Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 3 (2018). С. 547–572

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-3-547-572 УДК 517.958

К ПРОБЛЕМЕ МАЛЫХ ДВИЖЕНИЙ СИСТЕМЫ ИЗ ДВУХ ВЯЗКОУПРУГИХ ЖИДКОСТЕЙ В НЕПОДВИЖНОМ СОСУДЕ

© 2018 г. **Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ**

Аннотация. В данной работе изучается проблема малых движений двух вязкоупругих несжимаемых жидкостей модели Олдройта, заполняющих неподвижный сосуд. С помощью применения операторного подхода исходная начально-краевая задача приведена к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения в некотором гильбертовом пространстве, доказана теорема о корректной разрешимости проблемы на произвольном промежутке времени. Выведено уравнение для нормальных колебаний гидросистемы (обобщенный операторный пучок С. Г. Крейна).

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

1.1. О модели вязкоупругой жидкости. В данной работе изучается проблема малых движений вязкоупругих несжимаемых жидкостей модели Олдройта (см., например, [10]). В этой модели связь между тензором вязких напряжений и удвоенным тензором скоростей деформаций в вязкоупругой жидкости описывается не простейшим законом Гука, а линейным дифференциальным соотношением, где фигурируют производные первого порядка по времени как у тензора вязких напряжений, так и у тензора скоростей деформаций.

Некоторые исследователи (см., например, [7, 14, 15], а также [9, 13]) рассматривают так называемую обобщенную модель Олдройта, когда упомянутая выше связь описывается линейным дифференциальным соотношением порядка $m \geqslant 1$. Тогда при естественном условии, что если в начальный момент времени тензор скорости деформации и его производные по времени вплоть до порядка $m-1$ равны нулю, то эти же условия выполнены и для тензора вязких напряжений, получается связь между этими тензорами в любой момент времени с помощью интегрального оператора Вольтерра. Этот переход от дифференциальной связи к интегральной описан, например, в [13, с. 316–318].

Пусть $\vec{u}(t,x) = \sum\limits_{k=1}^{3} u_k(t,x)\vec{e}_k$ — поле скоростей в вязкоупругой жидкости, $\tau_{kl}(\vec{u}) := \dfrac{\partial u_k}{\partial x_l} + \dfrac{\partial u_l}{\partial x_k}$, $(k,l = 1,2,3)$ — удвоенный тензор скоростей деформаций, а σ'_{kl} — тензор вязких напряжений. Тогда связь между ними описывается соотношением

$$\sigma' = \mu I_0(t)\tau, \tag{1.1}$$

где $\mu > 0$ — коэффициент динамической вязкой жидкости, а

$$I_0(t)\tau := \tau(t) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \int_0^t e^{-\beta_j(t-s)}\tau(s)ds, \tag{1.2}$$

где α_j и β_j — положительные константы, характеризующие вязкоупругую жидкость. Если $\alpha_j = 0$, $j = 1,\ldots,m$, то отсюда получаем модель обычной вязкой несжимаемой жидкости, а из (1.1) — закон Гука. Отметим еще следующий факт: интегральный оператор Вольтерра из (1.1) является обратимым интегральным оператором второго рода, причем обратный оператор также является интегральным оператором Вольтерра.

1.2. Об истории вопроса и содержании данной работы. Одними из первых работ, связанных с применением методов функционального анализа к исследованию проблемы малых движений и нормальных колебаний вязкоупругой жидкости в частично заполненном сосуде, являются работы А. И. Милославского [7, 14, 15]. В них для обобщенной модели Олдройта ($m > 1$) применен операторный подход, развивающий построения, проведенные ранее С. Г. Крейном и его учениками применительно к задаче о малых колебаниях вязкой жидкости в частично заполненном сосуде. Исследования А. И. Милославского отражены, в частности, в главе 8 монографии [13]. Случай полного заполнения полости вязкоупругой жидкостью рассмотрен в [9], а также в [13, п. 7.1].

В данной работе, которая является продолжением исследований из [3], изучается проблема малых движений системы из двух вязкоупругих несмешивающихся жидкостей, полностью заполняющих неподвижный сосуд. Для простоты взята модель Олдройта ($m = 1$), хотя все построения можно провести и для обобщенной модели Олдройта ($m > 1$) по той же схеме. Аналогичный подход можно применить и к случаю, когда сосуд заполнен не двумя, а системой из произвольного числа несмешивающихся вязкоупругих жидкостей обобщенной модели Олдройта.

Изложение в данной работе проведено по следующей схеме. После введения в разделе 2 дается постановка начально-краевой задачи о малых движениях системы из двух несмешивающихся вязкоупругих жидкостей, полностью заполняющих неподвижный сосуд и находящихся в однородном гравитационном поле, действующем вертикально вниз. Для классического решения задачи выведен закон баланса полной энергии. Это позволяет в разделе 3 осуществить выбор функциональных гильбертовых пространств, в которых естественно изучать поставленную проблему. Далее в разделе 4 приводится вывод формул для ортопроекторов, непосредственно связанных с указанными пространствами. После этого в разделе 5 осуществлен операторный подход к исследуемой задаче, позволяющий привести проблему к задаче Коши для интегро-дифференциального уравнения в некотором гильбертовом пространстве. Затем в разделе 6 осуществлен переход к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в ортогональной сумме гильбертовых пространств. После подробного изучения свойств операторной матрицы, отвечающей возникшей системе уравнений (факторизация, аккретивность, замыкание) в разделе 7 доказываются теоремы о сильной разрешимости полученной задачи Коши на конечном интервале времени. На этой основе доказана также теорема о существовании обобщенного решения исходной начально-краевой задачи. Наконец, для проблемы нормальных колебаний гидросистемы получено уравнение (операторный пучок), обобщающее соответствующие уравнения как для проблемы с двумя обычными вязкими жидкостями (пучок С. Г. Крейна), так и для задачи о колебаниях одной вязкой жидкости.

2. Постановка задачи. Закон баланса полной энергии

2.1. Классическая постановка задачи. Будем считать, что две вязкоупругие жидкости модели Олдройта заполняют произвольный сосуд $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и в состоянии равновесия под действием гравитационного поля занимают области Ω_1 и Ω_2, соответственно, с горизонтальной границей раздела Γ. Обозначим через S_1 и S_2 те части границы $\partial\Omega$, которые примыкают к первой и второй жидкостям, соответственно.

Введем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ таким образом, чтобы ось Ox_3 была направлена вверх, т. е. против действия однородного гравитационного поля, а начало координат O находилось на Γ. Тогда ускорение гравитационного поля $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, $g > 0$, а в состоянии покоя поля давлений в жидкостях выражаются по законам

$$P_{0,k}(x_3) = p_0 - \rho_k g x_3, \quad k = 1, 2, \tag{2.1}$$

где ρ_k — плотности жидкостей, а p_0 — давление на границе раздела Γ, т. е. при $x_3 = 0$.

Рассмотрим малые движения системы из двух жидкостей, близкие к состоянию покоя. Пусть $\vec{u}_k(t,x)$ — поля малых скоростей, а $p_k(t,x)$ — отклонения полей давлений от их равновесных значений (см. (2.1)). Для простоты рассматриваем вязкоупругие жидкости модели Олдройта, когда в (1.1) $m = 1$. Кроме того, полагаем, что на исследуемую гидродинамическую систему дополнительно к гравитационному полю действует малое поле внешних сил $\vec{f} = \vec{f}(t,x)$, $x \in \Omega$.

Тогда линеаризованные уравнения движения жидкостей имеют следующий вид (см., например, [13, с. 318, 342-343]):

$$\rho_k \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} = -\nabla p_k + \mu_k \triangle \vec{v}_k + \rho_k \vec{f}_k(t,x), \quad \operatorname{div} \vec{u}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \tag{2.2}$$

$$\vec{v}_k(t,x) = \vec{u}_k(t,x) + \alpha_k \int\limits_0^t e^{-\beta_k(t-s)} \vec{u}_k(s,x)\,ds =: I_{0,k}(t)\vec{u}_k, \quad k = 1, 2, \tag{2.3}$$

где $\mu_k > 0$ — динамические вязкости жидкостей, $\alpha_k \geqslant 0$, $\beta_k > 0$ — коэффициенты, характеризующие свойства вязкоупругости жидкостей модели Олдройта, $\vec{f}_k(t,x) := \vec{f}(t,x)|_{x\in\Omega_k}$, а $\triangle$ — трехмерный оператор Лапласа.

Для вязких жидкостей, как известно, на твердых стенках S_k сосуда должны выполняться условия прилипания, т. е.

$$\vec{u}_k = \vec{0} \quad (\text{на } S_k), \quad k = 1, 2, \tag{2.4}$$

а на границе раздела Γ — условие непрерывности полей скоростей:

$$\vec{u}_1(t,x) = \vec{u}_2(t,x), \quad x \in \Gamma. \tag{2.5}$$

Будем описывать малые перемещения границы раздела между жидкостями с помощью функции вертикального отклонения

$$x_3 = \zeta(t, x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma. \tag{2.6}$$

Тогда на Γ должно выполняться кинематическое условие

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \vec{u}_1 \cdot \vec{n} =: \gamma_{n,1}\vec{u}_1 = \vec{u}_2 \cdot \vec{n} =: \gamma_{n,2}\vec{u}_2, \quad \vec{n} = \vec{e}_3, \tag{2.7}$$

а символом $\gamma_{n,k}$ обозначена операция взятия нормального следа на Γ, т. е. следа нормальной компоненты поля скорости. Заметим еще, что из условия сохранения объема каждой из жидкостей имеем интегральную связь

$$\int\limits_\Gamma \zeta\, d\Gamma = 0. \tag{2.8}$$

Сформулируем теперь динамические условия на Γ. Они состоят в том, что на движущейся границе раздела векторное поле напряжений при переходе от одной жидкости к другой изменяется непрерывно. Линеаризация этого условия и его снос на Γ приводят к следующим соотношениям: на Γ касательные напряжения (т. е. вдоль Γ) изменяются непрерывно, а нормальное напряжение (т. е. вдоль оси Ox_3) компенсируется гравитационным скачком давлений. Имеем

$$\begin{gathered} \mu_1 \tau_{j3}(\vec{v}_1) = \mu_2 \tau_{j3}(\vec{v}_2), \quad \vec{v}_k = I_{0,k}(t)\vec{u}_k, \quad k = 1, 2, \quad j = 1, 2; \\ [-p_1 + \mu_1 \tau_{33}(\vec{v}_1)] - [-p_2 + \mu_2 \tau_{33}(\vec{v}_2)] = -g(\rho_1 - \rho_2)\zeta \quad (\text{на } \Gamma). \end{gathered} \tag{2.9}$$

Наконец, для искомых функций $\vec{u}_k(t,x)$, $p_k(t,x)$, $k = 1, 2$, и $\zeta(t, x_1, x_2)$ необходимо еще задать начальные условия:

$$\begin{gathered} \vec{u}_k(0,x) = \vec{u}_k^0(x), \quad x \in \Omega_k, \quad \vec{u}_1^0(x) \equiv \vec{u}_2^0(x), \quad x \in \Gamma, \\ \zeta(0,x) = \zeta^0(x), \quad x \in \Gamma. \end{gathered} \tag{2.10}$$

2.2. Закон баланса полной энергии. Будем считать, что задача (2.2)–(2.10) имеет классической решение, и выведем закон баланса полной энергии гидросистемы. Предварительно выпишем формулы Грина для векторных полей скоростей в областях Ω_1 и Ω_2, соответственно. Для дважды непрерывно дифференцируемых полей они имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}\mu_1 E_1(\vec{\eta}_1,\vec{u}_1) := \frac{1}{2}\mu_1 \int\limits_{\Omega_1} \left(\sum_{j,l=1}^{3} \tau_{jl}(\vec{\eta}_1)\overline{\tau_{jl}(\vec{u}_1)} \right) d\Omega_1 = \\ = \int\limits_{\Omega_1} \vec{\eta}_1 \cdot \overline{(-\mu_1 \triangle \vec{u}_1 + \nabla p_1)} d\Omega_1 + \int\limits_{\Gamma} \sum_{j=1}^{3} \eta_{1,j} \overline{(\mu_1 \tau_{j,3}(\vec{u}_1) - p_1\delta_{j3})} d\Gamma, \\ \mathrm{div}\vec{\eta}_1 = \mathrm{div}\vec{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{\eta}_1 = \vec{u}_1 \equiv \vec{0} \quad (\text{на } S_1),\end{gathered} \tag{2.11}$$

$$\begin{gathered}\mu_2 E_2(\vec{\eta}_2,\vec{u}_2) := \frac{1}{2}\mu_2 \int\limits_{\Omega_2} \left(\sum_{j,l=1}^{3} \tau_{jl}(\vec{\eta}_2)\overline{\tau_{jl}(\vec{u}_2)} \right) d\Omega_2 = \\ = \int\limits_{\Omega_2} \vec{\eta}_2 \cdot \overline{(-\mu_2 \triangle \vec{u}_2 + \nabla p_2)} d\Omega_2 - \int\limits_{\Gamma} \sum_{j=1}^{3} \eta_{2,j} \overline{(\mu_2 \tau_{j,3}(\vec{u}_2) - p_2\delta_{j3})} d\Gamma, \\ \mathrm{div}\vec{\eta}_2 = \mathrm{div}\vec{u}_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \vec{\eta}_2 = \vec{u}_2 \equiv \vec{0} \quad (\text{на } S_2).\end{gathered} \tag{2.12}$$

(В этих формулах учтено, что направление внешней нормали на Γ для области Ω_1 будет $\vec{n}_1 = \vec{e}_3$, а для Ω_2 — соответственно, $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1 = -\vec{e}_3$.)

Умножим обе части (2.2) слева на $\vec{u}_k$, проинтегрируем по Ω_k и сложим результаты; будем иметь (для вещественнозначных полей):

$$\sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} d\Omega_k = -\sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot \nabla p_k d\Omega_k + \sum_{k=1}^{2} \mu_k \int\limits_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot (\triangle \vec{v}_k) d\Omega_k + \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot \vec{f}_k d\Omega_k.$$

Используя формулы Грина (2.11), (2.12), а также граничные условия задачи (2.2)–(2.10), отсюда получаем соотношение

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} |\vec{u}_k|^2 \, d\Omega_k \right\} = -\sum_{k=1}^{2} \mu_k E_k(\vec{u}_k,\vec{v}_k) + \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot \vec{f}_k d\Omega_k + \\ + \int\limits_{\Gamma} \sum_{j=1}^{3} u_{k,j} \left(\mu_1 \tau_{j3}(\vec{u}_1) - \mu_2 \tau_{j3}(\vec{u}_2) - (p_1 - p_2)\delta_{j3} \right) d\Gamma.\end{gathered}$$

Учитывая еще соотношения (2.8) и (2.9), окончательно приходим к выводу, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} |\vec{u}_k|^2 \, d\Omega_k + g(\rho_1 - \rho_2) \int\limits_{\Gamma} |\zeta|^2 \, d\Gamma \right\} = -\sum_{k=1}^{2} \mu_k E_k(\vec{u}_k,\vec{v}_k) + \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot \vec{f}_k d\Omega_k. \tag{2.13}$$

Это тождество есть закон баланса полной энергии системы в дифференциальной форме. Здесь в фигурных скобках стоит удвоенная полная (кинетическая плюс потенциальная) энергия гидросистемы, а справа — мощность диссипативных вязкоупругих сил и мощность дополнительных внешних сил, действующих на систему. После интегрирования (2.13) по t в пределах от 0 до t получаем закон баланса полной энергии в интегральной форме, т. е. на произвольном отрезке времени $(0,t)$.

3. Выбор функциональных пространств

3.1. Предварительные соображения. Будем исследовать задачу (2.2)–(2.10) методами теории операторов, действующих в гильбертовых пространствах (см. [4, 12, 13]). Тождество (2.13) показывает, что поля скоростей в данной задаче следует считать элементами векторного пространства пар функций

$$\vec{u} = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2\}, \quad \vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega), \tag{3.1}$$

со скалярным произведением

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega)} := \sum_{k=1}^{2} \rho_k (\vec{u}_k, \vec{v}_k)_{\vec{L}_2(\Omega_k)} := \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot \overline{\vec{v}_k} d\Omega_k.$$

Точнее говоря, следует выбирать (см. [4]) лишь элементы

$$\vec{u}_k \in \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k) := \left\{ \vec{u}_k \in \vec{L}_2(\Omega_k) : \operatorname{div}\vec{u}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \gamma_{n,k}\vec{u}_k := \vec{u}_k \cdot \vec{n}_k = 0 \quad (\text{на } S_k) \right\},$$

где $\vec{n}_k$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega_k$. Такие поля отвечают конечной кинетической энергии системы.

Заметим, что пространство $\vec{L}_2(\Omega_k)$ со скалярным произведением

$$(\vec{u}_k, \vec{v}_k)_{\vec{L}_2(\Omega_k)} := \int\limits_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot \overline{\vec{v}_k} d\Omega_k$$

имеет ортогональное разложение (см. [4])

$$\vec{L}_2(\Omega_k) = \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_k), \tag{3.2}$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_k) := \left\{ \vec{w}_k = \nabla\varphi_k \in \vec{L}_2(\Omega_k) : \quad \varphi_k = 0 \quad (\text{на } \Gamma) \right\}, \tag{3.3}$$

причем

$$\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k) = \vec{J}_0(\Omega_k) \oplus \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k), \tag{3.4}$$

$$\vec{J}_0(\Omega_k) = \left\{ \vec{v}_k \in \vec{L}_2(\Omega_k) : \operatorname{div}\vec{v}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \gamma_{n,k}\vec{v}_k = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega_k) \right\}, \tag{3.5}$$

$$\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k) = \left\{ \vec{w}_k = \nabla\Phi_k \in \vec{L}_2(\Omega_k) : \ \triangle\Phi_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \frac{\partial\Phi_k}{\partial n_k} = 0 \quad (\text{на } S_k), \int\limits_{\Gamma} \Phi_k d\Gamma = 0 \right\}. \tag{3.6}$$

Будем далее обозначать подпространство пар из $\vec{L}_2(\Omega)$, у которых компоненты являются элементами из $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$, через $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$, т. е.

$$\vec{J}_{0,S}(\Omega) := \left\{ \{\vec{u}_1; \vec{u}_2\} \in \vec{L}_2(\Omega) : \quad \vec{u}_k \in \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k), \quad k = 1, 2 \right\}. \tag{3.7}$$

Тогда в силу (3.2)–(3.6) будем иметь

$$\begin{gathered} \vec{L}_2(\Omega) = \vec{J}_{0,S}(\Omega) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega), \\ \vec{J}_{0,S}(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2), \\ \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega) = \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2). \end{gathered} \tag{3.8}$$

Далее, с конечной потенциальной энергией системы связано пространство $L_2(\Gamma)$ скалярных функций, заданных на Γ, с квадратом нормы

$$||\zeta||^2_{L_2(\Gamma)} := \int\limits_{\Gamma} |\zeta|^2 d\Gamma.$$

Точнее говоря, ввиду условия (2.8) далее будем считать, что вертикальные отклонения границы раздела жидкостей

$$\zeta \in L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\},$$

где 1_Γ — функция, тождественно равная 1 на Γ.

Введем еще пространства векторных полей с конечной скоростью диссипации энергии в жидкости:

$$\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k) := \left\{ \vec{u}_k \in \vec{H}^1(\Omega_k) : \operatorname{div}\vec{u}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \vec{u}_k = \vec{0} \quad (\text{на } S_k) \right\}.$$

Здесь скалярное произведение определяется по формуле (см. (2.11), (2.12))

$$(\vec{u}_k, \vec{v}_k)_{\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k)} := E_k(\vec{u}_k, \vec{v}_k), \tag{3.9}$$

а на множестве пар (3.1) — по формуле

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)} := \sum_{k=1}^{2} \mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{v}_k),$$

$$\vec{J}^1_{0,S}(\Omega) := \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{J}^1_{0,S_2}(\Omega_2).$$

Отметим, что $\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k)$ плотно вложено в $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$ и имеет место неравенство Корна:

$$||\vec{u}_k||^2_{\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k)} \geqslant \tilde{c}_k ||\vec{u}_k||^2_{\vec{H}^1(\Omega_k)} \geqslant c_k ||\vec{u}_k||^2_{\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)}, \quad c_k > 0, \quad \forall \vec{u}_k \in \vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k),$$

а метрика, порожденная скалярным произведением (3.9), эквивалентна стандартной метрике пространства $\vec{H}^1(\Omega_k)$. Отсюда следует, что $\left(\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k); \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)\right)$ — гильбертова пара пространств. Обозначим через $A_k : \vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k) \to \left(\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k)\right)^*$ оператор этой гильбертовой пары. Тогда будем иметь соотношения

$$(\vec{u}_k, \vec{v}_k)_{\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k)} = (A_k^{1/2}\vec{u}_k, A_k^{1/2}\vec{v}_k)_{\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)} = \langle \vec{u}_k, A_k \vec{v}_k \rangle_{\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)}, \quad \forall \vec{u}_k, \vec{v}_k \in \vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k). \tag{3.10}$$

Здесь косыми скобками обозначено значение функционала, стоящего на втором месте, на элементе, стоящем на первом месте.

Таким образом, возникают оснащенные гильбертовы пространства

$$\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k) \hookrightarrow\hookrightarrow J_{0,S_k}(\Omega_k) \hookrightarrow\hookrightarrow \left(J^1_{0,S_k}(\Omega_k)\right)^*, \quad k = 1, 2, \tag{3.11}$$

причем вложения, обозначаемые символом $\hookrightarrow\hookrightarrow$, компактные.

Введем, наконец, пространство $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ пар векторных полей (3.1) со скалярным произведением

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)} := \sum_{k=1}^{2} \mu_k (\vec{u}_k, \vec{v}_k)_{\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^{2} \mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{v}_k). \tag{3.12}$$

Из приведенных построений очевидно, что

$$\left(\vec{J}^1_{0,S}(\Omega); \vec{J}_{0,S}(\Omega)\right)$$

— гильбертова пара пространств, причем оператор A этой пары имеет вид

$$A = (\mu_1 A_1; \mu_2 A_2), \tag{3.13}$$

а формулы (3.10), (3.12) порождают соотношения

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)} = (A^{1/2}\vec{u}, A^{1/2}\vec{v})_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)} = \sum_{k=1}^{2} \mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{v}_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{2} \mu_k (A_k^{1/2}\vec{u}_k, A_k^{1/2}\vec{v}_k)_{\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)} = \langle \vec{u}, A\vec{v} \rangle_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)} = \tag{3.14}$$

$$= \sum_{k=1}^{2} \langle \vec{u}_k, \mu_k A_k \vec{v}_k \rangle_{\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)}, \quad \forall \vec{u} = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2\}, \quad \vec{v} = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2\} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega).$$

3.2. Выбор функциональных пространств, порожденных задачей. Кинематическое условие (2.7) показывает, что в данной задаче элементы $\vec{u}_k$, составляющие пару (3.1), не могут быть произвольными: для них нормальные компоненты на Γ должны совпадать, т. е.

$$\gamma_{n,1}\vec{u}_1 = \gamma_{n,2}\vec{u}_2 \quad (\text{на } \Gamma).$$

Совокупность таких пар $\vec{u} = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2\} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ образует подпространство, которое обозначим через $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, т. е.

$$\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) := \{\vec{u} = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2\} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega) : \quad \gamma_{n,1}\vec{u}_1 = \gamma_{n,2}\vec{u}_2 \quad (\text{на } \Gamma)\}. \tag{3.15}$$

Далее, условие (2.5) показывает также, что на Γ все векторное поле для пары $\vec{u} = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2\} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ изменяется непрерывно, т. е.

$$\gamma_1\vec{u}_1 = \gamma_2\vec{u}_2 \quad (\text{на } \Gamma),$$

где γ_k — операция(оператор) взятия полного следа векторного поля $\vec{u}_k$ из области Ω_k на границу Γ.

Такие пары векторных полей образуют подпространство в пространстве $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$, которое обозначим через $\vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, т. е.

$$\vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega) := \left\{\vec{u} = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2\} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega) : \quad \gamma_1\vec{u}_1 = \gamma_2\vec{u}_2 \quad (\text{на } \Gamma)\right\}. \tag{3.16}$$

Это подпространство плотно вложено в $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ и потому

$$\left(\vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega); \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)\right) \tag{3.17}$$

— гильбертова пара пространств.

Обозначим через $\tilde{A}$ оператор гильбертовой пары (3.17). Очевидно, он является сужением оператора A из (3.13) с $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ на $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, и для него в силу (3.14) выполнены тождества

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = (\tilde{A}^{1/2}\vec{u}, \tilde{A}^{1/2}\vec{v})_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = \sum_{k=1}^{2} \mu_k E_k(\vec{u}_k; \vec{v}_k) = \langle \vec{u}, \tilde{A}\vec{v}\rangle_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)}, \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega). \tag{3.18}$$

Отметим еще, что оснащения (3.11) порождают оснащение

$$\vec{J}^1_{0,S}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \vec{J}_{0,S}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \left(\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)\right)^*, \tag{3.19}$$

из которого следует, что

$$\vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \left(\vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)\right)^*. \tag{3.20}$$

Будем далее считать, что область Ω, составленная из двух областей Ω_1 и Ω_2, имеет липшицеву границу. При этом $\partial\Omega_1 = S_1 \cup \Gamma$, $\partial\Omega_2 = S_2 \cup \Gamma$, где S_k — липшицевы куски $\partial\Omega_k$, имеющие также липшицевы границы $\partial S_k : \partial S_1 = \partial S_2 = \partial\Gamma$. Такие предположения позволяют использовать обобщенные формулы Грина для оператора Лапласа в случае как скалярных полей, заданных в Ω_k, так и в случае векторных полей скоростей (см. [2]).

4. Вывод формул для ортопроекторов

4.1. Первая формула. Получим сначала закон действия ортопроектора

$$P_0 := P_{0,S,\Gamma} : \vec{J}_{0,S}(\Omega) \to \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) \tag{4.1}$$

(см. (3.7), (3.8), (3.15)). Для этого выясним, каково ортогональное дополнение в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ к подпространству $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$.

Учтем структуру (3.8) подпространства $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ и заметим, что для элементов из $\vec{J}_0(\Omega_1)$ и $\vec{J}_0(\Omega_2)$ нормальные компоненты полей равны нулю на всей границе. Отсюда получаем, что $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ имеет структуру

$$\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{h,S,\Gamma}(\Omega),$$

$$\begin{aligned}
&\vec{G}_{h,S,\Gamma}(\Omega) = \Big\{ \vec{u} = \Big\{ \frac{1}{\rho_1}\nabla\varphi_1; \frac{1}{\rho_2}\nabla\varphi_2 \Big\} : \triangle\varphi_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \\
&\frac{\partial\varphi_k}{\partial n_k} = 0 \quad (\text{на } S_k), \quad \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \quad (\text{на } \Gamma), \quad \vec{n} = \vec{e}_3, \\
&\int_\Gamma \varphi_k d\Gamma = 0 \Big\} \subset \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Пусть $\vec{u} = \Big\{ \frac{1}{\rho_1}\nabla\varphi_1; \frac{1}{\rho_2}\nabla\varphi_2 \Big\} \in \vec{G}_{h,S,\Gamma}(\Omega)$, а $\vec{v} = \{\nabla\psi_1; \nabla\psi_2\}$ ортогональна $\vec{u}$ в $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2)$. Тогда

$$\rho_1 \int_{\Omega_1} \nabla\psi_1 \cdot \Big(\frac{1}{\rho_1}\nabla\varphi_1 \Big) d\Omega_1 + \rho_2 \int_{\Omega_2} \nabla\psi_2 \cdot \Big(\frac{1}{\rho_2}\nabla\varphi_2 \Big) d\Omega_2 = 0. \tag{4.3}$$

Воспользуемся теперь обобщенными формулами Грина для оператора Лапласа и скалярных полей (см. [2]). В рассматриваемом случае для липшицевых областей Ω_1 и Ω_2 они имеют следующий вид:

$$\int_{\Omega_1} \nabla\psi_1 \cdot \overline{\nabla\varphi_1} d\Omega_1 = \langle \psi_1, (-\triangle\varphi_1) \rangle_{L_2(\Omega_1)} + \langle \gamma_1\psi_1, \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} \rangle_{L_2(\Gamma)}, \tag{4.4}$$

$$\int_{\Omega_2} \nabla\psi_2 \cdot \overline{\nabla\varphi_2} d\Omega_2 = \langle \psi_2, (-\triangle\varphi_2) \rangle_{L_2(\Omega_1)} - \langle \gamma_2\psi_2, \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \rangle_{L_2(\Gamma)}, \tag{4.5}$$

$$\begin{gathered}
\forall \psi_k, \varphi_k \in H^1_\Gamma(\Omega_k), \quad \gamma_k\psi_k := \psi_k|_\Gamma \in H^{1/2}_\Gamma := H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}, \\
\frac{\partial\varphi_k}{\partial n} \in \tilde{H}^{-1/2}_\Gamma := (H^{1/2}_\Gamma)^*, \quad \vec{n} = \vec{e}_3, \quad \triangle\varphi_k \in (H^1_\Gamma(\Omega_k))^*, \quad k = 1, 2.
\end{gathered} \tag{4.6}$$

Поясним смысл обозначений в (4.4)–(4.6). Прежде всего, слева в этих формулах стоит скалярное произведение функций из $H^1_\Gamma(\Omega_k)$:

$$(\psi_k, \varphi_k)_{H^1_\Gamma(\Omega_k)} := \int_{\Omega_k} \nabla\psi_k \cdot \overline{\nabla\varphi_k} d\Omega_k, \quad \int_\Gamma \varphi_k d\Gamma = \int_\Gamma \psi_k d\Gamma = 0. \tag{4.7}$$

Соответствующая норма эквивалентна стандартной норме $H^1(\Omega_k)$, а $H^1_\Gamma(\Omega_k)$ — подпространство пространства $H^1(\Omega_k)$ коразмерности 1. Далее, γ_k — операторы следа скалярных функций, заданных в Ω_k, на границе $\Gamma \subset \partial\Omega_k$. Согласно теореме Гальярдо (см. [11]), следы $\gamma_k\psi_k \in H^{1/2}(\Gamma)$ и удовлетворяют условиям нормировки (4.7). Как известно, см. [1, 16], множество $H^{1/2}_\Gamma$ плотно в $L_{2,\Gamma}$ и имеет место оснащение

$$H^{1/2}_\Gamma \hookrightarrow\hookrightarrow L_{2,\Gamma} \hookrightarrow\hookrightarrow \tilde{H}^{-1/2}_\Gamma := \Big(H^{1/2}_\Gamma \Big)^*.$$

Здесь символом $\tilde{}$ обозначен класс функций из $H^{1/2}_\Gamma$, продолжимых нулем на всю границу $\partial\Omega_k$ в классе $H^{-1/2}(\partial\Omega_k)$ (см. [1,8]). В частности, в формулах Грина (4.4), (4.5) производные по нормали $\partial\varphi_k/\partial n \in \tilde{H}^{-1/2}_\Gamma$, так как в силу постановки задачи (см. (3.6), (4.2)) должны быть выполнены условия Неймана $\partial\varphi_k/\partial n_k = 0$ (на S_k).

Отметим еще, что имеется также оснащение

$$H^1_\Gamma(\Omega_k) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega_k) \hookrightarrow\hookrightarrow \Big(H^1_\Gamma \Big)^*,$$

и потому $\triangle\varphi_k \in \Big(H^1_\Gamma \Big)^*$, а косыми скобками в (4.4), (4.5) обозначены значения функционалов, стоящих на втором месте, на элементе, стоящем на первом месте.

Возвращаясь к тождеству (4.3) и используя (4.4), (4.5), будем иметь соотношение (с учетом свойств (4.2) для φ_k)

$$\int_{\Omega_1} \nabla\psi_1 \cdot \overline{\nabla\varphi_1} d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \nabla\psi_2 \cdot \overline{\nabla\varphi_2} d\Omega_2 = 0 = \langle \rho_1\gamma_1\psi_1 - \rho_2\gamma_2\psi_2, \overline{\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}} \rangle_{L_2(\Gamma)}.$$

Отсюда в силу свойства $\langle 1_\Gamma, \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}\rangle_{L_{2,\Gamma}} = 0$ получаем, что

$$\rho_1\gamma_1\psi_1 - \rho_2\gamma_2\psi_2 = const = 0 \quad (\text{на } \Gamma),$$

где использовано также свойство нормировки (4.7) для ψ_k, $k = 1, 2$.

Итогом проведенных рассмотрений является следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Элементы из* $\Big(\vec{G}_{h,S,\Gamma}(\Omega)\Big)^{\perp}$ *образуют множество*

$$\Big(\vec{G}_{h,S,\Gamma}(\Omega)\Big)^{\perp} = \Big\{\{\nabla\psi_1; \nabla\psi_2\} : \triangle\psi_k = 0 \quad (\textit{в } (\Omega_k)), \frac{\partial\psi_k}{\partial n_k} = 0 \quad (\textit{на } S_k), k = 1, 2,$$
$$\psi := \rho_1\gamma_1\psi_1 = \rho_2\gamma_2\psi_2 \in H_\Gamma^{1/2}\Big\}. \tag{4.8}$$

Опираясь на представление (4.8), получим закон действия ортопроектора P_0 из (4.1). Для любого $\vec{u} = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2\} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ должно быть

$$P_0\vec{u} = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2\} - \{\nabla\psi_1; \nabla\psi_2\} \in \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega),$$

и потому

$$\gamma_{n,1}(P_0\vec{u})_1 = \gamma_{n,2}(P_0\vec{u})_2 \Rightarrow \gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \frac{\partial\psi_1}{\partial n}|_\Gamma = \gamma_{n,2}\vec{u}_2 - \frac{\partial\psi_2}{\partial n}|_\Gamma, \quad \vec{n} = \vec{e}_3.$$

Значит, для ψ_1 и ψ_2 должно выполняться условие

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial n} - \frac{\partial\psi_2}{\partial n} = \gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \gamma_{n,2}\vec{u}_2 \quad (\text{на } \Gamma).$$

Таким образом, для определения пары функций $\{\psi_1; \psi_2\}$ возникает следующая задача сопряжения:

$$\triangle\psi_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \frac{\partial\psi_k}{\partial n_k} = 0 \quad (\text{на } S_k), \quad k = 1, 2,$$
$$\psi := \rho_1\psi_1 = \rho_2\psi_2, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial n} - \frac{\partial\psi_2}{\partial n} = \gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \gamma_{n,2}\vec{u}_2 \quad (\text{на } \Gamma). \tag{4.9}$$

Найдем решение задачи (4.9), опираясь на свойства решений задач Неймана в областях Ω_k:

$$\triangle\psi_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \frac{\partial\psi_k}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_k), \quad \frac{\partial\psi_k}{\partial n} = \zeta_k \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_\Gamma \zeta_k d\Gamma = 0.$$

Используя известные результаты разрешимости таких задач в областях Ω_k с липшицевыми границами, разбитыми на липшицевы куски (см. [1, 2, 8, 16]), сформулируем итоговые утверждения, основанные на формулах Грина (4.4), (4.5).

1. Слабое решение $\psi_k|_{\Omega_k} \in H_\Gamma^1(\Omega_k)$ существует и единственно тогда и только тогда, когда $\psi_k|_\Gamma \in \tilde{H}_\Gamma^{-1/2}$. В этом случае

$$\psi_1 = V_1\zeta_1, \quad \psi_2 = -V_2\zeta_2, \quad V_k \in \mathcal{L}(\tilde{H}_\Gamma^{-1/2}; H_\Gamma^1(\Omega_k)), \tag{4.10}$$

при этом

$$\gamma_1\psi_1 = \gamma_1 V_1\frac{\partial\psi_1}{\partial n} =: C_1\frac{\partial\psi_1}{\partial n}, \quad C_1 \in \mathcal{L}(\tilde{H}_\Gamma^{-1/2}; H_\Gamma^{1/2}), \tag{4.11}$$

и аналогично

$$\gamma_2\psi_2 = -\gamma_2 V_2\frac{\partial\psi_2}{\partial n} =: -C_2\frac{\partial\psi_2}{\partial n}, \quad C_2 \in \mathcal{L}(\tilde{H}_\Gamma^{-1/2}; H_\Gamma^{1/2}). \tag{4.12}$$

2. Операторы C_k (их называют операторами Стеклова) обладают свойствами положительности:

$$\langle C_k\frac{\partial\psi_k}{\partial n_k}, \frac{\partial\psi_k}{\partial n}\rangle_{L_{2,\Gamma}} = \int_{\Omega_k} |\nabla\psi_k|^2 d\Omega_k, \quad \vec{n}_1 = \vec{e}_3, \quad \vec{n}_2 = -\vec{e}_3, \quad k = 1, 2.$$

Они отображают $\tilde{H}_\Gamma^{-1/2}$ на $H_\Gamma^{1/2}$, и потому существуют обратные операторы

$$C_k^{-1} \in \mathcal{L}(H_\Gamma^{1/2}; \tilde{H}_\Gamma^{-1/2}),$$

которые также обладают свойством положительности.

Учитывая эти свойства, вернемся к задаче (4.9) и будем считать, в силу уравнений и краевых условий этой задачи, что имеются связи (4.11), (4.12), а тогда

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial n} = C_1^{-1}\gamma_1\psi_1 = \rho_1^{-1}C_1^{-1}\psi, \quad \frac{\partial\psi_2}{\partial n} = -C_2^{-1}\gamma_2\psi_2 = \rho_2^{-1}C_2^{-1}\psi.$$

Подставляя эти соотношения во второе условие на Γ из (4.9), приходим к уравнению для нахождения функции ψ:

$$(\rho_1^{-1}C_1^{-1} + \rho_2^{-1}C_2^{-1})\psi = \gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \gamma_{n,2}\vec{u}_2. \tag{4.13}$$

Из свойств положительности операторов C_1^{-1} и C_2^{-1} следует, что оператор $\rho_1^{-1}C_1^{-1}+\rho_2^{-1}C_2^{-1}$ также положителен и отображает $H_\Gamma^{1/2}$ на $\tilde{H}_\Gamma^{-1/2}$. Поэтому существует обратный оператор

$$(\rho_1^{-1}C_1^{-1} + \rho_2^{-1}C_2^{-1})^{-1} \in \mathcal{L}(\tilde{H}_\Gamma^{-1/2}; H_\Gamma^{1/2}).$$

Далее, ввиду ортогональных разложений (3.2)–(3.6) и описаний подпространств $\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$ приходим к выводу, что для любого поля $\vec{u} = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2\} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ имеют место свойства

$$\gamma_{n,k}\vec{u}_k \in \tilde{H}_\Gamma^{-1/2}, \quad k = 1, 2,$$

и потому правая часть в (4.13) есть элемент этого пространства. Следовательно, уравнение (4.13) однозначно разрешимо и

$$\psi = (\rho_1^{-1}C_1^{-1} + \rho_2^{-1}C_2^{-1})^{-1}(\gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \gamma_{n,2}\vec{u}_2) \in H_\Gamma^{1/2}.$$

Зная значение ψ, теперь решаем задачи Зарембы

$$\triangle\psi_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \frac{\partial\psi_k}{\partial n_k} = 0 \quad (\text{на } S_k), \quad k = 1, 2, \quad \gamma_k\psi_k = \rho_k^{-1}\psi \quad (\text{на } \Gamma).$$

Так как $\psi \in H_\Gamma^{1/2}$, то каждая из этих задач имеет единственное решение из $H_\Gamma^1(\Omega_k)$, и тогда можно считать, что

$$\begin{gathered}\nabla\psi_k = \rho_k^{-1}G_k(\gamma_k\psi_k) = \rho_k^{-1}G_k\psi,\\ G_k \in \mathcal{L}(H_\Gamma^{1/2}; \vec{G}_{h,S_k(\Omega_k)}), \quad k = 1, 2.\end{gathered} \tag{4.14}$$

Проведенные рассуждения приводят к следующему выводу.

Лемма 4.2. *Ортопроектор $P_{0,S,\Gamma} : \vec{J}_{0,S}(\Omega) \to \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ действует по следующему закону: для любого $\vec{u} = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2\} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$*

$$\begin{aligned}P_{0,S,\Gamma}\vec{u} = \vec{u} - \Big\{&\rho_1^{-1}G_1\left(\rho_1^{-1}C_1^{-1} + \rho_2^{-1}C_2^{-1}\right)^{-1}(\gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \gamma_{n,2}\vec{u}_2);\\ &\rho_2^{-1}G_2(\rho_1^{-1}C_1^{-1} + \rho_2^{-1}C_2^{-1})^{-1}(\gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \gamma_{n,2}\vec{u}_2)\Big\}.\end{aligned} \tag{4.15}$$

(Если $\vec{u} \in \vec{J}_{0,S,\Gamma}\vec{u}$, то, очевидно, $P_{0,S,\Gamma}\vec{u} = \vec{u}$, как это и следует из (4.15).)

Замечание 4.1. Имеет место тождество

$$(\rho_1^{-1}C_1^{-1} + \rho_2^{-1}C_2^{-1})^{-1} = \rho_2C_2(\rho_1C_1 + \rho_2C_2)^{-1}\rho_1C_1.$$

Замечание 4.2. Так как для G_k выполнены свойства (4.14), то

$$\nabla\psi := \{\nabla\psi_1; \nabla\psi_2\} =: G\psi : H_\Gamma^{1/2} \to \vec{G}_{h,S}(\Omega) \subset \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2).$$

4.2. Вторая формула. Получим теперь закон действия ортопроектора

$$P_1 := P_{0,S,\Gamma}^1 : \vec{J}_{0,S}^1(\Omega) \to \vec{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega) \tag{4.16}$$

(см. (3.12), (3.16)). Рассуждения проведем по тому же плану, который был реализован в пункте 4.1 для скалярных полей (потенциалов скоростей), однако теперь для векторных полей из $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$.

Найдем сначала ортогональное дополнение

$$\vec{J}_{0,S}^1(\Omega) \ominus \vec{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega).$$

Для этого понадобится обобщенная формула Грина

$$\mu_kE_k(\vec{\eta}_k, \vec{u}_k) = \langle\vec{\eta}_k, \overline{[-\mu_kP_{0,S_k}\triangle\vec{u}_k + \nabla\tilde{p}_k]}\rangle_{\vec{L}_2(\Omega_k)} -$$

$$-\big\{\langle\gamma_k\eta_{k,1},\mu_k\tau_{13}(\vec u_k)\rangle_{L_2(\Gamma)}+\langle\gamma_k\eta_{k,2},\mu_k\tau_{23}(\vec u_k)\rangle_{L_2(\Gamma)}-$$
$$+\langle\gamma_k\eta_{k,3},[-\tilde p_k+\mu_k\tau_{33}(\vec u_k)]\rangle_{L_2(\Gamma)}\big\}(-1)^{k-1},\quad\forall\vec\eta_k,\vec u_k\in\vec J^1_{0,S_k}(\Omega_k) \tag{4.17}$$

(см. [2]). (Здесь учтено, что на Γ имеем $\vec n_1=\vec e_3$, $\vec n_2=-\vec e_3$.) В (4.17) слева стоит скалярное произведение в $\vec J^1_{0,S_k}(\Omega_k)$ (см. (3.9)); далее, в первом слагаемом справа P_{0,S_k} — ортопроектор на $\vec J_{0,S_k}(\Omega_k)$, а выражение

$$-\mu_kP_{0,S_k}(\Omega_k)\triangle\vec u_k+\nabla\tilde p_k\in\Big(\vec J^1_{0,S_k}(\Omega_k)\Big)^*$$

(после замыкания на гладких функциях $\vec u_k\in\vec J^1_{0,S_k}(\Omega_k)\cap\vec H^2(\Omega_k)$),

$$\nabla\tilde p_k\in\vec G_{h,S_k}(\Omega_k),\quad\mu_k\tau_{j3}(\vec u_k)\in H^{-1/2}(\Gamma),\quad j=1,2,\quad-\tilde p_k+\mu_k\tau_{33}(\vec u_k)\in H^{-1/2}_\Gamma.$$

Предположим теперь, что $\vec\eta\in\vec J^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, а $\vec u\in J^1_{0,S}(\Omega)$ и ортогонален $\vec\eta$. Тогда, опираясь на (3.18) и (4.17), будем иметь тождество

$$\mu_1E_1(\vec\eta_1,\vec u_1)+\mu_2E_2(\vec\eta_2,\vec u_2)=\sum_{k=1}^2\langle\vec\eta_k,[-\mu_kP_{0,S_k}\triangle\vec u_k+\nabla\tilde p_k]\rangle_{\vec L_2(\Omega_k)}-$$
$$-\langle\gamma_1\eta_{1,1},[\mu_1\tau_{13}(\vec u_1)-\mu_2\tau_{13}(\vec u_2)]\rangle_{L_2(\Gamma)}-\langle\gamma_1\eta_{1,2},[\mu_1\tau_{23}(\vec u_1)-\mu_2\tau_{23}(\vec u_2)]\rangle_{L_2(\Gamma)}-$$
$$-\langle\gamma_1\eta_{1,3}[(-\tilde p_1+\mu_1\tau_{33}(\vec u_1))-(-p_2+\mu_2\tau_{33}(\vec u_2))]\rangle_{L_2(\Gamma)}=0.$$

Отсюда, пользуясь обычными приемами вариационного исчисления, приходим к следующему выводу.

Лемма 4.3. *Ортогональное дополнение* $\Big(\vec J^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)\Big)^\perp$ *к подпространству* $\vec J^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ *в пространстве* $\vec J^1_{0,S}(\Omega)$ *состоит из слабых решений* $\vec v=(\vec v_1;\vec v_2)\in\vec J^1_{0,S}(\Omega)$ *краевых задач*

$$\begin{gathered}-\mu_1P_{0,S_1}\triangle\vec v_1+\nabla\tilde p_1=\vec 0,\quad\mathrm{div}\vec v_1=0\quad(\textit{в }\Omega_1),\quad\vec v_1=\vec 0\quad(\textit{на }S_1),\\ -\mu_2P_{0,S_2}\triangle\vec v_2+\nabla\tilde p_2=\vec 0,\quad\mathrm{div}\vec v_2=0\quad(\textit{в }\Omega_2),\quad\vec v_2=\vec 0\quad(\textit{на }S_2),\\ \mu_1\tau_{j3}(\vec v_1)-\mu_2\tau_{j3}(\vec v_2)=0\quad(\textit{на }\Gamma),\quad j=1,2,\\ [(-\tilde p_1+\mu_1\tau_{33}(\vec v_1))-(-\tilde p_2+\mu_2\tau_{33}(\vec v_2))]=0\quad(\textit{на }\Gamma).\end{gathered} \tag{4.18}$$

Опираясь на (4.18), выведем формулу действия ортопроектора P_1 из (4.16). Если $\vec u$ — любой элемент из $\vec J^1_{0,S}(\Omega)$, то должно быть

$$P_1\vec u=P_1\{\vec u_1;\vec u_2\}=\{\vec u_1;\vec u_2\}-\{\vec v_1;\vec v_2\}, \tag{4.19}$$

где $\{\vec v_1;\vec v_2\}$ — решение задачи (4.18) с дополнительным условием на Γ, которое сейчас получим. Именно, должно выполняться свойство

$$\gamma_1(P_1\vec u)_1=\gamma_2(P_1\vec u)_2\quad(\text{на }\Gamma),$$

откуда с учетом (4.19) получаем, что

$$\gamma_1\vec v_1-\gamma_2\vec v_2=\gamma_1\vec u_1-\gamma_2\vec u_2=:\vec\varphi\in\tilde{\vec H}^{1/2}_\Gamma:=\tilde H^{1/2}(\Gamma)(\dot+)\tilde H^{1/2}(\Gamma)(\dot+)\tilde H^{1/2}_\Gamma. \tag{4.20}$$

Таким образом, для нахождения $\vec v=\{\vec v_1;\vec v_2\}$ возникает векторная задача Стеклова (4.18), (4.20).

Переходя к ее решению, будем считать, что на Γ задано векторное поле

$$\begin{gathered}\vec\psi:=\{-\tilde p_1\delta_{j3}+\mu_1\tau_{j3}(\vec u_1)\}_{j=1}^3=\{-\tilde p_2\delta_{j3}+\mu_3\tau_{j3}(\vec u_2)\}_{j=1}^3\in\vec H^{-1/2}_\Gamma:=\\ :=(\tilde H^{1/2}(\Gamma))^*(\dot+)(\tilde H^{1/2}(\Gamma))^*(\dot+)(\tilde H^{1/2}_\Gamma)^*.\end{gathered} \tag{4.21}$$

Тогда из (4.18) возникает две независимые задачи (их называют вторыми вспомогательными задачами С. Г. Крейна) в областях Ω_1 и Ω_2:

$$\begin{gathered}-\mu_kP_{0,S_k}\triangle\vec v_k+\nabla\tilde p_k=\vec 0,\quad\mathrm{div}\vec v_k=0\quad(\text{в }\Omega_k),\quad\vec v_k=\vec 0\quad(\text{на }S_k),\\ -\tilde p_k\delta_{j3}+\mu_k\tau_{j3}(\vec v_k)=(\vec\psi)_j=:\psi_j,\quad j=1,2,3,\quad k=1,2.\end{gathered}$$

Для существования слабого решения этих задач необходимо и достаточно (в областях Ω_k с липшицевыми $\partial\Omega_k$), чтобы выполнялось условие (4.21). Эти решения, с использованием формул Грина (4.17), определяются из следующих тождеств:

$$\mu_1 E_1(\vec{\eta}_1, \vec{v}_1) = \langle \gamma_1 \vec{\eta}_1, \vec{\psi} \rangle_{\vec{L}_2(\Gamma)}, \quad \forall \vec{\eta}_1 \in \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1), \tag{4.22}$$

$$\mu_2 E_2(\vec{\eta}_2, \vec{v}_2) = -\langle \gamma_2 \vec{\eta}_2, \vec{\psi} \rangle_{\vec{L}_2(\Gamma)}, \quad \forall \vec{\eta}_2 \in \vec{J}^1_{0,S_2}(\Omega_2), \tag{4.23}$$

$$\vec{L}_2(\Gamma) := L_2(\Gamma) \oplus L_2(\Gamma) \oplus L_{2,\Gamma}.$$

Каждая из задач (4.22), (4.23) имеет единственное слабое решение, и тогда можно считать, что

$$\mu_1 \vec{v}_1 = V_1 \vec{\psi}, \quad \mu_2 \vec{v}_2 = -V_2 \vec{\psi}, \quad V_k \in \mathcal{L}(\vec{H}_\Gamma^{-1/2}; \vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k)), \quad k = 1, 2. \tag{4.24}$$

Введем еще операторы Стеклова

$$C_k := \gamma_k V_k, \quad k = 1, 2, \quad C_k \in \mathcal{L}(\vec{H}_\Gamma^{-1/2}; \tilde{\vec{H}}_\Gamma^{1/2}), \tag{4.25}$$

переводящие (векторные) данные Неймана в (векторные) данные Дирихле. Тогда из (4.24), (4.25) и (4.20) получаем связь

$$(\mu_1^{-1} C_1 + \mu_2^{-1} C_2) \vec{\psi} = \vec{\varphi}. \tag{4.26}$$

Здесь снова, как и в п. 4.1, операторы C_k из (4.25) обладают свойствами положительности:

$$\langle C_k \vec{\psi}_k, \vec{\psi}_k \rangle_{\vec{L}_2(\Gamma)} = E_k(\vec{v}_k, \vec{v}_k),$$

при этом C_k отображает $\vec{H}_\Gamma^{-1/2}$ на $\tilde{\vec{H}}_\Gamma^{1/2}$. Поэтому существует ограниченный оператор

$$C_k^{-1} \in \mathcal{L}(\tilde{\vec{H}}_\Gamma^{-1/2}; \vec{H}_\Gamma^{1/2}).$$

Отсюда следует, что существует ограниченный обратный положительный оператор

$$(\mu_1^{-1} C_1 + \mu_2^{-1} C_2)^{-1} \in \mathcal{L}(\tilde{\vec{H}}_\Gamma^{-1/2}; \vec{H}_\Gamma^{1/2}),$$

поэтому уравнение (4.26) однозначно разрешимо и

$$\vec{\psi} = (\mu_1^{-1} C_1 + \mu_2^{-1} C_2)^{-1} \vec{\varphi}.$$

Тогда в силу (4.24) и (4.20) имеем

$$\vec{v}_1 = \mu_1^{-1} V_1 (\mu_1^{-1} C_1 + \mu_2^{-1} C_2)^{-1} (\gamma_1 \vec{u}_1 - \gamma_2 \vec{u}_2),$$
$$\vec{v}_2 = -\mu_2^{-1} V_2 (\mu_1^{-1} C_1 + \mu_2^{-1} C_2)^{-1} (\gamma_1 \vec{u}_1 - \gamma_2 \vec{u}_2).$$

Итогом проведенных рассуждений является следующее утверждение.

Лемма 4.4. *Ортопроектор P_1 действует по закону*

$$P_1 \vec{u} = \vec{u} - \{\mu_1^{-1} V_1 (\mu_1^{-1} C_1 + \mu_2^{-1} C_2)^{-1} (\gamma_1 \vec{u}_1 - \gamma_2 \vec{u}_2); -\mu_2^{-1} V_2 (\mu_1^{-1} C_1 + \mu_2^{-1} C_2)^{-1} (\gamma_1 \vec{u}_1 - \gamma_2 \vec{u}_2)\},$$

где V_k и C_k — операторы, определенные в (4.24), (4.25).

(Если $\vec{u} = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2\} \in \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, то, очевидно, $P_1 \vec{u} = \vec{u}$.)

5. Применение операторного подхода. Переход к задаче Коши для интегро-дифференциального уравнения

5.1. Вспомогательные краевые задачи. Перепишем исходную задачу (2.2)–(2.10) в виде пар соотношений для искомых объектов; тогда уравнения (2.2) принимают вид

$$\left\{ \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t}; \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} \right\} = -\left\{ \frac{1}{\rho_1} \nabla p_1; \frac{1}{\rho_2} \nabla p_2 \right\} + \{\nu_1 \triangle \vec{v}_1; \nu_2 \triangle \vec{v}_2\} + \left\{ \vec{f}_1; \vec{f}_2 \right\}, \tag{5.1}$$

$$\nu_k = \mu_k / \rho_k, \quad \vec{f}_k = \vec{f}|_{\Omega_k}, \quad k = 1, 2.$$

Дальнейшая цель состоит в том, чтобы перейти от (5.1) к уравнению в гильбертовом пространстве $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$.

Для этого применим сначала слева ортопроекторы P_{0,S_k} на подпространства $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$, $k=1,2$, на первую и вторую составляющие. Будем иметь:

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\vec{u}_1;\vec{u}_2\} = -\left\{\frac{1}{\rho_1}\nabla\tilde{p}_1;\frac{1}{\rho_2}\nabla\tilde{p}_2\right\} + \{\nu_1 P_{0,S_1}\triangle\vec{v}_1;\nu_2 P_{0,S_2}\triangle\vec{v}_2\} + \left\{\tilde{\vec{f}}_1;\tilde{\vec{f}}_2\right\}, \tag{5.2}$$

$$\vec{v}_k = I_{0,k}(t)\vec{u}_k,\quad \tilde{\vec{f}}_k = P_{0,S_k}\vec{f}_k,\quad k=1,2.$$

Это соотношение — связь между элементами в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$.

Теперь применим еще слева в (5.2) ортопроектор

$$P_0 = P_{0,S,\Gamma} : \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)\oplus\vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2) = \vec{J}_{0,S}(\Omega)\to\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega).$$

Это дает соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\vec{u}_1;\vec{u}_2\} = -P_0\left\{\frac{1}{\rho_1}\nabla\tilde{p}_1;\frac{1}{\rho_2}\nabla\tilde{p}_2\right\} + P_0\{\nu_1 P_{0,S_1}\triangle\vec{v}_1;\nu_2 P_{0,S_2}\triangle\vec{v}_2\} + P_0\left\{\tilde{\vec{f}}_1;\tilde{\vec{f}}_2\right\}. \tag{5.3}$$

Отметим еще одно обстоятельство. Так как в (5.3) $\nabla\tilde{p}_k\in\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$ (см. (3.6)), то $\int_\Gamma \tilde{p}_k d\Gamma = 0$, $k=1,2$. Используя еще соотношения

$$\int_\Gamma \tau_{33}(\vec{u}_k)d\Gamma = 0,\quad k=1,2,$$

см. [4, с. 115], получаем, что в граничном условии (2.9) на Γ можно $p_k|_\Gamma$ заменить на $\tilde{p}_k|_\Gamma = \gamma_k\tilde{p}_k$, $k=1,2$.

Учитывая эти факты, представим решение исходной начально-краевой задачи в виде суммы пар векторных полей. Именно, будем считать, что

$$P_0\left\{\frac{1}{\rho_1}\nabla\tilde{p}_1;\frac{1}{\rho_2}\nabla\tilde{p}_2\right\} = \left\{\frac{1}{\rho_1}\nabla p_{11};\frac{1}{\rho_2}\nabla p_{12}\right\} + \left\{\frac{1}{\rho_1}\nabla p_{21};\frac{1}{\rho_2}\nabla p_{22}\right\},$$

и потребуем, чтобы наборы

$$\{\vec{v}_1;\vec{v}_2\},\quad \left\{\frac{1}{\rho_1}\nabla p_{11};\frac{1}{\rho_2}\nabla p_{12}\right\}$$

были решениями первой вспомогательной задачи

$$\begin{gathered}
-P_0\{\nu_1 P_{0,S_1}\triangle\vec{v}_1;\nu_2 P_{0,S_2}\triangle\vec{v}_2\} + \left\{\frac{1}{\rho_1}\nabla p_{11};\frac{1}{\rho_2}\nabla p_{12}\right\} = \{\vec{F}_1;\vec{F}_2\} := \\
= -\frac{\partial}{\partial t}\{\vec{u}_1;\vec{u}_2\} - \left\{\frac{1}{\rho_1}\nabla p_{21};\frac{1}{\rho_2}\nabla p_{22}\right\} + P_0\{\tilde{\vec{f}}_1;\tilde{\vec{f}}_2\}, \\
\vec{u}_k = \vec{0}\quad (\text{на } S_k),\quad k=1,2; \\
\{-\tilde{p}_1\delta_{j3}+\mu_1\tau_{j3}(\vec{v}_1)\}_{j=1}^3 - \{-\tilde{p}_2\delta_{j3}+\mu_2\tau_{j3}(\vec{v}_2)\}_{j=1}^3 = \vec{0}\quad (\text{на } \Gamma),
\end{gathered} \tag{5.4}$$

а набор $\{\frac{1}{\rho_1}\nabla p_{21};\frac{1}{\rho_2}\nabla p_{22}\}$ — решением второй вспомогательной задачи для потенциалов (задачи Стеклова):

$$\begin{gathered}
\triangle p_{2k} = 0\quad (\text{в } \Omega_k),\quad \frac{\partial p_{2k}}{\partial n_k} = 0\quad (\text{на } S_k),\quad k=1,2, \\
\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_{21}}{\partial n} = \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p_{22}}{\partial n},\quad p_{21}-p_{22} = g(\rho_1-\rho_2)\zeta\quad (\text{на } \Gamma).
\end{gathered} \tag{5.5}$$

Рассмотрим сначала задачу (5.5). Введем функции φ_k, $k=1,2$, которые являются решениями вспомогательной задачи

$$\begin{gathered}
\triangle\varphi_k = 0\quad (\text{в } \Omega_k),\quad \frac{\partial\varphi_k}{\partial n_k} = 0\quad (\text{на } S_k),\quad \int_\Gamma \varphi_k d\Gamma = 0,\quad k=1,2, \\
\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial n},\quad \rho_1\gamma_1\varphi_1 - \rho_2\gamma_2\varphi_2 = (\rho_1-\rho_2)\zeta\quad (\text{на } \Gamma).
\end{gathered} \tag{5.6}$$

Обозначим

$$\psi := \frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\Big|_\Gamma = \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\Big|_\Gamma, \quad \int_\Gamma \psi d\Gamma = 0.$$

Тогда, как и в (4.9)–(4.12), будем иметь

$$\gamma_1\varphi_1 = C_1\psi, \quad \gamma_2\varphi_2 = -C_2\psi,$$

и последнее условие на Γ приводит к связи

$$(\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2)\psi = (\rho_1 - \rho_2)\zeta.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2 \in \mathcal{L}(\tilde{H}_\Gamma^{-1/2}; H_\Gamma^{1/2})$$

является положительным оператором и действует на $H_\Gamma^{1/2}$, получаем:

$$\psi = (\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2)^{-1}\zeta,$$

и потому

$$\varphi_1 = (\rho_1 - \rho_2)V_1(\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2)^{-1}\zeta, \quad \varphi_2 = -(\rho_1 - \rho_2)V_2(\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2)^{-1}\zeta. \tag{5.7}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 5.1. *Задача* (5.6) *имеет* (*единственное*) *слабое решение тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\zeta \in H_\Gamma^{1/2}.$$

Это решение дается формулами (5.7).

Опираясь на эту лемму, введем оператор G по закону

$$G\zeta := \{\nabla\varphi_1; \nabla\varphi_2\} \in \vec{G}_{h,S,\Gamma}(\Omega), \quad G \in \mathcal{L}(H_\Gamma^{1/2}; \vec{G}_{h,S,\Gamma}(\Omega)) \tag{5.8}$$

(определение $\vec{G}_{h,S,\Gamma}(\Omega)$ см. в (4.2)), а также общий оператор нормального следа

$$\hat{\gamma}_n\vec{u} := \gamma_{n,1}\vec{u}_1 = \gamma_{n,2}\vec{u}_2, \quad \vec{u} = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2\} \in \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega). \tag{5.9}$$

Лемма 5.2. *Имеет место соотношение*

$$G^* = (\rho_1 - \rho_2)\hat{\gamma}_n, \quad \hat{\gamma}_n \in \mathcal{L}(\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega); \tilde{H}_\Gamma^{-1/2}). \tag{5.10}$$

Доказательство. Пусть $\zeta \in H_\Gamma^{1/2}$, $\vec{\eta} = \{\vec{\eta}_1; \vec{\eta}_2\} \in \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$. Тогда

$$(G\zeta, \vec{\eta})_{\vec{L}_2(\Omega)} = \rho_1 \int_{\Omega_1} \nabla\varphi_1 \cdot \bar{\vec{\eta}}_1 d\Omega_1 + \rho_2 \int_{\Omega_2} \nabla\varphi_2 \cdot \bar{\vec{\eta}}_2 d\Omega_2 =$$

$$= \ldots = \rho_1\langle\gamma_1\varphi_1, \gamma_{n,1}\vec{\eta}_1\rangle_{L_2(\Gamma)} - \rho_2\langle\gamma_2\varphi_2, \gamma_{n,2}\vec{\eta}_2\rangle_{L_2(\Gamma)} =$$

$$= |\gamma_{n,1}\vec{\eta}_1 = \gamma_{n,2}\vec{\eta}_2 = \hat{\gamma}_n\vec{\eta}| = \langle\rho_1\gamma_1\varphi_1 - \rho_2\gamma_2\varphi_2, \hat{\gamma}_n\vec{\eta}\rangle_{L_2(\Gamma)} =$$

$$= \quad (\text{см. последнее условие (5.6)}) = \langle(\rho_1 - \rho_2)\zeta, \hat{\gamma}_n\vec{\eta}\rangle_{L_2(\Gamma)} = \langle\zeta, (\rho_1 - \rho_2)\hat{\gamma}_n\vec{\eta}\rangle_{L_2(\Gamma)}.$$

Отсюда и следует утверждение леммы. □

С помощью оператора G из (5.8), функций φ_1 и φ_2 из (5.6) и из (5.5) получаем, что в задаче (5.5)

$$p_{21}|_{\Omega_1} = g\rho_1\varphi_1, \quad p_{22}|_{\Omega_2} = g\rho_2\varphi_2,$$
$$\left\{\frac{1}{\rho_1}\nabla p_{21}; \frac{1}{\rho_2}\nabla p_{22}\right\} = gG\zeta. \tag{5.11}$$

5.2. Переход к задаче Коши для интегро-дифференциального уравнения. Опираясь на полученные в п. 5.1 выводы, рассмотрим теперь вспомогательную задачу (5.4). Предварительно воспользуемся тождествами, следующими из (4.17). Имеем

$$\begin{gathered}\mu_1 E_1(\vec{\eta}_1, \vec{v}_1) + \mu_2 E_2(\vec{\eta}_2, \vec{v}_2) = \langle \vec{\eta}_1, P_{0,S_1}(-\mu_1 \triangle \vec{v}_1) + \nabla \tilde{p}_1 \rangle_{\vec{L}_2(\Omega_1)} + \\ + \langle \vec{\eta}_2, P_{0,S_2}(-\mu_2 \triangle \vec{v}_2) + \nabla \tilde{p}_2 \rangle_{\vec{L}_2(\Omega_2)} + \langle \gamma_1 \eta_{1,1}, [\mu_1 \tau_{13}(\vec{v}_1) - \mu_2 \tau_{13}(\vec{v}_2)] \rangle_{L_2(\Gamma)} + \\ + \langle \gamma_1 \eta_{1,2}, [\mu_1 \tau_{23}(\vec{v}_1) - \mu_2 \tau_{23}(\vec{v}_2)] \rangle_{L_2(\Gamma)} + \langle \gamma_1 \eta_{1,3}, [(-\tilde{p}_1 + \mu_1 \tau_{33}(\vec{v}_1)) - (-\tilde{p}_2 + \mu_2 \tau_{33}(\vec{v}_2))] \rangle_{L_2(\Gamma)}, \\ \forall \vec{\eta} = \{\vec{\eta}_1; \vec{\eta}_2\} \in \vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega), \quad \vec{v} = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2\} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega).\end{gathered} \tag{5.12}$$

Так как $\vec{\eta} = P_0 \vec{\eta}$, $\vec{\eta} \in \vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega) \subset \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, $P_0 : \vec{J}_{0,S}(\Omega) \to \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ — ортопроектор (см. (4.15)), то (5.12) можно переписать в виде

$$\begin{gathered}\mu_1 E_1(\vec{\eta}_1, \vec{v}_1) + \mu_2 E_2(\vec{\eta}_2, \vec{v}_2) = (\vec{\eta}, \vec{v})_{\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)} = \\ = \langle \vec{\eta}, P_0\{P_{0,S_k}(-\nu_k \triangle \vec{v}_k) + \nabla \tilde{p}_k\}_{k=1}^2 \rangle_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)} + \\ + \sum_{j=1}^{3} \langle \gamma_1 \eta_{1,j}, [(-\tilde{p}_1 \delta_{j3} + \mu_1 \tau_{j3}(\vec{v}_1)) - (-\tilde{p}_2 \delta_{j3} + \mu_2 \tau_{j3}(\vec{v}_2))] \rangle_{L_2(\Gamma)},\end{gathered} \tag{5.13}$$

приспособленном к формулировке обобщенного решения вспомогательной задачи (5.4).

Определение 5.1. Назовем обобщенным решением задачи (5.4) такую функцию

$$\vec{v}(t) = \{\vec{v}_1(t); \vec{v}_2(t)\} = \{I_{0,1}(t)\vec{u}_1(t); I_{0,2}(t)\vec{u}_2(t)\}$$

переменной t со значениями в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$, для которой выполнено тождество, следующее из (5.13):

$$(\vec{\eta}, \vec{v}(t))_{\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)} = (\vec{\eta}, -\frac{d\vec{u}}{dt} - gG\zeta + \vec{p}(t))_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)}, \quad \forall \vec{\eta} \in \vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega). \tag{5.14}$$

Здесь использовано обозначение (5.8) и последняя формула (5.11), а производные $\partial/\partial t$ заменены на d/dt (для функций переменной t со значениями в гильбертовом пространстве) и

$$\vec{p}(t) := P_0\{\vec{f}_1; \vec{f}_2\}. \tag{5.15}$$

Перейдем от (5.14) к интегро-дифференциальному уравнению в пространстве $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$. Так как

$$(\vec{\eta}, \vec{v}(t))_{\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)} = (P_1\vec{\eta}, \vec{v}(t))_{\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)} = (\vec{\eta}, P_1\vec{v}(t))_{\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)} == (\tilde{A}^{1/2}\vec{\eta}, \tilde{A}^{1/2}P_1\vec{v}(t))_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)}, \tag{5.16}$$

где $\tilde{A}$ — оператор гильбертовой пары $(\vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega); \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega))$, см. (3.16)–(3.20), $P_1 : \vec{J}^1_{0,S}(\Omega) \to \vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ — ортопроектор, то тождество (5.14) с учетом (5.16) равносильно соотношению

$$\tilde{A}P_1\vec{v}(t) = -\frac{d\vec{u}}{dt} - gG\zeta + \vec{p}(t),$$

если правая часть — функция t со значениями в $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$.

Теорема 5.1. *Исходная начально-краевая задача* (2.2)–(2.10) *о малых движениях двух вязкоупругих жидкостей равносильна* (*после отделения тривиальных соотношений*) *задаче Коши*

$$\begin{gathered}\frac{d\vec{u}}{dt} = -\tilde{A}P_1(I_0(t)\vec{u}) - gG\zeta + \vec{p}(t), \\ \frac{d\zeta}{dt} = \hat{\gamma}_n\vec{u}, \quad \vec{u}(0) = \vec{u}^0, \quad \zeta(0) = \zeta^0,\end{gathered} \tag{5.17}$$

для системы двух уравнений, из которых первое является интегро-дифференциальным уравнением первого порядка,

$$\vec{v}(t) = I_0(t)\vec{u}(t) = \{\vec{u}_k\}_{k=1}^2 + \{\alpha_k \int_0^t e^{-\beta_k(t-s)\vec{u}_k(s)ds}\}_{k=1}^2, \tag{5.18}$$

а второе — дифференциальным уравнением первого порядка.

Решение $\vec{u}(t) = \{\vec{u}_1(t); \vec{u}_2(t)\}$, $\zeta(t)$ *является функцией* t *со значениями в* $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ *и* $L_{2,\Gamma}$, *соответственно.*

Замечание 5.1. Если жидкости невязкоупругие, то $\alpha_k = 0$ $(k = 1, 2)$ и $\vec{v}(t) \equiv \vec{u}(t)$. Эта задача разобрана в [13, п. 8.6, с. 133–140].

6. Преобразование задачи к стандартному виду

6.1. Переход к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведем задачу (5.17) к более симметричному виду, воспользовавшись формулой (5.10). Осуществим в (5.17) замену искомой функции по формуле

$$\eta = (g(\rho_1 - \rho_2)^{1/2})\zeta. \tag{6.1}$$

Тогда приходим к задаче Коши

$$\begin{gathered} \frac{d\vec{u}}{dt} = -\tilde{A}P_1(I_0(t)\vec{u}) - (g/(\rho_1 - \rho_2))^{1/2}G\eta + \vec{p}(t) \\ \frac{d\eta}{dt} = (g/(\rho_1 - \rho_2)^{1/2}G^*\vec{u}), \quad \vec{u}(0) = \vec{u}^0, \quad \eta(0) = \eta^0. \end{gathered} \tag{6.2}$$

Дальнейшее рассмотрение связано с выделением в задаче (6.2) операторной матрицы, отвечающей системе вязкоупругих жидкостей, изучению свойств этой матрицы, ее расширению (путем замыкания) до максимального аккретивного оператора. Параллельно будет осуществлен переход к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Введем в (6.2) новую искомую функцию

$$\vec{w}(t) := \{\alpha_k^{1/2} \int\limits_0^t e^{-\beta_k(t-s)}\vec{u}_k(s)ds\}_{k=1}^2 \in \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{J}^1_{0,S_2}(\Omega_2) = \vec{J}_{0,S}(\Omega), \tag{6.3}$$

см. (5.18), а также операторы

$$\alpha^{1/2} := \{\alpha_k^{1/2}\}_{k=1}^2, \quad \beta := \{\beta_k\}_{k=1}^2, \tag{6.4}$$

действующие в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$. Тогда

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \{\alpha_k^{1/2}\vec{u}_k - \beta_k[\alpha_k^{1/2} \int\limits_0^t e^{-\beta_k(t-s)}\vec{u}_k(s)ds]\}_{k=1}^2 = \alpha^{1/2}\vec{u} - \beta\vec{w}. \tag{6.5}$$

С учетом (6.3)–(6.5) задачу (6.2) можно переписать в виде задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} &\frac{d\vec{u}}{dt} = -\tilde{A}(\vec{u} + P_1\alpha^{1/2}\vec{w}) - (g/(\rho_1 - \rho_2))^{1/2}G\vec{\eta} + \vec{p}(t), \\ &\frac{d\vec{w}}{dt} = \alpha^{1/2}\vec{u} - \beta\vec{w}, \quad \vec{u}(0) = \vec{u}^0, \quad \vec{w}(0) = \vec{0}, \\ &\frac{d\eta}{dt} = (g/(\rho_1 - \rho_2))^{1/2}G^*\vec{u}, \quad \eta(0) = \eta^0, \quad \vec{p}(t) := P_0\{P_{0,S_1}\vec{f}_1; P_{0,S_2}\vec{f}_2\}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Коротко эту задачу можно записать в виде

$$\frac{dz}{dt} = -\tilde{\mathcal{A}}z + p(t), \quad z(0) = z^0,$$

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{A}P_1\alpha^{1/2} & (g/(\rho_1 - \rho_2))^{1/2}G \\ -\alpha^{1/2}P_1 & \beta & 0 \\ -(g/(\rho_1 - \rho_2))^{1/2}G^* & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{w} \\ \eta \end{pmatrix}, \quad p(t) = \begin{pmatrix} \vec{p}(t) \\ \vec{0} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6.2. Дополнительная симметризация. Осуществим в (6.6) еще одну замену

$$\vec{w} = A^{-1/2}\vec{\psi}, \quad \vec{\psi} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega).$$

Тогда из второй строчки (6.6) имеем соотношение

$$\frac{d}{dt}(A^{-1/2}\vec{\psi}) = \alpha^{1/2}P_1\vec{u} - \beta A^{-1/2}\vec{\psi}, \tag{6.7}$$

и если $\vec{u}(t)$ — непрерывная по t функция со значениями в $\vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, а $\vec{\psi}(t)$ — со значениями в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$, то правая часть в (6.7) непрерывна по t со значениями в $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2})$. Поэтому к обеим частям в (6.7) можно применить оператор $A^{1/2}$. В итоге вместо (6.6) возникает задача Коши

$$\begin{aligned} &\frac{d\vec{u}}{dt} = -(\tilde{A}\vec{u} + \tilde{A}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}\vec{\psi}) - bG\eta + \vec{p}(t), \\ &\frac{d\vec{\psi}}{dt} = A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\vec{u} - A^{1/2}\beta A^{-1/2}\vec{\psi}, \quad \vec{u}(0) = \vec{u}^0, \quad \vec{\psi}(0) = \vec{0}, \\ &\frac{d\eta}{dt} = bG^*\vec{u}, \quad \eta(0) = (g(\rho_1 - \rho_2))^{1/2}\zeta^0, \quad b := (g/(\rho_1 - \rho_2))^{1/2} > 0. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Эта система снова коротко переписывается в виде

$$\frac{dy}{dt} = -\mathcal{A}y + p(t), \quad y(0) = y^0, \quad y = (\vec{u}; \vec{\psi}; \eta)^\tau, \tag{6.9}$$

где операторная матрица

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{A}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2} & bG \\ -A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1 & A^{1/2}\beta A^{-1/2} & 0 \\ -bG^* & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.10}$$

задана на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\tilde{A}) \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \mathcal{D}(G) \tag{6.11}$$

и действует в пространстве $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) \oplus \vec{J}_{0,S}(\Omega) \oplus L_{2,\Gamma}$. Здесь

$$\mathcal{D}_2 := \{\vec{\psi} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega) : P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}\vec{\psi} \in \mathcal{D}(\tilde{A})\}. \tag{6.12}$$

Замечание 6.1. Оператор $P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}$ переводит пространство $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ в $\vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega) = \mathcal{D}(\tilde{A}^{1/2}) \supset \mathcal{D}(\tilde{A})$, причем $\mathcal{D}(\tilde{A})$ плотно в $\mathcal{D}(\tilde{A}^{1/2})$.

Изучим теперь общие свойства оператора $\mathcal{A}$ из (6.10), (6.11).

Лемма 6.1. *Операторная матрица $\mathcal{A}$ допускает факторизацию в виде произведения трех матриц с симметричным окаймлением средней матрицы*:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \tilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2} & b\tilde{A}^{-1/2}G \\ -A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\tilde{A}^{-1/2} & A^{1/2}\beta A^{-1/2} & 0 \\ -bG^*\tilde{A}^{-1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}. \tag{6.13}$$

Лемма 6.2. *Операторы*

$$\tilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2} : \vec{J}_{0,S}(\Omega) \to \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega), \quad A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\tilde{A}^{-1/2} : \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) \to \vec{J}_{0,S}(\Omega) \tag{6.14}$$

ограничены и взаимно сопряжены.

Доказательство. Ограниченность этих операторов проверяется непосредственно. Например, для оператора $\tilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}$ имеем свойства

$$\begin{gathered} A^{-1/2} \in \mathcal{L}(\vec{J}_{0,S}(\Omega); \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)), \quad \alpha^{1/2} \in \mathcal{L}(\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)), \\ P_1 \in \mathcal{L}(\vec{J}^1_{0,S}(\Omega); \vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)) \quad \text{(см. лемму 4.3)}, \\ \tilde{A}^{1/2} \in \mathcal{L}(\vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega); \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)), \end{gathered}$$

и потому имеет место первое свойство ограниченности в (6.14). Второе свойство из (6.14) проверяется аналогично.

Проверим теперь свойство взаимной сопряженности этих операторов. Для любых $\vec{u} \in \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, $\vec{\psi} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ имеем

$$(\tilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}\vec{\psi},\vec{u})_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = (P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}\vec{\psi},\tilde{A}^{-1/2}\vec{u})_{\vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} =$$
$$= (\alpha^{1/2}A^{-1/2}\vec{\psi},P_1\tilde{A}^{-1/2}\vec{u})_{\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)} = (A^{-1/2}\vec{\psi},\alpha^{1/2}P_1\tilde{A}^{-1/2}\vec{u})_{\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)} = (\vec{\psi},A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\tilde{A}^{-1/2}\vec{u})_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)}.$$

Здесь при выводе были использованы свойства (3.14) и (3.18) для операторов A и $\tilde{A}$, а также свойство самосопряженности оператора $\alpha^{1/2}$ в $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$, которое проверяется непосредственно. □

Замечание 6.2. Из определения оператора β (см. (6.4)) и структуры оператора A (см. (3.13)) следует, что

$$A^{1/2}\beta A^{-1/2} = \beta.$$

Лемма 6.3. *Справедливо соотношение*

$$\tilde{A}^{-1/2}G = (G^*\tilde{A}^{-1/2})^*|_{\mathcal{D}(G)}, \tag{6.15}$$

причем замыкание по непрерывности оператора $\tilde{A}^{-1/2}G$ совпадает с $(G^*\tilde{A}^{-1/2})^*$.

Доказательство. Убедимся сначала, что оператор $G^*\tilde{A}^{-1/2} : \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) \to L_{2,\Gamma}$ ограничен и даже компактен. Действительно, $\tilde{A}^{-1/2} \in \mathcal{L}(\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega); \vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega))$, а оператор $G^* = (\rho_1 - \rho_2)\hat{\gamma}_n$, согласно определению $\hat{\gamma}_n$ (см. (5.9)) и теореме Гальярдо [11], ограничено действует из $\vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega) \subset \vec{H}^1(\Omega)$ на $\tilde{H}^{1/2}_\Gamma \subset H^{1/2}_\Gamma \hookrightarrow\hookrightarrow L_{2,\Gamma}$.

Пусть теперь $\eta \in \mathcal{D}(G)$, $\vec{u} \in \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$. Тогда

$$(\tilde{A}^{-1/2}G\eta,\vec{u})_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = (G\eta,\tilde{A}^{-1/2}\vec{u})_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = (\eta, G^*\tilde{A}^{-1/2}\vec{u})_{L_{2,\Gamma}}.$$

Отсюда и следует (6.15), и из плотности $\mathcal{D}(G) \equiv H^{1/2}_\Gamma$ (см. (5.8)) в $L_{2,\Gamma}$ получаем, что оператор $\tilde{A}^{-1/2}G$ ограничен (и даже компактен) на плотном множестве и поэтому допускает расширение путем замыкания до оператора $\overline{\tilde{A}^{-1/2}G} = (G^*\tilde{A}^{-1/2})^*$. □

7. Теоремы о корректной разрешимости

7.1. Свойства основной операторной матрицы. Опираясь на приведенные выше свойства коэффициентов операторной матрицы $\mathcal{A}$ (см. (6.10)–(6.13) и леммы 6.1–6.3), установим общие свойства этой матрицы.

Лемма 7.1. *Операторная матрица* (6.10) *является аккретивной в пространстве* $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) \oplus \vec{J}_{0,S}(\Omega) \oplus L_{2,\Gamma} =: \mathcal{H}$, *т. е.*

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}y,y)_{\mathcal{H}} \geqslant 0, \quad \forall y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}.$$

Доказательство. В силу факторизации (6.13) достаточно убедиться, что средний множитель

$$\mathcal{J}_0 := \begin{pmatrix} I & \tilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2} & b\tilde{A}^{-1/2}G \\ -A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\tilde{A}^{-1/2} & \beta & 0 \\ -bG^*\tilde{A}^{-1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

обладает свойством аккретивности на множестве

$$\mathcal{D}(\mathcal{J}_0) := \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) \oplus \vec{J}_{0,S}(\Omega) \oplus \mathcal{D}(G).$$

Имеем

$$\begin{gathered}\mathrm{Re}\,(\mathcal{J}_0y,y)_{\mathcal{H}} = \mathrm{Re}\Big\{(\vec{u},\vec{u})_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} + (\tilde{A}^{-1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}\vec{\psi},\vec{u})_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} + \\ +b(\tilde{A}^{-1/2}G\eta,\vec{u})_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} - (A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\tilde{A}^{-1/2}\vec{u},\vec{\psi})_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)} + (\beta\vec{\psi},\vec{\psi})_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)} - \\ -b(G^*\tilde{A}^{-1/2}\vec{u},\eta)_{L_{2,\Gamma}}\Big\} = ||\vec{u}||^2_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} + (\beta\vec{\psi},\vec{\psi})_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)} \geqslant 0.\end{gathered} \tag{7.1}$$

Здесь при выводе были использованы свойства взаимной сопряженности операторов из леммы 6.2 (второе и четвертое слагаемые справа), а также утверждение леммы 6.3 (третье и шестое слагаемые). □

Введем операторную матрицу

$$\mathcal{J}_a := \mathcal{J}_0 + a\,\mathrm{diag}(0;0;I), \quad a>0. \tag{7.2}$$

Тогда для $\mathcal{J}_a$ из (7.1) имеем

$$\mathrm{Re}(\mathcal{J}_a y, y)_{\mathcal{H}} = ||\vec{u}||^2_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} + (\beta\vec{\psi},\vec{\psi})_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)} + a||\eta||^2_{L_{2,\Gamma}} \geqslant c||y||^2_{\mathcal{H}}, \quad c>0, \tag{7.3}$$

так как β — положительно определенный оператор (см. (6.4), $\beta_k>0$, $k=1,2$).

Из (7.2), (7.3) следует, что операторная матрица $\mathcal{A}$ из (6.13) принимает вид

$$\mathcal{A} = \mathrm{diag}(\tilde{A}^{1/2};I;I)\mathcal{J}_a\mathrm{diag}(\tilde{A}^{1/2};I;I) - a\,\mathrm{diag}(0;0;I) =: \mathcal{A}_a - a\,\mathrm{diag}(0;0;I). \tag{7.4}$$

При этом оператор $\mathcal{A}_a$ представлен в виде произведения трех сомножителей, каждый из которых имеет ограниченный обратный. Поэтому $\mathcal{A}_a$ допускает расширение путем замыкания среднего сомножителя, и в итоге возникает максимальный равномерно аккретивный оператор.

Лемма 7.2. *Замыкание $\bar{\mathcal{A}}_a$ оператора $\mathcal{A}_a$ представляется в виде*

$$\bar{\mathcal{A}}_a = \mathrm{diag}(\tilde{A}^{1/2};I;I)\bar{\mathcal{J}}_a\mathrm{diag}(\tilde{A}^{1/2};I;I),$$

$$\bar{\mathcal{J}}_a = \begin{pmatrix} I & \tilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2} & b(G^*\tilde{A}^{-1/2})^* \\ -A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\tilde{A}^{-1/2} & \beta & 0 \\ -bG^*\tilde{A}^{-1/2} & 0 & a \end{pmatrix},$$

где $\bar{\mathcal{J}}_a$ — равномерно аккретивный оператор, для которого выполнено свойство (7.3) (*с заменой $\mathcal{J}_a \to \bar{\mathcal{J}}_a$*). *При этом*

$$\mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}_a) = \Big\{ y = (\vec{u};\vec{\psi};\eta)^\tau : \vec{u}\in\mathcal{D}(\tilde{A}^{1/2}),\ \tilde{A}^{1/2}\vec{u} + \tilde{A}^{-1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}\vec{\psi} + \\ + b(G^*\tilde{A}^{-1/2})^*\eta \in \mathcal{D}(\tilde{A}^{1/2}) \Big\}, \quad \mathcal{R}(\bar{\mathcal{A}}_a) = \mathcal{H}, \tag{7.5}$$

и оператор $\bar{\mathcal{A}}_a$ действует на $\mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}_a)$ по закону

$$\bar{\mathcal{A}}_a y = \begin{pmatrix} \tilde{A}^{1/2}(\tilde{A}^{1/2}\vec{u} + \tilde{A}^{1/2}\alpha^{1/2}P_1A^{-1/2}\vec{\psi} + b(G^*\tilde{A}^{-1/2})^*\eta) \\ -A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\vec{u} + \beta\vec{\psi} \\ -bG^*\vec{u} + a\eta \end{pmatrix}. \tag{7.6}$$

7.2. Теорема о разрешимости задачи Коши. Вернемся к задаче (6.9)–(6.13) и перепишем ее с учетом (7.4) в виде

$$\frac{dy}{dt} = -(\mathcal{A}_a - a\mathcal{P}_3)y + p(t), \quad y(0) = y^0 = (\vec{u}^0;\vec{0};\eta^0)^\tau, \\ y = (\vec{u};\vec{\psi};\eta)^\tau, \quad \mathcal{P}_3 := \mathrm{diag}(0;0;I). \tag{7.7}$$

Рассмотрим также аналогичную задачу с замкнутым максимальным аккретивным оператором:

$$\frac{dy}{dt} = -(\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P}_3)y + p(t), \quad y(0) = y^0. \tag{7.8}$$

Теорема 7.1. *Пусть в исходной начально-краевой задаче* (2.2)–(2.10) *выполнены условия*

$$\vec{u}^0 = \{\vec{u}^0_1;\vec{u}^0_2\} \in \mathcal{D}(\tilde{A}) \subset \mathcal{D}(\tilde{A}^{1/2}) = \vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega), \quad \zeta^0 = H^{1/2}_\Gamma, \\ \vec{f}_k(t,x) \in C^1([0,T];\vec{L}_2(\Omega_k)), \quad k=1,2. \tag{7.9}$$

Тогда задача Коши (7.8) *имеет единственное сильное решение $y(t)$ на отрезке $[0,T]$, т. е. $y(t)\in C([0,T];\mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}_a))$, $dy/dt \in C([0,T];\mathcal{H})$, выполнено уравнение* (7.8) *при любом $t\in[0,T]$ и начальное условие $y(0)=y^0$.*

Доказательство. Так как согласно лемме 7.2 оператор $\bar{\mathcal{A}}_a$ является максимальным равномерно аккретивным оператором, а $\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P}_3$ — максимальным аккретивным оператором, то оператор $-(\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P}_3)$ является генератором сжимающей полугруппы, действующей в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)\oplus\vec{J}_{0,S}(\Omega)\oplus L_{2,\Gamma}$. Поэтому для разрешимости задачи (7.8) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия (см. [6, с. 166]):

$$y^0 = (\vec{u}^0;\vec{\psi}^0;\eta^0)^\tau \in \mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P}_3) = \mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}_a), \quad p(t) = (\vec{p}(t);\vec{0};0)^\tau \in C^1([0,T];\mathcal{H}). \tag{7.10}$$

Проверим, что условия (7.9) являются достаточными для выполнения соотношений (7.10). В самом деле, если выполнены условия (7.9) для $\vec{f}_k(t,x)$, то $P_{0,S_k}\vec{f}_k \in C^1([0,T];\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k))$, $k=1,2$, а потому $P_0\{P_{0,S_1}\vec{f}_1;P_{0,S_2}\vec{f}_2\}=\vec{p}(t)\in C^1([0,T];\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega))$ (см. (5.15)). Поэтому $p(t)=(\vec{p}(t);\vec{0};0)^\tau \in C^1([0,T];\mathcal{H})$, т. е. последнее условие в (7.10) выполнено.

Далее, если выполнены условия (7.9) для $\vec{u}^0$ и ζ^0, то при $\vec{\varphi}^0=\vec{0}$ имеем свойство

$$\tilde{A}^{1/2}\vec{u}^0+\vec{0}+b\tilde{A}^{-1/2}G\eta^0\in\mathcal{D}(\tilde{A}^{1/2}) \tag{7.11}$$

(см. (7.5)), так как по лемме 6.3 $(G^*\tilde{A}^{-1/2})^*|_{\mathcal{D}(G)}=\tilde{A}^{-1/2}G$, $\mathcal{D}(G)=H_\Gamma^{1/2}$ (см. (5.8)) и $\eta^0=(g(\rho_1-\rho_2))^{1/2}\zeta^0\in H_\Gamma^{1/2}$ (см. (6.1)).

Таким образом, при выполнении условий (7.9) имеют место условия (7.10). Значит, задача (7.8) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$. $\square$

Теорема 7.2. *При выполнении условий* (7.9) *задача* (7.7) *также имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. Если выполнены условия (7.9), то по теореме 7.1 задача (7.8) имеет сильное решение на отрезке $[0,T]$. Это означает, согласно закону (7.6) для оператора $\bar{\mathcal{A}}_a$, что имеют место три уравнения

$$\begin{aligned}
&\frac{d\vec{u}}{dt}=-\tilde{A}^{1/2}(\tilde{A}^{1/2}\vec{u}+\tilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}\vec{\psi}+b(G^*\tilde{A}^{-1/2})^*\eta)+\vec{p}(t),\\
&\frac{d\vec{\psi}}{dt}=A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\vec{u}-\beta\vec{\psi},\quad \vec{u}(0)=\vec{u}^0,\quad \vec{\psi}(0)=\vec{0},\\
&\frac{d\eta}{dt}=bG^*\vec{u},\quad \eta(0)=(g(\rho_1-\rho_2))^{1/2}\zeta^0,
\end{aligned}$$

где все слагаемые являются непрерывными функциями $t\in[0,T]$ со значениями в $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ и $L_{2,\Gamma}$, соответственно. $\square$

При исследовании задачи Коши (6.8)–(6.12) возможен еще один подход, связанный с факторизацией операторной матрицы (6.10) по Шуру—Фробениусу.

Лемма 7.3. *Операторная матрица* $\mathcal{A}$ *из* (6.10) *допускает факторизацию вида*

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix}\tilde{A} & \tilde{A}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2} & bG\\ -A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1 & A^{1/2}\beta A^{-1/2} & 0\\ -bG^* & 0 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}I & 0 & 0\\ -Q\tilde{A}^{-1/2} & I & 0\\ -bQ_1\tilde{A}^{-1/2} & 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{A} & 0 & 0\\ 0 & \beta+QQ^* & bQQ_1^+\\ 0 & bQ_1Q^* & b^2Q_1Q_1^+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & \tilde{A}^{-1/2}Q^* & b\tilde{A}^{-1/2}Q_1^+\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix}, \tag{7.12}$$

$$\begin{gathered}
Q^*:=\tilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}\in\mathcal{L}(\vec{J}_{0,S}(\Omega);\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)),\\
Q_1:=G^*\tilde{A}^{-1/2}\in\mathcal{L}(\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega);\tilde{H}_\Gamma^{1/2}\subset H_\Gamma^{1/2}),\\
Q=A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\tilde{A}^{-1/2}\in\mathcal{L}(\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega);\vec{J}_{0,S}(\Omega)),\\
Q_1^+=\tilde{A}^{-1/2}G\in\mathcal{L}(H_\Gamma^{1/2};\vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)).
\end{gathered} \tag{7.13}$$

Замыкание $\bar{\mathcal{A}}$ *операторной матрицы* $\mathcal{A}$ *представляется в виде*

$$\bar{\mathcal{A}}=\begin{pmatrix}I & 0 & 0\\ -Q\tilde{A}^{-1/2} & I & 0\\ -bQ_1\tilde{A}^{-1/2} & 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{A} & 0 & 0\\ 0 & \beta+QQ^* & \beta QQ_1^*\\ 0 & bQ_1Q^* & b^2Q_1Q_1^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & \tilde{A}^{-1/2}Q^* & b\tilde{A}^{-1/2}Q_1^*\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix}, \tag{7.14}$$

$$Q_1^*:=\bar{Q}_1^+\quad (\text{см. } (6.15)),$$

и этот оператор действует на области определения

$$\mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}})=\{y=(\vec{u};\vec{\psi};\eta)^\tau:\vec{u}+\tilde{A}^{-1/2}Q^*\vec{\psi}+b\tilde{A}^{-1/2}Q_1^*\eta\in\mathcal{D}(\tilde{A})\},$$

совпадающей, очевидно, с (7.5), *по закону* (*сравн. с* (7.6))

$$\bar{\mathcal{A}}y = \begin{pmatrix} \tilde{A}(\vec{u} + \tilde{A}^{-1/2}Q^*\vec{\psi} + b\tilde{A}^{-1/2}Q_1^*\eta) \\ -A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\vec{u} + \beta\vec{\psi} \\ -bG^*\vec{u} \end{pmatrix}, \quad y \in \mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}).$$

Доказательство. Факторизация (7.12), (7.13) проверяется непосредственно. Далее, по лемме 6.2 получаем, что операторы Q и Q^* взаимно сопряжены, а из леммы 6.3 имеем связи

$$Q_1^+ = Q_1^*|_{\mathcal{D}(G)}, \quad \bar{Q}_1^+ = Q_1^*.$$

□

Замечание 7.1. Из леммы 7.3 следует, что крайние сомножители в (7.14) обратимы и равны сумме единичного и компактного оператора, а средний множитель — квазидиагональный самосопряженный неотрицательный оператор, так как

$$\begin{pmatrix} \beta + QQ^* & \beta QQ_1^* \\ bQ_1Q^* & b^2Q_1Q_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\psi} \\ \eta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{\psi} \\ \eta \end{pmatrix} = (\beta\vec{\psi}, \vec{\psi})_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)} + ||Q^*\vec{\psi} + bQ_1^*\eta||^2_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} \geqslant 0. \qquad (7.15)$$

Рассмотрим теперь, как и выше, задачу Коши с замкнутым оператором из (7.14):

$$\frac{dy}{dt} = -(\mathcal{J} - \mathcal{F}_1)\mathcal{A}_0(\mathcal{J} + \mathcal{F}_2)y + p(t), \quad y(0) = y^0, \qquad (7.16)$$

$$\mathcal{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ Q\tilde{A}^{-1/2} & 0 & 0 \\ bQ_1^*\tilde{A}^{-1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \quad \mathcal{A}_0 := \operatorname{diag}(\tilde{A}; A_{00}), \qquad (7.17)$$

где A_{00} — матричный ограниченный неотрицательный оператор из (7.15).

Теорема 7.3. *Пусть в задаче Коши* (7.16) *выполнены первые два условия* (7.9), *а условия для* $\vec{f}_k(t,x)$ *заменены менее ограничительными*:

$$\vec{f}_k(t,x) \in C^\delta([0,T]; \vec{L}_2(\Omega_k)), \quad k = 1, 2, \quad 0 < \delta \leqslant 1. \qquad (7.18)$$

Тогда задача (7.16) *имеет единственное сильное решение* $y(t)$ *на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. Осуществим в задаче (7.16) замену искомой функции:

$$(\mathcal{J} + \mathcal{F}_2)y(t) =: w(t). \qquad (7.19)$$

Тогда для $w(t)$ возникает задача Коши

$$\frac{dw}{dt} = -(\mathcal{J} + \mathcal{F}_2)(\mathcal{J} - \mathcal{F}_1)\mathcal{A}_0 w + p(t), \quad w(0) = w^0, \qquad (7.20)$$

где учтено, что

$$(\mathcal{J} + \mathcal{F}_2)^{-1} = (\mathcal{J} - \mathcal{F}_2), \quad (\mathcal{J} + \mathcal{F}_2)p(t) = p(t).$$

В задаче (7.20) оператор $-\mathcal{A}_0$ является самосопряженным неотрицательным оператором и потому генератором аналитической полугруппы операторов, действующих в пространстве $\mathcal{H}$. Так как операторы $\mathcal{F}_k$ из (7.17) — компактные, то оператор

$$-(\mathcal{J} + \mathcal{F}_2)(\mathcal{J} - \mathcal{F}_1)\mathcal{A}_0$$

также является генератором полугруппы, аналитической в секторе, содержащем положительную полуось. Значит, уравнение (7.20) является абстрактным параболическим, и для его сильной разрешимости требуется выполнение условий

$$w(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(\tilde{A}) \oplus \vec{J}_{0,S}(\Omega) \oplus L_{2,\Gamma}, \quad p(t) \in C^\delta([0,T]; \mathcal{H}), \quad 0 < \delta \leqslant 1. \qquad (7.21)$$

Однако при выполнении первых двух условий (7.9), как и при доказательстве теоремы 7.1, можно проверить (см. (7.11)), что $w(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$. Далее, при выполнении условий (7.18) аналогично убеждаемся, что для $p(t)$ выполнено условие (7.21). Значит, задача Коши (7.20) имеет на отрезке $[0,T]$ единственное сильное решение

$$w(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{H}) \cap C([0,T]; \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)).$$

Отсюда, возвращаясь от (7.20) к задаче Коши (7.16) путем обратной замены (7.19), приходим к выводу, что задача (7.16) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$. □

7.3. О существовании обобщенного решения исходной начально-краевой задачи. Напомним (теорема 5.1), что исходная начально-краевая задача равносильна (после отделения тривиальных соотношений) задаче Коши (5.17).

Определение 7.1. Будем говорить, что исходная начально-краевая задача (2.2)–(2.10) имеет *обобщенное решение* $\{\vec{u}(t);\zeta(t)\}$ на отрезке $[0,T]$, если выполнены следующие условия:

1. $\vec{u}(t)\in C^1([0,T];\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega))$;
2. $\vec{v}(t)=I_0(t)\vec{u}(t)$ (см. (5.18)) обладает свойством $P_1\vec{v}(t)\in C([0,T];\mathcal{D}(\tilde{A}))$;
3. $\zeta(t)\in C^1([0,T];H_\Gamma^{1/2})$;
4. для любого $t\in[0,T]$ выполнена система уравнений (5.17), где все слагаемые в первом уравнении — элементы из $C([0,T];\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega))$, а во втором — элементы из $C([0,T];H_\Gamma^{1/2})$;
5. выполнены начальные условия (5.17).

Теоремы 7.1 либо 7.3 позволяют доказать существование обобщенного решения исследуемой начально-краевой задачи.

Теорема 7.4. *Пусть выполнены условия теорем* 7.1 *либо* 7.3. *Тогда задача* (2.2)–(2.10) *имеет единственное обобщенное решение на отрезке* $[0,T]$ (*в смысле определения* 7.1).

Доказательство. Если условия теоремы 7.1 либо 7.3 выполнены, то каждая из задач (7.8) либо (7.16) имеет сильное решение на отрезке $[0,T]$. В частности, для задачи (7.8) получаем, что справедлива система уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{d\vec{u}}{dt}=-\tilde{A}^{1/2}(\tilde{A}^{1/2}\vec{u}+Q^*\vec{\psi}+bQ_1^*\eta)+p(t),\\
&\frac{d\vec{\psi}}{dt}=Q\tilde{A}^{1/2}\vec{u}-\beta\vec{\psi},\quad \vec{u}(0)=\vec{u}^0,\quad \vec{\psi}(0)=\vec{0},\\
&\frac{d\eta}{dt}=bQ_1\tilde{A}^{1/2}\vec{u},\quad \eta(0)=(g(\rho_1-\rho_2))^{1/2}\zeta^0.
\end{aligned}\tag{7.22}$$

Здесь в первом уравнении все слагаемые — элементы из $C([0,T];\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega))$, во втором — из $C([0,T];\vec{J}_{0,S}(\Omega))$, а в третьем — из $C([0,T];\tilde{H}_\Gamma^{1/2})$, $\tilde{H}_\Gamma^{1/2}\subset H_\Gamma^{1/2}$. Поясним утверждения о последних двух свойствах.

Из второго уравнения имеем $\vec{\varphi}(t):=Q\tilde{A}^{1/2}\vec{u}=A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\vec{u}=A^{1/2}\alpha^{1/2}\vec{u}$ для $\vec{u}\in\vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)=\mathcal{D}(\tilde{A}^{1/2})$, причем $\vec{\varphi}(t)\in C([0,T];\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega))$. Отсюда в силу свойств $\alpha^{1/2}$ и $A^{1/2}$ (см. (6.4), (3.13)) получаем, что $\vec{u}(t)\in C([0,T];\mathcal{D}(\tilde{A}^{1/2}))$. Тогда $Q_1\tilde{A}^{1/2}\vec{u}=G^*\vec{u}=(\rho_1-\rho_2)\hat{\gamma}_n\vec{u}$, и потому эта функция — элемент из $C([0,T];\tilde{H}_\Gamma^{1/2})$, $\tilde{H}_\Gamma^{1/2}\subset H_\Gamma^{1/2}$.

Из третьего уравнения (7.22) имеем

$$\eta(t)=(g(\rho_1-\rho_2))^{1/2}\zeta(t)=\eta^0+b\int\limits_0^t Q_1\tilde{A}^{1/2}\vec{u}(s)ds=(g(\rho_1-\rho_2))^{1/2}\zeta^0+b\int\limits_0^t G^*\vec{u}(s)ds=$$
$$=g(\rho_1-\rho_2)^{1/2}[\zeta^0+\int\limits_0^t\hat{\gamma}_n\vec{u}(s)ds]\in C^1([0,T];\tilde{H}_\Gamma^{1/2}).$$

Тогда (лемма 6.3)

$$bQ_1^*\eta(t)=bQ_1^+\eta(t)=g\tilde{A}^{-1/2}G\zeta(t)=g\tilde{A}^{-1/2}(G\zeta^0+\int\limits_0^t G\hat{\gamma}_n\vec{u}(s)ds)\in C([0,T];\mathcal{D}(\tilde{A}^{1/2})),$$

и потому в (7.22)

$$\tilde{A}^{1/2}(\tilde{A}^{1/2}\vec{u}+Q^*\vec{\psi}+bQ_1^*\eta)=\tilde{A}^{1/2}(\tilde{A}^{1/2}\vec{u}+Q^*\vec{\psi})+bG\zeta.$$

Далее, из второго уравнения (7.22) получаем

$$\vec{\psi}(t) = A^{1/2}\vec{w}(t) = \int\limits_0^t e^{-\beta(t-s)} Q\tilde{A}^{1/2}\vec{u}(s)ds = \int\limits_0^t e^{-\beta(t-s)} A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\vec{u}(s)ds,$$

и потому

$$Q^*\vec{\psi} = \tilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}\int\limits_0^t e^{-\beta(t-s)}A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\vec{u}(s)ds = \tilde{A}^{1/2}\int\limits_0^t P_1\alpha e^{-\beta(t-s)}P_1\vec{u}(s)ds.$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{A}^{1/2}\vec{u} + Q^*\vec{\psi} = \tilde{A}^{1/2}(\vec{u}(t) + \int\limits_0^t P_1\alpha e^{-\beta(t-s)}P_1\vec{u}(s)ds) = \tilde{A}^{1/2}P_1 I_0(t)\vec{u}(t).$$

Таким образом, при выполнении условий теоремы задача Коши для системы уравнений (7.22) преобразована в задачу Коши (5.17):

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}}{dt} &= -\tilde{A}P_1(I_0(t)\vec{u}) - gG\zeta + p(t), \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \hat{\gamma}_n\vec{u}, \quad \vec{u}(0) = \vec{u}^0, \quad \zeta(0) = \zeta^0, \end{aligned}$$

т. е., согласно определению 7.1, исходная задача (2.2)–(2.10) имеет обобщенное решение $\{\vec{u}(t);\zeta(t)\}$ на отрезке $[0,T]$. □

7.4. К задаче о нормальных колебаниях гидросистемы. Рассмотрим теперь постановку задачи о малых нормальных движениях исследуемой гидросистемы, т. е. о таких решениях однородной задачи (7.22), которые зависят от t по закону

$$(\vec{u}(t);\vec{\psi}(t);\eta(t))^\tau = (\vec{u};\vec{\psi};\eta)^\tau e^{-\lambda t},$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — комплексный декремент затухания, а $(\vec{u};\vec{\psi};\eta)^\tau$ — амплитудный элемент.

Тогда для отыскания амплитудных элементов возникает спектральная задача

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{1/2}(\tilde{A}^{1/2}\vec{u} + Q^*\vec{\psi} + bQ_1^*\eta) &= \lambda\vec{u}, \\ -Q\tilde{A}^{1/2}\vec{u} + \beta\vec{\psi} &= \lambda\vec{\psi}, \\ -bQ_1\tilde{A}^{1/2}\vec{u} &= \lambda\eta. \end{aligned} \tag{7.23}$$

В случае $\lambda = 0$ приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} &\tilde{A}^{1/2}(\tilde{A}^{1/2}\vec{u} + Q^*\vec{\psi} + bQ_1^*\eta) = \vec{0}, \\ &\beta\vec{\psi} = Q\tilde{A}^{1/2}\vec{u}, \quad bQ_1\tilde{A}^{1/2}\vec{u} = \vec{0}. \end{aligned} \tag{7.24}$$

Из первой связи с учетом второй и третьей получаем

$$\begin{aligned} (\tilde{A}^{1/2}\vec{u},\tilde{A}^{1/2}\vec{u})_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} + (Q^*\beta^{-1}Q\tilde{A}^{1/2}\vec{u},\tilde{A}^{1/2}\vec{u})_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} + (bQ_1^*\eta,\tilde{A}^{1/2}\vec{u})_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = ||\tilde{A}^{1/2}\vec{u}||^2_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} + \\ + ||\beta^{-1/2}Q\tilde{A}^{1/2}\vec{u}||^2_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)} + (\eta, bQ_1\tilde{A}^{1/2}\vec{u})_{L_{2,\Gamma}} = ||\tilde{A}^{1/2}\vec{u}||^2_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} + ||\beta^{-1/2}Q\tilde{A}^{1/2}\vec{u}||^2_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)} = 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\vec{u} = \vec{0}$, а потому и $\vec{\psi} = \beta^{-1}Q\tilde{A}^{1/2}\vec{u} = \vec{0}$.

Далее, из (7.24) имеем

$$\tilde{A}^{1/2}Q_1^*\eta = \tilde{A}^{1/2}(G^*\tilde{A}^{-1/2})^*\eta = (G^*)^*\eta =: \bar{G}\eta = G\eta = 0,$$

так как G — ограниченный оператор из $H_\Gamma^{1/2}$ на $\vec{G}_{h,S,\Gamma}(\Omega)$ (см. (5.8)). Отсюда и из леммы 5.1 (см. также (5.6)) получаем, что $\eta = 0$. Таким образом, задача (7.24) имеет лишь тривиальное решение, т. е. $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (7.23).

Опираясь на этот факт, преобразуем при $\lambda \neq 0$ задачу (7.23) к спектральной проблеме для одного искомого элемента, исключив $\vec{\psi}$ и η (при условии $\lambda \notin \sigma(\beta)$). Имеем

$$\vec{\psi} = (\beta - \lambda I)^{-1} Q \tilde{A}^{1/2} \vec{u}, \quad \eta = -\lambda^{-1} b Q_1 \tilde{A}^{1/2} \vec{u},$$

и тогда $\vec{u}$ является собственным элементом задачи

$$\vec{u} + \tilde{A}^{-1/2} Q^* (\beta - \lambda I)^{-1} Q \tilde{A}^{-1/2} \vec{u} = \lambda \tilde{A}^{-1} \vec{u} + b^2 \lambda^{-1} \tilde{A}^{-1/2} Q_1^* Q_1 \tilde{A}^{1/2} \vec{u}.$$

Осуществляя еще здесь замену

$$\tilde{A}^{1/2} \vec{u} =: \vec{\varphi} \in \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega),$$

приходим к спектральной проблеме

$$L(\lambda)\vec{\varphi} := (I + Q^*(\beta - \lambda I)^{-1} Q - \lambda \tilde{A}^{-1} - b^2 \lambda^{-1} Q_1^* Q_1)\vec{\varphi} = \vec{0} \tag{7.25}$$

в пространстве $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ для операторного пучка $L(\lambda)$.

В этом пучке

$$Q^*(\beta - \lambda I)^{-1} Q = \tilde{A}^{1/2} P_1 \alpha (\beta - \lambda I)^{-1} P_1 \tilde{A}^{-1/2}$$

— оператор-функция, принимающая ограниченные значения из $\mathcal{L}(\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega))$, $\tilde{A}^{-1}$ — положительный компактный оператор, действующий в $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, а

$$Q_1^* Q_1 = \tilde{A}^{-1/2} (\bar{G} G^*) \tilde{A}^{-1/2}$$

— неотрицательный компактный оператор, действующий в $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$.

Исследование спектральной проблемы (7.25) будет проведено в другой работе.

8. Заключительные замечания

В работе [5] получены формулы для ортопроекторов P_0 и P_1 (см. раздел 4) в случае, когда неподвижный сосуд заполнен не двумя, а тремя несмешивающимися вязкоупругими жидкостями. Это позволяет применить операторный подход к проблеме малых движений системы из трех вязкоупругих жидкостей, находящихся в полностью заполненном неподвижном сосуде, свести проблему к задаче Коши вида (7.8) и доказать теорему о сильной разрешимости исходной задачи на произвольном промежутке времени. Кроме того, как уже упоминалось во введении, переход от интегро-дифференциального уравнения первого порядка (см. (6.2)) к системе дифференциальных уравнений первого порядка, осуществленный в пункте 6.1 для модели Олдройта вязкоупругих жидкостей ($m = 1$), можно осуществить также и для жидкостей обобщенной модели Олдройта ($m > 1$) с помощью аналогичных приемов.

Наконец, имея формулы для ортопроекторов P_0 и P_1 для проблемы малых движений системы из произвольного числа несмешивающихся вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный контейнер, можно с помощью примененного в данной работе подхода доказать теорему о сильной разрешимости задачи о малых движениях гидросистемы на произвольном отрезке времени. При этом для нахождения формул действия ортопроекторов P_0 и P_1 возникают скалярные и векторные задачи сопряжения, описанные в случае трех жидкостей в работе [5].

Автор благодарит Е. В. Семкину за сотрудничество, связанное с исследованием обсуждаемых здесь проблем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович М. С.* Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 5(347). — С. 3–78.
2. *Копачевский Н. Д.* Абстрактная формула Грина и некоторые ее приложения. — Симферополь: ООО «Форма», 2016.
3. *Копачевский Н. Д.* О малых движениях системы из двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд// Динам. системы. — 2017. — *7* (*35*), № 1-2. — С. 109–145.
4. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
5. *Копачевский Н. Д., Семкина Е. В.* Формулы для ортопроекторов, связанных с проблемой малых движений трех вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд// Тавр. вестн. информ. и мат. — 2017. — № 2 (35). — С. 48–61.

6. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
7. *Милославский А. И.* Спектральный анализ малых колебаний вязкоупругой жидкости в открытом контейнере// Ин-т мат. НАН Украины. — Киев, 1989. — Деп. рукопись № 1221.
8. *Agranovich M. S.* Remarks on potential spaces and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary// Russ. J. Math. Phys. — 2008. — *15*, № 2. — С. 146–155.
9. *Azizov T. Ya., Kopachevskii N. D., Orlova L. D.* Evolution and spectral problems related to small motions of viscoelastic fluid// Am. Math. Soc. Transl. — 2000. — *199*. — С. 1–24.
10. *Eirich F. R.* Rheology. Theory and applications. — New York: Academic Press, 1956.
11. *Galiardo E.* Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili// Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 1957. — *27*. — С. 284–305.
12. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 1: Self-adjoint problems for an ideal fluid. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 2001.
13. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2: Nonselfadjoint problems for viscous fluid. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 2003.
14. *Miloslavskii A. I.* Stability of certain classes of evolution equations// Sib. Math. J. — 1985. — *26*, № 5. — С. 723–735.
15. *Miloslavskii A. I.* Stability of a viscoelastic isotropic medium// Sov. Phys. Dokl. — 1988. — *33*. — С. 300.
16. *Rychkov V. S.* On restrictions and extensions of the Besov and Triebel—Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains// J. London Math. Soc. (2). — 1999. — *60*, № 1. — С. 237–257.

Н. Д. Копачевский
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
295007, г. Симферополь, пр. Академика Вернадского, д. 4, корпус «В», каб. № 403
E-mail: kopachevsky@list.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-3-547-572 UDC 517.958

To the Problem on Small Motions of the System of Two Viscoelastic Fluids in a Fixed Vessel

© 2018 **N. D. Kopachevsky**

Abstract. In this paper, we study the problem of small motions of two Oldroyd viscoelastic incompressible fluids contained in a fixed vessel. By means of the operator approach, we reduce the original initial-boundary value problem to the Cauchy problem for a differential operator equation in a Hilbert space and prove the well-posed solvability of the problem on an arbitrary interval of time. We obtain the equation for normal oscillations of the hydraulic system under consideration (Krein generalized operator pencil).

REFERENCES

1. M. S. Agranovich, "Spektral'nye zadachi dlya sil'no ellipticheskikh sistem vtorogo poryadka v oblastyakh s gladkoy i negladkoy granitsey" [Spectral problems for second-order strongly elliptic systems in domains with smooth and nonsmooth boundary], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2002, **57**, No. 5 (347), 3–78 (in Russian).
2. N. D. Kopachevsky, *Abstraktnaya formula Grina i nekotorye ee prilozheniya* [Abstract Green Formula and Some Its Applications], FORMA, Simferopol', 2016 (in Russian).
3. N. D. Kopachevsky, "O malykh dvizheniyakh sistemy iz dvukh vyazkouprugikh zhidkostey, zapolnyayushchikh nepodvizhnyy sosud" [On small motions of a system of two viscoelastic fluids contained in a fixed vessel], *Dinam. sistemy* [Dynam. Syst.], 2017, **7** (**35**), No. 1-2, 109–145 (in Russian).
4. N. D. Kopachevsky, S. G. Kreyn, and Ngo Zuy Kan, *Operatornye metody v lineynoy gidrodinamike: evolyutsionnye i spektral'nye zadachi* [Operator Methods in Linear Hydrodynamics: Evolution and Spectral Problems], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).

5. N. D. Kopachevsky and E. V. Semkina, “Formuly dlya ortoproektorov, svyazannykh s problemoy malykh dvizheniy trekh vyazkouprugikh zhidkostey, zapolnyayushchikh nepodvizhnyy sosud” [Formulas for orthoprojectors related to the problem on small motions of three viscoelastic fluids contained in a fixed vessel], *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavricheskiy Bull. Inform. Math.], 2017, No. 2 (35), 48–61 (in Russian).
6. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in a Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
7. A. I. Miloslavskiy, “Spektral'nyy analiz malykh kolebaniy vyazkouprugoy zhidkosti v otkrytom konteynere” [Spectral analysis of small oscillations of a viscoelastic fluid in an open container], *In-t mat. NAN Ukrainy* [Inst. Math. Ukr. Acad. Sci.], Kiev, 1989, Dep. manuscript No. 1221 (in Russian).
8. M. S. Agranovich, “Remarks on potential spaces and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary,” *Russ. J. Math. Phys.*, 2008, **15**, No. 2, 146–155.
9. T. Ya. Azizov, N. D. Kopachevskii, and L. D. Orlova, “Evolution and spectral problems related to small motions of viscoelastic fluid,” *Am. Math. Soc. Transl.*, 2000, **199**, 1–24.
10. F. R. Eirich, *Rheology. Theory and Applications*, Academic Press, New York, 1956.
11. E. Galiardo, “Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili,” *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 1957, **27**, 284–305.
12. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 1: Self-Adjoint Problems for an Ideal Fluid*, Birkhauser, Basel—Boston—Berlin, 2001.
13. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonselfadjoint Problems for Viscous Fluid*, Birkhauser, Basel—Boston—Berlin, 2003.
14. A. I. Miloslavskii, “Stability of certain classes of evolution equations,” *Sib. Math. J.*, 1985, **26**, No. 5, 723–735.
15. A. I. Miloslavskii, “Stability of a viscoelastic isotropic medium,” *Sov. Phys. Dokl.*, 1988, **33**, 300.
16. V. S. Rychkov, “On restrictions and extensions of the Besov and Triebel—Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains,” *J. London Math. Soc. (2)*, 1999, **60**, No. 1, 237–257.

N. D. Kopachevsky
V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia
E-mail: kopachevsky@list.ru