами. Нами был построен дискретный аналог функции Ляпунова, а также получена соответствующая априорная оценка. Полученная априорная оценка позволяет утверждать об экспоненциальной устойчивости численного решения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Рассмотрим задачу Коши для двумерной линейной системы гиперболических уравнений с диссипативными граничными условиями с постоянными коэффициентами и младшими членами [2]. Устойчивость решений одномерных гиперболических систем была изучена в [6]. Основная идея этой работы заключается в изучении устойчивости решения систем гиперболических уравнений посредством построения функции Ляпунова и получения априорных оценок решения в различных функциональных пространствах.

В этой работе ставятся задачи построения и исследования разностной схемы расщепления для численного нахождения устойчивых решений двумерной линейной системы гиперболических уравнений с диссипативными граничными условиями с постоянными коэффициентами и младшими членами. Следует отметить, что решению этой задачи было посвящено много работ, см., например, [1, 3–5]. Однако во всех этих работах построение разностных схем и исследование их устойчивости было основано на технике построения диссипативных интегралов энергии. Априорные оценки численных решений начально-краевых задач для гиперболических систем, полученные в этих работах, не позволяют утверждать что-либо об экспоненциальной устойчивости численных решений.

В этой же работе исследуется разностная схема расщепления для численного нахождения устойчивых решений двумерной линейной системы гиперболических уравнений с диссипативными граничными условиями с постоянными коэффициентами и младшими членами. Был построен дискретный аналог функции Ляпунова, а также получены соответствующие априорные оценки. Эти оценки уже позволяют говорить об экспоненциальной устойчивости численных решений, что в свою очередь позволяет доказать сходимость этих численных решений.

2. Дифференциальная постановка задачи

Рассмотрим в области $G = \{(t,x,y) : 0 < t \leqslant T, 0 < x < l, -\infty < y < +\infty\}$ симметричную гиперболическую систему в специальном каноническом виде [2]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{K}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \mathbf{C}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \mathbf{M}\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{2.1}$$

с краевыми условиями при $x = 0$:

$$\mathbf{v}^{\mathbf{I}} = \mathbf{s}\mathbf{v}^{\mathbf{II}} \tag{2.2}$$

и при $x = l$:

$$\mathbf{v}^{\mathbf{II}} = \mathbf{r}\mathbf{v}^{\mathbf{I}}, \tag{2.3}$$

а также с начальными условиями при $t = 0$:

$$v_i(0, x, y) = \varphi_i(x, y), \ \ i = 1, \dots, n, \ \ 0 \leqslant x \leqslant l, \ \ -\infty \leqslant y \leqslant +\infty \tag{2.4}$$

где $\mathbf{v}^{\mathbf{I}} = (v_1, v_2, \dots, v_m)^T$, $\mathbf{v}^{\mathbf{II}} = (v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_n)^T$, $\mathbf{K}$ — диагональная матрица, $\mathbf{C}$ — положительно определенная матрица, $\mathbf{M}$ — квадратная матрица с вещественными элементами порядка n,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{\mathbf{I}} \\ \mathbf{v}^{\mathbf{II}} \end{bmatrix}, \ \ \mathbf{K} = \begin{pmatrix} K^+ & 0 \\ 0 & -K^- \end{pmatrix}, \ \ \mathbf{K}^+ = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & k_m \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}^- = \begin{pmatrix} k_{m+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_{m+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & k_n \end{pmatrix}, \ \ k_i > 0, \ \ i = 1, \dots, n,$$

$\mathbf{s}$ — это матрица порядка $n - m \times m$, $\mathbf{r}$ — матрица порядка $m \times n - m$. При $|y| > \dfrac{1}{2}Y$ исходные функции положены равными нулю.

Пусть начальное условие $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)^T \in W_2^1\left((0, l), (-\infty, +\infty), \mathbb{R}^n\right)$ удовлетворяют следующему условию совместности:

$$\begin{cases} \varphi^{\mathbf{I}} = \mathbf{s}\varphi^{\mathbf{II}}, \ \ x = 0, \ \ t = 0, \\ \varphi^{\mathbf{II}} = \mathbf{r}\varphi^{\mathbf{I}}, \ \ x = l, \ \ t = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Здесь $W_2^1\left((0, l), (-\infty, +\infty), \mathbb{R}^n\right)$ — пространство Соболева.

Определение 2.1. Система (2.1) с граничными условиями (2.2)-(2.3) является *экспоненциально устойчивой по норме* $\mathbb{L}^2$, если существуют такие $\nu > 0$ и $c > 0$, что для любых начальных условий $\varphi \in \mathbb{L}^2\left((0, l), (-\infty, +\infty), \mathbb{R}^n\right)$ $\mathbb{L}^2$-решение исходной задачи (2.1)–(2.4) удовлетворяет неравенствам

$$\|\mathbf{v}(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2((0,l),(-\infty,+\infty),\mathbb{R}^n)} \leqslant c e^{-\nu t} \|\varphi\|_{\mathbb{L}^2((0,l),(-\infty,+\infty),\mathbb{R}^n)}, \ \ t \geqslant 0. \tag{2.6}$$

В качестве функции Ляпунова рассмотрим следующую функцию:

$$L(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_0^l (\mu(x)\mathbf{v}, \mathbf{v})\, dxdy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_0^l \left\{ \sum_{i=1}^m \mu_i e^{-\nu x} \left[v_i(t, x, y)\right]^2 + \sum_{i=m+1}^n \mu_i e^{\nu x} \left[v_i(t, x, y)\right]^2 \right\} dxdy, \tag{2.7}$$

где $\mu_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, $\mu^+ = (\mu_1, \dots, \mu_m)^T$, $\mu^- = (\mu_{m+1}, \dots, \mu_n)^T$,

$$\mu(x) = \begin{pmatrix} e^{-\nu x}\mu^+ & 0 \\ 0 & e^{\nu x}\mu^- \end{pmatrix}.$$

Теорема 2.1 (экспоненциальная устойчивость, см. [6]). *Система* (2.1) *с краевыми условиями* (2.2)-(2.3) *является экспоненциально устойчивой по норме* $\mathbb{L}^2$, *если существуют такие* $\nu > 0$ *и* $\mu_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, *что матрицы*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}^+ & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\nu l}\mu^+ & 0 \\ 0 & \mu^- \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{r} \\ \mathbf{s} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{K}^+ & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^+ & 0 \\ 0 & e^{\nu l}\mu^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s} \\ \mathbf{r} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

и

$$\nu\, |\mathbf{K}|\, \mu(x) + \mathbf{M}^T \mu(x) + \mu(x)\mathbf{M}, \ \ x \in (0, l), \tag{2.9}$$

являются положительно определенными.

Доказательство. Продифференцируем функцию Ляпунова:

$$L'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^l \partial_t\left(\mu(x)\mathbf{v},\mathbf{v}\right)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^l \left(\mu(x)\partial_t\mathbf{v},\mathbf{v}\right)dxdy +$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^l \left(\mu(x)\mathbf{v},\partial_t\mathbf{v}\right)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^l \left(\mu(x)\left[-\mathbf{K}\partial_x\mathbf{v}-\mathbf{C}\partial_y\mathbf{v}-\mathbf{M}\mathbf{v}\right],\mathbf{v}\right)dxdy +$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^l \left(\mu(x)\mathbf{v},\left[-\mathbf{K}\partial_x\mathbf{v}-\mathbf{C}\partial_y\mathbf{v}-\mathbf{M}\mathbf{v}\right]\right)dxdy =$$

$$=-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^l \left[\left(\mu(x)\mathbf{K}\partial_x\mathbf{v},\mathbf{v}\right)+\left(\mu(x)\mathbf{v},\mathbf{K}\partial_x\mathbf{v}\right)+\left(\mu(x)\mathbf{C}\partial_y\mathbf{v},\mathbf{v}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\mu(x)\mathbf{v},\mathbf{C}\partial_y\mathbf{v}\right)\right]dxdy-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^l \left[\left(\mu(x)\mathbf{M}\mathbf{v},\mathbf{v}\right)+\left(\mu(x)\mathbf{v},\mathbf{M}\mathbf{v}\right)\right]dxdy.$$

Из

$$\left(\mu(x)\mathbf{K}\partial_x\mathbf{v},\mathbf{v}\right)=\left(\partial_x\left[\mu(x)\mathbf{K}\mathbf{v}\right],\mathbf{v}\right)-\big(\mu'(x)\mathbf{K}\mathbf{v},\mathbf{v}\big)$$

и

$$\mu'(x)\mathbf{K}=-\nu\left|\mathbf{K}\right|\mu(x),$$

получаем следующее тождество:

$$L'(t)=-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^l \left[\partial_x\left(\mathbf{K}\mu(x)\mathbf{v},\mathbf{v}\right)+\partial_y\left(\mathbf{C}\mu(x)\mathbf{v},\mathbf{v}\right)\right]dxdy-$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^l \big(\left[\nu\left|\mathbf{K}\right|\mu(x)+\mathbf{M}^T\mu(x)+\mu(x)\mathbf{M}\right]\mathbf{v},\mathbf{v}\big)dxdy=-\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\mathbf{K}\mu(x)\mathbf{v},\mathbf{v}\right)\Big|_0^l dy-$$

$$-\int_0^l\left(\mathbf{C}\mu(x)\mathbf{v},\mathbf{v}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}dx-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^l \big(\left[\nu\left|\mathbf{K}\right|\mu(x)+\mathbf{M}^T\mu(x)+\mu(x)\mathbf{M}\right]\mathbf{v},\mathbf{v}\big)dxdy=$$

$$=-\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\mathbf{K}\mu(x)\mathbf{v},\mathbf{v}\right)\Big|_0^l dy-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^l \big(\left[\nu\left|\mathbf{K}\right|\mu(x)+\mathbf{M}^T\mu(x)+\mu(x)\mathbf{M}\right]\mathbf{v},\mathbf{v}\big)dxdy.$$

Преобразуем отдельно каждый член полученного тождества:

$$-\left(\mathbf{K}\mu(x)\mathbf{v},\mathbf{v}\right)\Big|_0^l=-\left[\left(\mathbf{K}\mu(l)\mathbf{v}(t,l,y),\mathbf{v}(t,l,y)\right)-\left(\mathbf{K}\mu(0)\mathbf{v}(t,0,y),\mathbf{v}(t,0,y)\right)\right]=$$

$$=-\left(\begin{pmatrix}\mathbf{K}^+ & 0\\ 0 & -\mathbf{K}^-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-\nu l}\mu^+ & 0\\ 0 & e^{\nu l}\mu^-\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,l,y)\\ \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,l,y)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,l,y)\\ \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,l,y)\end{bmatrix}\right)+$$

$$+\left(\begin{pmatrix}\mathbf{K}^+ & 0\\ 0 & -\mathbf{K}^-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu^+ & 0\\ 0 & \mu^-\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,0,y)\\ \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,0,y)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,0,y)\\ \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,0,y)\end{bmatrix}\right)=$$

$$=-\left(\begin{pmatrix}\mathbf{K}^+ & 0\\ 0 & \mathbf{K}^-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-\nu l}\mu^+ & 0\\ 0 & \mu^-\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,l,y)\\ \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,0,y)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,l,y)\\ \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,0,y)\end{bmatrix}\right)+$$

$$+\left(\begin{pmatrix}\mathbf{K}^+ & 0\\ 0 & \mathbf{K}^-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu^+ & 0\\ 0 & e^{\nu l}\mu^-\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,0,y)\\ \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,l,y)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,0,y)\\ \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,l,y)\end{bmatrix}\right)=$$

$$=-\left(\begin{pmatrix}\mathbf{K}^+ & 0\\ 0 & \mathbf{K}^-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-\nu l}\mu^+ & 0\\ 0 & \mu^-\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,l,y)\\ \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,0,y)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,l,y)\\ \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,0,y)\end{bmatrix}\right)+$$

$$+\left(\begin{pmatrix} \mathbf{K}^+ & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu^+ & 0 \\ 0 & e^{\nu l}\mu^- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s} \\ \mathbf{r} & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,l,y) \\ \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,0,y) \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s} \\ \mathbf{r} & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,l,y) \\ \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,0,y) \end{bmatrix}\right) =$$
$$= -\left(\begin{pmatrix} \mathbf{K}^+ & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\nu l}\mu^+ & 0 \\ 0 & \mu^- \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,l,y) \\ \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,0,y) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,l,y) \\ \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,0,y) \end{bmatrix}\right) +$$
$$+\left(\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{r} \\ \mathbf{s} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{K}^+ & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu^+ & 0 \\ 0 & e^{\nu l}\mu^- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s} \\ \mathbf{r} & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,l,y) \\ \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,0,y) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,l,y) \\ \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,0,y) \end{bmatrix}\right) < 0.$$

Согласно (2.9), имеем

$$-\int_0^l \left(\left[\nu\,|\mathbf{K}|\,\mu(x) + \mathbf{M}^T\mu(x) + \mu(x)\mathbf{M}\right]\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) dx < 0.$$

Учитывая эти преобразования, получаем

$$L'(t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{K}\mu(x)\mathbf{v}, \mathbf{v})\Big|_0^l dy - \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^l \left(\left[\nu\,|\mathbf{K}|\,\mu(x) + \mathbf{M}^T\mu(x) + \mu(x)\mathbf{M}\right]\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) dxdy < 0.$$

Поскольку матрицы (2.9) и $\nu\,|\mathbf{K}|\,\mu(x)$ являются положительно определенными, отсюда следует неравенство:

$$\left(\left[\nu\,|\mathbf{K}|\,\mu(x) + \mathbf{M}^T\mu(x) + \mu(x)\mathbf{M}\right]\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) > \nu(|\mathbf{K}|\,\mu(x)\mathbf{v}, \mathbf{v}) > \nu(|\mathbf{K}|\,\mu(x)\mathbf{v}, \mathbf{v})$$
$$\alpha = \nu \min_{i=1,\dots,n} k_i$$

Таким образом, получаем

$$L'(t) < -\nu\alpha \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^l (\mu(x)\mathbf{v}, \mathbf{v})\, dxdy = -\eta L'(t), \quad \eta = \nu\alpha.$$

Следовательно,

$$L(t) \leqslant e^{-\eta t}L(0), \quad t > 0.$$

Однако из существования такой константы $\gamma > 0$, что

$$\frac{1}{\gamma}\,\|\mathbf{v}(t,\cdot)\|^2_{L^2((0,l),(-\infty,+\infty),\mathbb{R}^n)} \leqslant L(t) \leqslant \gamma\,\|\mathbf{v}(t,\cdot)\|^2_{L^2((0,l),(-\infty,+\infty),\mathbb{R}^n)},$$
$$\|\mathbf{v}(t,\cdot)\|^2_{L^2((0,l),(-\infty,+\infty),\mathbb{R}^n)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^l (\mathbf{v}, \mathbf{v})\, dxdy,$$

имеем

$$\|\mathbf{v}(t,\cdot)\|_{L^2((0,l),(-\infty,+\infty),\mathbb{R}^n)} \leqslant \gamma e^{-\nu t/2}\,\|\mathbf{\Phi}\|_{L^2((0,l),(-\infty,+\infty),\mathbb{R}^n)}, \quad t \in [0,+\infty).$$

Теорема 2.1 доказана. □

3. Разностная схема

Построим в области G разностную сетку

$$G_h = \{(t^\kappa, x_j, y_q) : 0 \leqslant t^\kappa \leqslant T,\ 0 \leqslant x_j \leqslant l,\ -\infty < y_q < +\infty\},$$

в которой

$$t^\kappa = \kappa\Delta t,\ \kappa = 0,\dots,N,\ N\Delta t = T,$$
$$x_j = \left(j + \frac{1}{2}\right)\Delta x;\ J\Delta x = l;\ j = 0,\dots,J-1,$$
$$y_q = \left(q + \frac{1}{2}\right)\Delta y;\ q = -\infty,\dots,+\infty.$$

Определим значения численного решения в узлах следующим образом:

$$\mathbf{v}_{jq}^{n} = \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{y_{q-\frac{1}{2}}}^{y_{q+\frac{1}{2}}} \int\limits_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \mathbf{v}(t^n, x, y) dx dy, \qquad j = 0, \ldots, J-1.$$

Для получения численного решения исходной задачи (2.1)–(2.4) рассмотрим разностную схему расщепления

$$\begin{bmatrix} \left(\mathbf{w}^{\mathrm{I}}\right)_{jq}^{\kappa} \\ \left(\mathbf{w}^{\mathrm{II}}\right)_{jq}^{\kappa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_{jq}^{\kappa} \\ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_{jq}^{\kappa} \end{bmatrix} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{+} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^{-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_{jq}^{\kappa} - \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_{j-1,q}^{\kappa} \\ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_{jq}^{\kappa} - \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_{j+1,q}^{\kappa} \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

$$j = 0, \ldots, J-1; \;\; \kappa = 0, \ldots, N-1; \;\; q = -\infty, \ldots, +\infty;$$

$$\mathbf{u}_{jq}^{\kappa} = \mathbf{w}_{jq}^{\kappa} - \frac{\Delta t}{\Delta y} \mathbf{C} \left[\mathbf{w}_{jq}^{\kappa} - \mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right], \tag{3.2}$$

$$j = 0, \ldots, J-1; \;\; \kappa = 0, \ldots, N-1; \;\; q = -\infty, \ldots, +\infty;$$

$$\mathbf{v}_{jq}^{\kappa+1} = \mathbf{u}_{jq}^{\kappa} - \Delta t \mathbf{M} \mathbf{u}_{jq}^{\kappa}, \;\; j = 0, \ldots, J-1; \;\; \kappa = 0, \ldots, N-1. \tag{3.3}$$

Начальные условия (2.4) могут быть приближены следующим образом:

$$\mathbf{v}_{j}^{0} = \frac{1}{\Delta x} \frac{1}{\Delta y} \int\limits_{y_{q-\frac{1}{2}}}^{y_{q+\frac{1}{2}}} \int\limits_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \mathbf{\Phi}(x, y) dx dy, \;\; j = 0, \ldots, J-1; \, q = -\infty, \ldots + \infty \tag{3.4}$$

Так, в свою очередь, могут быть приближены краевые условия:

$$\begin{pmatrix} \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_{-1q}^{\kappa+1} \\ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_{Jq}^{\kappa+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s} \\ \mathbf{r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_{J-1,q}^{\kappa+1} \\ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_{0q}^{\kappa+1} \end{pmatrix}, \;\; \kappa = 0, \ldots, N-1; \, q = -\infty, \ldots + \infty. \tag{3.5}$$

Положим, что критерий Куранта—Фридрихса—Леви

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max |k_i| \leqslant 1, \qquad \frac{\Delta t}{\Delta y} \max |\lambda_i(\mathbf{C})| \leqslant 1$$

выполняется. Здесь $\lambda_i(\mathbf{C})$ — собственные значения матрицы $\mathbf{C}$.

Теперь изучим вопрос экспоненциальной устойчивости решения разностной задачи (3.1)–(3.5).

Определение 3.1. Разностная схема (3.1)–(3.3) с разностным краевым условием (3.5) является *экспоненциально устойчивой*, если существуют такие константы $\eta > 0$ и $c > 0$, что для любого начального условия $\mathbf{v}_{jq}^{0} \in L^2((x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}), \, (y_{q-\frac{1}{2}}, y_{q+\frac{1}{2}}), \mathbb{R}^n)$ решение разностной краевой задачи (3.1)–(3.5) удовлетворяет неравенству

$$\Delta x \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mathbf{v}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{v}_{jq}^{\kappa}\right) \leqslant e^{-\eta t_\kappa} \Delta x \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mathbf{v}_{jq}^{0}, \mathbf{v}_{jq}^{0}\right), \;\; \kappa = 1, \ldots, N.$$

Здесь мы лишь формально выписываем суммы бесконечного числа членов, так как только конечное их число равняется нулю (разностное решение не является нулевым только на конечном количестве точек).

Рассмотрим разностную начально-краевую задачу (3.1)–(3.5) со стационарным решением

$$\mathbf{v}_{jq}^{\kappa} = 0, \;\; \kappa = 0, \ldots, N-1; \;\; j = 0, \ldots, J-1; \; q = -\infty, \ldots, +\infty.$$

Чтобы доказать устойчивость разностной начально-краевой задачи (3.1)–(3.5), рассмотрим в качестве дискретной функции Ляпунова следующую функцию:

$$L(\mathbf{v}^{\kappa}) = L^{\kappa} = \Delta x \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mathbf{v}_{jq}^{\kappa}, \mu_j \mathbf{v}_{jq}^{\kappa}\right), \quad \mu_j = \mu(x_j), \quad j = 1, \ldots, J-1. \tag{3.6}$$

Здесь

$$\mu_j = \begin{pmatrix} e^{-\nu x_j} \mu^{+} & 0 \\ 0 & e^{\nu x_j} \mu^{-} \end{pmatrix}.$$

Теорема 3.1. *Пусть $T > 0$, а дискретная функция Ляпунова определяется неравенствами* (3.6). *Если выполнен критерий Куранта—Фридрихса—Леви,*

$$(\Delta t/\Delta x)\max|k_i| \leqslant 1,$$
$$(\Delta t/\Delta y)\max|\lambda_i(\mathbf{C})| \leqslant 1$$

и существуют вещественные числа $\nu > 0$ и $\mu_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, такие, что

$$0 < \alpha(1 - e^{-\nu\Delta x}) < 1,$$

где

$$\alpha = \min_i |k_i|,$$
$$\mathbf{M}^T\mu_j + \mu_j\mathbf{M} - \Delta t\mathbf{M}^T\mu_j\mathbf{M},\ j = 0, \ldots, J-1$$

— неотрицательно определенные матрицы, а

$$\begin{bmatrix} \mu^+ e^{-\nu x_J}\mathbf{K}^+ & 0 \\ 0 & \mu^- e^{\nu x_{-1}}\mathbf{K}^- \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{r} \\ \mathbf{s} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mu^+ e^{-\nu x_0}\mathbf{K}^+ & 0 \\ 0 & \mu^- e^{\nu x_{J-1}}\mathbf{K}^- \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s} \\ \mathbf{r} & 0 \end{pmatrix}$$

является положительно определенной, тогда численное решение $\mathbf{v}_{jq}^\kappa$ разностной начально-краевой задачи (3.1)–(3.5) *сходится к стационарному решению $\mathbf{v}_{jq}^* = 0$ по норме $\mathbb{L}^2$.*

Доказательство. Используя дискретную функцию Ляпунова, вычислим производную функции Ляпунова (2.7) следующим образом:

$$\frac{L(\mathbf{v}^{\kappa+1}) - L(\mathbf{v}^\kappa)}{\Delta t} = \frac{L(\mathbf{v}^{\kappa+1}) - L(\mathbf{u}^\kappa)}{\Delta t} + \frac{L(\mathbf{u}^\kappa) - L(\mathbf{w}^\kappa)}{\Delta t} + \frac{L(\mathbf{w}^\kappa) - L(\mathbf{v}^\kappa)}{\Delta t},$$

где

$$L(\mathbf{v}^\kappa) = \Delta x\Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}(\mathbf{v}_{jq}^\kappa, \mu_j\mathbf{v}_{jq}^\kappa), \quad L(\mathbf{w}^\kappa) = \Delta x\Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}(\mathbf{w}_{jq}^\kappa, \mu_j\mathbf{w}_{jq}^\kappa),$$

$$L(\mathbf{u}^\kappa) = \Delta x\Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}(\mathbf{u}_{jq}^\kappa, \mu_j\mathbf{u}_{jq}^\kappa),\ \kappa = 0, \ldots, N.$$

Мы хотим доказать, что эта квадратичная форма отрицательно определена. Для этого достаточно показать, что все три квадратичные формы в правой части

$$\frac{L(\mathbf{v}^{\kappa+1}) - L(\mathbf{u}^\kappa)}{\Delta t} = \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\Big[(\mathbf{v}_{jq}^{\kappa+1}, \mu_j\mathbf{v}_{jq}^{\kappa+1}) - (\mathbf{u}_{jq}^\kappa, \mu_j\mathbf{u}_{jq}^\kappa)\Big],$$

$$\frac{L(\mathbf{u}^\kappa) - L(\mathbf{w}^\kappa)}{\Delta t} = \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\big[(\mathbf{u}_{jq}^\kappa, \mu_j\mathbf{u}_{jq}^\kappa) - (\mathbf{w}_{jq}^\kappa, \mu_j\mathbf{w}_{jq}^\kappa)\big],$$

$$\frac{L(\mathbf{w}^\kappa) - L(\mathbf{v}^\kappa)}{\Delta t} = \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\big[(\mathbf{w}_{jq}^\kappa, \mu_j\mathbf{w}_{jq}^\kappa) - (\mathbf{v}_{jq}^\kappa, \mu_j\mathbf{v}_{jq}^\kappa)\big]$$

отрицательно определены.

$$\frac{L(\mathbf{v}^{\kappa+1}) - L(\mathbf{u}^\kappa)}{\Delta t} = \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\big[\big(\big[\mathbf{u}_{jq}^\kappa - \Delta t\mathbf{M}\mathbf{u}_{jq}^\kappa\big], \mu_j\left[\mathbf{u}_{jq}^\kappa - \Delta t\mathbf{M}\mathbf{u}_{jq}^\kappa\right]\big) - (\mathbf{u}_{jq}^\kappa, \mu_j\mathbf{u}_{jq}^\kappa)\big] =$$

$$= \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\big[(\mathbf{u}_{jq}^\kappa, \mu_j\mathbf{u}_{jq}^\kappa) - (\mathbf{u}_{jq}^\kappa, \mu_j\mathbf{u}_{jq}^\kappa)\big] -$$

$$- \Delta x\Delta y\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\big[\big(\mathbf{M}\mathbf{u}_{jq}^\kappa, \mu_j\mathbf{u}_{jq}^\kappa\big) + \big(\mathbf{u}_{jq}^\kappa, \mu_j\mathbf{M}\mathbf{u}_{jq}^\kappa\big) - \Delta t(\mathbf{M}\mathbf{u}_{jq}^\kappa, \mu_j\mathbf{M}\mathbf{u}_{jq}^\kappa)\big] =$$

$$= -\Delta x\Delta y\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\big[\big(\mathbf{M}\mathbf{u}_{jq}^\kappa, \mu_j\mathbf{u}_{jq}^\kappa\big) + \big(\mathbf{u}_{jq}^\kappa, \mu_j\mathbf{M}\mathbf{u}_{jq}^\kappa\big) - \Delta t(\mathbf{M}\mathbf{u}_{jq}^\kappa, \mu_j\mathbf{M}\mathbf{u}_{jq}^\kappa)\big] =$$

$$= -\Delta x \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mathbf{u}_{jq}^{\kappa}, \left[\mathbf{M}^T \mu_j + \mu_j \mathbf{M} - \Delta t \mathbf{M}^T \mu_j \mathbf{M}\right] \mathbf{u}_{jq}^{\kappa}\right).$$

Обозначим $\mathbf{O} = \dfrac{\Delta t}{\Delta y}\mathbf{C}$. Тогда

$$\frac{L(\mathbf{u}^{\kappa}) - L(\mathbf{w}^{\kappa})}{\Delta t} = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left[\left(\mathbf{u}_{jq}^{\kappa}, \mu_j \mathbf{u}_{jq}^{\kappa}\right) - \left(\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mu_j \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\right)\right] =$$

$$= \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left[\left(\left\{\mathbf{w}_{jq}^{\kappa} - \mathbf{O}\left[\mathbf{w}_{jq}^{\kappa} - \mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right]\right\}, \mu_j \left\{\mathbf{w}_{jq}^{\kappa} - \mathbf{O}\left[\mathbf{w}_{jq}^{\kappa} - \mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right]\right\}\right) - \left(\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mu_j \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\right)\right] =$$

$$= \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left\{\left(\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mu_j \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\right) - \left(\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mu_j \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\right) - 2\left(\mu_j \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\left[\mathbf{w}_{jq}^{\kappa} - \mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right]\right)\right\} +$$

$$+ \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mu_j \mathbf{O}\left[\mathbf{w}_{jq}^{\kappa} - \mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right], \mathbf{O}\left[\mathbf{w}_{jq}^{\kappa} - \mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right]\right) =$$

$$= \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left\{\left(\mu_j \mathbf{O}\left[\mathbf{w}_{jq}^{\kappa} - \mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right], \mathbf{O}\left[\mathbf{w}_{jq}^{\kappa} - \mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right]\right) - 2\left(\mu_j \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\left[\mathbf{w}_{jq}^{\kappa} - \mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right]\right)\right\} =$$

$$= \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left\{\left(\mu_j \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\right) - 2\left(\mu_j \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right) + \left(\mu_j \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left\{-2\left(\mu_j \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\right) + 2\left(\mu_j \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right)\right\} =$$

$$= \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left\{\left(\mu_j \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\right) + 2\left(\mu_j \left[\mathbf{E} - \mathbf{O}\right] \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\mu_j \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right) - 2\left(\mu_j \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\right)\right\}.$$

В силу критерия Куранта—Фридрихса—Леви, матрица $(\mathbf{E} - \mathbf{O}) \geqslant 0$. Положим матрицу $(\mathbf{E} - \mathbf{O})\mu_j \mathbf{O}$ положительно определенной. Следовательно, получаем

$$\begin{gathered} 2\Big(\mu_j \left[\mathbf{E} - \mathbf{O}\right] \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\Big) \leqslant \Big(\mu_j (\mathbf{E} - \mathbf{O})\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\Big) + \Big(\mu_j (\mathbf{E} - \mathbf{O})\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\Big) = \\ = \Big(\mu_j \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\Big) - \left(\mu_j \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\right) + \Big(\mu_j \mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\Big) - \left(\mu_j \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right). \end{gathered}$$

Принимая во внимание это неравенство, имеем

$$\begin{aligned} &\frac{L(\mathbf{u}^{\kappa}) - L(\mathbf{w}^{\kappa})}{\Delta t} = \\ &= \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left\{ \begin{array}{l} \left(\mu_j \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\right) + 2\Big(\mu_j \left[\mathbf{E} - \mathbf{O}\right] \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\Big) + \\ + \left(\mu_j \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right) - 2\Big(\mu_j \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\Big) \end{array} \right\} \leqslant \\ &\leqslant \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left[\left(\mu_j \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\right) + \left(\mu_j \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\right) - \left(\mu_j \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\right)\right] = \\ &= \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left\{ \begin{array}{l} \left(\mu_j \mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right) - \left(\mu_j \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right) + \\ + \left(\mu_j \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right) - 2\Big(\mu_j \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\Big) \end{array} \right\} = \\ &= \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left[\left(\mu_j \mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right) - \left(\mu_j \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\right)\right], \end{aligned}$$

или

$$\frac{L(\mathbf{u}^\kappa)-L(\mathbf{w}^\kappa)}{\Delta t} \leqslant \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left[\left(\mu_j\mathbf{w}^\kappa_{jq-1},\mathbf{O}\mathbf{w}^\kappa_{jq-1}\right)-\left(\mu_j\mathbf{w}^\kappa_{jq},\mathbf{O}\mathbf{w}^\kappa_{jq}\right)\right]=0.$$

Введем обозначения

$$\mathbf{W}^\kappa_j=\begin{bmatrix}\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)^\kappa_{j-1}\\ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)^\kappa_{j+1}\end{bmatrix},\quad |\mathbf{K}|=\begin{bmatrix}\mathbf{K}^+ & 0\\ 0 & \mathbf{K}^-\end{bmatrix},\quad \mathbf{D}=\frac{\Delta t}{\Delta x}\,|\mathbf{K}|\,.$$

Учитывая эти обозначения, имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{L(\mathbf{w}^\kappa)-L(\mathbf{v}^\kappa)}{\Delta t} &= \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left[(\mathbf{w}^\kappa_{jq},\mu_j\mathbf{w}^\kappa_{jq})-(\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mu_j\mathbf{v}^\kappa_{jq})\right]=\\
&=\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left[\left(\left\{\mathbf{v}^\kappa_{jq}-\mathbf{D}\left[\mathbf{v}^\kappa_{jq}-\mathbf{W}^\kappa_{jq}\right]\right\},\mu_j\left\{\mathbf{v}^\kappa_{jq}-\mathbf{D}\left[\mathbf{v}^\kappa_{jq}-\mathbf{W}^\kappa_{jq}\right]\right\}\right)-(\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mu_j\mathbf{v}^\kappa_{jq})\right]=\\
&=\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left[(\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mu_j\mathbf{v}^\kappa_{jq})-(\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mu_j\mathbf{v}^\kappa_{jq})-2\left(\mu_j\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mathbf{D}\left[\mathbf{v}^\kappa_{jq}-\mathbf{W}^\kappa_{jq}\right]\right)\right]+\\
&\quad+\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left[\left(\mu_j\mathbf{D}\left[\mathbf{v}^\kappa_{jq}-\mathbf{W}^\kappa_{jq}\right],\mathbf{D}\left[\mathbf{v}^\kappa_{jq}-\mathbf{W}^\kappa_{jq}\right]\right)\right]=\\
&=\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left[\left(\mu_j\mathbf{D}\left[\mathbf{v}^\kappa_{jq}-\mathbf{W}^\kappa_{jq}\right],\mathbf{D}\left[\mathbf{v}^\kappa_{jq}-\mathbf{W}^\kappa_{jq}\right]\right)-2\left(\mu_j\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mathbf{D}\left[\mathbf{v}^\kappa_{jq}-\mathbf{W}^\kappa_{jq}\right]\right)\right]=\\
&=\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left[\left(\mu_j\mathbf{D}\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mathbf{D}\mathbf{v}^\kappa_{jq}\right)-2\left(\mu_j\mathbf{D}\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mathbf{D}\mathbf{W}^\kappa_{jq}\right)+\left(\mu_j\mathbf{D}\mathbf{W}^\kappa_{jq},\mathbf{D}\mathbf{W}^\kappa_{jq}\right)\right]+\\
&\quad+\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left[-2\left(\mu_j\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mathbf{D}\mathbf{v}^\kappa_{jq}\right)+2\left(\mu_j\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mathbf{D}\mathbf{W}^\kappa_{jq}\right)\right]=\\
&=\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left[\left(\mu_j\mathbf{D}\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mathbf{D}\mathbf{v}^\kappa_{jq}\right)+2\left(\mu_j(\mathbf{E}-\mathbf{D})\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mathbf{D}\mathbf{W}^\kappa_{jq}\right)+\right.\\
&\quad\left.+\left(\mu_j\mathbf{D}\mathbf{W}^\kappa_{jq},\mathbf{D}\mathbf{W}^\kappa_{jq}\right)-2\left(\mu_j\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mathbf{D}\mathbf{v}^\kappa_{jq}\right)\right].
\end{aligned}$$

В силу критерия Куранта—Фридрихса—Леви, матрицы $(\mathbf{E}-\mathbf{D})\geqslant 0$ и $(\mathbf{E}-\mathbf{D})\mu_j\mathbf{D}$ являются положительно определенными диагональными матрицами. Поэтому

$$\begin{aligned}
&2\Big(\mu_j(\mathbf{E}-\mathbf{D})\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mathbf{D}\mathbf{W}^\kappa_{jq}\Big)\leqslant\Big(\mu_j(\mathbf{E}-\mathbf{D})\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mathbf{D}\mathbf{v}^\kappa_{jq}\Big)+\Big(\mu_j(\mathbf{E}-\mathbf{D})\mathbf{W}^\kappa_{j},\mathbf{D}\mathbf{W}^\kappa_{j}\Big)=\\
&=\Big(\mu_j\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mathbf{D}\mathbf{v}^\kappa_{j}\Big)-\left(\mu_j\mathbf{D}\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mathbf{D}\mathbf{v}^\kappa_{jq}\right)+\Big(\mu_j\mathbf{W}^\kappa_{jq},\mathbf{D}\mathbf{W}^\kappa_{jq}\Big)-\left(\mu_j\mathbf{D}\mathbf{W}^\kappa_{jq},\mathbf{D}\mathbf{W}^\kappa_{jq}\right).
\end{aligned}$$

Учитывая это неравенство, получаем

$$\begin{aligned}
\frac{L(\mathbf{w}^\kappa)-L(\mathbf{v}^\kappa)}{\Delta t}&=\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left[\left(\mu_j\mathbf{D}\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mathbf{D}\mathbf{v}^\kappa_{jq}\right)+2\left(\mu_j(\mathbf{E}-\mathbf{D})\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mathbf{D}\mathbf{W}^\kappa_{jq}\right)+\right.\\
&\quad\left.+\left(\mu_j\mathbf{D}\mathbf{W}^\kappa_{jq},\mathbf{D}\mathbf{W}^\kappa_{jq}\right)-2\left(\mu_j\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mathbf{D}\mathbf{v}^\kappa_{jq}\right)\right]\leqslant\\
&\leqslant\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left[\left(\mu_j\mathbf{D}\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mathbf{D}\mathbf{v}^\kappa_{jq}\right)+\left(\mu_j\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mathbf{D}\mathbf{v}^\kappa_{jq}\right)-\left(\mu_j\mathbf{D}\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mathbf{D}\mathbf{v}^\kappa_{jq}\right)\right]+\\
&\quad+\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left[\left(\mu_j\mathbf{W}^\kappa_{jq},\mathbf{D}\mathbf{W}^\kappa_{jq}\right)-\left(\mu_j\mathbf{D}\mathbf{W}^\kappa_{jq},\mathbf{D}\mathbf{W}^\kappa_{jq}\right)+\right.\\
&\quad\left.+\left(\mu_j\mathbf{D}\mathbf{W}^\kappa_{jq},\mathbf{D}\mathbf{W}^\kappa_{jq}\right)-2\left(\mu_j\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mathbf{D}\mathbf{v}^\kappa_{jq}\right)\right]=
\end{aligned}$$

$$= \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left[\left(\mu_j \mathbf{W}^{\kappa}_{jq}, \mathbf{D}\mathbf{W}^{\kappa}_{jq} \right) - \left(\mu_j \mathbf{v}^{\kappa}_{jq}, \mathbf{D}\mathbf{v}^{\kappa}_{jq} \right) \right],$$

или

$$\frac{L(\mathbf{w}^{\kappa}) - L(\mathbf{v}^{\kappa})}{\Delta t} \leqslant \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left[\left(\mu_j \mathbf{W}^{\kappa}_{jq}, \mathbf{D}\mathbf{W}^{\kappa}_{jq} \right) - \left(\mu_j \mathbf{v}^{\kappa}_{jq}, \mathbf{D}\mathbf{v}^{\kappa}_{jq} \right) \right].$$

Отдельно преобразуем первую квадратичную форму в правой части этого неравенства:

$$\frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mu_j \mathbf{W}^{\kappa}_{jq}, \mathbf{D}\mathbf{W}^{\kappa}_{jq} \right) = \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mathbf{W}^{\kappa}_{jq}, \begin{bmatrix} \mu^{+} e^{-\nu x_j} \mathbf{K}^{+} & 0 \\ 0 & \mu^{-} e^{\nu x_j} \mathbf{K}^{-} \end{bmatrix} \mathbf{W}^{\kappa}_{jq} \right) =$$

$$= e^{-\nu \Delta x} \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mathbf{W}^{\kappa}_{jq}, \begin{bmatrix} \mu^{+} e^{-\nu x_{j-1}} \mathbf{K}^{+} & 0 \\ 0 & \mu^{-} e^{\nu x_{j+1}} \mathbf{K}^{-} \end{bmatrix} \mathbf{W}^{\kappa}_{jq} \right) =$$

$$= e^{-\nu \Delta x} \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\left(\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right)^{\kappa}_{j-1,q}, \mu^{+} e^{-\nu x_{j-1}} \mathbf{K}^{+} \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right)^{\kappa}_{j-1,q} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)^{\kappa}_{j+1,q}, \mu^{-} e^{\nu x_{j+1}} \mathbf{K}^{-} \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)^{\kappa}_{j+1,q} \right) \right) =$$

$$= e^{-\nu \Delta x} \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right)^{\kappa}_{jq}, \mu^{+} e^{-\nu x_j} \mathbf{K}^{+} \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right)^{\kappa}_{jq} \right) +$$

$$+ e^{-\nu \Delta x} \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} e^{-\nu \Delta x} \left(\left(\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right)^{\kappa}_{-1,q}, \mu^{+} e^{-\nu x_{-1}} \mathbf{K}^{+} \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right)^{\kappa}_{-1,q} \right) - \right.$$

$$\left. - e^{-\nu \Delta x} \left(\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right)^{\kappa}_{J-1,q}, \mu^{+} e^{-\nu x_{J-1}} \mathbf{K}^{+} \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right)^{\kappa}_{J-1,q} \right) \right) +$$

$$+ e^{-\nu \Delta x} \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)^{\kappa}_{jq}, \mu^{-} e^{\nu x_j} \mathbf{K}^{-} \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)^{\kappa}_{jq} \right) +$$

$$+ e^{-\nu \Delta x} \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} -e^{-\nu \Delta x} \left(\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)^{\kappa}_{0q}, \mu^{-} e^{\nu x_0} \mathbf{K}^{-} \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)^{\kappa}_{0q} \right) + e^{-\nu \Delta x} \left(\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)^{\kappa}_{Jq}, \mu^{-} e^{\nu x_J} \mathbf{K}^{-} \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)^{\kappa}_{Jq} \right) =$$

$$= e^{-\nu \Delta x} \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mathbf{v}^{\kappa}_{jq}, \mu_j \left| \mathbf{K} \right| \mathbf{v}^{\kappa}_{jq} \right) +$$

$$+ e^{-\nu \Delta x} \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left(\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right)^{\kappa}_{-1,q}, \mu^{+} e^{-\nu x_0} \mathbf{K}^{+} \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right)^{\kappa}_{-1,q} \right) - \left(\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right)^{\kappa}_{J-1,q}, \mu^{+} e^{-\nu x_J} \mathbf{K}^{+} \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right)^{\kappa}_{J-1,q} \right) -$$

$$- e^{-\nu \Delta x} \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left(\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)^{\kappa}_{0q}, \mu^{-} e^{\nu x_{-1}} \mathbf{K}^{-} \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)^{\kappa}_{0q} \right) + \left(\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)^{\kappa}_{Jq}, \mu^{-} e^{\nu x_{J-1}} \mathbf{K}^{-} \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)^{\kappa}_{Jq} \right) =$$

$$= e^{-\nu \Delta x} \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mathbf{v}^{\kappa}_{jq}, \mu_j \left| \mathbf{K} \right| \mathbf{v}^{\kappa}_{jq} \right) +$$

$$+ e^{-\nu \Delta x} \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left(\begin{bmatrix} \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right)^{\kappa}_{-1,q} \\ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)^{\kappa}_{Jq} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu^{+} e^{-\nu x_0} \mathbf{K}^{+} & 0 \\ 0 & \mu^{-} e^{\nu x_{J-1}} \mathbf{K}^{-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right)^{\kappa}_{-1,q} \\ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)^{\kappa}_{Jq} \end{bmatrix} \right) -$$

$$- e^{-\nu \Delta x} \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left(\begin{bmatrix} \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right)^{\kappa}_{J-1,q} \\ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)^{\kappa}_{0q} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu^{+} e^{-\nu x_J} \mathbf{K}^{+} & 0 \\ 0 & \mu^{-} e^{\nu x_{-1}} \mathbf{K}^{-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right)^{\kappa}_{J-1,q} \\ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)^{\kappa}_{0q} \end{bmatrix} \right).$$

С учетом краевых условий

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{v}^{\mathrm{I}})^{\kappa+1}_{-1,q} \\ (\mathbf{v}^{\mathrm{II}})^{\kappa+1}_{Jq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s} \\ \mathbf{r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{v}^{\mathrm{I}})^{\kappa+1}_{J-1,q} \\ (\mathbf{v}^{\mathrm{II}})^{\kappa+1}_{0q} \end{pmatrix}$$

имеем

$$\frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mu_j \mathbf{W}^{\kappa}_{jq}, \mathbf{D}\mathbf{W}^{\kappa}_{jq}\right) = e^{-\nu\Delta x} \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mathbf{v}^{\kappa}_{jq}, \mu_j \left|\mathbf{K}\right| \mathbf{v}^{\kappa}_{jq}\right) +$$
$$+ \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left(\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s} \\ \mathbf{r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{v}^{\mathrm{I}})^{\kappa+1}_{J-1,q} \\ (\mathbf{v}^{\mathrm{II}})^{\kappa+1}_{0q} \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} \mu^{+} e^{-\nu x_0} \mathbf{K}^{+} & 0 \\ 0 & \mu^{-} e^{\nu x_{J-1}} \mathbf{K}^{-} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s} \\ \mathbf{r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{v}^{\mathrm{I}})^{\kappa+1}_{J-1,q} \\ (\mathbf{v}^{\mathrm{II}})^{\kappa+1}_{0q} \end{pmatrix} \right) -$$
$$- \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left(\begin{bmatrix} (\mathbf{v}^{\mathrm{I}})^{\kappa}_{J-1,q} \\ (\mathbf{v}^{\mathrm{II}})^{\kappa}_{0q} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu^{+} e^{-\nu x_J} \mathbf{K}^{+} & 0 \\ 0 & \mu^{-} e^{\nu x_{-1}} \mathbf{K}^{-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{v}^{\mathrm{I}})^{\kappa}_{J-1,q} \\ (\mathbf{v}^{\mathrm{II}})^{\kappa}_{0q} \end{bmatrix} \right).$$

Предположим, что условие диссипативности

$$\begin{bmatrix} \mu^{+} e^{-\nu x_J} \mathbf{K}^{+} & 0 \\ 0 & \mu^{-} e^{\nu x_{-1}} \mathbf{K}^{-} \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{r} \\ \mathbf{s} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mu^{+} e^{-\nu x_0} \mathbf{K}^{+} & 0 \\ 0 & \mu^{-} e^{\nu x_{J-1}} \mathbf{K}^{-} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s} \\ \mathbf{r} & 0 \end{pmatrix} > 0$$

выполняется. Тогда имеем

$$\frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mu_j \mathbf{W}^{\kappa}_{jq}, \mathbf{D}\mathbf{W}^{\kappa}_{jq}\right) \leqslant e^{-\nu\Delta x} \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mathbf{v}^{\kappa}_{jq}, \mu_j \left|\mathbf{K}\right| \mathbf{v}^{\kappa}_{jq}\right)$$

и, следовательно,

$$\frac{L(\mathbf{w}^{\kappa}) - L(\mathbf{v}^{\kappa})}{\Delta t} \leqslant e^{-\nu\Delta x} \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mathbf{v}^{\kappa}_{jq}, \mu_j \left|\mathbf{K}\right| \mathbf{v}^{\kappa}_{jq}\right) - \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mathbf{v}^{\kappa}_{jq}, \mu_j \left|\mathbf{K}\right| \mathbf{v}^{\kappa}_{jq}\right) =$$
$$= (e^{-\nu\Delta x} - 1) \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mathbf{v}^{\kappa}_{jq}, \mu_j \left|\mathbf{K}\right| \mathbf{v}^{\kappa}_{jq}\right) \leqslant -\alpha(1 - e^{-\nu\Delta x}) \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mathbf{v}^{\kappa}_{jq}, \mu_j \mathbf{v}^{\kappa}_{jq}\right).$$

Здесь

$$\alpha = \min_i |k_i| \,.$$

Так как

$$\mathbf{M}^T \mu_j + \mu_j \mathbf{M} - \Delta t \mathbf{M}^T \mu_j \mathbf{M}, \quad j = 0, \ldots, J-1$$

являются неотрицательно определенными матрицами, и существуют константы

$$\nu, \quad \alpha = \min_i |k_i| \,,$$

такие, что

$$0 < \alpha(1 - e^{-\nu\Delta x}) < 1,$$

получаем

$$\frac{L(\mathbf{v}^{\kappa+1}) - L(\mathbf{u}^{\kappa})}{\Delta t} \leqslant 0, \qquad \frac{L(\mathbf{u}^{\kappa}) - L(\mathbf{w}^{\kappa})}{\Delta t} \leqslant 0, \quad \frac{L(\mathbf{w}^{\kappa}) - L(\mathbf{v}^{\kappa})}{\Delta t} < -\eta L(\mathbf{v}^{\kappa}).$$

Здесь

$$\eta = \alpha(1 - e^{-\nu\Delta x}).$$

Таким образом,

$$\frac{L(\mathbf{v}^{\kappa+1}) - L(\mathbf{v}^{\kappa})}{\Delta t} < -\eta L(\mathbf{v}^{\kappa})$$

либо

$$\frac{L^{\kappa+1} - L^{\kappa}}{\Delta t} < -\eta L^{\kappa}.$$

Применяя данное неравенство рекуррентным образом, получаем

$$L^{\kappa+1} < (1 - \Delta t \eta)^{\kappa+1} L^0 \leqslant e^{-\eta \Delta t(\kappa+1)} L^0 = e^{-\eta t_{\kappa+1}} L^0, \; \kappa = 0, \ldots, N-1.$$

Обозначим

$$C_1 = \min_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant J-1}} \left\{\varpi_{ij} : |\mu_j - \varpi_{ij}\mathbf{E}| = 0\right\}, \quad C_2 = \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant J-1}} \left\{\varpi_{ij} : |\mu_j - \varpi_{ij}\mathbf{E}| = 0\right\}.$$

Тогда

$$C_1\mathbf{E} \leqslant \mu_j \leqslant C_2\mathbf{E}, \quad j = 0, \ldots, J-1.$$

Отсюда следует, что

$$C_1 \Delta x \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mathbf{v}_j^\kappa, \mathbf{v}_j^\kappa\right) \leqslant L^\kappa \leqslant C_2 e^{-\eta t_\kappa} \Delta x \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mathbf{v}_j^0, \mathbf{v}_j^0\right), \quad \kappa = 0, \ldots, N,$$

$$\Delta x \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mathbf{v}_j^\kappa, \mathbf{v}_j^\kappa\right) \leqslant C e^{-\eta t_\kappa} \Delta x \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mathbf{v}_j^0, \mathbf{v}_j^0\right), \quad \kappa = 0, \ldots, N; \ C = C_2/C_1.$$

Следовательно, численное решение $\mathbf{v}_j^n$ исходной задачи является экспоненциально устойчивым по норме $\mathbb{L}_2$.

Теорема 3.1 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блохин А. М., Алаев Р. Д.* Интегралы энергии и их приложения к исследованию устойчивости разностных схем. — Новосибирск: Изд-во Новосибирского гос. ун-та, 1993.
2. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1979.
3. *Aloev R. D., Blokhin A. M., Hudayberganov M. U.* One class of stable difference schemes for hyperbolic system// Am. J. Numer. Anal. — 2014. — *2*, № 3. — С. 85–89.
4. *Aloev R. D., Davlatov Sh. O., Eshkuvatov Z. K., Nik Long N. M. A.* Uniqueness solution of the finite elements scheme for symmetric hyperbolic systems with variable coefficients// Malays. J. Math. Sci. — 2016. — *10* (S). — С. 49–60.
5. *Aloev R. D., Eshkuvatov Z. K., Davlatov Sh. O., Nik Long N. M. A.* Sufficient condition of stability of finite element method for symmetric t-hyperbolic systems with constant coefficients// Comput. Math. Appl. — 2014. — *68*, № 10. — С. 1194–1204.
6. *Bastin G., Coron J.-M.* Stability and boundary stabilization of 1-D hyperbolic systems. — Basel: Birkhäuser, 2016.

Р. Д. Алаев
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
Узбекистан, 700174, г. Ташкент, ВУЗ городок
E-mail: aloevr@mail.ru

М. У. Худайберганов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
Узбекистан, 700174, г. Ташкент, ВУЗ городок
E-mail: mirzoali@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-4-591-602 UDC 519.633

A Discrete Analog of the Lyapunov Function for Hyperbolic Systems

© 2018 **R. D. Aloev, M. U. Khudayberganov**

Abstract. We study the difference splitting scheme for the numerical calculation of stable solutions of a two-dimensional linear hyperbolic system with dissipative boundary conditions in the case of constant coefficients with lower terms. A discrete analog of the Lyapunov function is constructed and an a priori estimate is obtained for it. The obtained a priori estimate allows us to assert the exponential stability of the numerical solution.

REFERENCES

1. A. M. Blokhin and R. D. Aloev, *Integraly energii i ikh prilozheniya k issledovaniyu ustoychivosti raznostnykh skhem* [Energy integrals and their applications to the study of the stability of the difference schemes], Novosibirsk State Univ., Novosibirsk, 1993 (in Russian).
2. S. K. Godunov, *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1979 (in Russian).
3. R. D. Aloev, A. M. Blokhin, and M. U. Hudayberganov, "One class of stable difference schemes for hyperbolic system," *Am. J. Numer. Anal.*, 2014, **2**, No. 3, 85–89.
4. R. D. Aloev, Sh. O. Davlatov, Z. K. Eshkuvatov, and N. M. A. Nik Long, "Uniqueness solution of the finite elements scheme for symmetric hyperbolic systems with variable coefficients," *Malays. J. Math. Sci.*, 2016, **10** (S), 49–60.
5. R. D. Aloev, Z. K. Eshkuvatov, Sh. O. Davlatov, and N. M. A. Nik Long, "Sufficient condition of stability of finite element method for symmetric *t*-hyperbolic systems with constant coefficients," *Comput. Math. Appl.*, 2014, **68**, No. 10, 1194–1204.
6. G. Bastin and J.-M. Coron, *Stability and boundary stabilization of 1-D hyperbolic systems*, Birkhäuser, Basel, 2016.

R. D. Aloev
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: aloevr@mail.ru

M. U. Khudayberganov
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: mirzoali@mail.ru