Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 3 (2018). С. 573–590

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-3-573-590 УДК 517.98

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ В БАССЕЙНЕ, ПОКРЫТОМ ЛЬДОМ

© 2018 г. Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ, Д. О. ЦВЕТКОВ

Аннотация. Изучается задача о малых движениях идеальной стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, частично покрытой крошеным льдом. Под крошеным льдом подразумеваем плавающие на свободной поверхности весомые частицы некоторого вещества, которые в процессе колебания свободной поверхности друг с другом не взаимодействуют или их взаимодействие пренебрежимо мало, причем частицы все время находятся на поверхности в процессе малых движений. Используя метод ортогонального проектирования граничных условий на подвижной поверхности и введения вспомогательных задач, исходная начально-краевая задача сводится к равносильной задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка в некотором гильбертовом пространстве. Получены условия, при которых существует сильное по времени решение начально-краевой задачи, описывающей эволюцию данной гидросистемы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

В связи с новыми потребностями прикладных наук возрос интерес к изучению динамических характеристик жидкостей, обладающих разными специфическими свойствами. К таким жидкостям, в частности, относятся стратифицированные и флотирующие жидкости. Данная работа является продолжением цикла работ, связанных с изучением колебаний стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, покрытой крошеным льдом. Под крошеным льдом подразумеваем плавающие на свободной поверхности весомые частицы некоторого вещества, которые в процессе колебания свободной поверхности друг с другом не взаимодействуют или их взаимодействие пренебрежимо мало, причем частицы все время находятся на поверхности в процессе малых движений данной гидродинамической системы.

В представленной работе рассматривается ситуация, когда идеальная стратифицированная жидкость покрыта крошеным льдом и есть участки чистой воды. Эта задача близка к проблеме флотации, частично исследованной С. А. Габовым и А. Г. Свешниковым (см. [1, 2]), а также в работе М. А. Солдатова [9] для однородной жидкости.

В данной работе для получения операторного уравнения исходной задачи граничные условия на подвижной поверхности проектируются на подпространства ортогонального разложения H:

$$H = H_0 \oplus H_2 \oplus H_3, \tag{1}$$
$$H_1 := \{ (\zeta_1;\zeta_2) \,|\, \zeta_1 \in L_2(\Gamma_1) \ominus \{1_{\Gamma_1}\}, \zeta_2 \equiv 0 \},$$
$$H_2 := \{ (\zeta_1;\zeta_2) \,|\, \zeta_2 \in L_2(\Gamma_2) \ominus \{1_{\Gamma_2}\}, \zeta_1 \equiv 0 \},$$

где функция ζ отклонения подвижной поверхности от ее равновесного состояния представлена в виде пары функций $\zeta = (\zeta_1;\zeta_2)$, $\zeta_1 = \zeta|_{\Gamma_1}$ и $\zeta_2 = \zeta|_{\Gamma_2}$, Γ_1 — участок «чистой воды» , Γ_2 — участок «крошеного льда». Доказано, что H_3 есть одномерное подпространство, что существенно используется в дальнейшем.

Отметим, что ортогональное разложение (1) естественным образом приспособлено к применению метода ортогонального проектирования для исходной задачи, т. е. для случая, когда на различных участках подвижной границы заданы различные граничные условия.

Операторное уравнение в этой задаче имеет вид

$$\mathcal{A}\frac{d^2x}{dt^2} + \mathcal{C}x = \mathcal{F}, \quad x(0) = x^0, \quad x'(0) = x^1, \tag{2}$$
$$0 < \mathcal{A} = \mathcal{A}^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad 0 \leqslant \mathcal{C} = \mathcal{C}^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, где $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ — это операторные блок-матрицы. Для вывода уравнения (2) рассматриваются три вспомогательные задачи, связанные с проектированием граничных условий на поверхности Γ. Применение метода операторных блок-матриц позволило доказать теоремы о сильной разрешимости исходной начально-краевой задачи.

1. Постановка задачи. Переход к системе операторных уравнений

1.1. Математическая формулировка задачи. Пусть идеальная стратифицированная жидкость, плотность ρ_0 которой в состоянии покоя изменяется вдоль вертикальной оси Ox_3: $\rho_0 = \rho_0(x_3)$, частично заполняет неподвижный сосуд и занимает в состоянии покоя область Ω, ограниченную твердой стенкой S и свободной поверхностью $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 — участок «чистой воды» , Γ_2 — участок «крошеного льда». Обозначим через ρ_1 поверхностную плотность крошеного льда. Предположим, что начало O декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ выбрано на свободной равновесной поверхности Γ, которая является плоской и расположена перпендикулярно ускорению силы тяжести $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, где $\vec{e}_3$ — орт оси Ox_3. Предполагаем далее, что твердая стенка $S \subset \partial\Omega$ является липшицевой поверхностью, причем $\partial S = \partial\Gamma$ — липшицева кривая.

Будем рассматривать основной случай устойчивой стратификации жидкости по плотности:

$$0 < N^2_{min} \leqslant N^2(x_3) \leqslant N^2_{max} = N^2_0 < \infty, \quad N^2(x_3) = -\frac{g\rho_0'(x_3)}{\rho_0(x_3)}, \quad \rho_0(0) > 0, \tag{1.3}$$

Функцию $N(x_3)$ называют частотой Вейсяля—Брента, или частотой плавучести.

Рассмотрим малые движения жидкости, близкие к состоянию покоя. Обозначим через $\vec{u} = \vec{u}(t,x)$, $x = (x_1,x_2,x_3) \in \Omega$, поле скорости в жидкости, $p = p(t,x)$ — отклонение поля давлений от равновесного давления $P_0 = P_0(x_3)$, $\rho = \rho(t,x)$ — отклонение поля плотности от исходного поля $\rho_0(x_3)$, а через $\zeta = \zeta(t,\hat{x})$ ($\hat{x} = (x_1,x_2) \in \Gamma$) — отклонение свободно движущейся поверхности жидкости $\Gamma(t)$ от Γ по нормали $\vec{n}$. Тогда малые движения исходной системы описываются следующей начально-краевой задачей (см., например, [2, 7]):

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = \rho_0^{-1}(x_3)\Big(-\nabla p - g\rho\vec{e}_3\Big) + \vec{f}(t,x) \quad (\text{в}\,\Omega),\\
\operatorname{div}\vec{u} = 0, \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\rho_0\cdot\vec{u} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega),\\
\vec{u}\cdot\vec{n} =: u_n = 0 \quad (\text{на}\,S), \quad u_n = \frac{\partial\zeta}{\partial t} \quad (\text{на}\,\Gamma), \quad \int_\Gamma \zeta\, d\Gamma = 0,\\
p = g\rho_0(0)\zeta \quad (\text{на}\,\Gamma_1), \qquad p = g\rho_0(0)\zeta + \rho_1\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} \quad (\text{на}\,\Gamma_2),\\
\vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x), \quad \rho(0,x) = \rho^0(x) \quad (x\in\Omega), \quad \zeta(0,\hat{x}) = \zeta_0(\hat{x}) \quad (\hat{x}\in\Gamma).
\end{gathered} \tag{1.4}$$

1.2. Исключение поля плотности. Использование поля малых смещений жидкости. В начально-краевой задаче (1.4) можно исключить одну искомую функцию — поле плотности $\rho(t,x)$, если ввести взамен поля скорости $\vec{u}(t,x)$ поле малых смещений частиц жидкости $\vec{v}(t,x)$, связанное с $\vec{u}(t,x)$ соотношениями

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{u}, \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega). \tag{1.5}$$

Тогда придем к связи

$$\begin{aligned} &\rho(t,x) = -\nabla\rho_0 \cdot \vec{v}(t,x) + f_0(x) = -\rho_0'(x_3)v_3(t,x) + f_0(x), \\ &f_0(x) := \rho(0,x) + \rho_0'(x_3)v_3(0,x), \quad v_3 := \vec{v}\cdot\vec{e}_3, \end{aligned} \tag{1.6}$$

и к уравнениям для $\vec{v}(t,x)$ и $p(t,x)$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = -\rho_0^{-1}(x_3)\nabla p - N^2(x_3)v_3\vec{e}_3 + \psi_0(x), \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega), \\ &\psi_0(x) = \vec{f}(t,x) - g f_0(x)\vec{e}_3/\rho_0(x_3). \end{aligned} \tag{1.7}$$

С учетом сказанного перепишем исходную задачу (1.4) в виде:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = -\rho_0^{-1}(x_3)\nabla p - N^2(x_3)v_3\vec{e}_3 + \psi_0(x), \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega), \\ &\vec{v}\cdot\vec{n} =: v_n = 0 \quad (\text{на}\,S), \qquad \int_\Gamma v_3\,d\Gamma = 0, \\ &p = g\rho_0(0)v_3 \quad (\text{на}\,\Gamma_1), \qquad p = g\rho_0(0)v_3 + \rho_1\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} \quad (\text{на}\,\Gamma_2), \\ &\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(0,x) = \vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x), \quad \vec{v}(0,x) = \vec{v}^0(x), \\ &v_3(0,\hat{x}) = \zeta(0,\hat{x}) = \zeta^0(\hat{x}) \quad (\hat{x}\in\Gamma). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Начально-краевая задача (1.8) содержит лишь две искомые функции: векторное поле $\vec{v}(t,x)$ и скалярное поле давлений $p(t,x)$. По решению $\vec{v}(t,x)$ задачи (1.8) решения $\vec{u}(t,x)$ и $\rho(t,x)$ задачи (1.4) можно найти по формулам (1.5) и (1.6).

1.3. Проектирование уравнений движения на ортогональные подпространства. Начально-краевую задачу (1.8) приведем в дальнейшем к дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве. Для этого применим прием проектирования первого уравнения (1.8) на ортогональные подпространства (см. [6]). Свяжем с функцией ρ_0 гильбертово пространство $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$ вектор-функций со скалярным произведением

$$(\vec{u},\vec{v}) = \int_\Omega \rho_0(x_3)\vec{u}(x)\overline{\vec{v}(x)}\,d\Omega. \tag{1.9}$$

Как следует из (1.3), для $\rho = \rho_0(x_3)$ справедливы неравенства

$$0 < m \leqslant \rho_0 \leqslant M < \infty,$$

обеспечивающие эквивалентность норм, определенных по закону (1.9) и обычным скалярным произведением в $\vec{L}_2(\Omega)$.

Обозначим через $\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)$ подпространство $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$, которое получается замыканием в норме $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$ множества гладких функций

$$\{\,\vec{v}\in\vec{C}^1(\Omega):\ \operatorname{div}\vec{v} = 0\ (\text{в}\ \Omega),\ v_n = 0\ (\text{на}\ \partial\Omega)\,\}.$$

В качестве других подпространств возьмем подпространства

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0) = \{\,\vec{v}\in\vec{L}_2(\Omega,\rho_0):\ \vec{v} = \rho_0^{-1}\nabla p,\ v_n = 0\ (\text{на}\ S), \nabla\cdot\vec{v} = 0\ (\text{в}\ \Omega),\ \int_\Gamma p\,d\Gamma = 0\,\},$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0) = \{\,\vec{w}\in\vec{L}_2(\Omega,\rho_0):\ \vec{w} = \rho_0^{-1}\nabla\varphi, \quad \varphi = 0\ (\text{на}\,\Gamma)\,\}.$$

Лемма 1.1. *Имеет место следующее ортогональное разложение*:

$$\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)=\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)\oplus\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0). \tag{1.10}$$

Доказательство леммы повторяет доказательство аналогичного утверждения для пространства $\vec{L}_2(\Omega)$, когда в (1.10) $\rho_0(x_3)=\mathrm{const}$ (см. [6, с. 106]).

Будем считать $\vec{v}(t,x)$ и $\rho_0^{-1}\nabla p(t,x)$ функциями переменной t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$, тогда в силу уравнений и граничных условий (1.8) и ортогонального разложения (1.10) имеем

$$\vec{v}(t,x)\in\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)=:\vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0),$$
$$\rho_0^{-1}\nabla p(t,x)\in\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0)\oplus\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)=:\vec{G}(\Omega,\rho_0).$$

Поэтому при каждом t будем разыскивать их в виде

$$\begin{gathered}\vec{v}(t,x)=\vec{w}(t,x)+\rho_0^{-1}\nabla\Phi(t,x),\ \vec{w}(t,x)\in\vec{J}_0(\Omega,\rho_0),\ \rho_0^{-1}\nabla\Phi(t,x)\in\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0),\\ \rho_0^{-1}\nabla p(t,x)=\rho_0^{-1}\nabla p_1(t,x)+\rho_0^{-1}\nabla p_2(t,x),\\ \rho_0^{-1}\nabla p_1(x,t)\in\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0),\quad \rho_0^{-1}\nabla p_2(t,x)\in\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0).\end{gathered} \tag{1.11}$$

Обозначим через P_0, $P_{h,S}$ и $P_{0,\Gamma}$ ортопроекторы на подпространства $\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)$, $\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)$, $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0)$, соответственно. Тогда, подставляя (1.11) в первое уравнение (1.8) и применяя ортопроекторы, получаем

$$\frac{\partial^2\vec{w}}{\partial t^2}+P_0\left[N^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+w_3\right)\vec{e}_3\right]=P_0\psi_0, \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\right)+\rho_0^{-1}\nabla p_1+P_{h,S}\left[N^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+w_3\right)\vec{e}_3\right]=P_{h,S}\psi_0, \tag{1.13}$$

$$\rho_0^{-1}\nabla p_2+P_{0,\Gamma}\left[N^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+w_3\right)\vec{e}_3\right]=P_{0,\Gamma}\psi_0. \tag{1.14}$$

Из соотношения (1.14) следует, что составляющая поля давлений, обусловленная слагаемым $\rho_0^{-1}\nabla p_2$, определяется лишь полем вертикального смещения v_3 и начальными условиями, следовательно, достаточно ограничиться рассмотрением первых двух соотношений, а также граничного условия с соответствующей заменой $p\to p_1$, так как $p=p_1+p_2$, $p_2=0$ (на Γ).

Для перехода от (1.12), (1.13) к системе уравнений с двумя искомыми функциями введем новые элементы:

$$P_{h,S}\left[N^2(x_3)w_3\vec{e}_3\right]:=\rho_0^{-1}\nabla\Psi,\qquad P_{h,S}\left[N^2(x_3)\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\vec{e}_3\right]:=\rho_0^{-1}\nabla\eta. \tag{1.15}$$

Тогда (1.13) дает интеграл Коши—Лагранжа

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+p_1+\Psi+\eta-F=c(t)\quad(\text{в}\,\Omega), \tag{1.16}$$

где $c(t)$ — произвольная функция времени, $P_{h,S}\psi_0=\rho_0^{-1}\nabla F$.

Рассмотрим (1.16) на Γ_2 и воспользуемся равенством

$$\begin{aligned}p_1=g\rho_0(0)v_3+\rho_1\frac{\partial^2v_3}{\partial t^2}&=g\rho_0(0)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+w_3\right)+\rho_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+w_3\right)=\\ &=g\rho_0(0)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)+\rho_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)=g\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+\rho_1\rho_0^{-1}(0)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)\quad(\text{на}\,\Gamma_2\,);\end{aligned}$$

получим

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+\rho_1\rho_0^{-1}(0)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)+\Psi+\eta=F+c(t)\quad(\text{на}\,\Gamma_2\,). \tag{1.17}$$

Аналогично, получаем

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+\Psi+\eta=F+c(t)\quad(\text{на}\,\Gamma_1\,). \tag{1.18}$$

Соотношения (1.17) и (1.18) вместе с (1.12) дают два уравнения для определения двух искомых функций $\vec{w}(t,x)$ и $\Phi(t,x)$, при этом учитываются связи (1.15), а также ограничения, следующие из (1.12)–(1.14). Таким образом, начально-краевую задачу (1.8) перепишем в виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\vec{w}}{\partial t^2}+P_0\Big[N^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+w_3\right)\vec{e}_3\Big]=P_0\psi_0 \quad (\text{в}\,\Omega),\\
&\operatorname{div}\vec{w}=0 \quad (\text{в}\,\Omega),\quad \vec{w}\cdot\vec{n}=0 \quad (\text{на }\partial\Omega),\\
&\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+\Psi+\eta=F+c(t) \quad (\text{на}\,\Gamma_1),\\
&\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+\rho_1\rho_0^{-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)+\Psi+\eta=F+c(t) \quad (\text{на}\,\Gamma_2),\\
&\nabla\cdot(\rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi)=0 \quad (\text{в }\Omega),\quad \rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi\cdot\vec{n}=0 \quad (\text{на }S),\\
&\int_\Gamma\Phi\,d\Gamma=0,\quad \int_\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\,d\Gamma=0,\\
&\frac{\partial}{\partial t}w(0,x)=P_0\vec{u}^0,\quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}(0,\hat{x})\right)_\Gamma=\left[\left(P_{h,S}\vec{u}^0(x)\right)\cdot\vec{n}\right]_\Gamma,\\
&\vec{w}(0,x)=P_0\vec{v}^0,\quad \left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}(0,\hat{x})\right)_\Gamma=\zeta^0(\hat{x}) \quad (\hat{x}\in\Gamma).
\end{aligned}\tag{1.19}$$

1.4. Переход к системе дифференциально-операторных уравнений. Напомним, что отклонение $v_3|_\Gamma=\left(\rho_0^{-1}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_3}+w_3\right)_\Gamma$ частиц подвижной поверхности должно удовлетворять условию сохранения объема жидкости при колебаниях:

$$\int_\Gamma v_3\,d\Gamma=\int_\Gamma\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+w_3\right)d\Gamma=0 \implies \int_\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\,d\Gamma=0,$$

так как $w_3|_\Gamma=0$, $\rho_0^{-1}|_\Gamma=\text{const}$. Это же условие является необходимым условием разрешимости задачи Неймана

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot(\rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi)=0 \quad (\text{в }\Omega),\quad \rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi\cdot\vec{n}=0 \quad (\text{на }S),\\
&\rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}=\psi \quad (\text{на }\Gamma),\quad \int_\Gamma\psi\,d\Gamma=0.
\end{aligned}\tag{1.20}$$

Функцию $\psi=\rho_0^{-1}(0)\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_3}\Big|_\Gamma$ будем рассматривать как элемент пространства $H=L_{2,\Gamma}:=L_2(\Gamma)\ominus\{1_\Gamma\}$ и искать в виде пары функций $\psi=(\psi_1;\psi_2)$, где $\psi_1=\psi|_{\Gamma_1}$ и $\psi_2=\psi|_{\Gamma_2}$, т. е. функций, заданных на соответствующих областях Γ_1 и Γ_2.

Рассмотрим следующие подпространства пространства H:

$$H_1:=\{\,(\psi_1;\psi_2)\mid\psi_1\in L_2(\Gamma_1)\ominus\{1_{\Gamma_1}\},\psi_2\equiv0\,\},\tag{1.21}$$

$$H_2:=\{\,(\psi_1;\psi_2)\mid\psi_2\in L_2(\Gamma_2)\ominus\{1_{\Gamma_2}\},\psi_1\equiv0\,\}.\tag{1.22}$$

Очевидно, что пространства H_1 и H_2 ортогональны относительно скалярного произведения в $L_2(\Gamma)$. Тогда пространство H можно разложить в ортогональную сумму трех пространств:

$$H=H_1\oplus H_2\oplus H_3,\tag{1.23}$$

где H_3 есть одномерное подпространство пространства H, натянутое на вектор $\widehat{\varphi}$:

$$H_3=\{\,\widehat{v}\mid\widehat{v}=\alpha\widehat{\varphi},\quad\forall\,\alpha\in\mathbb{C},\quad\widehat{\varphi}=(\operatorname{mes}\Gamma_2;-\operatorname{mes}\Gamma_1)\,\}.\tag{1.24}$$

Введем действующие в пространстве H ортопроекторы P_1, P_2 и P_3 на подпространства H_1, H_2 и H_3, соответственно. Они будут действовать по следующим правилам:

$$P_1u=(u_1-\tilde{u}_1;0),\quad \tilde{u}_1=(\operatorname{mes}\Gamma_1)^{-1}\int_{\Gamma_1}u_1\,d\Gamma_1,\tag{1.25}$$

$$P_2 u = (0; u_2 - \tilde{u}_2), \quad \tilde{u}_2 = (\operatorname{mes}\Gamma_2)^{-1} \int\limits_{\Gamma_2} u_2 \, d\Gamma_2, \tag{1.26}$$

$$P_3 u = (I - P_1 - P_2)\, u = (\tilde{u}_1; \tilde{u}_2). \tag{1.27}$$

Цель дальнейших построений — перейти от начально-краевой задачи (1.19) к задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка в некотором гильбертовом пространстве.

Граничные условия в (1.19) на Γ_1 и Γ_2 можно записать покомпонентно в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\rho_0 \psi_1 + \Psi + \eta = F + c(t) \quad (\text{на } \Gamma_1), \\ &\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\rho_0 \psi_2 + \rho_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} + \Psi + \eta = F + c(t) \quad (\text{на } \Gamma_2). \end{aligned} \tag{1.28}$$

Перейдем к построению потенциала Φ в области Ω, выразив его через $\psi = \rho_0^{-1}(0) \left.\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right|_\Gamma$. Так как $\rho_0^{-1} \nabla \Phi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$, то функция Φ является решением задачи Неймана (1.20).

Будем использовать в дальнейшем знак «$\widetilde{\ }$» для обозначения среднего интегрального значения функции, заданной на Γ или ее части (см. (1.25), (1.26)).

Для получения общего вида функции Φ, учитывающего представление ψ в виде

$$\psi = \Big(\psi_1 - \widetilde{\psi}_1; 0\Big) + \Big(0; \psi_2 - \widetilde{\psi}_2\Big) + \Big(\widetilde{\psi}_1; \widetilde{\psi}_2\Big) =: P_1\psi + P_2\psi + P_3\psi, \tag{1.29}$$

рассмотрим три вспомогательные задачи.

Вспомогательная задача I. *Найти обобщенное решение* $\Phi = \Phi_1$ *задачи* (1.20) *при* $\psi = (\psi_1 - \widetilde{\psi}_1; 0) = P_1\psi \in H_1$:

$$\begin{gathered} \nabla \cdot (\rho_0^{-1}(x) \nabla \Phi_1) = 0 \quad (\textit{в } \Omega), \quad \rho_0^{-1}(x) \nabla \Phi_1 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\textit{на } S), \qquad \int\limits_\Gamma \Phi_1 \, d\Gamma = 0, \\ \rho_0^{-1}(0) \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} = \psi_1 - \widetilde{\psi}_1 \quad (\textit{на } \Gamma_1), \qquad \rho_0^{-1}(0) \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} = 0 \quad (\textit{на } \Gamma_2). \end{gathered} \tag{1.30}$$

Так как $H_1 \subset H$, то необходимое условие разрешимости задачи (1.30) выполнено, а значит, эта задача имеет единственное решение (см., например, [6, с. 46]) $\Phi_1 = \Phi_1(x)$ из пространства $H^1_\Gamma(\Omega, \rho_0)$.

Введем оператор T_1, который ставит в соответствие функции $P_1\psi$ решение задачи (1.30):

$$\Phi_1 = \Phi_1|_\Omega =: T_1 P_1 \psi = T_1(\psi_1 - \widetilde{\psi}_1; 0) =: T_1 u_1, \qquad u_1 := P_1\psi \in H_1. \tag{1.31}$$

Рассмотрим теперь значения функции Φ_1 на границе Γ. Введем оператор следа на границе Γ:

$$\gamma\,(\Phi_1|_\Omega) := \Phi_1|_\Gamma \tag{1.32}$$

и представим функцию $\Phi_1|_\Gamma$ в виде суммы ее проекций на подпространства H_1, H_2 и H_3:

$$\Phi_1|_\Gamma = P_1 \gamma T_1 P_1 \psi + P_2 \gamma T_1 P_1 \psi + P_3 \gamma T_1 P_1 \psi =: C_{11} u_1 + C_{21} u_1 + C_{31} u_1. \tag{1.33}$$

Вспомогательная задача II. *Найти обобщенное решение* $\Phi = \Phi_2$ *задачи* (1.20) *при* $\psi = (0; \psi_2 - \widetilde{\psi}_2) = P_2\psi \in H_2$:

$$\begin{gathered} \nabla \cdot (\rho_0^{-1}(x) \nabla \Phi_2) = 0 \quad (\textit{в } \Omega), \quad \rho_0^{-1}(x) \nabla \Phi_2 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\textit{на } S), \qquad \int\limits_\Gamma \Phi_2 \, d\Gamma = 0, \\ \rho_0^{-1}(0) \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3} = 0 \quad (\textit{на } \Gamma_1), \qquad \rho_0^{-1}(0) \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3} = \psi_2 - \widetilde{\psi}_2 \quad (\textit{на } \Gamma_2). \end{gathered} \tag{1.34}$$

Вспомогательная задача II имеет единственное решение $\Phi_2 = \Phi_2(x) \in H^1_\Gamma(\Omega, \rho_0)$. Введем оператор T_2, который ставит в соответствие функции $P_2\psi$ решение задачи (1.34):

$$\Phi_2 = \Phi_2|_\Omega =: T_2 P_2 \psi = T_2(0; \psi_2 - \widetilde{\psi}_2) =: T_2 u_2, \quad u_2 = P_2\psi \in H_2. \tag{1.35}$$

Снова рассмотрим значения функции Φ_2 на границе Γ и представим функцию $\Phi_2|_\Gamma$ в виде суммы проекций этой функции на подпространства H_1, H_2 и H_3:

$$\Phi_2|_\Gamma = P_1\gamma T_2 P_2\psi + P_2\gamma T_2 P_2\psi + P_3\gamma T_2 P_2\psi =: C_{12}u_2 + C_{22}u_2 + C_{32}u_2. \qquad (1.36)$$

Вспомогательная задача III. *Найти обобщенное решение* $\Phi = \Phi_3$ *задачи* (1.20) *при* $\psi = (\widetilde{\psi}_1; \widetilde{\psi}_2) = P_3\psi \in H_3$:

$$\nabla\cdot(\rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi_3) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi_3\cdot\vec{n} = 0 \quad (\text{на } S),$$
$$\rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_3} = P_3\psi \quad (\text{на } \Gamma), \qquad \int_\Gamma \Phi_3\, d\Gamma = 0. \qquad (1.37)$$

Так как H_3 — одномерное подпространство, $H_3 = \{\alpha\widehat{\varphi}\}$, $\alpha\in\mathbb{C}$, $\widehat{\varphi} = (\operatorname{mes}\Gamma_2; -\operatorname{mes}\Gamma_1)$, то достаточно рассмотреть граничную задачу (1.37) с функцией $\widehat{\varphi}$ вместо $P_3\psi$, т. е. с граничными условиями на Γ_1 и Γ_2 следующего вида:

$$\rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_3} = \operatorname{mes}\Gamma_2 \quad (\text{на } \Gamma_1), \qquad \rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_3} = -\operatorname{mes}\Gamma_1 \quad (\text{на } \Gamma_2). \qquad (1.38)$$

Задача (1.34) имеет единственное решение $\Phi_3 = \alpha\widehat{\Phi}\in H^1_\Gamma(\Omega,\rho_0)$, где $\widehat{\Phi}$ — решение задачи (1.37) с граничными условиями (1.38). Аналогично предыдущему, введем оператор T_3, который ставит в соответствие функции $P_3\psi$ решение задачи (1.37)-(1.38):

$$\Phi_3 =: T_3P_3\psi =: T_3u_3, \quad u_3 = P_3\psi\in H_3. \qquad (1.39)$$

Представим функцию $\Phi_3|_\Gamma$ в виде суммы ее проекций на подпространства H_1, H_2 и H_3:

$$\Phi_3|_\Gamma = P_1\gamma T_3 P_3\psi + P_2\gamma T_3 P_3\psi + P_3\gamma T_3 P_3\psi =: C_{13}u_3 + C_{23}u_3 + C_{33}u_3. \qquad (1.40)$$

В этом случае операторы C_{13}, C_{23} и C_{33} — одномерные.

В дальнейшем все функции, зависящие от t, будем считать функциями переменной t со значениями в соответствующем гильбертовом пространстве; в связи с этим в уравнениях задачи заменим $\partial/\partial t$ на d/dt.

В соответствии с разложением (1.29) представим решение исходной задачи (1.20) в виде суммы решений трех вспомогательных задач:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3. \qquad (1.41)$$

Перепишем соотношения (1.28) в виде пары условий:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\Phi|_{\Gamma_1};\Phi|_{\Gamma_2}) + \rho_0 g(\psi_1;\psi_2) + \rho_1\frac{d^2}{dt^2}(0;\psi_2) + (\Psi|_{\Gamma_1};\Psi|_{\Gamma_2}) + (\eta|_{\Gamma_1};\eta|_{\Gamma_2}) = (F|_{\Gamma_1};F|_{\Gamma_2}) + (c(t);c(t)), \qquad (1.42)$$

и рассмотрим его как дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве

$$H = H_0\oplus H_2\oplus H_3$$

относительно искомых функций $u_1(t)$, $u_2(t)$ и $u_3(t)$. Предварительно преобразуем отдельные группы слагаемых в (1.38), чтобы можно было ввести операторные матрицы, действующие на искомый вектор-столбец $u := (u_1;u_2;u_3)^t$.

Прежде всего, в силу (1.33), (1.36), (1.40) и (1.41) имеем

$$(\Phi|_{\Gamma_1};\Phi|_{\Gamma_2}) = \Phi|_\Gamma = \Phi_1|_\Gamma + \Phi_2|_\Gamma + \Phi_3|_\Gamma =$$
$$= C_{11}u_1 + C_{21}u_1 + C_{31}u_1 + C_{12}u_2 + C_{22}u_2 + C_{32}u_2 + C_{13}u_3 + C_{23}u_3 + C_{33}u_3, \quad (1.43)$$

где элементы C_{ik} определены формулами (1.33), (1.36) и (1.40). Поэтому согласно этим определениям имеем, соответственно,

$$C_{11}u_1 + C_{12}u_2 + C_{13}u_3\in H_1, \quad C_{21}u_1 + C_{22}u_2 + C_{23}u_3\in H_2, \quad C_{31}u_1 + C_{32}u_2 + C_{33}u_3\in H_3.$$

Далее, очевидно соотношение

$$(\psi_1;\psi_2) = \left(\psi_1 - \widetilde{\psi}_1; 0\right) + \left(0;\psi_2 - \widetilde{\psi}_2\right) + \left(\widetilde{\psi}_1;\widetilde{\psi}_2\right) = u_1 + u_2 + u_3. \qquad (1.44)$$

Пусть P_H — ортопроектор на $H = L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$. Тогда простые вычисления показывают, что

$$P_H(0;\psi_2) = \left(0;\psi_2 - \widetilde{\psi}_2\right) + P_H\left(0;\widetilde{\psi}_2\right) = \left(0;\psi_2 - \widetilde{\psi}_2\right) + \alpha\left(\widetilde{\psi}_1;\widetilde{\psi}_2\right) = u_2 + \alpha u_3,$$

$$0 < \alpha := \frac{\operatorname{mes}\Gamma_1}{\operatorname{mes}\Gamma_1 + \operatorname{mes}\Gamma_2} < 1.$$

Спроектируем обе части (1.42) на подпространства H_1, H_2 и H_3, соответственно.

Введем ряд обозначений:

$$P_H(F|_{\Gamma_1};F|_{\Gamma_2}) = (F|_{\Gamma_1};F|_{\Gamma_2}) = P_1(F|_{\Gamma_1};F|_{\Gamma_2}) + P_2(F|_{\Gamma_1};F|_{\Gamma_2}) + P_3(F|_{\Gamma_1};F|_{\Gamma_2}) =: f_1 + f_2 + f_3,$$

$$P_H(\Psi|_{\Gamma_1};\Psi|_{\Gamma_2}) = (\Psi|_{\Gamma_1};\Psi|_{\Gamma_2}) = P_1(\Psi|_{\Gamma_1};\Psi|_{\Gamma_2}) + P_2(\Psi|_{\Gamma_1};\Psi|_{\Gamma_2}) + P_3(\Psi|_{\Gamma_1};\Psi|_{\Gamma_2}) =: \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3,$$

$$\Psi_i =: B_{2,i}\vec{w}, \qquad \rho_0^{-1}\nabla\Psi_i = P_{h,S}\left[N^2(x_3)w_3\vec{e}_3\right], \qquad i = \overline{1,3}; \tag{1.45}$$

$$P_H(\eta|_{\Gamma_1};\eta|_{\Gamma_2}) = (\eta|_{\Gamma_1};\eta|_{\Gamma_2}) = P_1(\eta|_{\Gamma_1};\eta|_{\Gamma_2}) + P_2(\eta|_{\Gamma_1};\eta|_{\Gamma_2}) + P_3(\eta|_{\Gamma_1};\eta|_{\Gamma_2}) =: \eta_1 + \eta_2 + \eta_3,$$

$$\eta_i =: B_i u_i, \qquad \rho_0^{-1}\nabla\eta_i = P_{h,S}\left[N^2(x_3)\left((U_i u_i)\vec{e}_3\right)\vec{e}_3\right], \qquad i = \overline{1,3}; \tag{1.46}$$

$$B_{11}\vec{w} := P_0\left[N^2(x_3)w_3\vec{e}_3\right], \quad B_{1,i}u_i := P_0\left[N^2(x_3)\left((U_i u_i)\vec{e}_3\right)\vec{e}_3\right], \qquad i = \overline{1,3}. \tag{1.47}$$

Здесь через U_i $(i = \overline{1,3})$ обозначен оператор, который посредством решения вспомогательной задачи (см. (1.30), (1.34), (1.37)) ставит в соответствие элементу u_i функцию $\rho_0^{-1}\nabla\Phi_i \in \vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)$.

Перепишем первое уравнение (1.19) и (1.42) с учетом замен (1.45)–(1.47) в виде системы уравнений, которая в векторно-матричной форме принимает вид:

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ u \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \vec{w} \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0\psi_0 \\ f \end{pmatrix}, \tag{1.48}$$

$$(\vec{w};u)^t \in \mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega,\rho_0) \oplus H, \qquad u = (u_1;u_2;u_3)^t \in H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3,$$

$$f = (f_1;f_2;f_3)^t, \quad I := \operatorname{diag}(\rho_0 g I_1;\rho_0 g I_2;\rho_0 g I_3),$$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\rho_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}, \quad B_{21} := \begin{pmatrix} B_{2,1} \\ B_{2,2} \\ B_{2,3} \end{pmatrix}, \tag{1.49}$$

$$B_{12} := \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} \end{pmatrix}, \quad B_{22} := \operatorname{diag}(B_1;B_2;B_3).$$

Начальные условия задачи (1.19) порождают начальные условия для уравнения (1.48):

$$\vec{w}(0) = P_0\vec{v}^0, \quad u_i(0) = P_i\zeta^0, \quad i = \overline{1,3}; \tag{1.50}$$

$$\vec{w}^{\,\prime}(0) = P_0\vec{u}^0, \quad u_i^{\prime}(0) = P_i\left(\left(P_{h,S}\vec{u}^0\right)\cdot\vec{n}\right), \quad i = \overline{1,3}. \tag{1.51}$$

Итогом рассмотрения задачи (1.19) в этом пункте является

Теорема 1.1. *Начально-краевая задача* (1.19) *равносильна задаче Коши* (1.48)–(1.51) *для дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}$.

1.5. Свойства операторных коэффициентов задачи.

Лемма 1.2. *Оператор*

$$C := \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

— самосопряженный компактный и положительный оператор, действующий в пространстве $H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$.

Доказательство. Все операторы C_{ij} $(i,j=\overline{1,3})$, из которых состоит оператор C, являются произведением ограниченных операторов ортогонального проектирования на компактный оператор γT_j (см., например, [6]). Следовательно, все C_{ij} $(i,j=\overline{1,3})$ являются компактными операторами, а значит, и оператор C является компактным.

Докажем, что оператор C является самосопряженным. Обозначим через Φ решение задачи Неймана (1.20) при $\psi = u = (u_1;u_2;u_3)^t$. Для $\forall\ u,\, v\in H$ имеем:

$$
\begin{aligned}
(Cu,v)_H &= \left(\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}\right)=\\
&= (C_{11}u_1,v_1)+(C_{12}u_2,v_1)+(C_{13}u_3,v_1)+(C_{21}u_1,v_2)+(C_{22}u_2,v_2)+(C_{23}u_3,v_2)+\\
&+(C_{31}u_1,v_3)+(C_{32}u_2,v_3)+(C_{33}u_3,v_3)=[(C_{11}u_1,P_1v)+(C_{21}u_1,P_2v)+(C_{31}u_1,P_3v)]+\\
&+[(C_{12}u_2,P_1v)+(C_{22}u_2,P_2v)+(C_{32}u_2,P_3v)]+[(C_{13}u_3,P_1v)+(C_{23}u_3,P_2v)+(C_{33}u_3,P_3v)]=\\
&=(\Phi_1|_\Gamma,v)_H+(\Phi_2|_\Gamma,v)_H+(\Phi_3|_\Gamma,v)_H\,.
\end{aligned}
$$

Обозначим через Υ решение задачи Неймана (1.20) при $\psi = v = (v_1;v_2;v_3)^t$. Тогда, учитывая условия задачи (1.20), имеем:

$$
\begin{aligned}
(Cu,v)_H &= \int_\Gamma \Phi_1{\cdot} v\,d\Gamma+\int_\Gamma \Phi_2{\cdot} v\,d\Gamma+\int_\Gamma \Phi_3{\cdot} v\,d\Gamma=\int_\Gamma \Phi\cdot v\,d\Gamma=\int_\Gamma \Phi\cdot\rho_0^{-1}\frac{\partial\Upsilon}{\partial x_3}\,d\Gamma=\\
&=\int_\Gamma \Phi\cdot\rho_0^{-1}\frac{\partial\Upsilon}{\partial x_3}\,d\Gamma+\int_S \Phi\cdot\rho_0^{-1}\frac{\partial\Upsilon}{\partial x_3}\,dS=\int_{\partial\Omega} \Phi\cdot\rho_0^{-1}\frac{\partial\Upsilon}{\partial x_3}\,dS=\\
&=\int_\Omega \Phi\cdot\nabla\left(\rho_0^{-1}\nabla\Upsilon\right)\,d\,\Omega+\int_\Omega \rho_0(x_3)\cdot\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\right)\cdot\left(\rho_0^{-1}\nabla\Upsilon\right)\,d\,\Omega=\\
&=\int_\Omega \rho_0(x_3)\cdot\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\right)\cdot\left(\rho_0^{-1}\nabla\Upsilon\right)\,d\,\Omega=\ldots=(u,Cv)_H.
\end{aligned}
$$

Так как оператор C является ограниченным, то из полученного выражения следует, что оператор C — самосопряженный.

Рассмотрим теперь форму оператора C:

$$
(Cu,u)_H=\int_\Omega \rho_0(x_3)\cdot\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\right)\cdot\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\right)\,d\,\Omega\geqslant 0.
$$

Если $(Cu,u)_H=0$, то $\Phi\equiv\varphi=\text{const}$. Тогда из условия нормировки функции Φ

$$
\int_\Gamma \Phi\,d\Gamma=0
$$

получаем, что $\Phi\equiv 0$, а следовательно, и $u=0$. Отсюда приходим к выводу, что оператор C положительный. Лемма доказана. □

Лемма 1.3. *Оператор*

$$
\mathcal{B}=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}
$$

— самосопряженный, ограниченный и неотрицательный оператор, действующий в пространстве $\mathcal{H}=\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus H_1\oplus H_2\oplus H_3$.

Доказательство следует из равенства

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{B}\mathcal{X},\mathcal{X})_{\mathcal{H}} &= (B_{11}\vec{w},\vec{w})_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)}+\sum_{i=1}^{3}(B_{1,i}u_i,\vec{w})_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)}+\sum_{i=1}^{3}(B_{2,i}\vec{w},u_i)_{H_i}+\sum_{i=1}^{3}(B_iu_i,u_i)_{H_i}=\\
&=\int_\Omega N^2(x_3)\rho_0(x_3)\left|w_3+\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\cdot\vec{e}_3\right)\right|^2\,d\Omega.
\end{aligned}
$$

Замечание 1.1. В уравнении (1.48) оператор A, с учетом его определения и леммы 1.2, удовлетворяет следующим свойствам: $0 < A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ — пространство ограниченных операторов, действующих в пространстве $\mathcal{H}$. Однако операторный коэффициент при искомой функции не является положительно определенным оператором, а именно

$$0 \leqslant \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Данный факт не позволяет воспользоваться известной теоремой о существовании и единственности сильного решения (см., например, [5, с. 44]).

2. Теорема существования сильного решения

2.1. Вспомогательные утверждения. Введем пространства:

$$H_1^+ = H_1^{1/2} := \widetilde{H}_{\Gamma_1}^{1/2} = \left\{ v \in H^{1/2}(\Gamma) : \ v \equiv 0 \ (\text{на } \Gamma_2), \int_{\Gamma_1} v \, d\Gamma_1 = 0 \right\}, \tag{2.1}$$

$$H_2^+ = H_2^{1/2} := \widetilde{H}_{\Gamma_2}^{1/2} = \left\{ v \in H^{1/2}(\Gamma) : \ v \equiv 0 \, (\text{на } \Gamma_1), \int_{\Gamma_2} v \, d\Gamma_2 = 0 \right\}, \tag{2.2}$$

$$H_3 = H_3^{1/2} = H^{1/2}(\Gamma) \cap H_3, \qquad H_i^- = \left(H_i^+\right)^*, \ i = \overline{1,2}, \quad H_3^- = (H_3)^*. \tag{2.3}$$

Построение этих пространств и изучение их свойств проводится аналогично случаю, когда граница области состоит из жесткой стенки и подвижной поверхности одного типа (см, например, [6]). Как следствие, имеем следующую лемму о свойствах операторов C_{ij}.

Лемма 2.1. *Оператор C_{ij} является ограниченным оператором, действующим из H_j^- в H_i^+, при этом он является компактным как оператор, действующий из H_j^- в H_i. Оператор C_{ii}^{-1} является ограниченным как оператор, действующий из H_i^+ в H_i^-, при этом $C_{ii}^{-1/2}$ ограниченно действует из H_i^+ в H_i и из H_i в H_i^-, $i,j = \overline{1,3}$.*

Обозначим пространства $E_1 := H_1$ и $E_2 := \widehat{H}_2 = H_2 \oplus H_3$. Оснащение H_1 имеет вид (см. (2.1)) $E_1^+ = H_1^+ \subset E_1 = H_1 \subset E_1^- = H_1^-$. Для E_2 имеем: $E_2^+ \subset E_2 \subset E_2^-$, где

$$E_2^+ := \{ (\widetilde{\psi}_1; \psi_2) \,|\, \widetilde{\psi}_1 = \text{const}, \quad \psi_2 \in H^{1/2}(\Gamma_2), \quad \int_{\Gamma_1} \widetilde{\psi}_1 \, d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \psi_2 \, d\Gamma_2 = 0 \}, \quad E_2^- := \left(E_2^+\right)^*.$$

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $E = E_1 \oplus E_2$ операторную матрицу (см. (1.49))

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \widehat{J} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widehat{C}_{11} & \widehat{C}_{12} \\ \widehat{C}_{21} & \widehat{C}_{22} \end{pmatrix}, \qquad \widehat{J} = \operatorname{diag}(\rho_1; \alpha\rho_1), \tag{2.4}$$

$$\widehat{C}_{11} = C_{11}, \quad \widehat{C}_{12} = \begin{pmatrix} C_{12} & C_{13} \end{pmatrix}, \quad \widehat{C}_{21} = \begin{pmatrix} C_{21} \\ C_{31} \end{pmatrix}, \quad \widehat{C}_{22} = \begin{pmatrix} C_{22} & C_{23} \\ C_{32} & C_{33} \end{pmatrix},$$

где операторы (согласно их определениям и леммам 1.2, 2.1) обладают следующими свойствами.

1. Оператор $\widehat{J} : E_2 \to E_2$ является ограниченным и положительно определенным.
2. $\widehat{C}_{ij}$ действует ограниченно из E_j^- в E_i^+ $(i,j = 1,2)$. Оператор $\widehat{C}_{ij} : E_j^- \to E_i$ является при этом компактным. Оператор $\widehat{C}_{ii}^{-1} : E_i^+ \to E_i^-$ также ограниченный.
3. Оператор A ограниченно действует из $E^- = E_1^- \times E_2$ в $E^+ = E_1^+ \times E_2$, причем сужение оператора A на $E = E_1 \times E_2$ является ограниченным положительным самосопряженным оператором.

2.2. Теорема существования сильного решения вспомогательной задачи. Перепишем (1.48) в следующем виде:

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ Au \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_0 + B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & I + B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0\psi_0 \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ u \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Осуществляя замену $Au = z$ в (2.5), перейдем от задачи (1.48)–(1.51) к следующей задаче Коши:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \mathcal{A}v = g + Rv, \quad v(0) = (\vec{w}(0); z(0))^t, \quad v^{'}(0) = (\vec{w}^{'}(0); z^{'}(0))^t \tag{2.6}$$

$$\mathcal{A} := I_B F, \quad R = \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = (P_0\psi_0; f)^t, \quad v = (\vec{w}; z)^t.$$

$$I_B = \begin{pmatrix} I_0 + B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & I + B_{22} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(I_B F) = \mathcal{D}(F). \tag{2.7}$$

Введем эквивалентную норму в пространстве $\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus H$:

$$[v_1; v_2] := (I_B^{-1} v_1; v_2),$$

тогда

$$[I_B F v_1; v_2] = (F v_1; v_2) = (v_1; F v_2) = (v_1; I_B^{-1} I_B F v_2) = [v_1; I_B F v_2],$$

следовательно, $\mathcal{A} = I_B F$ — самосопряженный оператор, более того, он является неограниченным и положительно определенным оператором (см. (2.7)).

Определение 2.1. *Сильным* (по переменной t) *решением* задачи (2.6) на отрезке $[0, T]$ назовем такую функцию $v(t)$ со значениями в $\mathcal{H}$, для которой выполнены следующие условия:

1°. $v(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ при любом $t \in [0; T]$ и $\mathcal{A}v(t) \in C([0; T]; \mathcal{H})$;
2°. $v^{'}(t) \in C^1\left([0; T]; \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2})\right)$;
3°. $v^{''}(t) \in C([0; T]; \mathcal{H})$;
4°. выполнено уравнение (2.6), где все слагаемые — функции из $C([0; T]; \mathcal{H})$, и начальные условия.

Теорема 2.1. *Если выполнены условия*

$$v(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(I_B F) = \mathcal{D}(F), \qquad v'(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}) = \mathcal{D}((I_B F)^{1/2}) = \mathcal{D}(F^{1/2}), \tag{2.8}$$

$$f(t) \in C^1([0; T]; \mathcal{H}), \quad \mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus H, \tag{2.9}$$

тогда задача (2.6) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0; T]$.

Доказательство. Если для задачи Коши

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \mathcal{A}v = g, \quad v(0) = v^0, \quad v^{'}(0) = v^1, \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}^* \gg 0, \tag{2.10}$$

выполнены условия

$$v(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad v'(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}), \quad g(t) \in C^1([0; T]; \mathcal{H}), \tag{2.11}$$

то задача (2.10) имеет единственное сильное решение $v = v_0(t)$ на отрезке $[0; T]$, выражаемое формулой (см. [5, с. 67])

$$v_0(t) = \cos(t\mathcal{A}^{1/2})v^0 + \mathcal{A}^{-1/2}\sin(t\mathcal{A}^{1/2})v^1 + \int\limits_0^t \mathcal{A}^{-1/2}\sin\left((t-s)\mathcal{A}^{1/2}\right)g(s)ds, \tag{2.12}$$

где $\cos(t\mathcal{A}^{1/2})$ и $\mathcal{A}^{-1/2}\sin(t\mathcal{A}^{1/2})$ — семейство операторных косинус-функций и синус-функций, построенное по $\mathcal{A}$ (см., например, [5, с. 48–56]).

Обозначим в (2.6)

$$\widehat{g}(t) = g(t) + Rv.$$

Считая, что $\widehat{g}(t)$ известна, и используя формулу (2.12) для решения задачи Коши (2.10), приходим к следующему интегральному уравнению Вольтерра для искомой функции $v(t)$:

$$v(t) = \cos(t\mathcal{A}^{1/2})v^0 + \mathcal{A}^{-1/2}\sin(t\mathcal{A}^{1/2})v^1 + \int\limits_0^t \mathcal{A}^{-1/2}\sin\left((t-s)\mathcal{A}^{1/2}\right)g(s)ds +$$

$$+\int\limits_0^t \mathcal{A}^{-1/2}\sin\left((t-s)\mathcal{A}^{1/2}\right)Rv(s)ds = v_0(t) + \int\limits_0^t \mathcal{A}^{-1/2}\sin\left((t-s)\mathcal{A}^{1/2}\right)Rv(s)ds. \tag{2.13}$$

Здесь $v_0(t)$ задана формулой (2.12) и строится по данным (2.11), причем она в силу условий (2.11) является сильным решением задачи (2.10). Это означает, в частности, что

$$v_0(t) \in C^2([0;T];\mathcal{H}) \cap C^1\left([0;T];\mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2})\right) \cap C([0;T];\mathcal{D}(\mathcal{A})). \tag{2.14}$$

Отметим, что $\mathcal{A}^{-1/2}\sin(t\mathcal{A}^{1/2})Rv(s)$ непрерывно дифференцируема по t (см., например, [4, 10], а также [5, свойство 3, с. 51]), следовательно, уравнение (2.13) имеет решение $v(t) \in C([0;T];\mathcal{H})$.

Оставшаяся часть доказательства теоремы сводится к проверке того, что выполнены свойства 2°, 3° и 4° из определения сильного решения задачи (2.6).

Формальное дифференцирование обеих частей (2.13) приводит к формулам

$$v'(t) = v_0'(t) + \frac{d}{dt}\int\limits_0^t \mathcal{A}^{-1/2}\sin\left((t-s)\mathcal{A}^{1/2}\right)Rv(s)ds = v_0'(t) + \tag{2.15}$$

$$+\int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t}\left\{\mathcal{A}^{-1/2}\sin\left((t-s)\mathcal{A}^{1/2}\right)Rv(s)\right\}ds = v_0'(t) + \int\limits_0^t \cos\left((t-s)\mathcal{A}^{1/2}\right)Rv(s)\,ds;$$

$$v''(t) = v_0''(t) + \frac{d}{dt}\int\limits_0^t \cos\left((t-s)\mathcal{A}^{1/2}\right)Rv(s) = v_0''(t) + Rv(t) + \tag{2.16}$$

$$+\int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t}\left\{\cos\left((t-s)\mathcal{A}^{1/2}\right)Rv(s)\right\}ds = v_0''(t) + Rv(t) - \int\limits_0^t \mathcal{A}^{1/2}\sin\left((t-s)\mathcal{A}^{1/2}\right)Rv(s)ds.$$

Из полученных формул (2.15) и (2.16) можно сделать следующие выводы. Так как в силу (2.14) $v_0'(t) \in C\left([0;T];\mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2})\right)$, то из (2.15), а также того, что оператор-функция $\cos(t\mathcal{A}^{1/2})$ непрерывно дифференцируема по t, следует свойство 2° из определения сильного решения, т. е. $v'(t) \in C\left([0;T];\mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2})\right)$. Далее, так как $v_0''(t) \in C([0;T];\mathcal{H})$, тогда из (2.16) и того, что оператор-функция $\mathcal{A}^{-1/2}\sin(t\mathcal{A}^{1/2})$ непрерывно дифференцируема, получаем свойство 3°, т. е. $v''(t) \in C([0;T];\mathcal{H})$.

Наконец, непосредственный подсчет показывает, что функция $v(t)$ являющаяся решением уравнения (2.13), удовлетворяет также исходному уравнению (2.6), причем все слагаемые в нем — непрерывные функции t со значениями в $\mathcal{H}$.

Заметим еще, что из (2.13) следует, что

$$v(0) = v_0(0) + 0 = v_0(0),$$

а из (2.15)

$$v'(0) = v_0'(0) + 0 = v_0'(0).$$

Теорема доказана. □

Лемма 2.2. *Если в задаче* (1.48)–(1.51) *выполнены условия*:

$$(\vec{w}^0; u^0)^t \in \mathcal{H}, \quad (\vec{w}^1; u^1)^t \in \mathcal{H}, \quad (P_0\psi_0; f)^t \in C^1([0,T];\mathcal{H}), \quad \mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega,\rho_0) \oplus H, \tag{2.17}$$

то имеют место начальные условия (2.8)-(2.9) *в задаче* (2.6).

Доказательство. С учетом замены $Au = z$, пусть выполнены условия (2.8)-(2.9), тогда имеем

$$\left(\ v^0 = (\vec{w}^0; z^0)^t \in \mathcal{D}(I_B F) = \mathcal{D}(F)\ \right) \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\vec{w}^0 \in \vec{J}_0(\Omega,\rho_0),\ z^0 = Au^0 \in \mathcal{D}(A^{-1})\right),$$

последнее условие равносильно тому, что $u^0 \in H$.

Далее,

$$\Big(v^1 = (\vec{w}^1; z^1)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}) = \mathcal{D}((I_B F)^{1/2}) = \mathcal{D}(F^{1/2}) \Big) \iff$$
$$\iff \Big(\vec{w}^1 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad z^1 = Au^1 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}) \Big) \iff$$
$$\iff \Big(\vec{w}^1 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad A^{-1/2}Au^1 = A^{1/2}u^1 \in H \Big) \iff \Big(\vec{w}^1 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad u^1 \in H \Big).$$

□

2.3. Теорема существования сильного решения исходной начально-краевой задачи. Исходя из формулировок задач (1.4), (1.8) и (1.19), дадим (согласованные между собой) определения сильных по переменной t решений этих задач.

Определение 2.2. *Сильным* (по переменной t) *решением задачи* (1.4) на промежутке $[0,T]$ назовем набор функций $\vec{u}\,(t,x)$, $p\,(t,x)$, $\rho\,(t,x)$, $\zeta\,(t,\hat{x})$, для которых выполнены следующие условия:

1°. $\vec{u}\,(t) \in C^1\Big([0,T]\,; \vec{J}_{0,S}\,(\Omega,\rho_0)\Big)$, $\rho_0^{-1}\nabla p \in C\Big([0,T]\,; \vec{G}\,(\Omega,\rho_0)\Big)$, $\rho\,(t) \in C^1\left([0,T]\,; \mathfrak{L}\,(\Omega)\right)$, где $\mathfrak{L}_2(\Omega)$ — гильбертово пространство скалярных функций со скалярным произведением

$$(\varphi,\psi)_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} := g^2 \int\limits_{\Omega} \left[\rho_0(x_3)N^2(x_3)\right]^{-1} \varphi(x)\overline{\psi(x)}\,d\Omega,$$

и при любом $t \in [0,T]$ справедливо первое уравнение (1.4);

2°. $u_n = \dfrac{\partial\zeta}{\partial t} \in C\left([0,T]\,; H\right)$;

3°. выполнено граничное условие на Γ_1 и Γ_2:

$$p = g\rho_0(0)\zeta \in C\left([0,T]\,; L_2(\Gamma_1)\right),$$
$$p = g\rho_0(0)\zeta + \rho_2 \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} \in C\left([0,T]\,; L_2(\Gamma_2)\right),$$

где все слагаемые являются непрерывными по t функциями со значениями в $L_2(\Gamma_1)$ и $L_2(\Gamma_2)$, соответственно;

4°. выполнены начальные условия (1.4).

Определение 2.3. *Сильным* (по переменной t) *решением задачи* (1.8) на промежутке $[0,T]$ назовем набор функций $\vec{v}\,(t,x)$, $p\,(t,x)$, для которых выполнены следующие условия:

1°. $\vec{v}\,(t) \in C^2\Big([0,T]\,; \vec{J}_{0,S}\,(\Omega,\rho_0)\Big)$, $\rho_0^{-1}\nabla p \in C\Big([0,T]\,; \vec{G}\,(\Omega,\rho_0)\Big)$, и при любом $t \in [0,T]$ справедливо первое уравнение (1.8);

2°. выполнено граничное условие на Γ_1 и Γ_2:

$$p = g\rho_0(0)v_3 \in C\left([0,T]\,; L_2(\Gamma_1)\right), \quad v_3 = \vec{v}\cdot\vec{e}_3,$$
$$p = g\rho_0(0)v_3 + \rho_2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} \in C\left([0,T]\,; L_2(\Gamma_2)\right),$$

где все слагаемые являются непрерывными по t функциями со значениями в $L_2(\Gamma_1)$ и $L_2(\Gamma_2)$, соответственно;

3° выполнены связи (1.5) и (1.6);

4°. выполнены начальные условия (1.8).

Определение 2.4. *Сильным* (по переменной t) *решением задачи* (1.19) на промежутке $[0,T]$ назовем такие функции $\vec{w}(t,x)$ из $\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)$ и $\Phi\,(t,x)$ со значениями в $H^1_\Gamma\,(\Omega,\rho_0)$, для которых выполнены следующие условия:

1°. $\vec{w}\,(t) \in C^2\Big([0,T]\,; \vec{J}_0\,(\Omega,\rho_0)\Big)$;

2°. $\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)_\Gamma \in C^2\left([0,T]\,; H\right)$, $\Phi_\Gamma \in C^2\Big([0,T]\,; H^{1/2}_\Gamma\Big)$, для $\forall t \in [0,T]$;

3°. выполнены соотношения

$$\frac{\partial^2\vec{w}}{\partial t^2}+P_0\left[N^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+w_3\right)\vec{e}_3\right]=P_0\psi_0 \quad (\text{в } \Omega),$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+\Psi+\eta=F+c(t) \quad (\text{на } \Gamma_1),$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+\rho_2\rho_0^{-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)+\Psi+\eta=F+c(t) \quad (\text{на } \Gamma_2),$$

где все слагаемые являются непрерывными по t функциями со значениями соответственно в $\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)$, $L_2(\Gamma_1)$, $L_2(\Gamma_2)$, причем $\rho_0^{-1}\nabla\Phi\in C^2\left([0,T];\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)\right)$;

4°. выполнены начальные условия (1.19).

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия*

$$\vec{u}^0\in\vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0),\quad \rho^0\in\mathfrak{L}_2(\Omega),\quad \zeta^0\in H=L_2(\Gamma)\ominus\{1_\Gamma\}, \tag{2.18}$$

$$\left[\left(P_{h,S}\vec{u}^0(x)\right)\cdot\vec{n}\right]_\Gamma\in H,\quad f(t)\in C^1\left([0,T];\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)\right). \tag{2.19}$$

Тогда каждая из задач (1.4)*,* (1.8) *и* (1.19) *имеет единственное сильное по t решение.*

Доказательство. Доказательство теоремы проведем по этапам, переходя последовательно от задачи (1.48)–(1.51) к (1.19), затем от (1.19) к (1.8) и от (1.8) к (1.4).

От задачи (1.48)–(1.51) *к* (1.19).

Если выполнены условия (2.18) и (2.19), то для функций

$$(\vec{w}^0;u^0)^t=(P_0v^0;u_1^0;u_2^0;u_3^0)^t,\quad u_i^0=P_i\zeta^0,\quad i=\overline{1,3},$$

$$(\vec{w}^1;u^1)^t=(P_0\vec{u}^0;P_1\zeta^1;P_2\zeta^1;P_3\zeta^1)^t,\quad P_i\zeta^1=P_i\left[(P_{h,S}\vec{u})\cdot\vec{n}\right],\quad i=\overline{1,3},$$

$$(P_0\psi_0;f)^t=(P_0\psi_0;f_1;f_2;f_3)^t,\quad f_i=P_iF_\Gamma,\quad i=\overline{1,3},$$

выполнены условия (2.17) леммы 2.2.

Действительно, для функции $\vec{w}(t,x)$

$$\left(\vec{w}^0=P_0\vec{v}^0\in\vec{J}_0(\Omega,\rho_0),\quad \vec{w}^1=P_0\vec{u}^0\in\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\right)\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\left(\left(w_3(0,\hat{x})\right)_\Gamma=0,\quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{w}(0,x)\right)=P_0\vec{u}^0(x)\in\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\right). \tag{2.20}$$

Кроме того, $\vec{w}(t)\in C^2\left([0,T];\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\right)$.

Так как $\zeta^0\in H=L_2(\Gamma)\ominus\{1_\Gamma\}$, $\left[\left(P_{h,S}\vec{u}^0(x)\right)\cdot\vec{n}\right]_\Gamma\in H$, с учетом (2.20), получаем

$$(\vec{w}^0;u^0)^t\in\mathcal{H}=\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus H,\quad (\vec{w}^1;u^1)^t\in\mathcal{H}=\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus H.$$

Далее,

$$f(t)\in C^1\left([0,T];\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)\right)\quad\Longleftrightarrow\quad \psi_0\in C^1\left([0,T];\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)\right)\quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad P_0\psi_0\in C^1\left([0,T];\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\right),\quad P_{h,S}\psi_0=\rho_0^{-1}\nabla F\in C^1\left([0,T];\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)\right)\quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad P_0\psi_0\in C^1\left([0,T];\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\right),\quad F_\Gamma\in C^1\left([0,T];H_\Gamma^{1/2}\right),$$

и если $F_\Gamma\in H_\Gamma^{1/2}$, то $P_iF_\Gamma\in H_i$. Поэтому по лемме 2.2 получаем, что задача (1.48)–(1.51) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$. Тогда

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{w}\in C\left([0,T];\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\right),\quad \frac{d^2}{dt^2}Au\in C\left([0,T];H\right). \tag{2.21}$$

Покажем, что функция $\Phi|_\Gamma\in C^2\left([0,T];H_\Gamma^{1/2}\right)$. Для этого, используя представление (2.4), перепишем второе условие (2.21) в виде двух:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\widehat{C}_{11}u_1+\widehat{C}_{12}\widehat{u}_2\right)\in C\left([0,T];H_1^+\right), \tag{2.22}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\widehat{C}_{21}u_1+\left(\widehat{J}+\widehat{C}_{22}\right)\widehat{u}_2\right)\in C\left([0,T];\widehat{H}_2\right). \tag{2.23}$$

Поскольку $\left(\widehat{J}+\widehat{C}_{22}\right)$ — ограниченный и положительно определенный, то из условия

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\widehat{J}+\widehat{C}_{22}\right)\widehat{u}_2\in C\left([0,T];\widehat{H}_2\right), \tag{2.24}$$

подействовав ограниченным оператором $\left(\widehat{J}+\widehat{C}_{22}\right)^{-1}$, получаем, что

$$\frac{d^2\widehat{u}_2}{dt^2}\in C\left([0,T];\widehat{H}_2\right). \tag{2.25}$$

Следовательно, по свойствам операторов $\widehat{C}_{ij}$ (см. после (2.4)) получаем, что

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\widehat{C}_{12}\widehat{u}_2\right)\in C\left([0,T];H_1^+\right),\quad \frac{d^2}{dt^2}\left(\widehat{C}_{22}\widehat{u}_2\right)\in C\left([0,T];\widehat{H}_2^+\right). \tag{2.26}$$

Тогда из (2.22) следует, что

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\widehat{C}_{11}u_1\right)\in C\left([0,T];H_1^+\right). \tag{2.27}$$

Подействуем слева в (2.27) оператором $\widehat{C}_{11}^{-1/2}$, ограниченным из H_1^+ в H_1; имеем:

$$\widehat{C}_{11}^{-1/2}\frac{d^2}{dt^2}\left(\widehat{C}_{11}u_1\right)=\frac{d^2}{dt^2}\left(\widehat{C}_{11}^{1/2}u_1\right)\in C\left([0,T];H_1\right). \tag{2.28}$$

Далее, оператор $\widehat{C}_{11}^{-1/2}$ ограниченно действует из H_1 в H_1^-. Поэтому оператор $\widehat{C}_{21}\widehat{C}_{11}^{-1/2}$ ограничен как оператор, действующий из H_1 в $\widehat{H}_2^+$, а следовательно,

$$\widehat{C}_{21}\widehat{C}_{11}^{-1/2}\frac{d^2}{dt^2}\left(\widehat{C}_{11}^{1/2}u_1\right)=\frac{d^2}{dt^2}\left(\widehat{C}_{21}u_1\right)\in C\left([0,T];\widehat{H}_2^+\right). \tag{2.29}$$

Тогда из (2.22), (2.26) и (2.29) в силу вложений $H_1^+\subset H_\Gamma^{1/2}$ и $\widehat{H}_2^+\subset H_\Gamma^{1/2}$ получаем, что

$$\Phi|_\Gamma=(\Phi|_{\Gamma_1};\Phi|_{\Gamma_2})=\widehat{C}_{11}u_1+\widehat{C}_{12}\widehat{u}_2+\widehat{C}_{21}u_1+\widehat{C}_{22}\widehat{u}_2\in C^2\left([0,T];H_\Gamma^{1/2}\right)\quad\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\quad \rho_0^{-1}\nabla\Phi(t,x)\in C^2\left([0,T];\vec{G}_{h,S}(\Omega)\right).$$

Отсюда следует, что для функции $\Phi=\Phi(t,x)$ выполнены уравнения и краевые условия задачи (1.19), причем в краевых условиях все функции являются непрерывными по t.

Кроме того, выполнены начальные условия

$$\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}(0,x)\right)_\Gamma=\zeta^0(\hat{x})\in H,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}(0,\hat{x})\right)_\Gamma=\left[\left(P_{h,S}\vec{u}^0(x)\right)\cdot\vec{n}\right]_\Gamma\in H,$$

а также

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\right)(0,x)=P_{h,S}\vec{u}^0\in\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0). \tag{2.30}$$

Значит, согласно определению 2.4, функции $\vec{w}(t,x)$ и $\Phi(t,x)$ является сильным (по t) решением задачи (1.19) на отрезке $[0,T]$.

От задачи (1.19) *к* (1.8). Убедимся теперь, что из доказанных фактов следует существование сильного (по t) решения задачи (1.8). Следуя обратному ходу преобразований (см. (1.11)), введем по сильному решению $\vec{w}(t,x)$ и $\Phi(t,x)$ задачи (1.19) функции $\vec{v}(t,x)$ и $p(t,x)$:

$$\vec{v}(t,x)=\vec{w}(t,x)+\rho_0^{-1}\nabla\Phi(t,x)\in C^2\left([0,T];\vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0)\right).$$

Так как

$$\vec{w}(t,x)\in C^2\left([0,T];\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\right),\quad \rho_0^{-1}\nabla\Phi(t,x)\in C^2\left([0,T];\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)\right),$$

$$p_1|_{\Gamma_1} = g\rho_0(0)v_3|_{\Gamma_1} = g\rho_0(0)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)_{\Gamma_1} \in C\left([0,T];L_2(\Gamma_1)\right),$$

$$p_1|_{\Gamma_2} = g\rho_0 v_3|_{\Gamma_2} + \rho_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}v_3|_{\Gamma_2} = g\rho_0\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)_{\Gamma_2} + \rho_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)_{\Gamma_2} \in C\left([0,T];L_2(\Gamma_2)\right),$$

то $\rho_0^{-1}\nabla p_1(x,t) \in C\left([0,T];\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)\right)$, и тогда

$$\rho_0^{-1}\nabla p(t,x) = \rho_0^{-1}\nabla p_1(t,x) + \rho_0^{-1}\nabla p_2(t,x) \in C\left([0,T];\vec{G}(\Omega,\rho_0)\right),$$

Далее, начальные условия задачи (1.19) порождают начальные условия задачи (1.8):

$$v_3(0,\hat{x}) = \zeta^0(\hat{x}) \in H, \quad \frac{\partial}{\partial t}\vec{v}(0,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{w} + \rho_0^{-1}\nabla\Phi\right)(0,x) = \vec{u}^0 \in \vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0).$$

От задачи (1.20) *к* (1.4). Опираясь на доказанные факты выше, учитывая связи (1.5), (1.6), легко проверить, что при условиях теоремы задача (1.4) имеет сильное (по t) решение в смысле определения 2.2. □

2.4. Заключительные замечания.

Замечание 2.1. Теорему существования сильного решения задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения (2.6) можно доказать также, опираясь на следующие преобразования, изложенные в [8, с. 291–293], применительно к уравнению

$$v'' + I_B F v = g + Rv, \tag{2.31}$$

рассматриваемому в гильбертовом пространстве H.

Введем новые искомые функции

$$F^{1/2}v =: u, \quad u' = F^{1/2}v' = F^{1/2}w, \quad v' = w, \tag{2.32}$$

и перейдем к системе уравнений первого порядка:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I_B F^{1/2} \\ F^{1/2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g + RF^{-1/2}u \\ 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} I_B & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -F^{1/2} \\ F^{1/2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g + RF^{-1/2}u \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.33}$$

Здесь оператор $\operatorname{diag}(I_B; I_2)$ ограничен и положительно определен, а оператор

$$\begin{pmatrix} 0 & -F^{1/2} \\ F^{1/2} & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & iF^{1/2} \\ -iF^{1/2} & 0 \end{pmatrix}$$

является генератором унитарной группы операторов, действующей в пространстве $H \oplus H$. Поэтому произведение таких операторов обладает таким же свойством в пространстве с эквивалентной нормой, определяемой оператором $\operatorname{diag}(I_B^{-1}; I_2)$.

Далее, дополнительное слагаемое, определяемое выражением $(RF^{-1/2}u;0)^t$, соответствует ограниченному возмущению генератора унитарной и потому сильно непрерывной группы операторов. Поэтому операторный коэффициент в полученной задаче Коши является генератором сильно непрерывной группы операторов. Значит, если выполнены условия

$$F^{1/2}v^0 = u^0 \in \mathcal{D}(F^{1/2}) \iff v^0 \in \mathcal{D}(F), \ v^1 = w^0 \in \mathcal{D}(F^{1/2}), \quad g(t) \in C^1\left([0,T];H\right),$$

то задача (2.33) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$ (теорема 2.1).

Замечание 2.2. Теорему 2.1 можно доказать также, опираясь на тот факт, что в задаче (2.31) оператор $I_B F$ является самосопряженным и положительно определенным в пространстве с эквивалентной нормой (см. п. 2.2). Поэтому он является генератором семейства косинус-функций, действующих в этом пространстве (см. [3, с. 175–177]). Далее, так как оператор R из (2.6) ограничен, то возмущенный оператор $I_B F - R$, согласно [3, теорема 8.5, с. 177], также является генератором семейства косинус-функций. Отсюда снова следует, что при выполнении условий (2.8), (2.9) задача (2.6) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$.

Авторы благодарят Д. А. Закору за внимание к работе, замечания и полезные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Габов С. А.* Об одной задаче гидродинамики идеальной жидкости, связанной с флотацией// Дифф. уравн. — 1986. — *24*, № 1. — С. 16–21.
2. *Габов С. А., Свешников А. Г.* Математические задачи динамики флотирующей жидкости// Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. — 1990. — *28*. — С. 3–86.
3. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. — Киев: Выща школа, 1989.
4. *Иванов И. В., Мельников И. В., Филинков А. И.* Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. — М.: Физматлит, 1995.
5. *Копачевский Н. Д.* Интегродифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве. Специальный курс лекций. — Симферополь: ФЛП «Бондаренко О. А.», 2012.
6. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
7. *Копачевский Н. Д., Цветков Д. О.* Колебания стратифицированных жидкостей// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2008. — *29*. — С. 103–130.
8. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
9. *Солдатов М. А.* Колебания жидкости в бассейне, частично покрытом льдом// Уч. зап. СГУ. — 2000. — *12*, № 2. — С. 80–83.
10. *Sowa M.* Cosine operator functions// Rozpr. Math. — 1966. — *49*. — С. 1–47.

Н. Д. Копачевский
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
295007, г. Симферополь, пр. Академика Вернадского, д. 4
E-mail: kopachevsky@list.ru

Д. О. Цветков
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
295007, г. Симферополь, пр. Академика Вернадского, д. 4
E-mail: tsvetdo@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-3-573-590 UDC 517.98

Small Motions of an Ideal Stratified Fluid in a Basin Covered with Ice

© 2018 **N. D. Kopachevsky, D. O. Tsvetkov**

Abstract. We study the problem on small motions of an ideal stratified fluid with a free surface partially covered with crushed ice. The crushed ice is supposed to be ponderable particles of some matter floating on the free surface. These particles do not interact with each other during oscillations of the free boundary (or this interaction is neglible) and stay on the surface during these oscillations. Using the method of orthogonal projecting of boundary-value conditions on the free surface and introducing auxiliary problems, we reduce the original initial-boundary value problem to the equivalent Cauchy problem for a second-order differential equation in some Hilbert space. We obtain conditions under which there exists a strong with respect to time solution of the initial-boundary value problem describing the evolution of this hydraulic system.

REFERENCES

1. S. A. Gabov, "Ob odnoy zadache gidrodinamiki ideal'noy zhidkosti, svyazannoy s flotatsiey" [On one problem of hydrodynamics of an ideal fluid related to flotation], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1986, **24**, No. 1, 16–21 (in Russian).

2. S. A. Gabov and A. G. Sveshnikov, “Matematicheskie zadachi dinamiki flotiruyushchey zhidkosti” [Mathematical problems of hydrodynamics of floating fluid], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Mat. analiz* [Totals Sci. Tech. Ser. Math. Anal.], 1990, **28**, 3–86 (in Russian).
3. J. Goldstein, *Polugruppy lineynykh operatorov i ikh prilozheniya* [Semigroups of Linear Operators and Applications], Vyshcha shkola, Kiev, 1989 (Russian translation).
4. I. V. Ivanov, I. V. Mel’nikov, and A. I. Filinkov, *Differentsial’no-operatornye uravneniya i nekorrektnye zadachi* [Differential-Operator Equations and Ill-Posed Problems], Fizmatlit, M., 1995 (in Russian).
5. N. D. Kopachevsky, *Integrodifferentsial’nye uravneniya Vol’terra v gil’bertovom prostranstve. Spetsial’nyy kurs lektsiy* [Volterra Integrodifferential Equations in a Hilbert Space. A Special Course], FLP O. A. Bondarenko, Simferopol’, 2012 (in Russian).
6. N. D. Kopachevsky, S. G. Kreyn, and Ngo Zuy Kan, *Operatornye metody v lineynoy gidrodinamike: evolyutsionnye i spektral’nye zadachi* [Operator Methods in Linear Hydrodynamics: Evolution and Spectral Problems], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
7. N. D. Kopachevsky and D. O. Tsvetkov, “Kolebaniya stratifitsirovannykh zhidkostey” [Oscillations of stratified fluids], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2008, **29**, 103–130 (in Russian).
8. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial’nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
9. M. A. Soldatov, “Kolebaniya zhidkosti v basseyne, chastichno pokrytom l’dom” [Oscillations of a fluid in a basin partially covered with ice], *Uch. zap. SGU* [Sci. Notes SGU], 2000, **12**, No. 2, 80–83 (in Russian).
10. M. Sowa, “Cosine operator functions,” *Rozpr. Math.*, 1966, **49**, 1–47.

N. D. Kopachevsky
V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia
E-mail: kopachevsky@list.ru

D. O. Tsvetkov
V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia
E-mail: tsvetdo@gmail.com