Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 3 (2018). С. 490–546

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-3-490-546 УДК 512.7

О ТЕОРИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ РАДИКАЛОВ

© 2018 г. **Э. В. КИССИН, Ю. В. ТУРОВСКИЙ, В. С. ШУЛЬМАН**

Светлой памяти Виктора Иосифовича Ломоносова

Аннотация. В работе обсуждаются основные направления и результаты теории топологических радикалов. Рассматриваются приложения к различным проблемам теории операторов и теории банаховых алгебр.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Классическая теория радикалов является частью теории не обязательно ассоциативных колец и алгебр. Построение конкретного радикала обычно связано с изучением того или иного свойства кольца и означает выделение в каждом кольце A некоторого фиксированного идеала J, обладающего этим свойством, причем наибольшего — в том смысле, что фактор-кольцо A/J идеалов с таким свойством уже не содержит (точные определения будут даны ниже).

Наша статья посвящена менее известному типу радикалов, а именно топологическим радикалам, которые определены на подходящих классах нормированных алгебр. Эти радикалы выделяют замкнутые идеалы в решетке идеалов нормированной алгебры. Первые примеры таких радикалов возникли в теории конечномерных алгебр; в классе банаховых алгебр радикал Джекобсона активно использовался задолго до аксиоматики топологических радикалов, данной Диксоном в статье [37]. Эта аксиоматика была дополнена в [37] чисто алгебраическим вариантом для радикалов на классах комплексных алгебр. Такие радикалы мы называем алгебраическими, они играют определенную роль в конструировании топологических радикалов из алгебраических и в вопросах продолжения некоторых топологических радикалов до алгебраических.

За 20 лет, которые прошли после выхода статьи [37], выяснилось, что теория топологических радикалов имеет взаимно плодотворные связи с такими разделами функционального анализа, как теория операторов, спектральная теория, теория инвариантных подпространств, теория банаховых алгебр, теория динамических систем и операторных полугрупп, теория операторных алгебр, теория представлений групп и алгебр Ли и др. Некоторые из полученных в результате такого взаимодействия результатов будут здесь представлены.

1.1. Структура работы. Во второй части введения кратко рассматриваются идеология и основные этапы развития общей теории радикалов.

В разделе 2 обсуждаются эвристические и логические связи этой теории с топологическими и алгебраическими радикалами. Этот раздел содержит новые конструкции и результаты.

Начиная с раздела 3, мы рассматриваем конкретные топологические радикалы банаховых алгебр, построенные с целью изучения тех или иных проблем анализа, и, разумеется, приводим результаты этого изучения. Сразу отметим, что самым известным примером топологического радикала на этом классе алгебр является радикал Джекобсона Rad; по определению, $\mathrm{Rad}(A)$ — пересечение ядер всех алгебраически неприводимых представлений алгебры A. Можно сказать, что он выделяет свойство не иметь неприводимых представлений, или свойство квазинильпотентности всех элементов алгебры; существуют и многие другие эквивалентные его описания. В теории банаховых алгебр под радикальностью обычно понимается свойство $\mathrm{Rad}(A) = A$; мы будем следовать этой традиции: радикальность без указания радикала означает радикальность в смысле Джекобсона.

В разделе 4 определяющей проблемой является вопрос об условиях непрерывности спектра и спектрального радиуса. Для его изучения строится *рассеянный радикал* $\mathcal{R}_s$, выделяющий класс алгебр, элементы которых имеют счетные спектры. Далее устанавливается ряд удобных свойств этого радикала и указываются приложения к проблеме непрерывности спектральных характеристик.

В разделе 5 рассматривается важная для широкого класса приложений характеристика семейства операторов (или элементов банаховой алгебры) — совместный спектральный радиус (ССР). Главной, остающейся пока нерешенной проблемой здесь является вопрос о равенстве нулю ССР конечного семейства элементов в произвольной радикальной банаховой алгебры. Этот вопрос весьма важен как для теории динамических систем, так и для теории операторов (в частности, теории инвариантных подпространств). Его решение при некоторых дополнительных условиях компактности обсуждается в разделе 7; в разделе 5 лишь строится весьма нетривиальная теория связанных с ССР радикальных отображений $\mathcal{R}_{fq}$, $\mathcal{R}_{cq}$ и $\mathcal{R}_{bq}$. Одно из этих трех отображений, а именно, $\mathcal{R}_{cq}$, является топологическим радикалом; этот радикал называется *компактно-квазинильпотентным*.

В теории банаховых алгебр остается до сих пор открытой следующая проблема: является ли радикальной алгеброй проективное тензорное произведение двух радикальных банаховых алгебр? Положительный ответ был получен лишь при условии, что одна из алгебр-сомножителей коммутативна (Б. Опти, [20]). Радикал $\mathcal{R}_t$, связанный с этой задачей (он называется *тензорным радикалом*) рассматривается в разделе 6, его конструкция схожа с конструкцией радикала $\mathcal{R}_{cq}$, с тем отличием, что роль ССР здесь играет так называемый ℓ_1-радиус. Доказано, что $\mathcal{R}_t$ занимает промежуточное положение между $\mathcal{R}_{cq}$ и Rad, что позволит нам впоследствии заключить, что проблема тензорного произведения решается положительно для алгебр, удовлетворяющих некоторым условиям компактности.

В разделе 7 вводится в рассмотрение радикал $\mathcal{R}_{hc}$, выделяющий свойство компактности операторов двустороннего умножения; он называется *гипокомпактным радикалом*. $\mathcal{R}_{hc}$-радикальные алгебры называются гипокомпактными, они характеризуются тем свойством, что во всех их фактор-алгебрах имеются компактные элементы, т. е., такие $a \in A$, что операторы $x \mapsto axa$ компактны. Именно для этого класса алгебр доказывается совпадение идеалов $\mathcal{R}_t(A)$, $\mathcal{R}_{cq}(A)$ и $\mathrm{Rad}(A)$. В доказательстве большую роль играют результаты теории инвариантных подпространств, и в частности, *техника Ломоносова*, созданная в удивительной работе В. И. Ломоносова [8]. В свою очередь, для доказательства некоторых из этих результатов существенно использовалась техника ССР.

Предметом рассмотрений раздела 8 является спектральная теория операторов умножения в банаховых и операторных бимодулях. Результаты разделов 6 и 7 позволили изучать спектры, следы и спектральные подпространства операторов умножения, среди коэффициентов которых «достаточно много» компактных операторов. Как следствие, здесь доказано, что все решения линейных операторных уравнений с «полукомпактными» коэффициентами принадлежат пересечению всех квазибанаховых операторных идеалов.

В разделе 9 мы продолжаем, используя результаты о тензорном радикале, изучать операторы умножения, но уже не на общих банаховых модулях, а на исходной алгебре (которой принадлежат коэффициенты уравнения). Одна из проблем, вокруг которых строится изложение — вопрос о существовании тотальной цепочки идеалов в радикальных банаховых алгебрах при условии компактности операторов двустороннего умножения (в общем случае неизвестно, имеет ли радикальная банахова алгебра хотя бы один нетривиальный идеал). В этом вопросе есть результаты «в обе стороны». Рассматриваются также условия, при которых спектры операторов умножения можно вычислять по естественным формулам через спектры их коэффициентов; это имеет место, например, для банаховых алгебр, порожденных энгелевыми алгебрами Ли.

Раздел 10 посвящен вопросу о способах вычисления ССР семейства операторов в терминах спектров этих элементов и ССР образа семейства в алгебре Калкина (фактор-алгебре алгебры всех операторов по идеалу компактных операторов). Соответствующее равенство обобщает формулу, полученную в 1992-м году Бергером и Вонгом [25] для семейств матриц. Мы получаем также аналогичную формулу для произвольной банаховой алгебры, причем роль идеала компактных операторов в ней исполняет гипокомпактный радикал. Далее результаты применяются для доказательства существования инвариантных подпространств для алгебр Ли компактных операторов, а также йордановых алгебр и других операторно-алгебраических систем.

В разделе 11 рассматриваются вопросы непрерывности совместного спектрального радиуса и аналог обобщенной формулы Бергера—Вонга для элементов C*-алгебр. Здесь роль гипокомпактного радикала играет максимальный GCR-идеал.

Разумеется, содержание разделов 4–11 данной работы можно рассматривать как обзор, однако оно не совсем укладывается в рамки обычного представления об обзорах, так как для некоторых ключевых результатов мы стараемся продемонстрировать схемы доказательств (например, предваряя их формулировки последовательностью вспомогательных утверждений). Кроме того, основные результаты, о которых пойдет речь, получены в сравнительно небольшом числе публикаций, принадлежащих авторам данной статьи, что сильно отличает ее от обзоров, которые авторам случалось читать и писать. Поэтому вернее было бы считать ее введением и приглашением в проблематику топологических радикалов. Тем вернее, что в большинстве разделов приводятся формулировки не решенных к настоящему времени проблем теории.

1.2. Возникновение и развитие теории радикалов. Не ставя целью детальность результатов, мы обсудим концепции аксиоматики радикалов и коснемся задач и проблем, приводящих к развитию теории радикалов.

Поскольку приложения касаются нормированных алгебр, естественно ограничиться при рассмотрении результатов не общими кольцами или алгебрами над коммутативно-ассоциативном кольцом, как это принято в *алгебре*, а обычными алгебрами над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. В этом разделе алгебры не предполагаются ассоциативными.

1.2.1. Результаты Веддерберна. Согласно [2], первые результаты в связи с радикалами алгебр были (в несколько ином виде) получены Вейерштрассом (1861). Усилия многих математиков с финальными аккордами от Веддерберна в конце 19-го века привели к следующим положениям: всякая конечномерная (комплексная) ассоциативная алгебра $\mathcal{A}$ разлагается в прямую сумму (как подпространств) *выделенного идеала* $\mathcal{I}$ и подалгебры $\mathcal{B}$, состоящей из прямой суммы матричных алгебр $\mathcal{B}_j \simeq \mathbb{M}_k(\mathbb{C})$. Этот *выделенный идеал* характеризуется свойством *нильпотентности*: существует $n \in \mathbb{N}$ такой, что $\mathcal{I}^n = 0$. Следует отметить, что среди $\mathcal{B}_j$ и их прямых сумм нет нильпотентных идеалов; более того, все $\mathcal{B}_j$ очевидно *просты* (т. е. у них нет идеалов кроме тривиальных, нулевого и себя), в то время как все идеалы, и даже подалгебры, идеала $\mathcal{I}$ не просты. Заметим, что в это время математиками вырабатывались понятия радикала, (полу)простоты и другие структурные понятия (такие, к примеру, как гомоморфизмы и мономорфизмы в трудах Нетер), а также (подчас различные) требования к радикалам. Использование этих понятий характеризует происшедшее *математическое открытие*, заключающееся в постулировании существования разложения.

Таким образом, как правило, с каждым радикалом можно связать *проблемную часть* (постановки проблем) и *математическое явление*, выражающееся в утверждениях о свойствах выявленного радикала. Вопросы и проблемы, разрешаемые с помощью теории радикалов, мы будем называть *структурными вопросами и проблемами*.

1.2.2. Аккумуляция свойства. Теория радикалов — это теория *выделенных,* точнее *отмеченных, идеалов*. Выделение идеала (или алгебры) происходит по некоторому признаку или свойству $\mathcal{P}$. В теории Веддерберна таким признаком является нильпотентность. Это свойство присуще (кольцам и) алгебрам, соответственно, оно переносится изоморфизмами алгебр: образ нильпотентного идеала нильпотентен.

Вот два других свойства, родственных нильпотентности. Алгебра называется *локально нильпотентной*, если нильпотентны все ее конечно порожденные подалгебры. Если же нильпотентны все элементы алгебры, то она называется *ниль-алгеброй*. Подчеркивая различие между нильпотентностью и локальной нильпотентностью, нильпотентные алгебры иногда называют *глобально нильпотентными*.

На примере теории Веддерберна очевидно, что выделенный идеал $\mathcal{I}$ алгебры $\mathcal{A}$ удовлетворяет свойству $\mathcal{P}$ так, что всякий другой идеал, также удовлетворяющий свойству $\mathcal{P}$, содержится в $\mathcal{I}$. С другой стороны, всякий идеал, собственно содержащий $\mathcal{I}$, уже не удовлетворяет данному свойству (полностью). Таким образом, $\mathcal{I}$ — наибольший идеал, удовлетворяющий свойству. Более того, фактор-алгебра $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ не содержит ненулевых идеалов, удовлетворяющих свойству $\mathcal{P}$.

1.2.3. Классический период развития радикалов ассоциативных алгебр. Этот период охватывает первую половину 20-го века. Попытки расширить теорию Веддерберна на бесконечномерные алгебры (и кольца, в частности, на кольца с условием минимальности) привели к появлению нескольких радикалов, сужение которых на конечномерные алгебры нильпотентно. Наиболее известны нижний ниль-радикал Бэра [23] (он строится с помощью специального процесса расширения из нильпотентных идеалов), локально нильпотентный радикал Левицкого [56] (он сопоставляет алгебре ее наибольший локально нильпотентный идеал), верхний ниль-радикал Кете [51] (наибольший ниль идеал). Со многими радикалами связаны структурные проблемы, конструкции, результаты. К примеру, *трансфинитный процесс Бэра* в работе Р. Бэра [23] оказался важным структурным элементом теории. Проблема различения радикалов Кете и Левицкого была положительно решена Е. С. Голодом [3]: существуют ненильпотентные конечнопорожденные ниль алгебры (заведомо бесконечномерные). Наиболее широкие применения не только в алгебре, но и в анализе нашел радикал Джекобсона [46]. Это, вообще говоря, не ниль-идеал, его важное место в теории определяется большим числом характеризаций, в то же время сужение его на конечномерные ассоциативные алгебры дает наибольший нильпотентный идеал.

1.2.4. Неассоциативные алгебры. Одновременно шло исследование выделенных идеалов в неассоциативных (кольцах и) алгебрах. Оказалось, что основная проблема структурной теории неассоциативных алгебр состоит в конкретной реализации и интерпретации явлений и понятий из теории ассоциативных алгебр, в то время как сами основные понятия теории радикалов не встречают принципиальных затруднений.

В теории конечномерных неассоциативных алгебр Альберт [13] построил отмеченный идеал, который называется *радикалом Альберта* и который является аналогом наибольшего нильпотентного идеала (см. также [42, гл. 7]).

В остальных случаях содержательные результаты были получены для классов алгебр определенной сигнатуры. В классах таких алгебр естественно действуют такие элементы структурной теории, как гомоморфизмы (см. по этому вопросу [5]).

С каждой неассоциативной алгеброй $\mathcal{A}$ можно связать ассоциативную алгебру $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$, порожденную в некотором смысле операторами умножения $\mathrm{L}_a : b \longmapsto ab$ и $\mathrm{R}_a : b \longmapsto ba$, $a \in \mathcal{A}$. Таким образом, существуют интересные задачи выявления структурных свойств алгебры $\mathcal{A}$ при наличии структурных или радикальных свойств $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ (см., например, работу А. Паласиоса [59]).

1.2.5. Структуры. Теорию радикалов ассоциируют со (и иногда прямо называют) *структурной теорией*. В нашей литературе структура часто обозначает *решетку*. Напомним, множество Q с частичным порядком $\leqslant$ называется *решеткой*, если для любой пары a, b элементов Q имеется наименьшая точная грань $a \vee b$ элементов, не меньших a и b, а также имеется наибольшая точная грань $a \wedge b$ элементов, не больших a и b.

Хороший пример решетки — это структура линейного оператора, т. е. решетка его инвариантных подпространств. Для оператора $T : X \longrightarrow X$ его решетка $\mathbf{lat}\,(T)$ инвариантных подпространств обладает свойством, что для всякого подмножества $M \subset \mathbf{lat}\,(T)$ существует наименьшая точная грань $\vee M$ элементов, не меньших любого элемента из M, а также имеется наибольшая точная грань $\wedge M$ элементов, не больших любого элемента из M. Одновременно, $\vee M$ есть наибольшая точная грань в $\mathbf{lat}\,(T)$ множества M, $\wedge M$ есть наименьшая точная грань в $\mathbf{lat}\,(T)$ множества M. Это свойство называется *полнотой решетки,* оно не зависит от того, имеет ли X топологию, является ли T ограниченным. Конкретно для решетки $\mathbf{lat}\,(T)$, подпространство $\vee M$ есть сумма подпространств из M, и $\wedge M$ есть пересечение подпространств из M. Аналогично, если $\mathcal{A}$ — алгебра, ее решетка $\mathbf{lat}_I\,(\mathcal{A})$ идеалов является *полной решеткой*.

Если T ограничен, $T \in \mathcal{B}\,(X)$, или $\mathcal{A}$ — нормированная алгебра, то возникают другие полные решетки: решетка $\mathbf{Lat}\,(T)$ замкнутых инвариантных подпространств и решетка $\mathbf{Lat}_{\mathbb{I}}\,(\mathcal{A})$ замкнутых идеалов. Следует отметить, что $\mathbf{Lat}\,(T)$ — подмножество, но не подрешетка $\mathbf{lat}\,(T)$, и $\mathbf{Lat}_{\mathbb{I}}\,(\mathcal{A})$ — подмножество, но не подрешетка $\mathbf{lat}_{\mathbb{I}}\,(\mathcal{A})$. В самом деле, верхняя точная грань множества M в решетке $\mathbf{Lat}_{\mathbb{I}}\,(\mathcal{A})$ есть замыкание в $\mathcal{A}$ суммы идеалов из M, которое в общем положении не совпадает с суммой идеалов из M.

1.2.6. Влияние Куроша на формирование общей теории радикалов. В 1953 году Курош опубликовал знаменитую статью [7], в которой, обобщая замеченное предшественниками, сформулировал следующее определение радикала.

Пусть $\mathfrak{U}$ — класс алгебр, замкнутый относительно взятия идеалов и гомоморфных образов, и пусть $\mathcal{P}$ — свойство алгебр из $\mathfrak{U}$; можно, к примеру, отождествить $\mathcal{P}$ с подклассом $\mathfrak{U}$. Алгебры из $\mathcal{P}$ удобно называть *$\mathcal{P}$-алгебрами*; идеал, являющийся $\mathcal{P}$-алгеброй, называется *$\mathcal{P}$-идеалом* алгебры; $\mathcal{P}$-идеал алгебры $\mathcal{A}$, который содержит всякий другой $\mathcal{P}$-идеал алгебры $\mathcal{A}$, называется *$\mathcal{P}$-радикалом* алгебры $\mathcal{A}$; алгебра $\mathcal{A}$ называется *$\mathcal{P}$-полупростой*, если она не содержит ненулевых $\mathcal{P}$-идеалов. Отображение $\mathcal{P} : \mathcal{A} \longmapsto \mathcal{P}\,(\mathcal{A}) \in \mathbf{lat}_{\mathbb{I}}\,(\mathcal{A})$ для $\mathcal{A} \in \mathfrak{U}$ называется *$\mathcal{P}$-радикалом в* $\mathfrak{U}$, если $\mathcal{P}\,(\mathcal{A})$ есть наибольший $\mathcal{P}$-идеал алгебры $\mathcal{A}$, т. е. он — $\mathcal{P}$-радикал алгебры $\mathcal{A}$, фактор-алгебра $\mathcal{A}/\mathcal{P}\,(\mathcal{A})$ $\mathcal{P}$-полупроста и всякий гомоморфный образ $\mathcal{P}$-алгебры есть $\mathcal{P}$-алгебра. При этом всякая $\mathcal{P}$-алгебра называется *$\mathcal{P}$-радикальной*.

Про эти радикалы обычно говорят, что они — *типа Амицура—Куроша*, или просто *типа Куроша*. В статье Курош упоминает влияние работ Амицура [15] и Андрунакиевича [1]. Амицур в своей работе строит теорию радикалов в абстрактных полных решетках и применяет общую схему к радикалам колец. Об этом мы расскажем ниже. На основе аксиоматики, данной Курошем, написаны монографии [2, 5, 42, 76] по теории радикалов колец и алгебр. Многочисленные статьи, указанные в библиографии этих книг, используют (не всегда подчеркивая это) радикалы типа Куроша.

Важно, что радикал типа Куроша можно задавать, указывая класс полупростых алгебр или класс радикальных алгебр.

1.2.7. Диксон и топологические радикалы. Топологические радикалы — это радикалы классов нормированных алгебр, специализированные под обслуживание нормированных алгебр. Примером для топологических рассмотрений могут служить конечномерные алгебры, которые автоматически нормированы, и в этом классе наибольший нильпотентный идеал играет роль конкретного топологического радикала. Поскольку фактор-алгебра по радикалу должна быть нормированной, топологический радикал нормированной алгебры очевидно замкнут. Казалось бы, добавляя требование замкнутости радикала к аксиомам Куроша и предполагая гомоморфизмы непрерывными, можно получить аксиомы топологических радикалов. Однако возникают некоторые несоответствия между классами определения радикалов и взятием гомоморфных образов. К тому ведет, например, простое наблюдение: гомоморфные образы C*-алгебр выходят за пределы C*-алгебр, и, как следствие, трудно удовлетворительно строить структурную теорию C*-алгебр в рамках радикалов типа Куроша.

В 1997 году П. Диксон в работе [37] предложил модификацию аксиом как для топологических, так и для алгебраических радикалов. Некоторые уточнения аксиом в случае произвольных классов нормированных алгебр были даны в работе [75, см. замечание 2.2]. Суть изменений с учетом [75] такова, что в топологическом случае вместо гомоморфных образов лучше брать изоморфные образы относительно непрерывных в обе стороны изоморфизмов. Этого достаточно (и необходимо) для существования изоморфизма радикалов нормированных алгебр при наличии изоморфизма топологических свойств. Существование изоморфизма радикалов при непрерывном, но не открытом изоморфизме, как предлагал Диксон в своей работе 1997 г., — условие более жесткое (и, как показывает исследовательская практика, ограничительное).

1.2.8. Сравнение радикалов. Система аксиом топологических и алгебраических радикалов представлена ниже. В любой системе аксиом для радикалов есть «абсолютная часть», характеризующая наиболее емко суть выделения идеалов и независимая от топологических или алгебраических рассмотрений. Это

$$\mathcal{P}\left(\mathcal{P}\left(\mathcal{A}\right)\right) = \mathcal{P}\left(\mathcal{A}\right), \tag{1.1}$$

$$\mathcal{P}\left(\mathcal{A}/\mathcal{P}\left(\mathcal{A}\right)\right) = 0 \tag{1.2}$$

для любой алгебры $\mathcal{A} \in \mathfrak{U}$. Соотношение (1.1) есть следствие аксиомы о радикале алгебры для радикалов типа Куроша, в теории топологических и алгебраических радикалов соотношение (1.1) есть прямая аксиома. В то же время соотношение (1.2) отражено аксиомой в любой системе для радикалов. В системе аксиом для топологических и алгебраических радикалов, кроме того, что радикал алгебры — наибольший выделенный идеал, постулируется, что *радикал идеала есть идеал алгебры.* Это выглядит сильнее, чем аналогичное условие для радикалов типа Куроша, однако не является основанием для сравнения радикалов разного назначения в силу того, что области определения этих радикалов, вообще говоря, разные (вспомним хотя бы пример с C*-алгебрами, разобранный выше).

2. Полные решетки и радикалы

2.1. Определения. Радикалы типа Амицура—Куроша оказались крепко спаяны с именами выдающихся исследователей тем обстоятельством, что аксиоматика радикалов алгебр и колец, данная Курошем, удовлетворяет *схеме Амицура* для полных решеток, когда вместо абстрактных полных решеток рассматриваются решетки $\mathbf{lat}_{\mathbb{I}}\left(\mathcal{A}\right)$ для произвольных (колец и) алгебр $\mathcal{A}$. Одна из целей этого раздела — показать, что аксиоматика топологических и алгебраических радикалов и схема Амицура также тесно связаны. Теория Амицура радикалов полных решеток в определенном смысле независима как от аксиоматики Куроша для радикалов колец и алгебр, так и от аксиоматики топологических и алгебраических радикалов. Мы начнем с точного определения топологических и алгебраических радикалов алгебр.

2.1.1. Классы [нормированных] алгебр. При параллельном рассмотрении алгебраической и топологической обстановки одновременно нам удобно добавлять необходимые уточняющие спецификации в квадратных скобках. Например, выражение «классы [нормированных] алгебр» означает, что в топологическом контексте выделены классы нормированных алгебр, тогда как в алгебраическом контексте слово «нормированных» не имеет смысла и соответственно опускается. Очевидны определенные требования, которыми должны обладать классы [нормированных] алгебр, чтобы быть полноценными областями задания [топологических] радикалов. Класс $\mathfrak{U}$ нормированных алгебр называется *основным,* если он замкнут относительно взятия замкнутых идеалов и фактор-алгебр по замкнутому идеалу. Основной класс называется *универсальным*, если он замкнут относительно взятия идеалов. Например, класс банаховых алгебр является основным, а класс всех нормированных алгебр — универсальным.

2.1.2. Морфизмы классов. При рассмотрении радикалов алгебр можно считать, хотя это не является необходимым, что мы находимся в соответствующих категориях алгебр. Мы используем термин «морфизм» для обозначения эпиморфизма в алгебраическом контексте и открытого непрерывного эпиморфизма в топологическом случае.

2.1.3. Топологические и алгебраические радикалы алгебр. Пусть задан основной или универсальный класс $\mathfrak{U}$ [нормированных] алгебр. [*Топологический*] *радикал* $\mathcal{P}$ — это отображение, заданное на $\mathfrak{U}$, сопоставляющее каждой алгебре $\mathcal{A} \in \mathfrak{U}$ ее [замкнутый] идеал $\mathcal{P}(\mathcal{A})$, и удовлетворяющее следующим условиям:

Аксиома 1. $f(\mathcal{P}(\mathcal{A})) \subset \mathcal{P}(f(\mathcal{A}))$ *для всякого морфизма* $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ *алгебр из* $\mathfrak{U}$.

Аксиома 2. $\mathcal{P}(\mathcal{A}/\mathcal{P}(\mathcal{A})) = 0$.

Аксиома 3. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{A})) = \mathcal{P}(\mathcal{A})$.

Аксиома 4. $\mathcal{P}(\mathcal{I})$ — *идеал в* $\mathcal{A}$, *содержащийся в* $\mathcal{P}(\mathcal{A})$, *для любого идеала* $\mathcal{I} \in \mathfrak{U}$ *алгебры* $\mathcal{A} \in \mathfrak{U}$.

Отметим, что в случае нормированных алгебр Диксон в аксиоме 4 предполагал идеал $\mathcal{I}$ замкнутым в алгебре $\mathcal{A}$. Мы нашли это условие идеала слишком ограничительным. Например, аксиома 4 перестает быть при этом условии естественной, когда топологический радикал определен на универсальном классе. Более того, [75, теорема 3.1] дополняет построение структурных конструкций, описанных в [37, следствие 6.12], на случай незамкнутых идеалов в аксиоме 4.

2.1.4. Предрадикальные отображения. Для построения радикалов часто используются отображения на $\mathfrak{U}$, которые лишь частично удовлетворяют аксиомам.

Если $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ — [замкнутый] идеал в $\mathcal{A}$ для любой алгебры $\mathcal{A}$ из класса $\mathfrak{U}$ [нормированных] алгебр, то отображение $\mathcal{P}$, удовлетворяющее аксиоме 1, называется [*топологическим*] *предрадикалом* на $\mathfrak{U}$. Если [топологический] предрадикал $\mathcal{P}$, удовлетворяет всем аксиомам, кроме аксиомы 2, то $\mathcal{P}$ называется [*топологическим*] *подрадикалом*. Симметрично, если [топологический] предрадикал $\mathcal{P}$, удовлетворяющий всем аксиомам кроме аксиомы 3, то $\mathcal{P}$ называется [*топологическим*] *надрадикалом*. Последние два отображения были введены Диксоном в [37] для (трансфинитных) процедур построения [топологических] радикалов.

2.1.5. Амицур и его общая теория радикалов. В 1953 году Амицур опубликовал статью [15], где было введено понятие радикала на абстрактной полной решетке. Эта работа вместе с работами [16, 17] оказала огромное влияние на развитие теории радикалов различных алгебраических систем. Толчком к рассмотрению радикалов в полных решетках явилась работа Брауна и Мак-Коя [28] о радикалах в группах. Большую роль в формировании общей теории сыграл трансфинитный метод Бэра в конструкции нижнего ниль-радикала в [23].

В основе рассмотрений Амицура — полная решетка Q с порядком $\leqslant$. Если $\mathcal{A}$ — алгебра, то в качестве Q мы рассматриваем полную решетку $\mathbf{lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$ всех идеалов алгебры $\mathcal{A}$ относительно включения $\subset$, т. е. включение играет роль порядка. При этом наибольшую точную грань $\vee M$ множества $M \subset \mathbf{lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$ идеалов играет сумма $\sum\limits_{I \in M} I$ идеалов из M, а наименьшую точную грань $\wedge M$ — пересечение $\bigcap\limits_{I \in M} I$ идеалов из M.

2.1.6. Выделение по свойству. Пусть $\mathrm{Ref}(Q, \leqslant)$ — множество всех рефлексивных отношений $\ll$ на полной решетке $(Q, \leqslant)$, которые *строже* отношения $\leqslant$. Это означает, что

$$a \ll b \text{ влечет } a \leqslant b \tag{2.1}$$

для произвольных $a, b \in Q$.

Для $Q = \mathbf{lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$ отношение $a \ll b$ влечет, в силу (2.1), тот факт, что идеал b содержит идеал a. Удобно считать, что $a \ll b$ выражает некоторое свойство $\mathcal{P}$ пары a и b. Мы интерпретируем это свойство как *выделенное свойство*, присущее фактор-алгебре b/a. Иными словами, b/a есть $\mathcal{P}$-*алгебра* (или $\mathcal{P}$ *-радикальная) алгебра* :

$$a \ll b \text{ это то же самое, что } b/a = \mathcal{P}(b/a). \tag{2.2}$$

Заметим, что свойство $\mathcal{P}$, возникающее между идеалами a и b решетки $\mathbf{lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$, записывается как свойство в полной решетке $\mathbf{lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A}/a)$. Напомним, что алгебра $\mathcal{A}$ $\mathcal{P}$-*полупроста*, если $\mathcal{P}(\mathcal{A}) = 0$. В этом смысле говорят о «полупростом» свойстве $\mathcal{P}$, которое *полностью не присутствует* между идеалами a и b: $\mathcal{P}(b/a) = 0$.

2.1.7. $\mathbf{H}$-отношения. Амицур назвал отношение $\ll$ из $\mathrm{Ref}(Q,\leqslant)$ $\mathbf{H}$-*отношением,* если

$$a \ll b \text{ и } a \leqslant c \text{ влекут } c \ll b \vee c \tag{2.3}$$

для произвольных $a, b, c \in Q$.

Для $Q = \mathbf{lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$ условие (2.3) можно переписать так: для идеалов a, b, c

$$a \subset c \text{ и } b/a = \mathcal{P}(b/a) \text{ влекут } (b+c)/c = \mathcal{P}((b+c)/c).$$

В то же время для $Q = \mathbf{Lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$ условие (2.3) переписывается как

$$a \subset c \text{ и } b/a = \mathcal{P}(b/a) \text{ влекут } \overline{b+c}/c = \mathcal{P}\left(\overline{b+c}/c\right).$$

2.2. Топологические (пред)радикалы индуцируют H-отношения. Рассмотрим важные примеры $\mathbf{H}$-отношений.

Предложение 2.1. *Пусть P — [топологический] предрадикал в $\mathfrak{U}$. Для любой алгебры $\mathcal{A} \in \mathfrak{U}$ P индуцирует $\mathbf{H}$-отношение $\ll$ [в $\mathbf{Lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$] по правилу*

$$I \ll J, \text{ если } I \subset J \text{ и } J/I = P(J/I).$$

Доказательство. Пусть $I, J, K \in \mathbf{lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$, $I \subset J$, $I \subset K$, $J/I = P(J/I)$.

Предположим, что P — алгебраический радикал. Положим $M = J + K$ и $f : J/I \longrightarrow M/K$ — стандартный морфизм. Тогда $f(J/I) = f(P(J/I)) \subset P(M/K)$ по аксиоме 1. Но $f(J/I) = M/K$, поэтому $M/K = P(M/K)$.

Пусть теперь P — топологический радикал и $I, J, K \in \mathbf{Lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$. При $M = \overline{J+K}$ получим $f(J/I) = f(P(J/I)) \subset P(M/K)$. Но образ $f(J/I)$ плотен в M/K, отсюда $P(M/K)$ плотен в M/K. Значит, $P(M/K) = M/K$. □

Важный смысл этого предложения в том, что многие утверждения, известные об $\mathbf{H}$-отношениях, могут с успехом интерпретироваться для топологических и алгебраических радикалов, и даже для предрадикалов.

2.2.1. Дополнения отношения. Следуя Амицуру, для любого $\ll$ из $\mathrm{Ref}(Q,\leqslant)$ определим *нижнее дополнение* $\overrightarrow{\lessgtr}$ из $\mathrm{Ref}(Q,\leqslant)$ и *верхнее дополнение* $\overleftarrow{\lessgtr}$ из $\mathrm{Ref}(Q,\leqslant)$ следующим образом: для $a \leqslant b$ положим

$$a \overrightarrow{\lessgtr} b, \text{ если } [a,\ll] \cap [a,b] = \{a\};\ a \overleftarrow{\lessgtr} b, \text{ если } [\ll, b] \cap [a,b] = \{b\}, \tag{2.4}$$

где $[a,b] = \{x \in Q : a \leqslant x \leqslant b\}$, $[a,\ll] = \{x \in Q : a \ll x\}$, $[\ll, b] = \{x \in Q : x \ll b\}$.

Для $Q = \mathbf{lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$ интерпретация дополнений в терминах выделенного свойства $\mathcal{P}$ (см. (2.2)) достаточно элементарна. Действительно, $a \overrightarrow{\lessgtr} b$ означает, что алгебра x/a $\mathcal{P}$-полупроста для любого идеала x, удовлетворяющего цепочке $a \subset x \subset b$; в то время как $a \overleftarrow{\lessgtr} b$ — что b/x $\mathcal{P}$-полупроста для любого идеала x, удовлетворяющего цепочке $a \subset x \subset b$.

2.2.2. Радикалы полных решеток и отношений. Пусть $\ll$ — это какое-либо отношение из $\mathrm{Ref}(Q,\leqslant)$. Пишем $\mathbf{0}$ или $\mathbf{0}_Q$ в качестве $\wedge Q$ и $\mathbf{1}$ или $\mathbf{1}_Q$ в качестве $\vee Q$. Элемент $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\ll} \in Q$ называется $\ll$-*радикалом* в Q или *радикалом отношения* $\ll$ в Q, если выполнена цепочка

$$\mathbf{0} \ll \mathbf{r} \overleftarrow{\lessgtr} \mathbf{1}. \tag{2.5}$$

Аналогично, элемент $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{\ll} \in Q$ называется *дуальным* $\ll$-*радикалом* в Q или *дуальным радикалом отношения* $\ll$ в Q, если выполнена цепочка

$$\mathbf{0} \overrightarrow{\lessgtr} \mathbf{p} \ll \mathbf{1}. \tag{2.6}$$

Для $Q = \mathbf{lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$ мы увидим из соотношения (2.5), что $\mathbf{r}$ — $\mathcal{P}$-идеал (свойство $\mathcal{P}$ между идеалами a и b означает как обычно $a \ll b$), в то время как алгебра $\mathcal{A}/x$ $\mathcal{P}$-полупроста для любого идеала x, удовлетворяющего $\mathbf{r} \leqslant x$.

Произвольное отношение может иметь разное количество радикалов, вплоть до пустого множества.

2.2.3. Элементарные отношения и $\mathbf{R}$*-порядки.* Суть рассмотрения элементарных отношений — это то обстоятельство, что с их помощью можно выбрать отношения с разным букетом свойств, в том числе $\mathbf{H}$-отношения и дуальные $\mathbf{H}$-отношения.

Отношение $\ll$ из $\mathrm{Ref}(Q, \leqslant)$ называется *примыкающим сверху*, если $a \ll b$ влечет $[a, b] \subset [\ll, b]$ для всех $a, b \in Q$; *сбалансированным сверху*, если $a \wedge b \ll b$ влечет $a \ll a \vee b$ для всех $a, b \in Q$; *расширенным сверху,* если $[a, \ll]$ $\vee$-полно для всех $a \in Q$.

Напомним, $\vee$*-полнота* множества $G \subset Q$ означает, что $G = G^{\vee} := \{\vee M : M \subset G\}$; G $\wedge$*-полно в* Q, если $G = G^{\wedge} := \{\wedge M : M \subset G\}$, и *полно в* Q, если $G = G^{\vee} = G^{\wedge}$.

Легко видеть, что $\mathbf{H}$-отношения — это в точности примыкающие и сбалансированные сверху отношения из $\mathrm{Ref}(Q, \leqslant)$. Другая важная характеристика: отношение $\ll$ из $\mathrm{Ref}(Q, \leqslant)$ является $\mathbf{H}$-отношением тогда и только тогда, когда $a \ll b$ влечет $a \vee x \ll b \vee x$ для всех $a, b, x \in Q$.

Если $\mathbf{H}$-отношение транзитивно, то оно называется $\mathbf{H}$*-порядком*. Расширенный сверху $\mathbf{H}$-порядок называется $\mathbf{R}$*-порядком*.

$\mathbf{R}$-порядки были (иным, но эквивалентным способом) введены Амицуром [15], назвавшим их $\mathbf{R}$-отношениями.

2.2.4. Двойственность. Двойственной решеткой $(Q^{\circ}, \leqslant^{\circ})$ к $(Q, \leqslant)$ называется решетка Q°, совпадающая с Q как множество, с противоположно определенным отношением: $b \leqslant^{\circ} a$, если только $a \leqslant b$, для всех $a, b \in Q$. Если $(Q, \leqslant)$ — полная решетка, то $(Q^{\circ}, \leqslant^{\circ})$ тоже.

Двойственность заключается в равенстве $(Q^{\circ\circ}, \leqslant^{\circ\circ}) = (Q, \leqslant)$. Если $\ll$ из $\mathrm{Ref}(Q, \leqslant)$, то противоположно определенное отношение $\ll^{\circ}$ также из $\mathrm{Ref}(Q^{\circ}, \leqslant^{\circ})$. Отношение $\ll$ определим *примыкающим снизу, сбалансированным снизу, расширенным снизу*, если $\ll^{\circ}$ обладает соответствуюшим свойством *сверху*. Таким образом, $\ll$ примыкает снизу, если $a \ll b$ влечет $[a, b] \subset [a, \ll]$ для всех $a, b \in Q$; сбалансировано снизу, если $a \ll a \vee b$ влечет $a \wedge b \ll b$ для всех $a, b \in Q$; расширено снизу, если $[\ll, a]$ $\wedge$-полно для всех $a \in Q$.

Аналогично, через двойственные решетки, определяются «двойственные» понятия: *дуальные* $\mathbf{H}$-отношения, $\mathbf{H}$-порядки, $\mathbf{R}$-порядки.

Согласно принципу двойственности, двойственно формулируемые результаты для $\ll$ в $(Q, \leqslant)$ следуют из соответствующих «прямых» результатов для $\ll^{\circ}$ в $(Q^{\circ}, \leqslant^{\circ})$.

2.2.5. Радикалы $\mathbf{H}$*-отношений и* $\mathbf{R}$*-порядков.* Важность этих и вводимых ниже понятий заключается в рассмотрении условий (2.5) и (2.6), когда $\ll$ является $\mathbf{H}$-отношением или дуальным $\mathbf{H}$-отношением. Амицур [15] показал, что (дуальное) $\mathbf{H}$-отношение может иметь не более одного (дуального) радикала; существование же (дуальных) радикалов доказано лишь для (дуальных) $\mathbf{R}$-порядков.

Если $\ll$ есть $\mathbf{H}$-отношение, то $\overleftarrow{\ll}$ есть дуальный $\mathbf{R}$-порядок; если $\ll$ является дуальным $\mathbf{H}$-отношением, то $\overrightarrow{\ll}$ есть $\mathbf{R}$-порядок. Таким образом, мы очевидно получаем, что для радикала $\mathbf{r}$ $\mathbf{H}$-отношения $\ll$, если он существует, выполнено условие

$$\mathbf{0} \overset{\rightleftarrows}{\ll} \mathbf{r} \overleftarrow{\ll} \mathbf{1}, \tag{2.7}$$

при этом $\mathbf{r}$ как радикал отношения $\overset{\rightleftarrows}{\ll}$ существует; для дуального радикала $\mathbf{p}$ дуального $\mathbf{H}$-отношения $\ll$, если он существует, верно

$$\mathbf{0} \overrightarrow{\ll} \mathbf{p} \overset{\leftrightarrows}{\ll} \mathbf{1}, \tag{2.8}$$

при этом $\mathbf{p}$ как дуальный радикал отношения $\overset{\leftrightarrows}{\ll}$ существует. Важно отметить, что $\mathbf{r}$ можно рассматривать как дуальный радикал отношения $\overleftarrow{\ll}$, и $\mathbf{p}$ как радикал отношения $\overrightarrow{\ll}$. В этом проявляется *двойственная природа* радикалов и дуальных радикалов отношений.

2.2.6. Арифметика правых и левых дополнений. Можно ожидать наличия дополнительных удобных свойств у отношения $\overleftarrow{\ll}$ (или $\overrightarrow{\ll}$) для обычных отношений $\ll$ из $\mathrm{Ref}(Q, \leqslant)$. Действительно, $\overleftarrow{\ll}$ очевидным образом *примыкает сверху*, и множество $[a, \overleftarrow{\ll}]$ $\wedge$-полно для любого $a \in Q$.

Еще более важными свойствами обладает отношение $\overset{\rightleftarrows}{\ll}$. Множество G в Q называется *нижним* $\ll$*-множеством*, если каждый элемент $x \in G \setminus \{\wedge G\}$ имеет $\ll$-предшествующий элемент $y \in G$, т. е. такой, что $x \neq y$ и $y \ll x$. Двойственно определяются верхние $\ll$-множества.

Определим $a \ll^{\mathrm{lo}} b$, если $[a,b]$ — нижнее $\ll$-множество; $a \ll^{\mathrm{up}} b$, если $[a,b]$ — верхнее $\ll$-множество. Оказывается, что $\overset{\rightleftarrows}{\ll} = \ll^{\mathrm{up}}$ и $\overset{\leftrightarrows}{\ll} = \ll^{\mathrm{lo}}$, и на втором шаге наступает стабилизация:

$$\ll^{\mathrm{up}} = (\ll^{\mathrm{up}})^{\mathrm{up}}, \qquad \ll^{\mathrm{lo}} = \left(\ll^{\mathrm{lo}}\right)^{\mathrm{lo}}. \tag{2.9}$$

Смысл этих отношений в том, что, имея их в распоряжении, легко строить убывающие или возрастающие трансфинитные последовательности (от какого-то элемента, чаще всего от $\mathbf{0}$ или $\mathbf{1}$) до радикалов и дуальных радикалов отношений с выделенным свойством между элементами.

2.2.7. Цепи. Напомним, что *цепью* в решетке Q называют всякое тотально упорядоченное подмножество в Q (в такой цепи либо $a \leqslant b$, либо $b \leqslant a$ для всех a, b). Под цепью C от a до b понимаем цепь, в которой $a = \wedge C$ и $b = \vee C$; такую цепь называют *нижней $\ll$-разрывной цепью*, если каждый элемент $x \in C \setminus \{a\}$ имеет непосредственно $\ll$-предшествующий элемент $y \in C$, т. е. такой, что $y \ll x$ и $[y,x] \cap C = \{y,x\}$. Двойственным образом определяются *верхние $\ll$-разрывные цепи*.

Наиболее важны цепи, обладающие той или иной степенью полноты. Так, если $\wedge$-полная нижняя $\ll$-разрывная цепь C содержит $\vee C$, то она полна. Полная нижняя $\ll$-разрывная цепь есть в иных терминах *убывающий композиционный $\ll$-ряд* (*убывающая трансфинитная $\ll$-последовательность*) $(x_\alpha)_{1 \leqslant \alpha \leqslant \gamma}$ от $x_1 = b$ до $x_\gamma = a$ с правилом $x_{\alpha+1} \ll x_\alpha$ для любого ординала $\alpha < \gamma$ и $x_\beta = \wedge_{\alpha<\beta}\{x_\alpha\}$ для любого предельного ординала $\beta \leqslant \gamma$. Также, полная верхняя $\ll$-разрывная цепь есть *возрастающий композиционный $\ll$-ряд* (*возрастающая трансфинитная $\ll$-последовательность*) $(x_\alpha)_{1 \leqslant \alpha \leqslant \gamma}$ от $x_1 = a$ до $x_\gamma = b$ с правилом $x_\alpha \ll x_{\alpha+1}$ для любого ординала $\alpha < \gamma$ и $x_\beta = \vee_{\alpha<\beta}\{x_\alpha\}$ для любого предельного ординала $\beta \leqslant \gamma$.

Для $\ll$ из $\mathrm{Ref}(Q, \leqslant)$ определим отношения $\ll^{\triangleleft}$ и $\ll^{\triangleright}$ из $\mathrm{Ref}(Q, \leqslant)$, полагая $a \ll^{\triangleleft} b$, если найдется полная нижняя $\ll$-разрывная цепь C от a до b, и $a \ll^{\triangleright} b$, если найдется полная верхняя $\ll$-разрывная цепь C от a до b. Можно показать, что если $\ll$ является $\mathbf{H}$-отношением, то

$$\ll^{\mathrm{up}} = \ll^{\triangleright} = (\ll^{\triangleright})^{\triangleright} \text{ есть } \mathbf{R}\text{-порядок и}$$
$$\overleftarrow{\ll} = \overleftarrow{\ll^{\triangleright}} = (\overleftarrow{\ll})^{\triangleleft} = (\overleftarrow{\ll})^{\mathrm{lo}} \text{ есть дуальный } \mathbf{R}\text{-порядок,}$$

причем $\ll$ является на деле $\mathbf{R}$-порядком тогда и только тогда, когда $\ll = \ll^{\triangleright}$.

2.2.8. Радикалы полных подрешеток. Можно показать, что если $\ll$ есть *расширенный сверху порядок*, то $\mathbf{r} = \vee[\mathbf{0}, \ll]$ есть $\ll$-радикал в Q; если к тому же $\ll$ *примыкает сверху,* то $\mathbf{r}$ — единственный в Q $\ll$-радикал. Тогда при этих условиях для любого $a \in Q$ существует единственный $\ll$-радикал $\mathbf{r}_{\ll}(a) := \mathbf{r}(a)$ в *подрешетке* $[a, \mathbf{1}]$,

$$a \ll \mathbf{r}(a) \overleftarrow{\ll} \mathbf{1}, \tag{2.10}$$

причем $\mathbf{r}(a) = \vee[a, \ll]$ есть наибольший элемент в $[a, \ll]$, $\mathbf{r}(\mathbf{r}(a)) = \mathbf{r}(a)$ и $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ при $a \ll b$ или при $a \leqslant b \leqslant \mathbf{r}(a)$. Если вдобавок $\ll$ примыкает снизу, то $[a, \ll]$ есть просто весь отрезок $[a, \mathbf{1}]$.

Итак, если $\ll$ есть *расширенный сверху и примыкающий сверху порядок*, то радикал $\mathbf{r}_{[\mathbf{0},x]}$ отношения $\ll$ в отрезке $[\mathbf{0}, x]$ не превосходит $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{0})$ для любого $x \in Q$ и совпадает с $\mathbf{r}$ при $x = \mathbf{r}$; в отрезке $[\mathbf{r}, \mathbf{1}]$ нет отношений $\mathbf{r} \ll y$ при $\mathbf{r} \neq y$ ($\mathbf{r} \ll y$ вкупе с $\mathbf{0} \ll \mathbf{r}$ дает $\mathbf{0} \ll y \leqslant \vee[\mathbf{0}, \ll] = \mathbf{r}$).

Напомним, что в решетке Q [замкнутых] идеалов [нормированной] алгебры $\mathcal{A}$ отрезок $[a,b]$ интерпретируется как соответствующая решетка идеалов алгебры b/a, а отношение $\ll$ из $\mathrm{Ref}(Q, \leqslant)$ как некое «радикальное» свойство (отображение) P между идеалами a и b: $b/a = P(b/a)$.

Таким образом, *если $\ll$ есть расширенный сверху и примыкающий сверху порядок в решетке $Q = \mathbf{lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$ [соответственно, $\mathbf{Lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$], то $P(P(\mathcal{A})) = P(\mathcal{A})$, $P(\mathcal{A}/P(\mathcal{A})) = 0$, $P(I) \subset P(\mathcal{A})$ и $P(I)$ — идеал для любого идеала I алгебры A.* т. е., для «радикального» отображения P и алгебры $\mathcal{A}$ выполнены аксиомы 2, 3 и фактически аксиома 4 [топологических] радикалов [нормированных] алгебр.

Двойственно для общих полных решеток Q, если $\ll$ есть *расширенный снизу порядок*, то $\mathbf{p} = \wedge[\ll, \mathbf{1}]$ есть дуальный $\ll$-радикал в Q; если к тому же $\ll$ *примыкает снизу,* то $\mathbf{p}$ —

единственный в Q дуальный $\ll$-радикал. При этих же условиях для любого $b \in Q$ существует единственный дуальный $\ll$-радикал $\mathbf{p}_{\ll}(b) := \mathbf{p}(b)$ в *подрешетке* $[\mathbf{0}, b]$,

$$\mathbf{0} \overrightarrow{\ll} \mathbf{p}(b) \ll b, \tag{2.11}$$

причем $\mathbf{p}(b) = \wedge[\ll, b]$ есть наименьший элемент в $[\ll, b]$, $\mathbf{p}(\mathbf{p}(b)) = \mathbf{p}(b)$ и $\mathbf{p}(a) = \mathbf{p}(b)$ при $a \ll b$ или при $\mathbf{p}(b) \leqslant a \leqslant b$. Если вдобавок $\ll$ примыкает сверху, то $[\ll, b]$ есть просто весь отрезок $[\mathbf{0}, b]$.

Предположим для простоты, что отношение $\ll$ взято из $\mathrm{Ref}(Q, \leqslant)$ и $\overleftarrow{\ll}$ является дуальным $\mathbf{R}$-порядком и, в частности, является *расширенным снизу и примыкающим снизу порядком*. Например, это происходит, когда $\ll$ является $\mathbf{H}$-отношением и при этом если существует радикал $\mathbf{r}_{\ll}$ отношения $\ll$, то $\mathbf{r}_{\ll}$ совпадает с дуальным радикалом $\mathbf{p}$ отношения $\overleftarrow{\ll}$. В любом случае отношение $\overleftrightarrows{\ll}$ является $\mathbf{R}$-порядком и его радикал совпадает с $\mathbf{p}$. Следовательно, для решетки идеалов [нормированной] алгебры $\mathcal{A}$ дуальный $\mathbf{R}$-порядок $\overleftarrow{\ll}$ индуцирует *радикальное свойство* (*отображение*) $\mathcal{P}$ между идеалами посредством отношения $\overleftrightarrows{\ll}$: $b/a = \mathcal{P}(b/a)$, если только $a \overleftrightarrows{\ll} b$, в то время как само отношение $\overleftarrow{\ll}$ индуцирует *полупростое свойство* $\mathcal{S}$ между идеалами: $\mathcal{S}(b/a) = 0$, если только $a \overleftarrow{\ll} b$. При этом для отображения $\mathcal{P}$ и алгебры $\mathcal{A}$ выполнены формально аксиомы 2–4 радикалов алгебр.

2.2.9. Изоморфизм решеток. Допустим, что $F : (Q, \leqslant) \longrightarrow (Q', \leqslant')$ является изоморфизмом решеток в том смысле, что $a \leqslant b$ есть то же самое, что $F(a) \leqslant' F(b)$. Допустим, что решетки полны. Тогда F — *изоморфизм полных решеток*, т. е. $\wedge F(G) = F(\wedge G)$ и $\vee F(G) = F(\vee G)$ для любого $G \subset Q$. В частности, $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}'$ и $F(\mathbf{1}) = \mathbf{1}'$.

Если отношение $\ll$ взято из $\mathrm{Ref}(Q, \leqslant)$, то оно индуцирует отношение $\ll'$ из $\mathrm{Ref}(Q', \leqslant')$ по правилу $F(a) \ll' F(b)$, если имеет место $a \ll b$. Пишем: $\ll'$ есть $F(\ll)$ (тем самым F распространяется как изоморфизм полных решеток $\mathrm{Ref}(Q, \leqslant)$ и $\mathrm{Ref}(Q', \leqslant')$). Изоморфизм F переносит свойства отношения $\ll$ в свойства $\ll'$: к примеру, если $\ll$ является $\mathbf{H}$-отношением ($\mathbf{R}$-порядком), то и $\ll'$ является $\mathbf{H}$-отношением ($\mathbf{R}$-порядком). Верно и обратное, поскольку $\ll$ есть $F^{-1}(\ll')$.

Нетрудно заметить, что левое и правые дополнения сохраняются произвольным изоморфизмом решеток. При этом $F(\overleftarrow{\ll}) = \overleftarrow{F(\ll)}$ и $F(\overrightarrow{\ll}) = \overrightarrow{F(\ll)}$. Следовательно, если $\ll$ является $\mathbf{R}$-порядком, то его радикал $\mathbf{r}_{\ll}$ переходит в радикал $\mathbf{r}_{F(\ll)}$ отношения $F(\ll)$; соответственно, дуальный радикал $\mathbf{p}_{\ll}$ дуального $\mathbf{R}$-порядка $\ll$ переходит в дуальный радикал $\mathbf{p}_{F(\ll)}$ дуального $\mathbf{R}$-порядка $F(\ll)$.

В связи с изоморфизмами рассмотрим решетки [нормированных] алгебр. В частности, удобно разбить аксиому 1 [топологических] (пред)радикалов на два следующих условия.

Отображение P, сопоставляющее каждой алгебре $\mathcal{A}$ из класса $\mathfrak{U}$ [нормированных] алгебр [замкнутый] идеал $P(\mathcal{A})$, называется [*топологическим*] *предрадикалом,* если выполнены

Аксиома 1.1. *$P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{A}')$ для любого [открытого непрерывного] изоморфизма $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$.*

Аксиома 1.2. *$(P(\mathcal{A}) + I)/I \subset P(\mathcal{A}/I)$ [в топологическом случае $\overline{(P(\mathcal{A}) + I)}/I \subset P(\mathcal{A}/I)$] для любого [замкнутого] идеала I алгебры $\mathcal{A}$.*

Понятно, что изоморфизм f алгебр индуцирует изоморфизм F_f их решеток идеалов. Обратное неверно, что определяет трудности непосредственной ассоциации (дуальных) $\mathbf{R}$-порядков с радикалами алгебр.

2.2.10. $\mathbf{R}$*-порядки и радикалы алгебр.* Наша задача здесь — показать, что у $\mathbf{R}$-порядка $\ll$, заданного на решетке идеалов алгебры, нет проблем с выполнением аксиомы 1.2. Действительно, если $\ll$ — $\mathbf{R}$-порядок в полной решетке $(Q, \leqslant)$, то радикал $\mathbf{r}_{\ll}$ существует и отношение $\mathbf{0} \ll \mathbf{r}_{\ll}$ влечет $x = \mathbf{0} \vee x \ll \mathbf{r}_{\ll} \vee x$, поскольку $\ll$ — $\mathbf{H}$-отношение. Рассматривая теперь в качестве Q решетку идеалов алгебры $\mathcal{A}$ и радикальное свойство P, индуцированное отношением $\ll$, получим, что

$$\mathbf{0}_{\mathcal{A}/x} = x/x \ll (\mathbf{r}_{\ll} \vee x)/x \leqslant \vee\left[\mathbf{0}_{\mathcal{A}/x}, \ll\right] = \mathbf{r}_{\mathcal{A}/x} = P(\mathcal{A}/x),$$

где $\mathbf{r}_{\mathcal{A}/x} = P(\mathcal{A}/x)$ есть радикал алгебры $\mathcal{A}/x$, $\mathbf{r}_{\ll}$ есть радикал $P(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A}$, $(\mathbf{r}_{\ll} \vee x)/x$ есть $(P(\mathcal{A}) + I)/I \subset P(\mathcal{A}/I)$ в решетке $\mathbf{lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$ [или $\overline{(P(\mathcal{A}) + I)}/I \subset P(\mathcal{A}/I)$ в решетке $\mathbf{Lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$] при $x = I$.

Таким образом, *если* $\ll$ *есть* $\mathbf{R}$*-порядок в решетке идеалов* [*нормированной*] *алгебры* $\mathcal{A}$, то соответствующее радикальное *свойство* (*отображение*) P ($a \ll b$ равносильно $b/a = P(b/a)$) *на решетке идеалов алгебры* $\mathcal{A}$ *удовлетворяет аксиомам* 1.2, 2, 3, 4 [*топологических*] *радикалов.*

3. Топологические радикалы банаховых алгебр

В оставшейся части работы будут рассмотрены некоторые результаты теории топологических радикалов и связанные с ними проблемы, возникающие в различных областях функционального анализа и теории операторов. Хотя для обсуждения некоторых из этих задач было бы удобнее работать с радикалами, определенными на более обширных классах нормированных алгебр, мы здесь ограничиваемся рассмотрением радикалов банаховых алгебр, руководствуясь, во-первых, нежеланием слишком усложнять изложение и, во-вторых, стремлением избежать необузданного увеличения объема статьи. Изучению радикалов нормированных алгебр, так же как и освещению не затронутых здесь направлений теории топологических радикалов авторы надеются посвятить продолжение данной работы.

В связи с тем, что мы будем заниматься исключительно банаховыми алгебрами, представляется целесообразным повторить определение топологического радикала в варианте, рассчитанном именно на этот случай.

Итак, *топологический радикал* на классе всех банаховых алгебр — это отображение P, сопоставляющее каждой банаховой алгебре A ее замкнутый идеал $P(A)$ и удовлетворяющее условиям:

(R1) $f(P(A)) \subset P(B)$ для любого непрерывного эпиморфизма $f : A \to B$.
(R2) $P(A/P(A)) = 0$.
(R3) $P(P(A)) = P(A)$.
(R4) Если J — замкнутый идеал алгебры A, то $P(J)$ — идеал алгебры A, содержащийся в $P(A)$.

Алгебра называется *P-радикальной*, если $A = P(A)$. Можно показать (см. [73, следствие 2.8 и теорема 2.9(i)]), что для любого радикала P класс всех P-радикальных алгебр устойчив относительно расширений (это означает, что если идеал J алгебры A и фактор-алгебра A/J P-радикальны, то A также P-радикальна). Важно, что это свойство выполняется в значительно более общем варианте.

Назовем занумерованное ординалами семейство $(J_\alpha)_{\alpha\leqslant\gamma}$ идеалов алгебры A, содержащихся в некотором идеале J алгебры A, *возрастающей трансфинитной цепочкой* идеалов, если $J_\alpha \subset J_\beta$ при $\alpha < \beta$ и $J_\beta = \overline{\bigcup_{\alpha<\beta} J_\alpha}$ для любого предельного ординала $\beta \leqslant \gamma$, и *убывающей трансфинитной цепочкой,* если $J_\beta \subset J_\alpha$ при $\alpha < \beta$ и $J_\beta = \bigcap_{\alpha<\beta} J_\alpha$ для любого предельного ординала $\beta \leqslant \gamma$. Следующий результат выводится из [73, теоремы 2.9(i) и 2.10(i)]; он естественно переносится в контекст радикалов на решетках и играет важную роль в этой общей теории.

Лемма 3.1. *Пусть P — топологический радикал. Если в возрастающей трансфинитной цепочке $(J_\alpha)_{\alpha\leqslant\gamma}$ идеалов банаховой алгебры A первый идеал J_0 и все факторы $J_{\alpha+1}/J_\alpha$ P-радикальны, то и ее последний элемент J_γ P-радикален.*

Мы в основном будем иметь дело с радикалами, обладающими удобными дополнительными свойствами.

Топологический радикал P называется *наследственным*, если выполняется условие

(R5) $P(J) = J \cap P(A)$ для любого идеала J алгебры A.

Далее, P называется *равномерным*, если все замкнутые подалгебры произвольной P-радикальной алгебры P-радикальны.

Легко видеть, что равномерные радикалы наследственны, и что (R5) влечет (R3) и (R4). Поэтому наследственные радикалы можно определять условиями (R1), (R2) и (R5), чем мы и будем пользоваться в дальнейшем.

Будем называть *банаховым идеалом* банаховой алгебры A ее идеал J, полный относительно нормы $\|\cdot\|_J$, которая связана с нормой в A условием $\|x\|_A \leqslant C\|x\|_J$ для всех $x \in J$.

Радикал P называется *гибко наследственным*, если

$$P(J, \|\cdot\|_J) = J \cap P(A)$$

для любого банахова идеала J алгебры A.

Эквивалентное условие: если $f : L \to A$ — непрерывный гомоморфизм банаховых алгебр, образ которого является идеалом алгебры A, то

$$f(P(L)) = f(L) \cap P(A).$$

В классе всех (топологических) радикалов введем частичный порядок, полагая $P_1 \leqslant P_2$, если $P_1(A) \subset P_2(A)$ для любой банаховой алгебры.

Лемма 3.2.

a) *Любое семейство радикалов $\{P_i : i \in \Lambda\}$ имеет точную верхнюю грань $\vee_i P_i$ и точную нижнюю грань $\wedge_i P_i$ в классе всех топологических радикалов.*

b) *Пусть $P = \vee\{P_i : i \in \Lambda\}$. В любой алгебре A существует возрастающая трансфинитная цепочка замкнутых идеалов $(J_\alpha)_{\alpha \leqslant \gamma}$, такая что $J_0 = 0$, $J_\gamma = P(A)$ и каждая фактор-алгебра $J_{\alpha+1}/J_\alpha$ является P_i-радикальной для некоторого i.*

c) *Если все P_i наследственны, то радикал $\wedge\{P_i : i \in \Lambda\}$ является наследственным и сопоставляет каждой алгебре A идеал $\bigcap\limits_i P_i(A)$.*

Мы будем использовать символ a/J (вместо более привычного $a + J$) для обозначения образа элемента a алгебры A в ее фактор-алгебре A/J по идеалу J при каноническом эпиморфизме $q_J : A \to A/J$.

Как и в чисто алгебраической теории, многие важные топологические радикалы строятся с помощью специальных процедур из отображений, удовлетворяющих не всем условиям (R1)–(R4). Будем называть *топологическим предрадикалом* любое отображение P, сопоставляющее каждой банаховой алгебре A ее замкнутый идеал $P(A)$ и удовлетворяющее условию (R1). Если для P выполнены все условия (R1)–(R4), кроме, возможно, (R2) (или (R3)), то P называется подрадикалом (соответственно, надрадикалом).

Опишем подробнее предложенный Диксоном [37] топологический вариант *верхней процедуры Бэра*, сопоставляющей каждому предрадикалу P новый предрадикал P^*. В этой конструкции для любой банаховой алгебры A следующим образом строится трансфинитная последовательность идеалов $P_\alpha(A)$:

$$P_0(A) = P(A), \quad P_{\alpha+1}(A) = \{x \in A : x/P_\alpha(A) \in P(A/P_\alpha(A))\},$$

$$P_\alpha(A) = \overline{\bigcup_{\beta<\alpha} P_\beta(A)}, \quad \text{если } \alpha \text{ — предельный ординал.}$$

Эта цепочка стабилизируется на каком-то ординале γ, и мы полагаем $P^*(A) = P_\gamma(A)$.

Теорема 3.3 (см. [37]). *Если P — подрадикал, то P^* — топологический радикал. Он является наименьшим из всех радикалов R, мажорирующих P (в том смысле что $P(A) \subset R(A)$ для всех A).*

При достаточно слабых ограничениях на P из наследственности P следует наследственность P^*. Чтобы сформулировать результат более точно, назовем предрадикал P *правильным*, если все нильпотентные алгебры P-радикальны.

Теорема 3.4 (см. [75, теорема 4.30]). *Если правильный подрадикал P является наследственным, то и радикал P^* — наследственный.*

Часто бывает удобно увеличить радикал P таким образом, чтобы класс радикальных алгебр включал в себя все коммутативные банаховы алгебры. Соответствующая процедура называется *централизацией*. Положим

$$P^a(A) = \{x \in A : x[a, b] \in P(A) \text{ для любых } a, b \in A\}.$$

Теорема 3.5 (см. [75, теорема 4.30]).

(i) *Для любого правильного радикала P отображение $P^a : A \mapsto P^a(A)$ является подрадикалом.*

(ii) *Если P — наследственный радикал, то предрадикал P^a также наследственный.*

(iii) *Если P — гибко наследственный радикал, то P^a является радикалом.*

Как известно, одним из сильнейших технических средств теории банаховых алгебр является изучение неприводимых представлений и их ядер, примитивных идеалов. В теории топологических радикалов этому подходу соответствует следующая процедура *примитивизации* радикала.

Пусть P — топологический радикал. Обозначая через $\mathrm{Prim}(A)$ пространство примитивных идеалов банаховой алгебры A, положим

$$P^p(A) = \{x \in A : x/I \in P(A/I) \text{ для любого } I \in \mathrm{Prim}(A)\}.$$

Теорема 3.6 (см. [75, теорема 7.7]). *Если радикал P является гибко наследственным, то отображение $P^p : A \mapsto P^p(A)$ — наследственный подрадикал.*

Вскоре мы увидим, что P^p не обязан быть радикалом, даже если радикал P наследственный.

Заметим, что если в качестве P взять *тривиальный радикал*, сопоставляющий каждой алгебре ее нулевой идеал, то P^p — это радикал Джекобсона Rad. Напомним, что если термины «радикальный», «радикал» и т. д. употребляются без пояснения, какой радикал имеется в виду, то речь идет о радикале Джекобсона. Нетрудно проверить непосредственно, что Rad — это правильный и гибко наследственный топологический радикал.

4. Рассеянный радикал и непрерывность спектра

4.1. Счетность спектра. Для любой банаховой алгебры A обозначим через $S(A)$ множество всех ее элементов, имеющих (не более чем) счетный спектр. Если $S(A) = A$, то алгебра A называется *рассеянной*.

Следующий часто используемый в дальнейшем результат показывает, что свойство счетности спектра элемента устойчиво по отношению к выбору содержащей его подалгебры.

Предложение 4.1. *Пусть A — унитальная банахова алгебра, а B — подалгебра в A, содержащая единицу алгебры A. Пусть $\|\cdot\|_B$ — некоторая норма на B, относительно которой B полна, причем $\|a\|_A \leqslant \|a\|_B$ для всех $a \in B$. Тогда*:

(i) *для любого $a \in B$ имеет место включение $\sigma_A(a) \subset \sigma_B(a)$, причем всякое открыто-замкнутое подмножество в $\sigma_B(a)$ имеет ненулевое пересечение с полиномиально выпуклой оболочкой множества $\sigma_A(a)$*;

(ii) *если $\sigma_B(a)$ конечен или счетен, то $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.*

В частности, говоря о рассеянной подалгебре, можно не уточнять, в каком смысле это нужно понимать.

Замкнутый идеал $I \subset A$ называется *тонким*, если для любого элемента $a \in A$ полиномиальная оболочка спектра $pc(\sigma(a/I))$ его образа a/I в A/I отличается от $\sigma(a)$ не более, чем на счетное множество. Легко видеть, что все тонкие идеалы являются рассеянными алгебрами.

Теорема 4.2. *В любой банаховой алгебре существует наибольший рассеянный идеал. Этот идеал, который мы будем обозначать $\mathcal{R}_s(A)$, замкнут и обладает следующими свойствами*:

(i) *$\mathcal{R}_s(A)$ содержит все односторонние (даже не замкнутые) рассеянные идеалы.*

(ii) *$\mathcal{R}_s(A)$ является наибольшим тонким идеалом.*

(iii) *$\mathcal{R}_s(A) = \{a \in A : \sigma(ax)$ счетен $\forall x \in A\}$.*

(iv) *$\mathcal{R}_s(A) + S(A) \subset S(A)$.*

Теорема 4.3. *Отображение $A \mapsto \mathcal{R}_s(A)$ является равномерным топологическим радикалом.*

Так как всякий равномерный радикал является наследственным, то из теоремы 4.2 следует, что $\mathcal{R}_s$ — наследственный радикал. Это утверждение можно существенно усилить:

Теорема 4.4. *Радикал $\mathcal{R}_s$ является гибко наследственным.*

Доказательства перечисленных утверждений существенно используют то обстоятельство, что $\mathcal{R}_s$ является сужением на класс банаховых алгебр некоторого алгебраического радикала. Он строится с помощью верхней процедуры Бэра из предрадикала psoc, который ставит в соответствие алгебре A ее идеал $\{x \in A : x/\mathrm{rad}(A) \in \mathrm{soc}(A/\mathrm{rad}(A))\}$. Здесь rad — это радикал Джекобсона на классе всех алгебр, а отображение soc сопоставляет любой алгебре сумму ее минимальных левых идеалов.

Следствие 4.5. *Если $f : A \to B$ — не обязательно непрерывный эпимоморфизм банаховых алгебр, то $f(\mathcal{R}_s(A)) \subset \mathcal{R}_s(B)$.*

Теорема 4.6. *Если алгебра A рассеянна, то*

(i) *классы эквивалентности ее неприводимых представлений полностью определяются своими ядрами*;
(ii) *пространство* $\mathrm{Prim}(A)$ *дисперсно* (*любое замкнутое подмножество имеет изолированную точку*);
(iii) *если A сепарабельна, то* $\mathrm{Prim}(A)$ *счетно.*

Банахова алгебра называется *наследственно полупростой*, если все ее фактор-алгебры полупросты. Эквивалентное условие: каждый замкнутый идеал — пересечение некоторого семейства примитивных идеалов (в коммутативном случае это условие называют свойством спектрального синтеза).

Теорема 4.7. *Наследственно полупростая банахова алгебра A рассеянна тогда и только тогда, когда каждая ненулевая ее фактор-алгебра имеет минимальные ненулевые левые идеалы.*

Так как всякая C*-алгебра наследственно полупроста, то отсюда можно получить ряд эквивалентных условий рассеянности C*-алгебр; мы приведем лишь небольшую часть этого длинного списка; другие характеризации можно найти в работе М. Кусуды [54].

Следствие 4.8. *Для C*-алгебры A следующие условия эквивалентны*:

(i) *A рассеянна*;
(ii) *A типа 1 и пространство максимальных идеалов ее центра дисперсно*;
(iii) *A типа 1 и пространство* $\mathrm{Prim}(A)$ *дисперсно*;
(iv) *всякий самосопряженный элемент $a \in A$ имеет счетный спектр*;
(v) *всякая ненулевая фактор-алгебра алгебры A имеет минимальный проектор.*

4.2. Спектральная непрерывность. Пусть A — банахова алгебра. Мы говорим, что спектр *непрерывен* в точке $a \in A$, если $\sigma(a_n)$ стремится к $\sigma(a)$ в метрике Хаусдорфа, когда $\|a_n - a\| \to 0$. Вопросы непрерывности спектра играют большую роль в спектральной теории; им посвящена обширная литература (см., например, [29, 40] и приведенную там библиографию).

Хорошо известно (см. [21, 58]), что элементы, в спектрах которых плотны изолированные точки, являются точками непрерывности спектра. Следовательно, таковы все элементы идеала $\mathcal{R}_s(A)$. Мы обсудим возможность расширить этот результат на более широкие идеалы. Начнем с централизации ($\mathcal{R}_s^a$) и примитивизации $\mathcal{R}_s^p$ этого радикала.

Из теоремы 4.4, с учетом теорем 3.5 и 3.6, немедленно получаем следующий результат.

Предложение 4.9.

(i) *$\mathcal{R}_s^a$ — наследственный топологический радикал.*
(ii) *Подрадикал $\mathcal{R}_s^p$ является наследственным.*

Рассмотрим алгебру $A = C([0,1], \mathcal{K}(H))$ всех непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ со значениями в алгебре $\mathcal{K}(H)$ всех компактных операторов в гильбертовом пространстве H. Она не содержит ненулевых элементов с дискретным спектром, поэтому $\mathcal{R}_s(A) = 0$. Ненулевых коммутативных идеалов в A нет, поэтому $\mathcal{R}_s^a(A) = 0$. Примитивными идеалами в A являются идеалы $J_t = \{f \in A : f(t) = 0\}$, $t \in [0,1]$. Так как все фактор-алгебры A/J_t изоморфны $\mathcal{K}(H)$, то $\mathcal{R}_s^p(A) = A$. Таким образом, в данном примере $\mathcal{R}_s^p(A) \supsetneqq \mathcal{R}_s^a(A)$.

Рассмотрим теперь C*-алгебру A_τ операторов в пространстве $\ell^2(\mathbb{N})$, порожденную оператором одностороннего сдвига V (C*-алгебра Теплица). Известно, что она содержит идеал $\mathcal{K}(H)$, фактор по которому изоморфен алгебре $C(\mathbb{T})$ непрерывных функций на единичной окружности. Легко проверить, что $\mathcal{R}_s(A_\tau) = \mathcal{K}(H)$, а так как $0 \in \mathrm{Prim}(A_\tau)$, то и $\mathcal{R}_s^p(A_\tau) = \mathcal{K}(H)$. В то же время, $\mathcal{R}_s^a(A_\tau) = A_\tau$, поскольку A_τ коммутативна по модулю $\mathcal{K}(H)$. Мы получили пример с противоположным включением: $\mathcal{R}_s^a(A) \supsetneqq \mathcal{R}_s^p(A)$.

Как обычно, через $\mathcal{R}_s^{p*}(A)$ обозначается топологический радикал, получаемый из $\mathcal{R}_s^p(A)$ верхней процедурой Бэра. Оказывается, что этот радикал уже мажорирует радикал $\mathcal{R}_s^a$:

Лемма 4.10. $\mathcal{R}_s^a \leqslant \mathcal{R}_s^{p*}$.

Отсюда, в частности, следует, что $\mathcal{R}_s^p \neq \mathcal{R}_s^{p*}$, т. е., $\mathcal{R}_s^p$ не является радикалом.

Теорема 4.11. *Для любой банаховой алгебры A все элементы идеала $\mathcal{R}_s^p(A)$ являются точками непрерывности спектра.*

В доказательстве существенную роль играет следующее равенство, справедливое (см. работу Я. Земанека [84]) для любого элемента a банаховой алгебры A:

$$\sigma(a) = \overline{\bigcup_{I \in \mathrm{Prim}(A)} \sigma(a/I)}. \tag{4.1}$$

В формулировке теоремы 4.11 нельзя заменить $\mathcal{R}_s^p(A)$ на $\mathcal{R}_s^a(A)$ (и тем более на $\mathcal{R}_s^{p*}(A)$). Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть пример разрывности спектра, построенный Люмером (см. [44, гл. 11]). В этом примере операторы принадлежат C*-алгебре A, порожденной двусторонним сдвигом и алгеброй $\mathcal{K}(H)$ всех компактных операторов. Так как $A/\mathcal{K}(H)$ коммутативна, а $\mathcal{K}(H)$ рассеянна, то $A = \mathcal{R}_s^a(A)$.

Мы уже обсуждали строение рассеянных идеалов C*-алгебр, т. е., действие радикала R_s на этом важном классе банаховых алгебр. Обсудим теперь действие его расширений.

Напомним, что C*-алгебра A называется *GCR* C*-алгеброй (или C*-алгеброй типа 1), если $\pi(A)$ содержит ненулевой компактный оператор (а значит, и все компактные операторы) для любого неприводимого представления π. Если же для любого π алгебра $\pi(A)$ *состоит* из компактных операторов, то A называется *CCR* C*-алгеброй. Известно, что всякая C*-алгебра A имеет GCR идеал J, такой что A/J не имеет ненулевых GCR идеалов. Обозначим этот идеал через $\mathcal{R}_{GCR}(A)$.

Теорема 4.12.

(i) $\mathcal{R}_s^{p*}(A) = \mathcal{R}_{GCR}(A)$ *для любой C*-алгебры A.*

(ii) $\mathcal{R}_s^p(A) = A$ *для любой CCR C*-алгебры A.*

Таким образом, справедлив следующий результат:

Следствие 4.13. *Непрерывность спектра имеет место на любой CCR C*-алгебре.*

Однако и некоторые C*-алгебры, не принадлежащие к классу CCR алгебр, являются $\mathcal{R}_s^p$-радикальными (и более того, рассеянными) — например, алгебра $\mathcal{K}(H) + \mathbb{C}1$ всех операторов, представимых в виде суммы скалярного и компактного.

Рассмотренные выше примеры показывают, что класс $\mathcal{R}_s^a$-радикальных C*-алгебр не содержит класс CCR алгебр и не содержится в нем (алгебра Теплица не является CCR алгеброй, а алгебра $C([0,1], \mathcal{K}(H))$ является). Большое разнообразие примеров $\mathcal{R}_s^a$-радикальных C*-алгебр доставляет теория Дугласа—Брауна—Филлмора коммутативных расширений алгебры $\mathcal{K}(H)$ (см. [27, 31]).

Приведем еще один результат о точках непрерывности спектра в C*-алгебрах. Алгебра называется *остаточно конечномерной* (сокращенно, RFD), если пересечение ядер ее конечномерных представлений тривиально. Это широкий и важный класс C*-алгебр, содержащий, например, все C*-алгебры свободных групп.

Теорема 4.14. *Всякий нормальный элемент любой RFD C*-алгебры является точкой непрерывности спектра.*

Представляет значительный интерес вопрос о том, в каких алгебрах непрерывен спектральный радиус. Наличие этого свойства значительно упрощает решение многих спектральных задач — достаточно сказать, что в этом случае множество квазинильпотентных элементов замкнуто.

Теорема 4.15. *Для любой банаховой алгебры A все элементы идеала $\mathcal{R}_s^{p*}(A)$ являются точками непрерывности спектрального радиуса.*

В частности, функция $a \mapsto \rho(a)$ непрерывна во всех точках из $\mathcal{R}_s^a(A)$.

В классе C*-алгебр теорема устанавливает непрерывность спектрального радиуса в точках из идеала $\mathcal{R}_{GCR}(A)$, и в частности, на всех GCR алгебрах. В работе Т. В. Шульман [69] показано, что верно и обратное: если спектральный радиус непрерывен во всех точках C*-алгебры A, то

A является GCR алгеброй. Доказательство этого результата потребовало привлечения тонкого аппарата некоммутативной топологии (полупроективность, AF-телескопы и др.).

Утверждение теоремы 4.15 можно дополнить следующим образом: спектральный радиус непрерывен не только в точках идеала $\mathcal{R}_s^{p*}(A)$, но и в любой точке $a \in A$, такой что $\rho(a) > \rho(a/\mathcal{R}_s^{p*}(A))$.

К рассмотрению вопросов спектральной непрерывности и введенным здесь радикалам мы будем возвращаться в последующих разделах.

Основные результаты этого раздела получены в работе Ю. В. Туровского и В. С. Шульмана [75]. В недавней работе П. Као и Ю. Туровского [60] был предложен подход к построению и анализу рассеянного радикала, основанный на теории аналитических мультифункций (об этой теории см. [21, гл. 3]). Кроме ряда новых результатов для нормированных ассоциативных алгебр, этот подход позволил также построить рассеянный радикал для нормированных йордановых алгебр.

5. Компактно-квазинильпотентный радикал

5.1. Совместный спектральный радиус. Пусть $A \in (BA)$. Для любого подмножества $N \subset A$ будем обозначать через $\mathrm{abs}(N)$ замыкание его абсолютно выпуклой оболочки. Обычным образом определим сумму и произведение подмножеств алгебры:

$$M + N = \{a + b : a \in M, b \in N\},$$
$$MN = \{ab : a \in M, b \in N\}; \tag{5.1}$$

это позволяет рассматривать суммы и произведения нескольких подмножеств, и в частности, степень: M^n, $n \in \mathbb{N}$. Множество $\mathcal{S}(M) = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} M^n$ — это *полугруппа, порожденная* M. Если A унитальна, то, по определению, $\mathcal{S}_1(M) = \mathcal{S}(M) \cup \{1\}$.

Мы будем обозначать символами $\mathcal{M}_f(A)$, $\mathcal{M}_c(A)$ и $\mathcal{M}_b(A)$ соответственно классы всех конечных, предкомпактных и ограниченных подмножеств алгебры A. Далее определяется норма

$$\|M\| = \sup_{a\in M} \|a\|$$

и спектральный радиус

$$\rho(M) = \inf \|M^n\|^{1/n}.$$

подмножества $M \subset A$.

Понятие спектрального радиуса подмножеств, или, как принято говорить, *совместного спектрального радиуса* (сокращенно, ССР), впервые введенное в 1960-м году Ротой и Стрэнгом [68], оказалось исключительно плодотворным при изучении динамических систем; ему посвящено огромное число работ (см., например, книгу Р. Юнгерса [47] и библиографический обзор В. Козякина [53]), в большинстве из которых речь идет о конечномерных задачах, т. е. о множествах матриц.

Нетрудно проверить, что выполняются равенства

$$\rho(M) = \rho(M^n)^{1/n}, \quad \rho(\lambda M) = |\lambda|\,\rho(M) \quad \text{и} \quad \rho(MN) = \rho(NM),$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ и $M, N \in \mathcal{M}_b(A)$.

Удобным свойством ССР является определенного рода полунепрерывность величины $\rho(M/J)$ как функции от идеала J:

Лемма 5.1. *Если $J = \overline{\bigcup J_\alpha}$, где (J_α) — направленная по возрастанию сеть замкнутых идеалов алгебры A, то для любого $M \in \mathcal{M}_c(A)$*

$$\|M/J\| = \lim_\alpha \|M/J_\alpha\| = \inf_\alpha \|M/J_\alpha\|, \tag{5.2}$$
$$\rho(M/J) = \lim_\alpha \rho(M/J_\alpha) = \inf_\alpha \rho(M/J_\alpha). \tag{5.3}$$

Следующее утверждение играет важную роль в доказательстве основных результатов этого раздела.

Теорема 5.2 (см. [70, теорема 3.5]). *Пусть $V \subset \mathbb{C}$ открыто, и пусть F — такое семейство аналитических функций на V со значениями в A, что*

$$\lim_{\mu\to\lambda} \sup\{\|f(\mu) - f(\lambda)\| : f \in F\} = 0$$

для любого $\lambda \in V$, *причем все множества* $M(\lambda) = \{f(\lambda) : f \in F\}$ *ограничены. Тогда функции* $\lambda \longmapsto \ln\rho(M(\lambda))$ *и* $\lambda \longmapsto \rho(M(\lambda))$ *субгармоничны на* V.

Банахова алгебра A называется *конечно квазинильпотентной* (соответственно, *компактно квазинильпотентной*; *ограниченно квазинильпотентной*), если $\rho(M) = 0$ для всех $M \in \mathcal{M}_f(A)$ (соответственно, $\mathcal{M}_c(A)$; $\mathcal{M}_b(A)$). Для краткости, мы будем в этих случая говорить, что A является *f-квазинильпотентной*, *c-квазинильпотентной*, или *b-квазинильпотентной*.

Ограниченно квазинильпотентные алгебры обычно называют *топологически нильпотентными* (см., например, [36, 38, 39, 61]).

Для $* \in \{f, c, b\}$, положим

$$\mathcal{R}_{*q}(A) = \{a \in A : \rho(\{a\} \cup M) = \rho(M) \quad \forall M \in \mathcal{M}_*(A)\}.$$

Теорема 5.3. *Все* $\mathcal{R}_{*q}(A)$ — *замкнутые идеалы алгебры* A.

Ясно, что все идеалы $\mathcal{R}_{*q}(A)$ состоят из квазинильпотентных элементов, и потому содержатся в $\mathrm{Rad}(A)$. Более подробно,

$$\mathcal{R}_{bq}(A) \subset \mathcal{R}_{cq}(A) \subset \mathcal{R}_{fq}(A) \subset \mathrm{Rad}(A). \tag{5.4}$$

Нетрудно показать, что для $* \in \{f, c\}$ идеалы $\mathcal{R}_{*q}(A)$ являются $*$-квазинильпотентными. В то же время, идеал $\mathcal{R}_{bq}(A)$ не обязательно b-квазинильпотентен даже для коммутативной A.

Предложение 5.4. *Если A коммутативна, то* $\mathcal{R}_{bq}(A) = \mathrm{Rad}(A)$.

Известно, что не всякая коммутативная радикальная банахова алгебра является b-квазинильпотентной. Один из примеров — замкнутая по операторной норме алгебра, порожденная оператором интегрирования Вольтерры (см. работу Дж. Петерса и Р. Уогена [61], где приводятся и другие примеры). В то же время из предложения 5.4 следует c-квазинильпотентность всех коммутативных радикальных алгебр, поскольку c-квазинильпотентность равносильна условию $\mathcal{R}_{cq}(A) = \mathrm{Rad}(A)$.

Теорема 5.5. *Пусть* M, N — *ограниченные подмножества унитальной банаховой алгебры* A. *Если множество* $N\mathcal{S}_1(M)$ *ограничено и* $\rho(N\mathcal{S}_1(M)) = 0$, *то* $\rho(N \cup M) = \rho(M)$.

Напомним, что если J — замкнутый идеал алгебры A, то через M/J обозначается образ подмножества $M \subset A$ относительно канонического эпиморфизма $q_J : A \to A/J$.

Теорема 5.6. *Пусть* A — *банахова алгебра,* $* \in \{f, c\}$ *и* $J = \mathcal{R}_{*q}(A)$. *Тогда* $\rho(M) = \rho(M/J)$ *для любого* $\mathcal{M}_*(A)$. *Равенство верно и при* $* = b$, *если в качестве* J *взять любой b-квазинильпотентный идеал.*

Разумеется, для *предкомпактного* M верно и равенство $\rho(M) = \rho(M/\mathcal{R}_{bq}(A))$, поскольку $\mathcal{R}_{bq}(A) \subset \mathcal{R}_{cq}(A)$.

Два следующих утверждения показывают, что идеалы $\mathcal{R}_{*q}(A)$ разделяют с радикалом Джекобсона многие из его известных свойств.

Лемма 5.7. *Пусть* $* \in \{f, c, b\}$ *и идеал* J — *это* $\mathcal{R}_{*q}(A)$ *при* $* \in \{f, c\}$ *и произвольный b-квазинильпотентный идеал алгебры A при* $* = b$. *Тогда*

$$\rho(NM) = 0 \ \text{ и } \ \rho(N + M) = \rho(M),$$

если выполнено одно из условий:
(i) $N \in \mathcal{M}_*(J)$ *и* $M \in \mathcal{M}_*(A)$;
(ii) $N \in \mathcal{M}_c(\mathcal{R}_{bq}(A))$ *и* $M \in \mathcal{M}_b(A)$.

Теорема 5.8. *Пусть* A — *банахова алгебра. Элемент* $a \in A$ *тогда и только тогда принадлежит* $\mathcal{R}_{bq}(A)$ (*соответственно,* $\mathcal{R}_{cq}(A)$), *когда* $\rho(aM) = 0$ *для любого ограниченного* (*соответственно, предкомпактного*) *подмножества* $M \subset A$.

Следствие 5.9.
(i) *Для* $* \in \{c, b\}$ *идеал* $\mathcal{R}_{*q}(A)$ *содержит все* (*даже односторонние*) *$*$-квазинильпотентные идеалы алгебры* A;
(ii) $\mathcal{R}_{cq}(A)$ *является наибольшим c-квазинильпотентным идеалом алгебры* A.

Следующий пример показывает, что банахова алгебра может не иметь наибольшего b-квазинильпотентного идеала.

Для любого $n \in \mathbb{N}$ пусть A_n — алгебра всех верхне-треугольных матриц порядка n, рассматриваемых как операторы на n-мерном гильбертовом пространстве H_n. Обозначим через A замыкание прямой суммы всех A_n в алгебре всех операторов на гильбертовом пространстве $H = \oplus H_n$. Так как все A_n — нильпотентные идеалы, то наибольший из b-квазинильпотентных идеалов (если таковой существует) должен совпадать с A. Однако если M — единичный шар алгебры A, то $\|M^n\| = 1$ для любого n, так что A не является b-квазинильпотентной.

5.2. Радикальные свойства отображений $A \mapsto \mathcal{R}_{*q}(A)$. Основываясь на приведенных выше результатах, уже нетрудно получить следующее основное утверждение:

Теорема 5.10.

(i) *Отображение $\mathcal{R}_{cq} : A \mapsto \mathcal{R}_{cq}(A)$ — наследственный* (*более того, равномерный*) *топологический радикал.*

(ii) *Отображение $\mathcal{R}_{bq}$ — наследственный подрадикал.*

(iii) *Отображение $\mathcal{R}_{fq}$ удовлетворяет условиям* (R1), (R2), (R3) *из определения топологического радикала* (*неизвестно лишь, выполнено ли включение $P(I) \subset P(A)$*).

Доказательство. В самом деле, пусть I — идеал банаховой алгебры A. Если $* \in \{b, c\}$, то для любых $a \in \mathcal{R}_{*q}(I)$ и $M \in \mathcal{M}_*(A)$ имеем $(aM)^2 = aN$, где $N = MaM \in \mathcal{M}_*(I)$. По теореме 5.8 $\rho((aM)^2) = 0$, откуда $\rho(aM) = 0$ и $a \in \mathcal{R}_{*q}(A)$ снова в силу теоремы 5.8. Мы доказали, что $\mathcal{R}_{*q}(I) \subset \mathcal{R}_{*q}(A)$. Таким образом, $\mathcal{R}_{*q}(I) \subset \mathcal{R}_*(A) \cap I$. Обратное включение очевидно для всех $* \in \{f, b, c\}$.

Равенство $\mathcal{R}_{*q}(\mathcal{R}_{*q}(A)) = \mathcal{R}_{*q}(A)$ для $* \in \{f, c, b\}$ легко следует из определения.

Докажем, что $\mathcal{R}_{*q}(A/\mathcal{R}_{*q}(A)) = 0$ для $* \in \{f, c\}$. Пусть $a \in A$; положим $\widehat{a} = a/\mathcal{R}_{*q}(A)$, и пусть $\widehat{M} = M/\mathcal{R}_{*q}(A)$ для $M \in \mathcal{M}_*(A)$. Если $\widehat{a} \in \mathcal{R}_{*q}(A/\mathcal{R}_{*q}(A))$, то

$$\rho(\{a\} \cup M) = \rho((\{a\} \cup M)/\mathcal{R}_{*q}(A)) = \rho(\{\widehat{a}\} \cup \widehat{M}) = \rho(\widehat{M}) = \rho(M)$$

по теореме 5.6. Это показывает, что $a \in \mathcal{R}_{*q}(A)$, т. е. $\widehat{a} = 0$.

Пусть теперь I — замкнутый идеал банаховой алгебры A, и $* \in \{f, b, c\}$. Для $M \in \mathcal{M}_*(A/I)$ пусть $N \in \mathcal{M}_*(A)$ таково, что $q_I(N) = M$. Если $a \in \mathcal{R}_{*q}(A)$, то

$$\rho(\{\lambda q_I(a)\} \cup M) = \rho(\{\lambda q_I(a)\} \cup q_I(N)) \leqslant \rho(\{\lambda a\} \cup N) = \rho(N)$$

для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Используя теорему 5.2, можно заключить, что $q_I(a) \in \mathcal{R}_*(A/I)$.

Мы доказали, что $q_I(\mathcal{R}_{*q}(A)) \subset \mathcal{R}_{*q}(A/I)$ для $* \in \{f, b, c\}$. □

Свойство наследственности радикала $\mathcal{R}_{cq}$ и предрадикала $\mathcal{R}_{bq}$ распространяется на банаховы идеалы:

Теорема 5.11. *Радикал $\mathcal{R}_{cq}$ и предрадикал $\mathcal{R}_{bq}$ являются гибко наследственными.*

Очевидно, что все отображения $\mathcal{R}_{*q}$ являются равномерными, т. е., из того, что $\mathcal{R}_{*q}(A) = A$ следует, что $\mathcal{R}_{*q}(B) = B$ для любой замкнутой подалгебры B алгебры A.

Предрадикал $\mathcal{R}_{bq}$ не является радикалом. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим свободную (не унитальную) полугруппу G со счетным числом образующих $\{x_0, x_1, \ldots\}$. Пусть I — ее идеал, состоящий из тех слов, которые не являются подсловами бесконечного слова

$$W = x_0 x_1 x_0 x_2 \ldots x_0 x_{n-1} x_0 x_n \ldots$$

Алгебра $l^1(I)$ изометрически вложена в алгебру $l^1(G)$ и является ее идеалом. Пусть $A = l^1(G)/l^1(I)$, и пусть X_i — образы образующих x_i в A. Заметим, что $X_0 X_0 = 0$ и $X_i P X_i = 0$ для любого монома P, если $i > 0$. Следовательно, $X_i A X_i = 0$ и

$$(X_i M)^2 = 0$$

для любого ограниченного подмножества $M \subset A$ при $i > 0$. Поэтому $X_i \in \mathcal{R}_{bq}(A)$ для всех $i > 0$. Пусть J — замкнутый идеал алгебры A, порожденный множеством $N = \{X_i : i > 0\}$, тогда $J = \mathcal{R}_{bq}(J)$. Так как A/J — одномерная алгебра, порожденная нильпотентным элементом, то $A/J = \mathcal{R}_{bq}(A/J)$. Если бы отображение $\mathcal{R}_{bq}$ было радикалом, то отсюда следовало бы, что $\mathcal{R}_{bq}(A) = A$. Однако это неверно: $X_0 \notin \mathcal{R}_{bq}(A)$, поскольку

$$\|(X_0N)^n\|^{1/n} = \|X_0X_1\cdots X_0X_n\|^{1/n} = 1$$

для всех $n \in \mathbb{N}$.

В частности, $\mathcal{R}_{bq} \neq \mathcal{R}_{cq}$.

Представляет первостепенный интерес вопрос о различении радикалов $\mathcal{R}_{cq}$ и Rad. Известно, что их расширенные версии на классе всех нормированных алгебр не совпадают (следует заметить, что распространение Rad на нормированные алгебры — вопрос тонкий, сужение алгебраического радикала Джекобсона rad на нормированные алгебры не является топологическим радикалом; в то же время определения предрадикалов $\mathcal{R}_{fq}$, $\mathcal{R}_{cq}$ и $\mathcal{R}_{bq}$ переносятся на класс нормированных алгебр без изменения). Более того, на этом классе не совпадают $\mathcal{R}_{cq}$ и $\mathcal{R}_{fq}$; это можно доказать, используя построенный Диксоном [35] пример непрерывного гомоморфизма радикальной банаховой алгебры на плотную подалгебру полупростой банаховой алгебры.

В работе Ю. В. Туровского [9] доказано, что на классе нормированных алгебр не совпадают радикалы $\mathcal{R}_{cq}$ и rad. Более того, для любого $n > 1$ существует нормированная алгебра, в которой любое подмножество из менее, чем n элементов, имеет нулевой ССР, но есть n-элементное подмножество с ненулевым ССР. Доказательство использует замечательную конструкцию Е. С. Голода [3] n-порожденной не нильпотентной алгебры, в которой все $(n-1)$-порожденные подалгебры нильпотентны (см. прозрачное и многое проясняющее доказательство этого результата в книге [2]).

Результаты раздела, приведенные без ссылок, получены в работах Ю. В. Туровского и В. С. Шульмана [10, 73].

6. Тензорный радикал

Здесь будет построен радикал, выделяющий класс тензорно радикальных алгебр, т. е., банаховых алгебр, остающихся радикальными при тензорном умножении на любую банахову алгебру. Сильным техническим средством изучения этого радикала является некоторый аналог совместного спектрального радиуса, который мы называем ℓ_1-радиусом.

6.1. ℓ_1-радиус суммируемого семейства. Пусть A — банахова алгебра. Мы будем рассматривать последовательности элементов алгебры A; при этом две последовательности считаются эквивалентными ($\{a_n\}_1^\infty \simeq \{b_n\}_1^\infty$), если одну из другой можно получить, изменив нумерацию. Классы эквивалентности называются *семействами* (элементов алгебры); допуская вольность, мы иногда будем называть семействами сами последовательности (которые, строго говоря, нужно называть представителями семейств). Семейства можно также рассматривать как счетные *обобщенные подмножества*: чтобы задать класс, нужно указать, сколько раз в него входит каждый элемент алгебры A.

По определению, [73, раздел 3.4], *обобщенное подмножество* (о.м.) S алгебры A — это функция $\varkappa_S$ на A, значения которой — кардинальные числа. Каждой последовательности $M = \{a_n\}_{n=1}^\infty$ элементов алгебры A сопоставляется о.м. $S = S_{(M)}$ правилом

$$\varkappa_S(a) = \mathrm{card}\{n : a_n = a\}$$

для всех $a \in A$; мы говорим, что M — *представитель* S.

Множество $\{a \in A : \varkappa_S(a) > 0\}$ называется *носителем* о.м. S. Обычные множества можно рассматривать как о.м. S, у которых все значения функции $\varkappa_S$ принадлежат $\{0, 1\}$. О.м. S называется *счетным*, если его носитель (не более, чем) счетен и все $\varkappa_S(a)$ не превосходят $\aleph_0$.

Включение $S \subset P$ для о.м. означает, что выполняется условие

$$\varkappa_S(a) \leqslant \varkappa_P(a)$$

для всех $a \in A$.

Мы определим дизъюнктное объединение $S \sqcup P$ о.м. условием

$$\varkappa_{S\sqcup P}(a) = \varkappa_S(a) + \varkappa_P(a)$$

для всех $a \in A$. Аналогично определяется дизъюнктное объединение любого семейства о.м.

Определим произведение SP о.м. равенством

$$\varkappa_{SP}(a) = \sum_{(b,c)\in A\times A,\, bc=a} \varkappa_S(b)\varkappa_P(c)$$

для всех $a \in A$.

Для любого о.м. S алгебры A положим

$$\eta(S) = \sum_{a\in A} \varkappa_S(a)\|a\|$$

и

$$\|S\| = \sup_{\varkappa_S(a)>0} \{\|a\| : a \in A,\ \varkappa_S(a) > 0\}.$$

Если $\eta(S) < \infty$, то S называется *суммируемым*; если $\|S\| < \infty$, то S называется *ограниченным*.

В терминах представителей $M = \{a_n\}_1^\infty$ and $N = \{b_n\}_1^\infty$ семейство MN соответствует двухиндексной последовательности $\{a_n b_m\}_{n,m=1}^\infty$ (с произвольной нумерацией), а $M \sqcup N$ — последовательности $\{c_n\}_1^\infty$, где $c_{2k-1} = a_k$, $c_{2k} = b_k$. Тогда очевидно, что

$$MN \simeq \bigsqcup_{i=1}^\infty a_i N \simeq \bigsqcup_{j=1}^\infty M b_j,$$

где $aN = \{ab_n\}_1^\infty$ и $Mb = \{a_n b\}_1^\infty$, как обычно. В частности,

$$M(N_1 \sqcup N_2) \simeq MN_1 \sqcup MN_2 \text{ и } (M_1 \sqcup M_2)N \simeq M_1N \sqcup M_2N$$

для любых семейств M_i, N_i, $i = 1, 2$, и

$$(MN)K \simeq M(NK) \tag{6.1}$$

для любых семейств в A. Положим $M^1 \simeq M$, $M^n \simeq M^{n-1}M$ для любого $n > 0$. Тогда из (6.1)

$$M^{n+m} \simeq M^n M^m \tag{6.2}$$

для всех $n, m \in \mathbb{N}$.

Включение семейств ($M \sqsubset N$) определяется как включение соответствующих о.м.

Если S — суммируемое о.м., то оно имеет представителя M из $\ell_1(A)$, т. е. $S = S_{(M)}$. Мы полагаем $\eta(M) = \eta\left(S_{(M)}\right)$ и говорим, что семейство M суммируемо. При этом

$$\|M\|_{\ell_1(A)} = \eta(M) = \eta(N)$$

если $N \simeq M$.

Ясно, что если M и N — суммируемые семейства в A, то

$$\eta(M \sqcup N) = \eta(M) + \eta(N)$$

и

$$\eta(MN) \leqslant \eta(M)\eta(N). \tag{6.3}$$

Из (6.2) и (6.3) следует, что

$$\eta(M^{n+m}) \leqslant \eta(M^n)\eta(M^m) \tag{6.4}$$

Для всех $n, m \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что для любого суммируемого семейства M существует предел

$$\rho_t(M) = \lim(\eta(M^n))^{1/n} = \inf(\eta(M^n))^{1/n}.$$

Число $\rho_t(M)$ называется ℓ_1-*радиусом* семейства M.

Так как $(M^m)^n \simeq M^{mn}$ для всех $n, m \in \mathbb{N}$, то

$$\rho_t(M^m)^{1/m} = (\lim_n(\eta((M^m)^n))^{1/n})^{1/m} = \lim_n(\eta(M^{mn}))^{1/nm} = \rho_t(M). \tag{6.5}$$

Пусть S — ограниченное счетное о.м. в A. Тогда S имеет представителя L из $\ell_\infty(B)$. Полагая $\|L\| = \left\|S_{(L)}\right\|$, имеем

$$\|L\|_{\ell_\infty(B)} = \|L\| = \|K\|$$

для любого $K \simeq L$.

Ясно, что

$$\|L \sqcup K\| = \max\{\|L\|, \|K\|\} \text{ и } \|LK\| \leqslant \|L\|\,\|K\|$$

для любых L и K. Отсюда, как и выше, выводится, что для любого ограниченного семейства L существует предел

$$\rho(L) = \lim(\|L^n\|)^{1/n} = \inf(\|L^n\|)^{1/n},$$

совместный спектральный радиус семейства.

Мы пишем $\eta_{\|\cdot\|}(M)$ вместо $\eta(M)$, если необходимо указать, какая норма в A рассматривается.

Определим свертку $M * N = \{c_n\}$ суммируемых семейств $M = \{a_n\}$ и $N = \{b_n\}_1^\infty$ правилом: $c_n = \sum\limits_{i+j=n+1} a_i b_j$.

Предложение 6.1. *Если $M = \{a_n\}_1^\infty$ и $N = \{b_n\}_1^\infty$ — суммируемые семейства в A, то $\rho_t(M * N) \leqslant \rho_t(MN) = \rho_t(NM)$ и $\rho_t(M + N) \leqslant \rho_t(M \sqcup N)$.*

Будем говорить, что семейства M и N *коммутируют*, если $MN \simeq NM$. Это, разумеется, не означает, что элементы M коммутируют с элементами N.

Предложение 6.2. *Для коммутирующих семейств верны равенства*

$$\rho_t(MN) \leqslant \rho_t(M)\,\rho_t(N), \quad \rho_t(M \sqcup N) \leqslant \rho_t(M) + \rho_t(N).$$

Суммируемое семейство M называется *ℓ_1-квазинильпотентным* , если $\rho_t(M) = 0$.

Абсолютно выпуклой оболочкой $\mathrm{abs}_t(M)$ последовательности $M = \{a_n\}_1^\infty \in \ell_1$ называется множество всех таких последовательностей $N = \{b_n\}_1^\infty$, что $b_m = \sum\limits_{n=1}^{\infty} t_{nm} a_n$, где t_{nm} — комплексные числа и $\sum\limits_{m=1}^{\infty} |t_{nm}| \leqslant 1$ для всех n. Ясно, что $\mathrm{abs}_t(M)$ — абсолютно выпуклое подмножество в $\ell_1(A)$.

Предложение 6.3. *Если $M = \{a_n\}_1^\infty \in \ell_1$, то $\rho_t(N) \leqslant \rho_t(M)$ для любого $N = \{b_n\}_1^\infty \in \mathrm{abs}_t(M)$.*

Для произвольного суммируемого семейства $M = \{a_n\}_1^\infty$ в банаховой алгебре A мы будем обозначать через $\Omega(M)$ множество всех элементов из A, представимых в виде $\sum t_n a_n$, где $t_n \in \mathbb{C}$ и $|t_n| \leqslant 1$.

Следствие 6.4.

(i) *Множество $\Omega(M)$ — абсолютно выпукло и компактно.*

(ii) *$\rho(a) \leqslant \rho_t(M)$ для любого $a \in \Omega(M)$.*

(iii) *$\Omega(M) = \{\sum b_n : \{b_n\}_1^\infty \in \mathrm{abs}_t(M)\}$.*

Следствие 6.5. *Если семейство $M = \{a_n\}_1^\infty$ является ℓ_1-квазинильпотентным, то порожденная им подалгебра состоит из квазинильпотентых элементов.*

Так как любому элементу из $\ell_1(A)$ соответствует суммируемое семейство, то ℓ_1-радиус можно рассматривать как функцию на $\ell_1(A)$. Можно доказать (хотя это требует более тонкой техники, чем аналогичные утверждения для совместного спектрального радиуса), что эта функция полунепрерывна сверху и субгармонична. Приведем точные формулировки.

Предложение 6.6. *Пусть $M \in \ell_1(A)$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\rho_t(N) \leqslant \rho_t(M) + \varepsilon$, если $\|N - M\|_{\ell_1} < \delta$.*

Теорема 6.7. *Если $\mathcal{F}$ — аналитическая $\ell_1(A)$-значная функция на $\mathcal{D}$, то функции $\ln(\rho_t(\mathcal{F}))$: $\lambda \longmapsto \ln(\rho_t(\mathcal{F}(\lambda)))$ и $\rho_t(\mathcal{F}) : \lambda \longmapsto \rho_t(\mathcal{F}(\lambda))$ субгармоничны на $\mathcal{D}$.*

Пусть a — элемент банаховой алгебры A, а $M = \{a_n\}_{n=1}^\infty$ — суммируемое семейство в A. Через $\{a\} \sqcup M$ мы обозначаем семейство $\{x_n\}_1^\infty$, где $x_1 = a$ и $x_n = a_{n-1}$ при $n > 1$.

Пусть $\mathcal{R}_t(A)$ — множество всех таких $a \in A$, что $\rho_t(\{a\} \sqcup M) = \rho_t(M)$ при любом $M \in \ell_1(A)$. Легко видеть, что $\mathcal{R}_t(A)$ состоит из квазинильпотентных элементов алгебры A.

Теорема 6.8. *$\mathcal{R}_t(A)$ — замкнутый идеал алгебры A.*

Заметим, что отсюда легко следует включение $\mathcal{R}_t(A) \subset \mathrm{Rad}(A)$.

Теорема 6.9. *$\rho_t(M \sqcup N) = \rho_t(N)$ для любых $M \in \ell_1(\mathcal{R}_t(A))$ и $N \in \ell_1(A)$.*

Подмножество G банаховой алгебры A называется *ℓ_1-квазинильпотентным,* если любое суммируемое семейство, состоящее из элементов G, ℓ_1-квазинильпотентно. В этом же смысле мы будем употреблять термин *ℓ_1-квазинильпотентный идеал*.

Следствие 6.10. *$\mathcal{R}_t(A)$ — ℓ_1-квазинильпотентный идеал.*

Следствие 6.11. *$\rho_t(M+N)=\rho_t(N)$ и $\rho_t(M*N)=\rho_t(MN)=0$ для любых $M\in\ell_1(\mathcal{R}_t(A))$ и $N\in\ell_1(A)$.*

Теорема 6.12. *Для элемента a банаховой алгебры A следующие условия эквивалентны:*
(i) $a\in\mathcal{R}_t(A)$;
(ii) $\rho_t(aM)=0$ *для любого* $M\in\ell_1(A)$.

Следующий результат устанавливает, что $\mathcal{R}_t(A)$ — *наибольший* из ℓ_1-квазинильпотентных идеалов алгебры A, т. е. идеал $\mathcal{R}_t(A)$ собирает свойство ℓ_1-квазинильпотентности (типичная черта радикалов).

Теорема 6.13. *Если I — ℓ_1-квазинильпотентный (возможно, односторонний, не обязательно замкнутый) идеал алгебры A, то $I\subset\mathcal{R}_t(A)$.*

Теперь рассмотрим функториальные свойства отображения $A\mapsto\mathcal{R}_t(A)$.

Теорема 6.14. *Если g — непрерывное отображение банаховой алгебры A на банахову алгебру B, то $g(\mathcal{R}_t(A))\subset\mathcal{R}_t(B)$.*

Как обычно, через a/I мы обозначаем образ элемента a банаховой алгебры A в ее фактор-алгебре A/I по замкнутому идеалу I. Аналогичные обозначения приняты для образов подмножеств и семейств элементов алгебры A.

Теорема 6.15. *Если M — суммируемое семейство элементов в банаховой алгебре A, то $\rho_t(M)=\rho_t(M/I)$ для любого ℓ_1-квазинильпотентного идеала I. В частности, $\rho_t(M)=\rho_t(M/\mathcal{R}_t(A))$.*

Следствие 6.16. $\mathcal{R}_t(A/\mathcal{R}_t(A))=0$.

Теорема 6.17. *Для любого замкнутого идеала I банаховой алгебры A выполнено условие $\mathcal{R}_t(I)=\mathcal{R}_t(A)\cap I$. Более общим образом, $\mathcal{R}_t(I,\|\cdot\|_I)=I\cap\mathcal{R}_t$ для любого банахова идеала $I\subset A$.*

Следствие 6.18. $\mathcal{R}_t(\mathcal{R}_t(A))=\mathcal{R}_t(A)$.

Таким образом, установлен следующий результат:

Теорема 6.19. *Отображение $A\mapsto\mathcal{R}_t(A)$ является равномерным, гибко наследственным топологическим радикалом.*

Полученный радикал называется *тензорным*, поскольку, как мы далее увидим, он тесно связан с проблемой радикальности тензорных произведений.

6.2. Тензорно радикальные алгебры. Банахова алгебра A называется *тензорно радикальной*, если для любой банаховой алгебры B проективное тензорное произведение $A\widehat{\otimes}B$ радикально.

Из ассоциативности и дистрибутивности тензорного произведения немедленно следует, что тензорное произведение тензорно радикальной алгебры на произвольную, так же как и прямая сумма тензорно радикальных алгебр, тензорно радикальны.

Выясним связь между понятиями тензорной радикальности и ℓ_1-квазинильпотентности.

Пусть A и B — банаховы алгебры, $M=\{a_n\}_1^\infty\in\ell_1(A)$ и $L=\{b_n\}_1^\infty\in\ell_\infty(B)$. Обозначим через $M_\otimes L$ элемент $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\otimes b_n\in A\widehat{\otimes}B$. Ясно, что любой элемент из $A\widehat{\otimes}B$ имеет такой вид.

Теорема 6.20. *Пусть A — банахова алгебра. Тогда:*
(i) $\rho(M_\otimes L)\leqslant\rho_t(M)\rho(L)$ *для любой банаховой алгебры B и любых $M\in\ell_1(A)$ и $L\in\ell_\infty(B)$.*

(ii) *Существуют унитальная банахова алгебра* B *и элемент* $L \in \ell_\infty(B)$, *такие что отображение* $M \longmapsto M_\otimes L$ *из* $\ell_1(A)$ *в* $A\widehat{\otimes}B$ *удовлетворяет условиям*: $\|M_\otimes L\| = \eta(M)$ *и* $\rho(M_\otimes L) = \rho_t(M)$ *для всех* $M \in \ell_1(A)$.

Банахова алгебра B из части (ii) теоремы 6.20 — это $l^1(G)$, где G — свободная полугруппа со счетным числом образующих w_n, а в качестве L берется семейство, соответствующее последовательности образующих.

Следующий результат непосредственно следует из части (i) теоремы 6.20.

Следствие 6.21. *Если семейство* M *в* A *является* ℓ_1*-квазинильпотентным, то для любого ограниченного семейства* N *в произвольной алгебре* B *элемент* $M_\otimes N$ *является* ℓ_1*-квазинильпотентным в* $A\widehat{\otimes}B$.

Теорема 6.22. *Для банаховой алгебры* A *следующие условия эквивалентны*:

(i) A *тензорно радикальна*;
(ii) A ℓ_1*-квазинильпотентна*;
(iii) $A\widehat{\otimes}B$ ℓ_1*-квазинильпотентна для любой банаховой алгебры* B.

Следствие 6.23. *Всякая замкнутая подалгебра тензорно радикальной банаховой алгебры тензорно радикальна.*

Следствие 6.24. *Если в банаховой алгебре* A *есть плотная подалгебра* B, *такая что все суммируемые семейства элементов из* B ℓ_1*-квазинильпотентны, то* A *также* ℓ_1*-квазинильпотентна.*

Применяя следствие 6.10 и теорему 6.22, мы заключаем, что в любой банаховой алгебре A идеал $\mathcal{R}_t(A)$ является ее наибольшим тензорно радикальным идеалом.

Теорема 6.25. *Элемент* a *банаховой алгебры* A *тогда и только тогда принадлежит идеалу* $\mathcal{R}_t(A)$, *когда* $a \otimes b \in \operatorname{Rad}\left(A\widehat{\otimes}B\right)$ *для любой банаховой алгебры* B *и любого элемента* $b \in B$.

Предложение 6.26. *Пусть* I — *замкнутый идеал банаховой алгебры* A. *Если алгебры* I *и* A/I *тензорно радикальны, то и* A *тензорно радикальна.*

Предложение 6.27. *Пусть* I — *банахов идеал банаховой алгебры* A. *Если* A *тензорно радикальна, то и алгебра* $(I, \|\cdot\|_I)$ *тензорно радикальна.*

Легко проверить, что сумма $I + J$ и пересечение $I \cap J$ банаховых идеалов I, J алгебры A являются банаховыми идеалами относительно «естественных» норм

$$\|x\|_{I+J} = \inf\{\|a\|_I + \|b\|_J : a \in I, b \in J, a + b = x\} \text{ и } \|x\|_{I\cap J} = \max\{\|x\|_I, \|x\|_J\}.$$

Следствие 6.28. *Пусть* I *и* J — *гибкие идеалы банаховой алгебры* A. *Если* I *и* J *тензорно радикальны, то их сумма* $I+J$ *и пересечение* $I\cap J$ *тензорно радикальны (как банаховы алгебры с нормами* $\|x\|_{I+J}$ *и* $\|x\|_{I\cap J}$*).*

Условимся обозначать через $Q(A)$ множество всех квазинильпотентных элементов банаховой алгебры A. Далее, для произвольного идеала $J \subset A$ положим $Q_J(A) = \{x \in A : x/\overline{J} \in Q(A/\overline{J})\}$ — множество элементов *квазинильпотентных по модулю* J.

Следующий результат важен для приложений в теории операторов умножения.

Лемма 6.29. *Пусть* A_1, A_2 — *банаховы алгебры, и пусть* $J_i \subset I_i$ — *идеалы алгебры* A_i, *при* $i = 1, 2$. *Обозначим через* J *идеал алгебры* $A = A_1\widehat{\otimes}A_2$, *порожденный* $J_1 \otimes A_2 + A_1 \otimes J_2$, *а через* I — *идеал алгебры* A, *порожденный* $I_1 \otimes A_2 + A_1 \otimes I_2$. *Если* $\overline{I_i}/\overline{J_i}$ *тензорно радикальны, то* $\overline{I} \subset Q_J(A)$.

Естественный вопрос о связи между радикалами $\mathcal{R}_t$ и $\mathcal{R}_{cq}$ решается с помощью техники тензорных произведений; прямых оценок ℓ_1-радиуса недостаточно.

Теорема 6.30. *Всякая компактно квазинильпотентная алгебра тензорно радикальна.*

Доказательство. В самом деле, пусть алгебра A компактно квазинильпотентна, алгебра B произвольна, и пусть $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \otimes b_n \in A \widehat{\otimes} B$. Можно считать, что последовательность $\alpha_n = \|a_n\|$ суммируема и что $\|b_n\| \leqslant 1$ для всех n. Легко видеть, что можно найти такую числовую последовательность $\varepsilon_n \to 0$, что последовательность $\lambda_n := \alpha_n/\varepsilon_n$ суммируема. Пусть $c_n = \lambda_n^{-1} a_n$, тогда $\|c_n\| \to 0$, так что множество $N := \{c_n : n = 1, 2, \ldots\}$ предкомпактно, а потому $\rho(N) = 0$. Полагая $K = \{c_n \otimes b_n : n = 1, 2, \ldots\}$, нетрудно проверить, что

$$\|K^k\| \leqslant \|N^k\|,$$

откуда $\rho(K) \leqslant \rho(N) = 0$. Из этого уже прямой оценкой нетрудно вывести, что

$$\rho(x) = \rho(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n \otimes b_n) = 0.$$

Таким образом $A \widehat{\otimes} B$ состоит из квазинильпотентных элементов, что и требовалось. □

Таким образом, тензорный радикал находится между компактно квазинильпотентным радикалом и радикалом Джекобсона. Следующий результат уточняет эти сравнения.

Следствие 6.31. $\mathcal{R}_{cq} \leqslant \mathcal{R}_t \leqslant \mathcal{R}_{fq} \leqslant \mathrm{Rad}$.

Пользуясь теоремой 6.22, можно усилить теорему 6.30 следующим образом:

Теорема 6.32. *Если алгебра A компактно квазинильпотентна, то и $A \widehat{\otimes} B$ компактно квазинильпотентна для любой B.*

Для приложений важно иметь информацию об алгебрах, коммутативных по модулю тензорного радикала.

Теорема 6.33.

(i) *Если банаховы алгебры A_1 и A_2 коммутативны по модулю тензорного радикала, то такова же и алгебра $A_1 \widehat{\otimes} A_2$.*

(ii) *Если A_1 коммутативна по модулю тензорного радикала, а A_2 радикальна, то $A_1 \widehat{\otimes} A_2$ радикальна.*

6.3. Тензорные произведения и общие радикалы. Пусть P — произвольный ТР; банахова алгебра A называется *тензорно P-радикальной*, если P-радикальны все алгебры $A \widehat{\otimes} B$, где B — произвольная банахова алгебра.

Будем говорить, что радикал P *тензорно устойчив*, если все P-радикальные алгебры тензорно P-радикальны.

Более сильное требование — справедливость включения

$$P(A) \otimes B \subset P(A \widehat{\otimes} B)$$

для любой банаховой алгебры B; если это условие выполнено, то говорим, что радикал P тензорно согласован. Ясно, что тензорно согласованные радикалы тензорно устойчивы.

Теорема 6.34. *Для гибко наследственных радикалов условия тензорной согласованности и тензорной устойчивости эквивалентны.*

Любому топологическому радикалу P мы сопоставим отображение P^t, действующее на классе банаховых алгебрах по следующему правилу:

$$P^t(A) = \{a \in A : a \otimes B \subset P(A \widehat{\otimes} B),\ \text{для любой банаховой алгебры } B\}.$$

Легко убедиться, что $P^t(A)$ — замкнутый идеал в A. Будем называть отображение P^t *тензорным оснащением* радикала P.

Теорема 6.35. *Если радикал P является гибко наследственным, то отображение P^t удовлетворяет условиям* (R1), (R2) *и второму условию в* (R4): *$P^t(J) \subset P^t(A)$ для любого замкнутого идеала J алгебры A.*

В частности, тензорное оснащение любого гибко наследственного радикала является предрадикалом. Чтобы выяснить, в каких случаях P^t является радикалом, введем в рассмотрение один специальный класс банаховых алгебр.

Пусть I — замкнутый идеал банаховой алгебры A. Для банаховой алгебры B естественно определяется гомоморфизм $i = i_{I,A,B} : I\widehat{\otimes}B \to A\widehat{\otimes}B$. Во многих случаях такой гомоморфизм инъективен — например, если I имеет ограниченную аппроксимативную единицу, то i даже ограничен снизу. Однако в общем случае его ядро $K = K(I, A, B)$ может быть ненулевым. Будем называть алгебры вида $K(I, A, B)$ *тензорно патологическими алгебрами*.

Теорема 6.36. *Если гибко наследственный радикал P обладает тем свойством, что все тензорно патологические алгебры $K(I, A, B)$ являются P-радикальными, то его тензорное оснащение P^t — наследственный топологический радикал.*

Из теоремы 6.25 следует, что радикал $\mathcal{R}_t$ — это тензорное оснащение радикала Джекобсона.

Будем говорить, что P является *тензорно оснащенным*, если $P^t = P$. Прямо из определений следует, что тензорно оснащенные радикалы являются тензорно согласованными. Верно ли обратное?

Основные результаты раздела получены в работах Ю. В. Туровского и В. С. Шульмана [10, 73, 74].

7. Условия компактности и радикалы

Предмет данного раздела — положительное решение вопроса о совпадении радикала Джекобсона с компактно-квазинильпотентным радикалом (а следовательно, и с тензорным радикалом) в классе алгебр с условиями компактности некоторых операторов умножения. Этот результат основан на взаимодействии теории топологических радикалов, теории совместного спектрального радиуса и теории инвариантных подпространств, причем в процессе доказательства были получены существенные продвижения в каждой из этих трех теорий.

7.1. Гипокомпактный радикал. Каждый элемент a банаховой алгебры A определяет действующие в A операторы L_a, R_a левого и правого умножения на a: $L_a(x) = ax$, $R_a(x) = xa$. Элемент a называется *компактным*, если компактен оператор $W_a = L_aR_a$. Если оператор W_a имеет конечный ранг, то говорят, что a — элемент *конечного ранга*.

Множество всех компактных элементов алгебры A мы обозначим $\mathcal{C}(A)$. Это замкнутый полугрупповой идеал в A (т. е., $A\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{C}(A), \mathcal{C}(A)A \subset \mathcal{C}(A)$), так что его линейная оболочка $\operatorname{span}\mathcal{C}(A)$ — идеал в A.

Алгебра A называется *компактной*, если $A = \mathcal{C}(A)$, и *бикомпактной*, если компактны все операторы $L_aR_b : a \in D, b \in A$. Алгебра A называется *аппроксимативной*, если в ней плотны элементы конечного ранга.

Как показал Вала [78], компактные элементы алгебры $\mathcal{B}(X)$ — это просто компактные операторы. В этом же смысле оправдан и термин «элемент конечного ранга». Алгебра $\mathcal{K}(X)$ всех компактных операторов в X бикомпактна, а алгебра $\mathcal{A}(X) = \overline{\mathcal{F}(X)}$ всех операторов, аппроксимируемых операторами конечного ранга, аппроксимативна.

В настоящее время известно большое количество примеров банаховых пространств X, для которых $\mathcal{K}(X) \neq \mathcal{A}(X)$ (см., например, книгу А. Пича [63]). Учитывая результат Дж. Александера [14], отсюда можно получить ряд интересных примеров бикомпактных радикальных банаховых алгебр:

Лемма 7.1. *Для любого банахова пространства X алгебра $\mathcal{K}(X)/\mathcal{A}(X)$ радикальна.*

Напомним, что операторы, образы которых в алгебре $\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$ квазинильпотентны, называются *операторами Рисса*.

Следствие 7.2. *Если $a \in \mathcal{B}(X)$ — оператор Рисса, то для любого $\varepsilon > 0$ неравенство*

$$\operatorname{dist}_{\|\cdot\|_{\mathcal{B}}}(a^n, \mathcal{F}(X)) < \varepsilon^n$$

выполняется для всех достаточно больших n.

Условимся для любого нормированного пространства $\mathcal{Y}$ обозначать через $\mathcal{Y}_\odot$ его замкнутый единичный шар.

Лемма 7.3. *Если $f : A \to B$ — непрерывный эпиморфизм банаховых алгебр, то $f(\mathcal{C}(A)) \subset \mathcal{C}(B)$.*

Доказательство. Пусть $a \in \mathcal{C}(A)$. Так как $fW_a = W_{f(a)}f$ и $f(A_{\odot})$ содержит открытый шар пространства B, то $W_{f(a)}$ компактен в B. $\square$

Лемма 7.4. *Пусть J — идеал в A. Если $\mathcal{C}(J) \neq 0$, то $J \cap \mathcal{C}(A) \neq 0$.*

Доказательство. Легко видеть, что

$$W_{ba} = L_b W_a R_{bq} = R_a W_b L_a \tag{7.1}$$

для всех $a, b \in A$. Если $a \in \mathcal{C}(J)$, то при любом $b \in J$ оператор W_{ba} компактен в A. Поэтому $J\mathcal{C}(J) \subset J \cap \mathcal{C}(A)$ и все доказано, если $J\mathcal{C}(J) \neq 0$. С другой стороны, если $J\mathcal{C}(J) = 0$, то $\mathcal{C}(J) \subset \mathcal{C}(A)$, поскольку $W_a(x) = (ax)\,a = 0$ для всех $a \in \mathcal{C}(J)$ и $x \in A$. $\square$

Следующий результат легко следует из (7.1).

Лемма 7.5. *Замкнутый идеал, порожденный компактным элементом банаховой алгебры A, бикомпактен.*

Банахова алгебра A называется *гипокомпактной* (*гипофинитной*) если любой ее ненулевой фактор A/J содержит ненулевой компактный элемент (соответственно, элемент конечного ранга). Эти понятия распространим на замкнутые идеалы и подалгебры, рассматривая их как банаховы алгебры.

Лемма 7.6. *Любой* (*возможно, односторонний, не обязательно замкнутый*) *ненулевой идеал гипокомпактной алгебры содержит ненулевой компактный элемент этой алгебры.*

Все бикомпактные алгебры очевидным образом гипокомпактны. Следующий результат показывает, что все гипокомпактные алгебры могут быть получены последовательным расширением бикомпактных.

Предложение 7.7. *Пусть J — идеал в банаховой алгебре A. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(i) *J гипокомпактен*;

(ii) *для всякого непрерывного открытого эпиморфизма $f : A \longrightarrow B$ либо $f(J) = 0$, либо $f(J) \cap \mathcal{C}(B) \neq 0$*;

(iii) *существует возрастающая трансфинитная цепочка $(J_\alpha)_{\alpha \leqslant \gamma}$ идеалов в A, такая что $J_0 = 0$, $J_\gamma = J$, все J_α замкнуты в J, и все факторы $J_{\alpha+1}/J_\alpha$ бикомпактны.*

Следствие 7.8. *Пусть A — банахова алгебра. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(i) *A гипокомпактна*;

(ii) *все идеалы и факторы алгебры A гипокомпактны*;

(iii) *J и A/J гипокомпактны для некоторого замкнутого идеала J алгебры A.*

Следствие 7.9. *В любой банаховой алгебре есть наибольший гипокомпактный идеал.*

Обозначим наибольший гипокомпактный идеал алгебры A через $\mathcal{R}_{hc}(A)$.

Лемма 7.10. *Если J — замкнутый идеал в A, то $\mathcal{R}_{hc}(J) = J \cap \mathcal{R}_{hc}(A)$.*

Лемма 7.11. *Алгебра $A/\mathcal{R}_{hc}(A)$ не имеет ненулевых гипокомпактных идеалов и компактных элементов.*

Доказательство. В самом деле, если J — гипокомпактный идеал алгебры $A/\mathcal{R}_{hc}(A)$, то, по следствию 7.8, его прообраз $\left\{x \in A : q_{\mathcal{R}_{hc}(A)}(x) \in J\right\}$ — гипокомпактный идеал в A, строго содержащий $\mathcal{R}_{hc}(A)$, что дает противоречие. $\square$

По лемме 7.5, если $A/\mathcal{R}_{hc}(A)$ имеет ненулевые компактные элементы, то у нее есть ненулевые бикомпактные идеалы, что невозможно.

Теорема 7.12. *Отображение $A \longmapsto \mathcal{R}_{hc}(A)$ — наследственный топологический радикал.*

Доказательство. Требует доказательства только (R1), поскольку (R2) и (R5) установлены в леммах 7.11 и 7.10.

Пусть $f : A \to B$ — непрерывный открытый эпиморфизм. Обозначим, для краткости, $q_{\mathcal{R}_{hc}(B)}$ через q. Ясно, что $q \circ f$ — непрерывный открытый эпиморфизм A на $B/\mathcal{R}_{hc}(B)$. Так как идеал $\mathcal{R}_{hc}(A)$ гипокомпактен, то, по предложению 7.7, его образ $(q \circ f)(\mathcal{R}_{hc}(A))$ либо равен нулю, либо содержит ненулевой компактный элемент алгебры $B/\mathcal{R}_{hc}(B)$. Но последнее невозможно в силу леммы 7.11. Значит, $(q \circ f)(\mathcal{R}_{hc}(A)) = 0$ и $f(\mathcal{R}_{hc}(A)) \subset \mathcal{R}_{hc}(B)$. □

Замечание 7.13. Как уже отмечалось, $\mathcal{K}(X)$ — бикомпактный идеал алгебры $\mathcal{B}(X)$, и потому содержится в $\mathcal{R}_{hc}(\mathcal{B}(X))$. Во многих случаях (например, для гильбертова пространства) $\mathcal{K}(X)$ совпадает с $\mathcal{R}_{hc}(\mathcal{B}(X))$, однако это происходит не всегда.

Пусть $\mathcal{K}_w(X)$ — идеал всех слабо компактных операторов в X. Как известно (см. [4, следствие 6.8.13]), для широкого класса банаховых пространств X, включающего все пространства L^1 суммируемых функций, произведение двух операторов из $\mathcal{K}_w(X)$ компактно, так что фактор-алгебра $\mathcal{K}_w(X)/\mathcal{K}(X)$ имеет тривиальное умножение, а значит, бикомпактна. Поэтому для таких X идеал $\mathcal{K}_w(X)$ гипокомпактен, т. е. содержится в $\mathcal{R}_{hc}(\mathcal{B}(X))$. Таким образом, идеал $\mathcal{R}_{hc}(\mathcal{B}(X))$ может строго включать $\mathcal{K}(X)$.

Еще более яркий пример — пространство Аргироса—Хейдона [19], где каждый оператор — сумма скалярного и компактного; для него, конечно, $\mathcal{R}_{hc}(\mathcal{B}(X)) = \mathcal{B}(X)$.

7.2. Совместный спектральный радиус и инвариантные подпространства. Пусть X — банахово пространство; замкнутое подпространство $Y \subset X$ называется инвариантным для оператора $T \in \mathcal{B}(X)$, если $TY \subset Y$, т. е. $Tx \in Y$ для любого $x \in Y$; более общим образом, подпространство инвариантно для семейства операторов, если оно инвариантно для каждого оператора из этого семейства. Подпространство, инвариантное для всех операторов, коммутирующих с T, называется *гиперинвариантным*; для произвольного семейства $W \subset \mathcal{B}(X)$ гиперинвариантное подпространство— это подпространство, инвариантное для W и его коммутанта $W' := \{S : TS = ST \text{ при } T \in W\}$.

Множество операторов $W \subset \mathcal{B}(X)$ называется *транзитивным*, если оно не имеет нетривиальных инвариантных подпространств, и *нетранзитивным* в противном случае. Далее, W называется *триангулируемым*, если существует максимальная цепь подпространств пространства X, состоящая из инвариантных подпространств для $\mathcal{W}$

В работе В. И. Ломоносова [8] был получен фундаментальный результат об инвариантных подпространствах операторов, коммутирующих с компактными операторами, давший новый импульс многим дальнейшим достижениям теории инвариантных подпространств.

Теорема 7.14. *Пусть X — банахово пространство. Если алгебра $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(X)$ не имеет инвариантных подпространств, а $K \in \mathcal{K}(X)$ — ненулевой компактный оператор, то найдется такой оператор $T \in \mathcal{A}$, что $KTx = x$ для некоторого ненулевого вектора $x \in X$.*

Доказательство этого утверждения замечательным образом использует теорему Шаудера о неподвижной точке.

Следствием теоремы 7.14 является результат бернсайдовского типа:

Теорема 7.15. *Если алгебра операторов в банаховом пространстве X содержит ненулевой компактный оператор и не имеет инвариантных подпространств, то она плотна в $\mathcal{B}(X)$ в слабой операторной топологии.*

Применяя эту теорему к коммутанту не скалярного оператора и учитывая, что этот коммутант не может быть плотным в $\mathcal{B}(X)$, получаем следующее утверждение:

Следствие 7.16. *Любой не кратный единичному оператор T, коммутирующий с ненулевым компактным оператором, имеет гиперинвариантное подпространство.*

Следуя М. Г. Крейну, будем называть оператор *вольтерровым*, если он компактен и квазинильпотентен. Работать с не вольтерровыми компактными операторами обычно проще, так как у них есть собственные векторы и порожденные ими алгебры содержат конечномерные проекторы; сила техники Ломоносова в том, что она позволяет работать с вольтерровыми. Вот одно из важных следствий приведенных выше результатов:

Следствие 7.17. *Если радикал* $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ *замкнутой подалгебры* $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(X)$ *содержит ненулевой компактный оператор, то* $\mathcal{A}$ *имеет инвариантное подпространство.*

В самом деле, если алгебра $\mathcal{A}$ транзитивна, то транзитивен и ее идеал $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$. Поскольку в нем есть компактные операторы, он, в силу теоремы 7.14, содержит оператор с собственным значением 1, а это противоречит определению радикала Джекобсона.

В частности, любая алгебра вольтерровых операторов имеет инвариантное подпространство. Поскольку вольтерровы операторы остаются вольтерровыми при сужении на инвариантные подпространства и факторпространства, приходим к следующему утверждению:

Следствие 7.18. *Всякая алгебра* $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(X)$ *вольтерровых операторов триангулируема.*

В работе В. С. Шульмана [12] следствие 7.17 было усилено следующим образом:

Теорема 7.19. *Если радикал алгебры* $\mathcal{A}$ *операторов содержит компактный оператор, то* $\mathcal{A}$ *имеет гиперинвариантное подпространство. В частности, любая алгебра вольтерровых операторов имеет гиперинвариантное подпространство.*

Здесь впервые в теории инвариантных подпространств применялась техника совместного спектрального радиуса. В [12] основной результат выводился из двух утверждений, которые нам будет удобно отдельно сформулировать:

Лемма 7.20. *Если конечное множество вольтерровых операторов триангулируемо, то его ССР равен нулю.*

Схема доказательства леммы 7.20. Пусть $M \subset \mathcal{B}(X)$ — фиксированное конечное множество. Прямая оценка норм показывает, что если $Y \subset X$ — инвариантное подпространство для M, то $\rho(M) = \max\{\rho(M|_Y), \rho(M|_{X/Y})\}$. Отсюда следует, что для любой цепи $\Gamma = \{0 = X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n = X\}$

$$\rho(M) = \max_{i=0}^{n-1}\{\rho(M|_{X_{i+1}/X_i})\} \leqslant \max_{i=0}^{n-1}\{\|M|_{X_{i+1}/X_i}\|\}.$$

Будем говорить, что Γ является *ε-цепью* для M, если $\|M|_{X_{i+1}/X_i}\| < \varepsilon$ для всех i.

Используя соображения компактности, можно доказать, что если $M \subset \mathcal{K}(X)$ и Λ — произвольная цепь инвариантных подпространств для M, на разрывах которой операторы из M обращаются в нуль, то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти в Λ конечную ε-цепь. Учитывая предыдущее, мы заключаем, что в этом случае $\rho(M) = 0$. Пусть теперь M состоит из вольтерровых операторов, и пусть Λ — максимальная цепь подпространств, состоящая из инвариантных подпространств для M (она существует по условию). Так как разрывы в этом случае одномерны, то операторы, индуцируемые операторами из M на разрывах, скалярны, и соответствующие скаляры принадлежат их спектрам (см., например, книгу [24]). Из вольтерровости следует, что числа эти нулевые; в силу доказанного выше, $\rho(M) = 0$. □

Лемма 7.21. *Если множество* W *компактных операторов конечно квазинильпотентно* (*т. е. ССР всех его конечных подмножеств равен нулю*), *то* W *имеет гиперинвариантное подпространство.*

Доказательство. В самом деле, прямо из определения ССР легко вывести, что свойство конечной квазинильпотентности переносится на объединение всех степеней множества W, т. е., на порожденную W полугруппу. Поэтому можно считать, что W — полугруппа.

Обозначим через $\mathcal{D}$ алгебру, порожденную W и его коммутантом W'; требуется доказать, что $\mathcal{D}$ не транзитивна. Множество $\mathcal{J}$ всех операторов, представимых в виде $T = \sum_{i=1}^{k} T_i S_i$, где $k \in \mathbb{N}$, $T_i \in W'$, $S_i \in W$, является идеалом в $\mathcal{D}$, поэтому достаточно доказать, что $\mathcal{J}$ имеет инвариантное подпространство. Так как $\mathcal{J}$ состоит из компактных операторов, то, согласно следствию 7.18, нужно лишь проверить, что все эти операторы квазинильпотентны. Это делается прямой оценкой норм степеней суммы, с учетом того, что $\rho(\{S_1, \ldots, S_k\}) = 0$, а условие $\rho(M) = 0$ эквивалентно условию $\|M^n\| = o(\varepsilon^n)$ для любого $\varepsilon > 0$. □

Теперь уже легко получить доказательство теоремы 7.19. Пусть $W = \mathrm{Rad}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{K}(X)$. Алгебра, порожденная W и $\mathcal{A}'$, является идеалом в алгебре, порожденной $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$; так как $\mathcal{A}' \subset W'$, то достаточно доказать, что W имеет гиперинвариантное подпространство. Но алгебра W вольтеррова, любое ее конечное подмножество имеет нулевой ССР в силу леммы 7.20. Остается применить лемму 7.21.

Следующий результат — решение известной «проблемы вольтерровой полугруппы», полученное Ю. В. Туровским [77] (см. историю этого вопроса в книге Х. Раджави и П. Розенталя [65]).

Теорема 7.22. *Всякая полугруппа вольтерровых операторов в банаховом пространстве*:

(i) *конечно квазинильпотентна*;
(ii) *имеет гиперинвариантное подпространство*;
(iii) *триангулируема.*

Доказательство. Наметим схему доказательства. Пусть $G \subset \mathcal{B}(X)$ — полугруппа вольтерровых операторов, а M — ее конечное подмножество. Докажем прежде всего, что если $\rho(M) \neq 0$, то M имеет инвариантное подпространство.

Не ограничивая общности, можно считать, что $\rho(M) = 1$. Пусть $\mathcal{F} = SG(M) = \bigcup_{n=1}^{\infty} M^n$ — полугруппа, порожденная множеством M. Нетрудно доказать, что если полугруппа $\mathcal{F}$ ограничена, то она предкомпактна. В этом случае, заменяя норму $\|\cdot\|$ эквивалентной нормой $|x| = \max\{\|x\|, \|\mathcal{F}x\|\}$ (совместный спектральный радиус при этом не меняется), можно считать, что $\|T\| \leqslant 1$ для любого $T \in \mathcal{F}$.

Легко видеть, что если $\|M^n\| < 1$ при некотором n, то $\rho(M) < 1$ в противоречие с нашим предположением. Поэтому существует такая последовательность $T_n \in M^n$, что $\|T_n\| = 1$. Обозначим через $\mathcal{E}$ множество предельных точек всех таких последовательностей. Ясно, что любой оператор из $\mathcal{E}$ имеет норму 1 и вольтерров. Нетрудно показать, что каждый оператор $T \in \mathcal{E}$ допускает факторизацию: $T = UV$, где $U, V \in \mathcal{E}$. Используя компактность $\mathcal{E}$, отсюда нетрудно вывести, что существуют такие операторы $T, U \in \mathcal{E}$, что $T = UT$. В самом деле, для $T \in \mathcal{E}$ имеем $T = V_1T_1$, аналогично $T_1 = V_2T_2$, и т. д., $T_n = V_{n+1}T_{n+1}$. Выбирая из последовательности T_n сходящую подпоследовательность и переобозначая, имеем $T_n = U_nT_{n+1}$, $T_n \to T$. Отсюда следует, что $T = UT$ для любой предельной точки U последовательности U_n. Но тогда U имеет собственное значение 1, что невозможно, так как U квазинильпотентен.

Таким образом, полугруппа $\mathcal{F}$ неограничена. Для любого n обозначим через $\mathcal{F}_n$ полугруппу, порожденную множеством t_nM, где $t_n = 1 - 1/n$, и единичным оператором. Из определения ССР легко следует, что $\mathcal{F}_n$ ограничена. Определим норму $|\cdot|_n$ на X формулой $|x|_n = \|\mathcal{F}_nx\|/\|\mathcal{F}_n\|$; ясно, что все эти нормы эквивалентны $\|\cdot\|$. Полагая $|x| = \limsup_n |x|_n$, легко проверить, что $|\cdot|$ — полунорма, $|x| \leqslant \|x\|$ и $|Tx| \leqslant |x|$ для всех $T \in \mathcal{F}$, $x \in X$. Значит, подпространство $N = \{x \in X : |x| = 0\}$ замкнуто и инвариантно для M.

Докажем, что N нетривиально. Так как полугруппа $\mathcal{F}_n$ ограничена, то существуют такие $T_n \in \mathcal{F}_n$ и $x_n \in X$, что $\|x_n\| = 1$ и $\|T_nx_n\| > t_n\|\mathcal{F}_n\|$. При этом можно выбрать T_n так, что $T_n \notin \{1\} \cup t_nM$, т. е. $T_n = R_nV_n$, где $R_n \in \mathcal{F}_n$, $V_n \in t_nM$. Тогда

$$|V_nx_n|_n = \|\mathcal{F}_nV_nx_n\|/\|\mathcal{F}_n\| \geqslant \|R_nV_nx_n\|/\|\mathcal{F}_n\| = \|T_nx_n\|/\|\mathcal{F}_n\| > t_n.$$

Условие $V_n \in t_nM$ M позволяет считать (переходя к подпоследовательности номеров), что $V_n = t_nS$ для некоторого $S \in M$. В силу компактности S, можно считать, что $V_nx_n \to x_0$ для некоторого $x_0 \in X$. Следовательно,

$$|x_0|_n \geqslant |V_nx_n| - |x_0 - V_nx_n|_n \geqslant t_n - \|x_0 - V_nx_n\|,$$

откуда, переходя к верхнему пределу, получим $|x_0| \geqslant 1$, $x_0 \notin N$, $N \neq X$.

С другой стороны, если $N = 0$, то, по теореме о замкнутом графике, $|\cdot|$ — норма, эквивалентная $\|\cdot\|$. Так как $\|M^n\| \to \infty$, то существует такая последовательность номеров n_m, что $\|M^{n_m}\| > \|\bigcup_{j<n_m} M^j\|$. Выберем $T_m \in M^{n_m}$ с $\|T_m\| = \|M^{n_m}\|$. Так как M конечно, то мы можем, переходя к подпоследовательности, считать, что $T_m = S_1R_mS_2$, где $R_m \in M^{n_m-2}$, а $S_1, S_2 \in M$.

В силу компактности оператора $L_{S_1}R_{S_2}$ и ограниченности последовательности $\|R_m\|/\|T_m\|$, последовательность $T_m/\|T_m\|$ имеет предельную точку, так что можно считать, что $T_m/\|T_m\| \to T$, где T — компактный оператор единичной нормы.

Для любого вектора $x_0 \in X$ имеем $\|(T_m/\|T_m\|)x_0\| \to \|Tx_0\|$ и, в то же время, $|(T_m/\|T_m\|)x_0| = |T_m x_0|/\|T_m\| \leqslant |x_0|/\|T_m\| \to 0$. Выбрав x_0 так, что $Tx_0 \neq 0$, получим противоречие. Итак, пространство N ненулевое.

Так как условие вольтерровости сохраняется для сужений на подпространства и фактор-пространства, то множество M триангулируемо. По лемме 7.20, $\rho(M) = 0$. Полученное противоречие доказывает (i).

Часть (ii) теперь следует из леммы 7.21. Чтобы доказать (iii), нужно снова применить результат к сужениям (уже всей полугруппы) на инвариантные подпространства и фактор-пространства. □

Оценивая нормы сужений операторов на разрывы конечных цепочек более точно, чем это было сделано при доказательстве леммы 7.20, можно получить (см. работу Ю. В. Туровского и В. С. Шульмана [70]), что алгебра вольтерровых операторов компактно квазинильпотентна. Это влечет соответствующее усиление утверждения (i) теоремы 7.22:

Следствие 7.23. *Всякая полугруппа вольтерровых операторов компактно квазинильпотентна.*

7.3. Условия компактности и совместный спектральный радиус. В этом разделе будет показано, что на гипокомпактных алгебрах радикалы $\mathcal{R}_{cq}$ и $\mathcal{R}_t$ совпадают с радикалом Джекобсона.

Переход от алгебраической ситуации к операторной удобно осуществлять через рассмотрение операторов умножения. Как обычно, символами L_a и R_a мы обозначаем операторы левого и правого умножения на элемент a в алгебре A: $L_a x = ax$, $R_a x = xa$. Далее, для $M \subset A$ полагаем $L_M = \{L_a : a \in M\}$ и $R_M = \{R_a : a \in M\}$. Нетрудно проверить, что если M ограничено, то $\rho(L_M) = \rho(R_M) = \rho(M)$. Важно, что $\rho(M)$ находит отражение в свойствах семейства операторов $L_M R_M = \{L_a R_b : a, b \in M\}$.

Лемма 7.24. *Пусть M — ограниченное подмножество банаховой алгебры A. Тогда $\rho(M)^2 = \rho(L_M R_M)$.*

Отсюда и из теоремы 7.22 легко следует такое утверждение:

Лемма 7.25. *Если G — полугруппа квазинильпотентных элементов бикомпактной банаховой алгебры A, то ее линейная оболочка $\operatorname{span} G$ состоит из квазинильпотентных элементов.*

В самом деле, достаточно заметить, что $L_G R_G$ — полугруппа вольтерровых операторов на A, и следовательно, конечно квазинильпотентна. Поэтому $\rho(M)^2 = \rho(L_M R_M) = 0$ для любого конечного множества $M \subset G$, т. е. G конечно квазинильпотентна, а потому и порожденная ею подалгебра $\operatorname{span} G$ состоит из квазинильпотентных элементов.

Рассмотрим радикал $\mathcal{R}_{hc} \wedge \mathrm{Rad}$. Так как радикалы $\mathcal{R}_{hc}$ и Rad наследственны, то, согласно лемме 3.2, $\mathcal{R}_{hc} \wedge \mathrm{Rad}$ — наследственный радикал, сопоставляющий каждой алгебре A замкнутый идеал $\mathcal{R}_{hc}(A) \cap \mathrm{Rad}(A)$.

Теорема 7.26. $\mathcal{R}_{hc} \wedge \mathrm{Rad} \leqslant \mathcal{R}_{cq}$.

Доказательство. В самом деле, если радикальная банахова алгебра A бикомпактна, то для любого $M \in \mathcal{M}_c(A)$ множество $N = L_M R_M = \{L_a R_b : a, b \in M\}$ предкомпактно и состоит из компактных операторов. Порожденная им полугруппа $S(N)$ состоит из операторов $L_a R_b$ где $a, b \in S(M)$, т. е. является полугруппой вольтерровых операторов. По следствию 7.23, $\rho(N) = 0$, а значит, в силу леммы 7.24, и $\rho(M) = 0$. Мы доказали, что A компактно квазинильпотентна, а потому содержится в $\mathcal{R}_{hc}(A)$.

Пусть теперь A — произвольная банахова алгебра и $J = \mathrm{Rad}(A) \cap \mathcal{R}_{hc}(A)$. Так как идеал J гипокомпактен, то, по предложению 7.7, существует возрастающая трансфинитная цепочка $(J_\alpha)_{\alpha \leqslant \gamma}$ замкнутых идеалов в A, такая что $J_0 = 0$, $J_\gamma = J$, и все факторы $J_{\alpha+1}/J_\alpha$ бикомпактны. Из доказанного выше следует, что эти факторы компактно-квазинильпотентны, т. е., $\mathcal{R}_{cq}$-радикальны. Тогда идеал J также $\mathcal{R}_{cq}$-радикален по лемме 3.1.

Для доказательства совпадения радикалов Rad и $\mathcal{R}_{cq}$ на гипокомпактных алгебрах остается сослаться на очевидное неравенство $\mathcal{R}_{cq} \leqslant \mathrm{Rad}$. □

Следующий результат неоднократно используется в дальнейшем:

Теорема 7.27. *Если банахова алгебра гипокомпактна, то спектры ее элементов* (*не более чем*) *счетны.*

Доказательство. Доказательство легко провести для бикомпактных алгебр, и остается воспользоваться тем, что $\mathcal{R}_s$ — радикал (т. е., свойство рассеянности выдерживает трансфинитные расширения). □

Таким образом, $\mathcal{R}_{hc} \leqslant \mathcal{R}_s$. Как показывает следующая теорема, на классе наследственно полупростых алгебр эти радикалы совпадают.

Теорема 7.28. *Для наследственно полупростых алгебр условия рассеянности, гипокомпактности и гипофинитности эквивалентны.*

Свяжем теперь гипокомпактность с тензорными произведениями.

Лемма 7.29. *Пусть A, B — унитальные банаховы алгебры, J — замкнутый идеал в $A\widehat{\otimes}B$, а I_1 и I_2 — замкнутые идеалы в A и B, соответственно. Пусть элементы $a \in A$, $b \in B$ удовлетворяют условиям $a \otimes I_2 \subset J$, $I_1 \otimes b \subset J$. Если a/I_1 и b/I_2 — компактные элементы алгебр A/I_1 и B/I_2, то $(a \otimes b)/J$ — компактный элемент алгебры $(A\widehat{\otimes}B)/J$.*

Теорема 7.30. *Если банаховы алгебры A и B гипокомпактны, то и алгебра $A\widehat{\otimes}B$ гипокомпактна.*

Так как тензорный радикал является промежуточным между компактно квазинильпотентным и радикалом Джекобсона, то из теоремы 7.26 получаем такое следствие:

Следствие 7.31. *На классе гипокомпактных алгебр тензорный радикал совпадает с радикалом Джекобсона.*

Таким образом, радикальные гипокомпактные алгебры тензорно радикальны:

Следствие 7.32. *Если A — гипокомпактная радикальная* (*в смысле Джекобсона*) *алгебра, то $A\widehat{\otimes}B$ радикальна для любой банаховой алгебры B.*

В заключение отметим, что в работе Г. Андреоласа и М. Ануссиса [18] проведено интересное исследование топологических радикалов гнездовых алгебр. *Гнездовой алгеброй* называется алгебра всех операторов, оставляющих инвариантными все подпространства из некоторого линейно упорядоченного по включению семейства подпространств гильбертова пространства H. Хорошо известно описание радикала Джекобсона гнездовых алгебр, найденное Дж. Рингроузом [67]. В [18] доказано, что для любой гнездовой алгебры A ее гипокомпактный, гипофинитный и рассеянный радикалы совпадают между собой и равны сумме ее радикала Джекобсона и идеала $A \cap \mathcal{K}(H)$ всех компактных операторов из A.

Результаты, приведенные в этом разделе без ссылки на источник, опубликованы в работах Ю. В. Туровского и В. С. Шульмана [10, 11, 70, 74].

8. Операторы умножения и линейные операторные уравнения

8.1. Банаховы бимодули. Пусть U — бимодуль над банаховыми алгебрами A, B; коротко — (A, B)-бимодуль. Тогда U можно рассматривать и как (A^1, B^1)-бимодуль. Скажем, что U является *банаховым бимодулем*, если он является банаховым пространством относительно некоторой нормы $\|\cdot\|_U$, причем

$$\|aub\|_U \leqslant \|a\|_A \|u\|_U \|b\|_B$$

для всех $a \in A^1$, $b \in B^1$ и $u \in U$.

Элементам $a \in A$, $b \in B$ сопоставим операторы L_a и R_b левого и правого умножения на U, полагая $L_a x = ax$ и $R_b x = xb$ для всех $x \in U$. Алгебра, порожденная всеми такими операторами, называется алгеброй *элементарных операторов* на U с коэффициентами в A, B и обозначается $\mathcal{E}\ell_{A,B}(U)$. Если A, B унитальны, то $\mathcal{E}\ell_{A,B}(U)$ совпадает с алгеброй $\mathcal{E}_{A,B}(U)$, порожденной всеми L_aR_b. В общем случае, $\mathcal{E}_{A,B}(U)$ является идеалом алгебры $\mathcal{E\ell}_{A,B}(U)$, в свою очередь являющейся идеалом в $\mathcal{E}_{A^1,B^1}(U)$. Ясно, что

$$\mathcal{E\ell}_{A,B}(U) = \mathcal{E}_{A^1,B}(U) + \mathcal{E}_{A,B^1}(U),$$

т. е. операторы из $\mathcal{E}_{A,B}(U)$ и $\mathcal{E\ell}_{A,B}(U)$ имеют вид $T = \sum_{i=1}^{n} L_{a_i}R_{b_i}$ и, соответственно, $T = L_a + R_b + \sum_{i=1}^{n} L_{a_i}R_{b_i}$, где $a, a_i \in A$, $b, b_i \in B_i$.

Правое действие алгебры B на U можно рассматривать как левое действие противоположной алгебры B^{op}. Это дает естественный гомоморфизм $\psi = \psi_U$ алгебры $A \otimes B^{op}$ в $\mathcal{B}(U)$:

$$\psi : z = \sum_{i=0}^{n} a_i \otimes b_i \longmapsto \sum_{i=0}^{n} L_{a_i}R_{b_i}.$$

Так как

$$\|\psi(z)\,u\|_U \leqslant \gamma(z)\,\|u\|_U \tag{8.1}$$

для $u \in U$, то идеал $\ker\psi$ замкнут. Поскольку образ ψ равен $\mathcal{E}_{A,B}(U)$, мы можем рассматривать $\mathcal{E}_{A,B}(U)$ как фактор-алгебру алгебры $A \otimes B^{op}$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{E}_{A,B}}$, или, более кратко, $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$:

$$\|T\|_{\mathcal{E}} = \inf\left\{\sum \|a_i\|_A\,\|b_i\|_B : \sum L_{a_i}R_{b_i} = T\right\} \tag{8.2}$$

для $T \in \mathcal{E}_{A,B}(U)$.

Пополнение $\widehat{\mathcal{E}}_{A,B}(U)$ алгебры $\mathcal{E}_{A,B}(U)$ по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ является банаховой подалгеброй алгебры $\mathcal{B}(U)$. Элементы этой алгебры операторов называются *операторами умножения* в (A,B)-бимодуле U.

Предложение 8.1. *Если I и J — банаховы идеалы алгебр A и B, то $\widehat{\mathcal{E}}_{I,J}(U)$ — банахов идеал алгебры $\mathcal{E}_{A,B}(U)$.*

Ниже нам будет удобнее обозначать коэффициентные алгебры через A_1, A_2 вместо A, B.

Теорема 8.2. *Пусть U — банахов бимодуль над банаховыми алгебрами A_1, A_2.*

(i) *Если A_1 и A_2 гипокомпактны, то гипокомпактна и алгебра $\widehat{\mathcal{E}}_{A_1,A_2}(U)$.*
(ii) *Если хотя бы одна из алгебр A_i тензорно радикальна, то $\widehat{\mathcal{E}}_{A_1,A_2}(U)$ тензорно радикальна.*
(iii) *Если обе алгебры A_i коммутативны по модулю тензорного радикала, то тем же свойством обладает и $\widehat{\mathcal{E}}_{A_1,A_2}(U)$.*

Отсюда, используя теорему 7.27, получаем следующий результат.

Следствие 8.3. *Пусть U — банахов бимодуль над унитальными банаховыми алгебрами A_1, A_2. Если A_1 и A_2 гипокомпактны, то спектр любого оператора $T \in \widehat{\mathcal{E}}_{A_1,A_2}(U)$ в алгебре $\mathcal{B}(U)$ не более чем счетен и совпадает с его спектром в $\mathcal{E}_{A_1,A_2}(U)$.*

Следствие 8.4. *Пусть I_i — замкнутые идеалы банаховых алгебр A_i, $i = 1,2$. Если I_1 и I_2 тензорно радикальны, то алгебра $\widehat{\mathcal{E}}_{A_1,I_2}(U) + \widehat{\mathcal{E}}_{I_1,A_2}(U)$ (с гибкой нормой суммы) тензорно радикальна.*

Доказательство основано на теореме 8.2 и существенно использует предложение 6.28.

Обратимся теперь к более общей конструкции.

Теорема 8.5. *Пусть $J_i \subset I_i$ — идеалы в A_i, $i = 1,2$, такие что алгебры $\overline{I_i}/\overline{J_i}$ тензорно радикальны. Положим $\widehat{\mathcal{E}}_I = \widehat{\mathcal{E}}_{A_1,I_2}(U) + \widehat{\mathcal{E}}_{I_1,A_2}(U)$ и $\mathcal{E}_J = \mathcal{E}_{A_1,J_2}(U) + \mathcal{E}_{J_1,A_2}(U)$. Тогда $\overline{\mathcal{E}_J}$ — идеал в $\widehat{\mathcal{E}}_I$ и алгебра $\widehat{\mathcal{E}}_I/\overline{\mathcal{E}_J}$ тензорно радикальна.*

Теорема 8.5 активно используется в разделе 8.3.

Следствие 8.6. *Пусть I_i, J_i удовлетворяют условиям теоремы* 8.5. *Тогда $\widehat{\mathcal{E}}_I \subset Q_{\mathcal{E}_J}(\widehat{\mathcal{E}}_{A_1,A_2}(U))$. Другими словами, если $T \in \widehat{\mathcal{E}}_I$, то, каким бы ни было $\varepsilon > 0$, для всех достаточно больших номеров n найдутся элементарные операторы $S_n \in \mathcal{E}_J$ на U, такие что $\|T^n - S_n\|_{\mathcal{E}} < \varepsilon^n$.*

8.2. Операторные бимодули. Рассмотрим теперь случай, когда A_1, A_2 — это алгебры $\mathcal{B}(Y)$, $\mathcal{B}(X)$ всех операторов на банаховых пространствах X, Y, а U — нормированное подпространство в пространстве $\mathcal{B}(X,Y)$ всех операторов из X в Y, такое что $A_1UA_2 \subset U$ и норма в U согласована с модульной структурой:

$$\|\cdot\|_U \geqslant \|\cdot\|_{\mathcal{B}} = \|\cdot\| \text{ и } \|axb\|_U \leqslant \|a\| \, \|x\|_U \, \|b\|$$

для всех $a \in \mathcal{B}(Y)$, $b \in \mathcal{B}(X)$, $x \in U$. В этом случае мы говорим, что U — операторный бимодуль.

Легко видеть, что U содержит все операторы конечного ранга. Можно также считать, что

$$\|x\|_U = \|x\|$$

для любого оператора x ранга 1.

Если U полно относительно нормы $\|\cdot\|_U$, то говорим, что U является *банаховым операторным бимодулем*. Для краткости мы пишем $\widehat{\mathcal{B}}_*(U)$ вместо $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}(Y),\mathcal{B}(X)}(U)$ и называем элементы этого пространства *операторами умножения на* U.

Операторные бимодули тесно связаны с операторными идеалами. Если $\mathcal{U}$ — банахов операторный идеал в смысле Пича [62] (например, идеал $\mathcal{K}$ компактных операторов, или идеал $\mathcal{N}$ ядерных операторов), то каждая *компонента* $U = \mathcal{U}(X,Y)$ идеала $\mathcal{U}$ является банаховым операторным бимодулем. Можно показать, что каждый банахов операторный бимодуль является компонентой банахова операторного идеала.

Алгебры $A_1 = \mathcal{B}(Y)$, $A_2 = \mathcal{B}(X)$ полупросты, они не имеют радикальных идеалов, но они могут иметь пары идеалов $J_i \subset I_i$ с радикальными $I_i/\overline{J_i}$. Именно так, согласно лемме 7.1, обстоит дело, если мы выбираем в качестве I_i идеалы компактных операторов, а в качестве J_i идеалы операторов конечного ранга. Прежде чем формулировать соответствующие следствия теоремы 8.5, введем необходимую терминологию. Положим

$$\widehat{\mathcal{K}}_{\frac{1}{2}}(U) = \widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}(Y),\mathcal{K}(X)}(U) + \widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{K}(Y),\mathcal{B}(X)}(U),$$
$$\mathcal{F}_{\frac{1}{2}}(U) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}(Y),\mathcal{F}(X)}(U) + \mathcal{E}_{\mathcal{F}(Y),\mathcal{B}(X)}(U).$$

Иными словами, $\widehat{\mathcal{K}}_{\frac{1}{2}}(U)$ состоит из операторов умножения на U вида $T = \sum\limits_{i=1}^{\infty} L_{a_i}R_{b_i}$, где $\sum\limits_i \|a_i\|\|b_i\| < \infty$ и при каждом i хотя бы один из операторов a_i, b_i компактен. Норма, как обычно для суммы банаховых подпространств, определяется равенством

$$\|T\|_{\widehat{\mathcal{K}}_{\frac{1}{2}}} = \inf \sum_i \|a_i\|\|b_i\|,$$

где нижняя грань берется по всем таким представлениям оператора T. Операторы из $\widehat{\mathcal{K}}_{\frac{1}{2}}(U)$ называются *полукомпактными операторами умножения*.

Аналогично, операторы из $\mathcal{F}_{\frac{1}{2}}(U)$ называются *полуконечными элементарными операторами*. Это те элементарные операторы $\sum\limits_{i=1}^{n} L_{a_i}R_{b_i}$, у которых из каждой пары коэффициентов a_i, b_i хотя бы один имеет конечный ранг.

Следствие 8.7. *Для любого банахова операторного бимодуля* $U \subset \mathcal{B}(X,Y)$ *алгебра* $\widehat{\mathcal{K}}_{\frac{1}{2}}(U)/\overline{\mathcal{F}_{\frac{1}{2}}(U)}$ *тензорно радикальна.*

В частности,

$$\widehat{\mathcal{K}}_{\frac{1}{2}}(U) \subset Q_{\mathcal{F}_{\frac{1}{2}}(U)}(\widehat{\mathcal{B}}_*(U)).$$

Так как норма в $\widehat{\mathcal{K}}_{\frac{1}{2}}(U)$ мажорирует операторную норму пространства $\mathcal{B}(U)$, то мы приходим к следующему результату:

Следствие 8.8. *Пусть T — полукомпактный оператор умножения на банаховом бимодуле U. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая последовательность полуконечных элементарных операторов S_n на U, что $\|T^n - S_n\|_{\mathcal{B}(U)} < \varepsilon^n$ при всех достаточно больших n.*

Имеет смысл также рассматривать в $\widehat{\mathcal{B}}_*(U)$ идеал $\widehat{\mathcal{K}}_*(U)$ всех $(\mathcal{K})$-*операторов*, определенный равенством

$$\widehat{\mathcal{K}}_*(U) = \widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{K}(Y),\mathcal{K}(X)}(U).$$

Во многих случаях (например, когда норма в U совпадает с операторной) все операторы из $\widehat{\mathcal{K}}_*(U)$ компактны. Ясно, что $\widehat{\mathcal{K}}_*(U)$ — банахов идеал в алгебрах $\widehat{\mathcal{K}}_{\frac{1}{2}}(U)$ и $\widehat{\mathcal{B}}_*(U)$ относительно нормы $\|\cdot\|_{\widehat{\mathcal{K}}_*} = \|\cdot\|_{\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{K}(Y),\mathcal{K}(X)}}$.

Используя лемму 7.29, нетрудно доказать, что $\widehat{\mathcal{K}}_*(U)$ — бикомпактная банахова алгебра для любого банахова операторного бимодуля U.

Следствие 8.9. *Пусть U — банахов операторный бимодуль. Тогда $\sigma_{\mathcal{B}(U)}(T)$ счетен и $\sigma_{\mathcal{B}(U)}(T) \cup \{0\} = \sigma_{\widehat{\mathcal{K}}_*(U)}(T) \cup \{0\} = \sigma_{\widehat{\mathcal{B}}_*(U)}(T) \cup \{0\}$ для любого $T \in \widehat{\mathcal{K}}_*(U)$.*

Нормы и спектры элементарных операторов — весьма популярный объект исследования (см., например, статью Р. Курто [30] и цитированную там литературу). Сделаем небольшое отступление, чтобы представить простую формулу для вычисления следов этих операторов.

Пусть $\mathcal{N}$ — операторный идеал ядерных операторов. По определению, каждый оператор $a \in \mathcal{N}(X,Y)$ представим в виде $\sum f_i \otimes x_i$, где $f_i \in X^*$, $x_i \in Y$ и $\sum \|f_i\| \|x_i\| < \infty$. Норма $\|a\|_{\mathcal{N}}$ определяется как нижняя грань чисел $\sum \|f_i\| \|x_i\|$ по всем таким представлениям. Таким образом, $\mathcal{N}(X,Y)$ можно отождествить с $X^* \widehat{\otimes} Y$. Если $X = Y$, то след оператора a задается формулой

$$\operatorname{trace}(a) = \sum f_i(x_i).$$

Пусть $U \subset \mathcal{B}(X,Y)$ — банахов операторный бимодуль. Идеал $\mathcal{N}_*(U)$ всех $(\mathcal{N})$-*операторов умножения* определим равенством

$$\widehat{\mathcal{N}}_*(U) = \widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{N}(Y),\mathcal{N}(X)}(U)$$

и снабдим его нормой $\|\cdot\|_{\widehat{\mathcal{N}}_*} = \|\cdot\|_{\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{N}(Y),\mathcal{N}(X)}}$.

Предложение 8.10. *Всякий оператор $T \in \mathcal{N}_*(U)$ является ядерным. Если $T = \sum L_{a_i} R_{b_i}$, где $a_i, b_i \in \mathcal{N}$ и $\sum \|a_i\|_{\mathcal{N}} \|b_i\|_{\mathcal{N}} < \infty$, то*

$$\operatorname{trace}(T) = \sum_i \operatorname{trace}(a_i) \operatorname{trace}(b_i).$$

В заключение данного раздела заметим, что многие из приведенных в нем результатов переносятся на операторы умножения с матричными коэффициентами (и тем самым на системы линейных операторных уравнений), а также на интегральные операторы умножения

$$T_{a,b}(x) = \int\limits_{\Omega} a(\omega) x b(\omega) d\mu$$

с естественными ограничениями на функции $a(\omega)$ и $b(\omega)$.

8.3. Спектральные подпространства операторов умножения. В этом разделе рассматриваются инвариантные подпространства полукомпактных операторов умножения, на которых эти операторы сюръективны — в частности, собственные подпространства, или спектральные подпространства, соответствующие компонентам спектра, не содержащим нуля. Наш подход основан (кроме техники, связанной с тензорным радикалом) на изучении операторов, действующих в упорядоченной паре банаховых пространств.

Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ банаховы пространства, причем $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ и

$$\|y\|_{\mathcal{X}} \leqslant \|y\|_{\mathcal{Y}} \tag{8.3}$$

для всех $y \in \mathcal{Y}$. Мы называем пару $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *упорядоченной парой банаховых пространств*.

Обозначим через $\mathcal{B}(\mathcal{X}||\mathcal{Y})$ пространство всех таких операторов $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, что $T\mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}$.

Используя теорему о замкнутом графике, нетрудно получить следующий результат.

Теорема 8.11.

(i) *Если $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}||\mathcal{Y})$, то $T|_{\mathcal{Y}} \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$.*

(ii) $\mathcal{B}(\mathcal{X}||\mathcal{Y})$ — *унитальная банахова подалгебра в* $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ *относительно нормы*

$$\|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{X}||\mathcal{Y})} = \max\left\{\|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{X})}, \|T|_{\mathcal{Y}}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{Y})}\right\}.$$

Предложение 8.12. *Пусть* $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ — *упорядоченная пара банаховых пространств. Тогда*

(i) $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ — *банахова алгебра относительно нормы* $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$;
(ii) $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ — *банахов идеал в* $\mathcal{B}(\mathcal{X}||\mathcal{Y})$;
(iii) *любой оператор* $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, *образ которого содержится в* $\mathcal{Y}$, *принадлежит* $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$.

Нас будут интересовать инвариантные подпространства оператора $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}||\mathcal{Y})$, на которых T сюръективен. Разумеется, такие подпространства содержатся в $\mathcal{Y}$, если $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. Оказывается, что то же справедливо, если оператор лишь квазинильпотентен по модулю $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$.

Теорема 8.13. *Пусть* $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}||\mathcal{Y})$, *причем*

$$T \in Q_{\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{B}(\mathcal{X}||\mathcal{Y})). \tag{8.4}$$

Если $\mathcal{Z} = T\mathcal{Z}$ *для некоторого замкнутого подпространства* $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$, *то* $\mathcal{Z} \subset \mathcal{Y}$. *Кроме того, нормы* $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ *и* $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}$ *эквивалентны на* $\mathcal{Z}$, *так что подпространство* $\mathcal{Z}$ *замкнуто и в* $\mathcal{Y}$.

Доказательство состоит в последовательной аппроксимации, основанной на спектральных оценках.

Следствие 8.14. *Пусть* $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ *и* T *такие же, как в теореме* 8.13. *Тогда*:

(i) *если* $\lambda \neq 0$ — *собственное значение оператора* T, *то собственное подпространство* $\{x \in \mathcal{X} : Tx = \lambda x\}$ *содержится в* $\mathcal{Y}$;
(ii) *если* σ_0 — *открытое и замкнутое подмножество спектра* $\sigma_{\mathcal{B}(\mathcal{X})}(T)$ *оператора* T *и* $0 \notin \sigma_0$, *то спектральное подпространство* $E_{\sigma_0}(T)$ *содержится в* $\mathcal{Y}$.

8.4. Полукомпактные операторы умножения. Применим теперь теорему 8.13 к полукомпактным операторам умножения на упорядоченной паре пространств, соответствующей вложению пространства ядерных операторов в пространство ограниченных операторов.

Начнем с оценки норм операторов умножения на упорядоченной паре компонент банаховых операторных идеалов.

Пусть $V = \mathcal{V}(X,Y)$ и $U = \mathcal{U}(X,Y)$, где $\mathcal{V}$ и $\mathcal{U}$ — банаховы операторные идеалы. Мы предполагаем, что V — банахово подпространство в U. Так как V инвариантно относительно алгебры $\widehat{\mathcal{B}}_*(U)$ всех операторов умножения на U, то, согласно теореме 8.11, алгебра $\mathcal{B}(\mathcal{X}||\mathcal{Y})$ содержит $\widehat{\mathcal{B}}_*(U)$.

Лемма 8.15. *Если* $T \in \widehat{\mathcal{B}}_*(U)$, *то* $\|T|_V\|_{\widehat{\mathcal{B}}_*(V)} \leqslant \|T\|_{\widehat{\mathcal{B}}_*(U)}$ *и* $\|T\|_{\mathcal{B}(U||V)} \leqslant \|T\|_{\widehat{\mathcal{B}}_*(U)}$.

Для произвольных банаховых пространств X,Y обозначим через $\mathcal{X}$ пространство $\mathcal{B}(X,Y)$, а через $\mathcal{Y}$ — пространство $\mathcal{N}(X,Y)$ всех ядерных операторов из $\mathcal{B}(X,Y)$. Ясно, что $\mathcal{Y}$ является банаховым подпространством пространства $\mathcal{X}$. Кроме того, $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — банаховы операторные бимодули над алгебрами $\mathcal{B}(X)$ и $\mathcal{B}(Y)$, так что алгебра $\mathcal{B}(\mathcal{X}||\mathcal{Y})$ содержит алгебру $\widehat{\mathcal{B}}_*(\mathcal{X})$ всех операторов умножения $T = \sum\limits_i L_{a_i}R_{b_i}$, таких что $a_i \in \mathcal{B}(Y)$, $b_i \in \mathcal{B}(X)$ и $\sum\limits_i \|a_i\|\|b_i\| < \infty$.

Из сказанного выше следует, что $\widehat{\mathcal{K}}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{X}||\mathcal{Y})$. Используя следствие 8.8, лемму 8.15 и предложение 8.12, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 8.16. *Пусть* $\mathcal{X} = \mathcal{B}(X,Y)$ *и* $\mathcal{Y} = \mathcal{N}(X,Y)$. *Тогда*

$$\widehat{\mathcal{K}}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{X}) \subset Q_{\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{B}(\mathcal{X}||\mathcal{Y})). \tag{8.5}$$

Следующая теорема — один из основных результатов данного раздела.

Теорема 8.17. *Пусть* T — *полукомпактный оператор умножения на* $\mathcal{B}(X,Y)$. *Если замкнутое подпространство* $\mathcal{Z}$ *в* $\mathcal{B}(X,Y)$ *инвариантно для* T, *и* T *сюръективен на* $\mathcal{Z}$, *то* $\mathcal{Z}$ *состоит из ядерных операторов, и на нем операторная норма эквивалентна ядерной.*

В частности, собственные подпространства оператора T, *соответствующие ненулевым собственным значениям, а также спектральные подпространства, соответствующие компонентам спектра, не содержащим нуля, состоят из ядерных операторов.*

Аналогичные результаты справедливы для ядерных интегральных операторов, а также для матричных операторов умножения.

Предположим теперь, что T — элементарный оператор на $\mathcal{B}(X,Y)$:

$$T=\sum_{i=1}^{n}L_{a_i}R_{x_i}+\sum_{j=1}^{k}L_{y_j}R_{b_j},$$

причем $x_i\in\mathcal{B}(X)$, $y_j\in\mathcal{B}(Y)$, $a_i\in\mathcal{K}(Y)$, $b_j\in\mathcal{K}(X)$ для всех i,j.

Оказывается, что в этом случае утверждение теоремы 8.17 может быть значительно усилено: инвариантные подпространства, на которых T сюръективен, содержатся в $\mathfrak{J}(X,Y)$-компоненте любого квазибанахова операторного идеала $\mathfrak{J}$. Здесь подход, основанный на технике тензорного радикала и ℓ_1-радиуса, не может быть применен непосредственно; для доказательства того, что некоторая степень оператора T близка к полуконечному элементарному оператору, требуются дополнительные аргументы, основанные на анализе триангулируемых семейств компактных операторов (близкие по духу к доказательству леммы 7.20, но более тонкие). Сформулируем эти вспомогательные результаты, которые могут представлять и независимый интерес.

Лемма 8.18. *Пусть K — конечное множество компактных операторов из радикала некоторой алгебры $A\subset\mathcal{B}(X)$, а F — ограниченное подмножество в A. Для $\lambda\in(0,1)$ и $m\in\mathbb{N}$ обозначим через $E^{\lambda}_{K,F}(m)$ множество всех произведений $b_1\dots b_m$, где все b_i принадлежат $K\cup F$, причем не менее λm из них лежат в K. Тогда $\|E^{\lambda}_{K,F}(m)\|^{1/m}\to 0$ при $m\to\infty$.*

Следствие 8.19. *Пусть M — конечное подмножество банаховой алгебры A, содержащееся в ее радикале, причем операторы L_aR_b компактны на A для всех $a,b\in M$. Пусть N — произвольное ограниченное подмножество в A.*

Для любого $m\in\mathbb{N}$ обозначим через $H(m)$ множество всех произведений $x_1\dots x_m$ элементов из $M\cup N$, таких что не менее $m/2$ сомножителей принадлежит M. Тогда $\|H(m)\|^{1/m}\to 0$ при $m\to\infty$.

Квазинормой на линейном пространстве $\mathcal{L}$ называется отображение $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}:\mathcal{L}\to\mathbb{R}^+$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned}&\|x+y\|_{\mathcal{L}}\leqslant t_{\mathcal{L}}(\|x\|_{\mathcal{L}}+\|y\|_{\mathcal{L}})\text{ для всех } x,y\in\mathcal{L}\text{ и некоторого } t_{\mathcal{L}}\geqslant 1, \\ &\|\lambda x\|_{\mathcal{L}}=|\lambda|\,\|x\|_{\mathcal{L}}\text{ для всех } \lambda\in\mathbb{C}, x\in\mathcal{L}, \\ &\|x\|_{\mathcal{L}}=0\text{ лишь при } x=0.\end{aligned}\tag{8.6}$$

Как известно, [52, с. 162], квазинорма порождает линейную метризуемую топологию на $\mathcal{L}$. В этом смысле можно говорить о полноте $\mathcal{L}$ относительно квазинормы, или о полноте квазинормы.

Согласно [62], *квазибанахов операторный идеал* $\mathfrak{J}$ состоит из компонент $\mathfrak{J}(X,Y)\subset\mathcal{B}(X,Y)$, являющихся подмодулями в $\mathcal{B}(X,Y)$ и наделенными полными квазинормами $\|\cdot\|_{\mathfrak{J}(X,Y)}=\|\cdot\|_{\mathfrak{J}}$, где X и Y произвольные банаховы пространства. При этом предполагается, что выполнены условия:

1) константа $t=t_{\mathfrak{J}(X,Y)}$ из определения квазинормы — одна и та же для всех компонент: $t_{\mathfrak{J}(X,Y)}=t_{\mathfrak{J}}$,
2) $\|axb\|_{\mathfrak{J}}\leqslant\|a\|\,\|x\|_{\mathfrak{J}}\,\|b\|$ для всех $x\in\mathfrak{J}(X,Y)$, $a\in\mathcal{B}(Y,Z)$, $b\in\mathcal{B}(W,X)$,
3) $\|x\|_{\mathfrak{J}}=||x||$ для любого оператора x ранга 1.

В силу [62, теорема 6.2.5], всякий квазибанахов идеал $\mathfrak{J}$ допускает эквивалентную квазинорму $|\cdot|_{\mathfrak{J}}$ (в каждой компоненте), обладающую свойством: существует такое число $p\in(0,1]$ что

$$|x+y|^p_{\mathfrak{J}}\leqslant|x|^p_{\mathfrak{J}}+|y|^p_{\mathfrak{J}}\tag{8.7}$$

для всех $x,y\in\mathfrak{J}(X,Y)$. Мы будем рассматривать только квазинормы с этим свойством и писать $\|\cdot\|_p$, вместо $|\cdot|_{\mathfrak{J}}$. Идеал $\mathfrak{J}$ называется при этом банаховым операторным p-*идеалом*.

Соответственно мы определяем квазинорму на операторах, действующих в $\mathfrak{J}(X,Y)$:

$$\|T\|_p=\|T\|_{p,\mathfrak{J}}=\inf\{t>0:\|Tx\|_p\leqslant t\|x\|_p\text{ для всех } x\in\mathfrak{J}(X,Y)\}.$$

Нетрудно показать, что если T — элементарный оператор на $\mathcal{B}(X,Y)$, $Tx = \sum_{i=1}^{n} a_i x b_i$, где $a_i \in \mathcal{B}(Y)$, $b_i \in \mathcal{B}(X)$, то

$$\|T\|_p \leqslant n^{\frac{1-p}{p}} \sum_{i=1}^{n} \|a_i\| \|b_i\|.$$

Теорема 8.20. *Пусть $T = \sum_{i=1}^{n} L_{a_i} R_{x_i} + \sum_{j=1}^{k} L_{y_j} R_{b_j}$ — полукомпактный элементарный оператор на $\mathcal{B}(X,Y)$, где $x_i \in \mathcal{B}(X)$, $y_j \in \mathcal{B}(Y)$, $a_i \in \mathcal{K}(Y)$, $b_j \in \mathcal{K}(X)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $m \in \mathbb{N}$ и полуфинитный оператор $S = \sum_{i=1}^{(n+k)^m} L_{c_i} R_{d_i}$, такие что $\|T^m - S\|_p < \varepsilon^m$.*

Теперь по уже обсуждавшейся схеме (хотя и несколько сложнее, чем в случае банаховых идеалов) можно получить результаты о спектральных и собственных подпространствах.

Теорема 8.21. *Пусть T — полукомпактный элементарный оператор на $\mathcal{B}(X,Y)$, а $\mathcal{Z}$ — замкнутое подпространство в $\mathcal{B}(X,Y)$, на котором T сюръективен. Тогда $\mathcal{Z}$ содержится в пересечении (X,Y)-компонент всех квазибанаховых идеалов.*

Не формулируя в общем виде следствий о собственных и спектральных подпространствах, рассмотрим лишь случай операторных уравнений.

Следствие 8.22. *Рассмотрим линейное операторное уравнение*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x b_i = \lambda x, \text{ где } \lambda \neq 0. \tag{8.8}$$

Если для каждого i хотя бы один из операторов a_i, b_i компактен, то пространство решений этого уравнения содержится в пересечении всех квазибанаховых идеалов.

В работе Войтыньского [82] при более сильных ограничениях на коэффициенты (все коэффициенты компактны, кроме, может быть, a_1 и b_2, которые кратны единичному оператору) было доказано, что все решения уравнения (8.8) являются ядерными операторами, т. е. $x \in \mathfrak{S}_1$. Разумеется, результат следствия 8.22 дает значительно больше, даже если ограничиться идеалами Шаттена: $x \in \bigcap_{p>0} \mathfrak{S}_p$.

Результаты данного раздела, приведенные без указания на источники, были получены в работе Ю. В. Туровского и В. С. Шульмана [74].

9. Операторы умножения на алгебрах с условиями компактности

В этом разделе рассматриваются операторы умножения в наиболее привычном значении этого термина — они действуют на банаховой алгебре, содержащей их коэффициенты. Другими словами, здесь $A_1 = A_2 = U = A$, и для краткости мы будем опускать индексы: например, обозначать алгебру всех элементарных операторов $\mathcal{E\ell}(A)$ вместо $\mathcal{E\ell}_{A,A}(A)$.

Мы будем накладывать на A различные ограничения компактности. Как было показано, даже наиболее слабое из них — гипокомпактность — влечет совпадение $\mathrm{Rad}(A)$ с $\mathcal{R}_t(A)$.

9.1. Операторы умножения на алгебрах, коммутативных по модулю радикала.

Из совпадения (при условии гипокомпактности) тензорного радикала с радикалом Джекобсона и общих результатов раздела 8 вытекает следующий факт.

Следствие 9.1. *Если A гипокомпактна, то алгебра $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{Rad}(A),A} + \widehat{\mathcal{E}}_{A,\mathrm{Rad}(A)}$ гипокомпактна и радикальна.*

В частности, все элементарные операторы $L_a + R_b + \sum_{i=1}^{n} L_{a_i} R_{b_i}$, у которых при любом i хотя бы один из коэффициентов a_i или b_i принадлежит $\mathrm{Rad}(A)$, являются квазинильпотентными элементами алгебры $\widehat{\mathcal{E}}_{A,A}$. Так как норма в $\widehat{\mathcal{E}}_{A,A}$ мажорирует операторную, они квазинильпотентны как операторы на A.

В дальнейшем, говоря о спектрах элементарных операторов, мы имеем в виду их спектры в алгебре $\mathcal{B}(A)$.

Доказательство следующего результата существенно использует независимость спектра элемента от выбора содержащей его подалгебры с гибкой нормой (см. предложение 4.1).

Теорема 9.2. *Пусть A — гипокомпактная банахова алгебра. Если $u = \sum_{i=1}^{n} L_{a_i}R_{b_i} \in \mathcal{E}\ell(A)^1$, $v = \sum_{j=1}^{m} L_{c_j}R_{b_j} \in \mathcal{E}\ell(A)^1$ и все коммутаторы $[a_i, c_j]$, $[b_i, d_j]$ принадлежат $\mathrm{Rad}(A)$, то*

$$\sigma(u+v) \subset \sigma(u) + \sigma(v), \tag{9.1}$$

$$\sigma(uv) \subset \sigma(u)\sigma(v). \tag{9.2}$$

Напомним, что центр по модулю радикала $Z_{\mathrm{Rad}}(A)$ алгебры A определяется как $\{a \in A : [a, x] \in \mathrm{Rad}(A)$ для всех $x \in A\}$.

Следствие 9.3. *Если A гипокомпактна, а элемент u принадлежит $L_{Z_{\mathrm{Rad}}(A)}R_A + L_A R_{Z_{\mathrm{Rad}}(A)}$, то включения* (9.1) *и* (9.2) *справедливы для всех $v \in \mathcal{E}\ell(A)$.*

Будем называть подалгебру B банаховой алгебры *спектрально вычислимой*, если условия (9.1) и (9.2) выполнены для всех $u, v \in B$. Предыдущие результаты показывают, что если A гипокомпактна и коммутативна по модулю радикала, то $\mathcal{E}\ell(A)$ — спектрально вычислимая подалгебра в $\mathcal{B}(A)$.

9.2. Энгелевы алгебры. В классической теории конечномерных алгебр Ли важную роль играет класс нильпотентных алгебр, т. е. таких алгебр Ли $\mathcal{L}$, для которых все операторы $\mathrm{ad}_{\mathcal{L}}(a) : x \to [a, x]$ на $\mathcal{L}$ нильпотентны. Функционально-аналитический вариант теории алгебр Ли имеет дело с топологическими, и в частности, банаховыми алгебрами Ли, т. е. алгебрами Ли $(\mathcal{L}, [\cdot,\cdot])$, полными относительно некоторой нормы $\|\cdot\|$, причем выполнено условие $\|[x, y]\| \leqslant C\|x\|\|y\|$, где C — некоторая константа. Если все операторы $\mathrm{ad}_{\mathcal{L}}(a)$ квазинильпотентны, то $\mathcal{L}$ называется *энгелевой*.

Любая (ассоциативная) банахова алгебра A может быть рассмотрена как банахова алгебра Ли относительно произведения $[x, y] = xy - yx$; энгелевость в этом случае означает квазинильпотентность всех операторов $L_a - R_a$. Известно (см. работу Б. Опти и М. Мэтью [22]), что всякая энгелева банахова алгебра коммутативна по модулю радикала.

Будем называть банахову алгебру A *строго энгелевой*, если

$$\sigma\left(\sum_{i=1}^{n} L_{a_i}R_{b_i}\right) \subset \sigma\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)$$

для всех $a_i, b_i \in A^1$ и $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 9.4. *Пусть A гипокомпактна и коммутативна по модулю своего радикала. Если операторы $L_a - R_a$ квазинильпотентны для всех элементов a из некоторого множества $M \subset A$, порождающего A как банахову алгебру, то A является строго энгелевой.*

В частности, для гипокомпактных алгебр понятия энгелевости и строгой энгелевости совпадают.

Теорема 9.5. *Пусть гипокомпактная банахова алгебра A порождена замкнутой подалгеброй Ли $\mathcal{L}$. Если $\mathcal{L}$ является энгелевой, то A строго энгелева.*

Заметим, что хотя теорема 9.4 играет важную роль в доказательстве этого результата, он не является ее непосредственным следствием, так как в теореме 9.5 операторы $L_a - R_a$ при $a \in \mathcal{L}$ предполагаются квазинильпотентными лишь на $\mathcal{L}$, а не на всей алгебре $\mathcal{A}$.

9.3. Обобщенные операторы умножения. Из результатов предыдущих разделов следует, в частности, что если A — гипокомпактная радикальная алгебра, то все операторы из $\mathcal{E}\ell(A)$ и, более сильно, из $\widehat{\mathcal{E}}_{A,A}$ квазинильпотентны. Здесь мы обсудим возможность перенесения этих результатов на операторы из замыкания $\mathrm{Mul}(A)$ алгебры $\mathcal{E}\ell(A)$ в $\mathcal{B}(A)$. Сразу отметим, что проблема радикальности алгебры $\mathrm{Mul}(A)$ открыта даже для бикомпактных A (и в частности, для случая, когда A — это радикальная алгебра компактных операторов). Будем называть элементы алгебры $\mathrm{Mul}(A)$ *обобщенными операторами умножения*.

Теорема 9.6. *Если алгебра A компактна и $J = \mathrm{Rad}(A)$, то замкнутый идеал I алгебры* $\mathrm{Mul}(A)$, *порожденный $L_J R_A \cup L_A R_J$, содержится в* $\mathrm{Rad}(\mathrm{Mul}(A))$. *Как следствие, $L_J + R_J + I$ состоит из квазинильпотентов.*

Будем обозначать через $\mathrm{Mul}_2(A)$ замкнутую подалгебру в $\mathrm{Mul}(A)$, порожденную $L_A R_A$.

Следствие 9.7. *Если радикальная банахова алгебра A компактна, то*

$$\mathrm{Mul}_2(A) \subset \mathrm{Rad}(\mathrm{Mul}(A)).$$

В частности, алгебра $\mathcal{E}\ell(A) + \mathrm{Mul}_2(A)$ состоит из квазинильпотентных операторов.

9.4. Перманентно радикальные алгебры. Будем называть некоторый класс $\mathcal{P}$ банаховых алгебр *перманентным*, если вместе с каждой алгеброй он содержит замыкание ее образа при любом непрерывном гомоморфизме. Таковы, например, классы коммутативных, сепарабельных, аменабельных алгебр, или алгебр с ограниченной аппроксимативной единицей.

Пример Диксона [37, пример 9.3] показывает, что класс всех радикальных банаховых алгебр не перманентен. Будем говорить, что банахова алгебра A перманентно радикальна, если $\overline{f(A)}$ радикальна для любого непрерывного гомоморфизма $f : A \longrightarrow B$. Очевидно, что класс всех перманентно радикальных алгебр перманентен. Нетрудно показать также, что этот класс выдерживает расширения. Обратно, фактор-алгебры перманентно радикальных алгебр перманентно радикальны, однако неясно, наследуется ли перманентная радикальность идеалами.

Легко проверить, что если в алгебре есть направленная по возрастанию сеть перманентно радикальных идеалов, объединение которой плотно, то сама алгебра перманентно радикальна.

Ясно, что класс перманентно радикальных алгебр содержит все коммутативные и все конечномерные радикальные алгебры.

Теорема 9.8. *Всякая гипофинитная радикальная банахова алгебра перманентно радикальнва.*

Предложение 9.9. *Радикальная гипофинитная банахова алгебра не имеет нетривиальных топологически неприводимых представлений.*

Верно ли, что всякая радикальная бикомпактная банахова алгебра перманентно радикальна? Если да, то все гипокомпактные радикальные алгебры перманентно радикальны.

Следующий результат показывает, что предложение 9.9 не переносится на гипокомпактные алгебры (даже коммутативные).

Теорема 9.10. *Существует радикальная бикомпактная алгебра, имеющая нетривиальное топологически неприводимое представление.*

В самом деле, пусть T — квазинильпотентный оператор на банаховом пространстве X, не имеющий нетривиальных инвариантных подпространств (как показал Ч. Рид [66], такие операторы существуют уже при $X = \ell_1$). Обозначим через B замкнутую подалгебру в $\mathcal{B}(X)$, порожденную T. Из теоремы Бонсолла (см. [26, теорема 3]) следует существование такой нормы $\|\cdot\|'$ на B, что

1) $\|a\| \leqslant \|a\|'$ для любого $a \in B$,
2) пополнение A алгебры B по норме $\|\cdot\|'$ является банаховой подалгеброй в $\mathcal{B}(X)$,
3) элемент b алгебры A, соответствующий оператору T, компактен.

Поскольку алгебра A порождена элементом b, она бикомпактна. Так как всякий компактный элемент имеет счетный спектр, то, в силу предложения 4.1(ii), $\sigma_A(b) = \sigma(T)$. Следовательно, b квазинильпотентен и A радикальна. Тождественное вложение алгебры A в $\mathcal{B}(X)$, определяет ее представление на X, которое топологически неприводимо, поскольку $\pi(b) = T$.

Теорема 9.11. *Если алгебра A компактна, а алгебра* $\mathrm{Rad}(A)$ *перманентно радикальна, то* $L_{\mathrm{Rad}(A)} \cup R_{\mathrm{Rad}(A)} \subset \mathrm{Rad}(\mathrm{Mul}(A))$.

Следствие 9.12. *Если A — аппроксимативная банахова алгебра, то*

$$L_{\mathrm{Rad}(A)} \cup R_{\mathrm{Rad}(A)} \subset \mathrm{Rad}(\mathrm{Mul}(A)).$$

Следствие 9.13. *Если аппроксимативная банахова алгебра A коммутативна по модулю радикала, то и алгебра* $\mathrm{Mul}(A)$ *коммутативна по модулю радикала.*

9.5. Цепочки замкнутых идеалов. Рассмотрим теперь инвариантные подпространства для алгебры всех элементарных операторов — т. е. идеалы. До сих пор открыта (даже в коммутативном случае) проблема существования замкнутых идеалов в радикальных банаховых алгебрах. В работе Войтыньского [82] было доказано, что эта проблема решается положительно для алгебр, имеющих ненулевые компактные элементы. Следующее утверждение, доказательство которого использует теорему 7.22, усиливает этот глубокий результат.

Напомним, что *центральным мультипликатором* на банаховой алгебре A называется любой ограниченный оператор на A, перестановочный с операторами левого и правого умножения.

Теорема 9.14. *Если радикальная банахова алгебра A имеет ненулевой компактный элемент, то либо умножение в ней тривиально, либо A имеет замкнутый идеал, инвариантный относительно всех центральных мультипликаторов.*

Естественно возникает вопрос о том, имеет ли бикомпактная радикальная банахова алгебра тотальную цепочку замкнутых идеалов. Мы покажем, что ответ на него, вообще говоря, отрицателен.

Напомним, что тотальность цепочки подпространств банахова пространства, т. е., максимальность ее в решетке всех подпространств, эквивалентна одномерности всех разрывов. В общем случае, если пара $I_1 \subset I_2$ замкнутых идеалов образует разрыв решетки всех идеалов (промежуточных идеалов нет), то фактор алгебра I_2/I_1 называется *алгеброй разрыва*.

Примером разрыва является любая пара $(0, I)$, где I — минимальный замкнутый идеал. Следовательно, если любая цепь идеалов продолжается до тотальной, то минимальные идеалы одномерны (или отсутствуют). Оказывается, что этот факт имеет место во всех гипофинитных радикальных алгебрах, но не во всех бикомпактных.

Теорема 9.15.

(i) *Существует радикальная бикомпактная банахова алгебра, не имеющая тотальной цепочки замкнутых идеалов.*

(ii) *Радикальная бикомпактная банахова алгебра может иметь бесконечномерный минимальный замкнутый идеал.*

Доказательство. Схема доказательства такова. Пусть A — коммутативная радикальная банахова алгебра, имеющая топологически неприводимое представление $\pi : A \longrightarrow \mathcal{B}(X)$ (см. теорему 9.10). На банаховом пространстве $B = A \oplus X$ определим умножение правилом $(a\oplus x)(b\oplus y) = ab\oplus\pi(a)y$. Нетрудно проверить, что с этим умножением и $\max$-нормой B становится радикальной банаховой алгеброй.

Покажем, что B бикомпактна. Для любых $a\oplus x, b\oplus y \in B$ оператор $T = L_{a\oplus x}R_{b\oplus y}$ отображает элемент $c\oplus z$ в $acb\oplus\pi(ac)y$. Так как единичный шар $B_\odot$ пространства B равен $A_\odot\oplus X_\odot)$, то

$$T(B_\odot) \subset L_aR_b(A_\odot)\oplus\pi(L_a(A_\odot)y).$$

Поскольку операторы L_aR_b на A компактны, достаточно установить предкомпактность множества $\pi(L_a(A_\odot)y)$. Другими словами, нам нужно показать, что любой оператор $S_y : c \longmapsto \pi(ac)y$ компактен. Если $y = \pi(d)z$ для некоторых $d \in A$, $z \in X$, то S_y компактен, поскольку факторизуется через L_aR_d. Отсюда следует, что S_y компактен для всех y из линейной оболочки Y множества $\pi(A)X$. Но так как подпространство Y инвариантно для $\pi(A)$, то $\overline{Y} = X$, поэтому все операторы S_y компактны.

Подпространство $I = 0\oplus X$ является замкнутым идеалом алгебры B, и легко проверить, что этот идеал минимален. Более того, можно показать, что любой ненулевой замкнутый идеал J алгебры B содержит I. Это доказывает оба утверждения теоремы. □

В оставшейся части этого раздела мы приведем некоторые результаты «положительного» характера.

Лемма 9.16. *Если $J \subset I$ — разрыв в решетке идеалов радикальной компактной банаховой алгебры A, то выполнено хотя бы одно из включений $AI \subset J$ и $IA \subset J$.*

Теорема 9.17. *Если A — бесконечномерная компактная радикальная банахова алгебра, то любая цепь ее замкнутых идеалов продолжается до бесконечной цепи.*

Напомним, что через $\mathcal{A}(X)$ обозначается замыкание (по операторной норме) идеала $\mathcal{F}(X)$ всех операторов конечного ранга в X. Нас интересует структура промежуточных идеалов алгебры $\mathcal{B}(X)$.

Следствие 9.18.

(i) *Если* $\dim(\mathcal{K}(X)/\mathcal{A}(X)) = n$ *(где* $n \leqslant \infty$*), то* $\mathcal{K}(X)$ *имеет цепочку из* n *различных идеалов, содержащих* $\mathcal{F}(X)$.

(ii) *Пусть* M *и* N *— замкнутые идеалы алгебры* $\mathcal{B}(X)$*, такие что* $\mathcal{A}(X) \subset N \subset M \subset \mathcal{K}(X)$*. Если* M^2 *не содержится в* N*, то между* N *и* M *имеется хотя бы один замкнутый идеал алгебры* $\mathcal{B}(X)$*. В частности, если* $(\mathcal{K}(X)/\mathcal{A}(X))^2 \neq 0$*, то между* $\mathcal{A}(X)$ *и* $\mathcal{K}(X)$ *есть замкнутые идеалы алгебры* $\mathcal{B}(X)$.

(iii) *Если алгебра* $\mathcal{K}(X)/\mathcal{A}(X)$ *не является нильпотентной, то всякая максимальная цепь замкнутых идеалов алгебры* $\mathcal{B}(X)$*, лежащих между* $\mathcal{A}(X)$ *и* $\mathcal{K}(X)$*, бесконечна.*

Пример банахова пространства X, для которого алгебра $\mathcal{K}(X)/\mathcal{A}(X)$ не является нильпотентной, можно построить, используя построенный Уиллисом [80] пример банахова пространства без свойства аппроксимации, обладающего свойством ограниченной компактной аппроксимации.

По определению, X имеет свойство аппроксимации (AP) (свойство компактной аппроксимации (CAP)), если для любого компакта $M \subset X$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такой оператор S конечного ранга (соответственно, компактный), что $\|Sx - x\| < \varepsilon$ при всех $x \in M$. Если оператор S всегда можно выбрать так, что его норма не превышает некоторого $C > 0$, то X обладает свойством ограниченной аппроксимации (BAP) (соответственно, свойством ограниченной компактной аппроксимации (BCAP)).

Если X имеет свойство (BCAP), то легко показать, что $\mathcal{K}(X)$ имеет ограниченную аппроксимативную единицу, а потому $\mathcal{K}(X)^n$ плотно в $\mathcal{K}(X)$ для всех n, поэтому из нильпотентности $\mathcal{K}(X)/\mathcal{A}(X)$ следовало бы, что $\mathcal{K}(X) = \overline{\mathcal{A}(X)}$, а это означает, ввиду (BCAP), что X имеет (BAP). Поскольку для пространства, построенного в [80], это не так, алгебра $\mathcal{K}(X)/\mathcal{A}(X)$ не нильпотентна.

Обозначая через $\mathcal{K}$ и $\mathcal{A}$ операторные идеалы компактных и аппроксимируемых идеалов, можно теперь доказать следующий результат:

Следствие 9.19. *Существует бесконечная цепь замкнутых операторных идеалов, промежуточных между* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{K}$.

Теорема 9.20. *Если* A *— радикальная аппроксимируемая банахова алгебра, то любой разрыв в решетке ее идеалов одномерен.*

Доказательство. Доказательство основано на лемме 9.16. В самом деле, рассматривая разрыв $J \subset I$, мы можем считать, для определенности, что $IA \subset J$. Обозначим через π естественное представление алгебры $\mathrm{Mul}(A)$ на I/J, тогда $\pi(R_A) = 0$, откуда $\pi(\mathcal{E}\ell(A)) = \pi(L_A)$ и $\pi(\mathrm{Mul}(A)) \subset \overline{\pi(L_A)}$. Отображение $a \longmapsto \pi(L_a)$ является топологически неприводимым представлением алгебры A on I/J, а значит, согласно предложению 9.9, оно действует в одномерном пространстве. □

Следствие 9.21. *Всякая радикальная гипофинитная банахова алгебра имеет тотальную цепь замкнутых идеалов и все ее минимальные замкнутые идеалы одномерны.*

Подпространство I банаховой алгебры A называется *квазиидеалом*, если $AIA \subset I$.

Теорема 9.22. *Всякая бикомпактная радикальная банахова алгебра имеет тотальную цепь замкнутых квазиидеалов.*

Результаты, рассмотренные в данном разделе, получены в работе Ю. В. Туровского и В. С. Шульмана [74].

10. Формулы типа Бергера—Вонга

10.1. Формула Бергера—Вонга и ССР множеств компактных операторов. В теории конечномерных динамических систем важную роль играет формула для вычисления ССР ограниченного множества матриц, найденная в 1992 году Бергером и Вонгом [25] (см., например, книгу [47], где эта формула называется основной теоремой теории совместного спектрального радиуса). Чтобы сформулировать этот результат, введем, следуя [25], иную спектральную характеристику ограниченного подмножества M алгебры — его *BW-радиус*:

$$r(M) := \limsup_{n\to\infty} R_n(M), \text{ где } R_n(M) = \sup\{\rho(a) : a \in M^n\}^{1/n}. \tag{10.1}$$

Ясно, что $r(M) \leqslant \rho(M)$. Формула Бергера—Вонга — это равенство

$$\rho(M) = r(M), \tag{10.2}$$

справедливое для любого ограниченного множества матриц.

В работе Ю. В. Туровского и В. С. Шульмана [70] был получен первый бесконечномерный вариант формулы (10.2):

Теорема 10.1. *Равенство* (10.2) *выполняется для всех предкомпактных множеств M компактных операторов в произвольном банаховом пространстве.*

Чтобы убедиться в полезности этого результата, достаточно увидеть, как легко из него следует решение проблемы вольтерровой полугруппы (теорема 7.22). В самом деле, если G — полугруппа вольтерровых операторов, то $r(M) = 0$ для любого конечного множества $M \subset G$. Из (10.2) следует, что $\rho(M) = 0$, и значит, линейная оболочка $\mathrm{span}(G)$ множества M состоит из вольтерровых операторов. Так как $\mathrm{span}(G)$ является алгеброй, то остается лишь применить следствие 7.18.

Разумеется, это нельзя считать простым доказательством теоремы 7.22, поскольку в доказательстве теоремы 10.1 эта теорема существенно использовалась. Однако теорема 10.1 сыграла важную роль в исследовании многих других задач теории операторов, о которых пойдет речь ниже.

Подчеркнем, что оба ограничения компактности в теореме 10.1 существенны. В статье П. Гюйнанда [43] приведен пример пары операторов T, S, для которых $r(\{T, S\}) = 0 \neq \rho(\{T, S\})$. Известны и примеры ограниченных множеств компактных операторов, для которых равенство (10.2) не выполнено (см., например, [61, предложение 2.16]).

Мы приведем результаты о связи совместного спектрального радиуса и BW-радиуса для множеств не обязательно компактных элементов банаховых алгебр и операторов. В частности, будет показано, что для любого предкомпактного множества $M \subset \mathcal{B}(X)$ справедливо равенство

$$\rho(M) = \max\{r(M), \rho_e(M)\}, \tag{10.3}$$

где $\rho_e(M) := \rho(\pi(M))$, т. е. ССР образа M в алгебре Калкина $\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$ при естественном эпиморфизме π.

10.2. Некоторые вспомогательные результаты. Как и выше, для $M \subset A$ полагаем $L_M = \{L_a : a \in M\}$ и $R_M = \{R_a : a \in M\}$. Нетрудно проверить, что $r(L_M) = r(R_M) = r(M)$ и $\rho(L_M) = \rho(R_M) = \rho(M)$ для любого ограниченного множества M. Справедлив также следующий аналог леммы 7.24:

Лемма 10.2. *Пусть M — ограниченное подмножество банаховой алгебры A. Тогда $\rho(M^m) = \rho(M)^m$ и $r(M^m) = r(M)^m$ для любого $m \in \mathbb{N}$, $\rho(M)^2 = \rho(L_M R_M)$ и $r(M)^2 = r(L_M R_M)$.*

Запишем определение существенного ССР ρ_e в более подробной форме:

$$\rho_e(M) := \lim_{n\to\infty} \left(\sup\{\|T\|_e : T \in M^n\}\right)^{1/n} = \inf_n \left(\sup\{\|T\|_e : T \in M^n\}\right)^{1/n},$$

где $||T||_e = ||\pi(T)||$ — существенная норма T. Характеристикой оператора T, близкой к $||T||_e$, является его *хаусдорфова норма* $\|T\|_\chi$; она определяется (см., например, статью А. Лебова и М. Шехтера [55]) как хаусдорфова мера некомпактности образа $TX_\odot$ единичного шара $X_\odot$ при отображении T (напомним, что это точная нижняя грань множества тех $\varepsilon > 0$, для которых $TX_\odot$ имеет конечную ε-сеть). Легко видеть, что $\|T\|_\chi \leqslant ||T||_e$. Преимущество полунормы $\|T\|_\chi$ объясняется тем, что она хорошо согласована с сужениями оператора на инвариантное подпространство и фактор-пространство (см., например, [71, лемма 2.5]):

$$\|T|\mathcal{Y}\|_\chi \leqslant 2\|T\|_\chi \text{ и } \|T|(X/\mathcal{Y})\|_\chi \leqslant \|T\|_\chi. \tag{10.4}$$

Важный технический результат был получен в [70, следствие 6.5]:

Лемма 10.3. $\|L_M R_M\|_\chi \leqslant 16\|M\|_\chi\|M\|$ *для любого предкомпактного множества M операторов.*

Определим *хаусдорфов радиус* ρ_χ равенством

$$\rho_\chi(M) := \lim_{n\to\infty}\left(\sup\left\{\|T\|_\chi : T\in M^n\right\}\right)^{1/n} = \inf_n\left(\sup\left\{\|T\|_\chi : T\in M^n\right\}\right)^{1/n}.$$

Ясно, что

$$\rho_\chi(M) \leqslant \rho_e(M), \tag{10.5}$$

поэтому для доказательства формулы (10.3) достаточно установить равенство

$$\rho(M) = \max\left\{r(M), \rho_\chi(M)\right\}. \tag{10.6}$$

Важный случай выполнения этого равенства доказан в [70, предложение 9.6]:

Лемма 10.4. *Если $\rho(M) = 1$ для предкомпактного множества M операторов, и полугруппа, порожденная M, ограничена, то* (10.6) *выполнено для M.*

Для любого ограниченного множества M элементов банаховой алгебры A положим $\rho^\chi(M) = \rho_\chi(L_M R_M)^{1/2}$. Легко видеть, учитывая (10.4), что

$$\rho^\chi(M/J) \leqslant \rho^\chi(M) \tag{10.7}$$

для любого замкнутого идеала J алгебры A.

10.3. Смешанная БВ-формула. Равенство

$$\rho(M) = \max\{\rho^\chi(M), r(M)\} \tag{10.8}$$

мы называем смешанной формулой Бергера—Вонга, так как оно связывает спектральные характеристики предкомпактного множества M элементов произвольной банаховой алгебры A с хаусдорфовым радиусом набора операторов $L_M R_M$. Его достаточно доказать, считая, что M порождает A. В самом деле, величины $\rho(M)$ и $r(M)$ не изменятся, если их вычислять в замкнутой подалгебре $\mathcal{A}(M)$, порожденной M. Значение же $\rho^\chi(M) = \rho_\chi(L_M R_M)^{1/2}$ при этом не может возрасти (так как операторы $L_M R_M$ сужаются на подпространство $\mathcal{A}(M)$), а нетривиальной частью (10.8) является лишь неравенство $\leqslant$.

Полугруппа G элементов алгебры A называется *полугруппой Раджави* (или, коротко, *R-полугруппой*), если $\lambda a \in G$ для любых $a \in G$ и $\lambda \geqslant 0$. Для любого множества $M \subset A$ мы обозначаем через $\mathcal{S}(M)$ полугруппу, порожденную M, а через $\mathcal{S}_+(M)$ — R-полугруппу, порожденную M. Ясно, что $\mathcal{S}(M) = \bigcup_{n=1}^{\infty} M^n$ и $\mathcal{S}_+(M) = \mathbb{R}_+\mathcal{S}(M)$, где $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geqslant 0\}$.

Пусть N — множество операторов в банаховом пространстве и $G = \mathcal{S}(N)$. Оператор $T \in N^n$ называется *ведущим* (точнее, *n-ведущим*), если $\|T\| \geqslant \|S\|$ для всех $S \in \bigcup_{k<n} N^k$. Уточнение термина существенно, так как один оператор может принадлежать разным N^n. Далее, *ведущая последовательность* в G — это последовательность $n(k)$-ведущих операторов $T_k \in N^{n(k)}$, где $n(k) \to \infty$. Если G неограничена, то очевидно, что хотя бы одна ведущая последовательность в G существует.

Лемма 10.5. *Пусть N — предкомпактное множество операторов. Если $\rho_\chi(N) < \rho(N) = 1$ и полугруппа $\mathcal{S}(N)$ неограничена, то существует последовательность операторов единичной нормы $T_n \in \mathcal{S}_+(N)$, сходящаяся к компактному оператору T. Более того, можно выбрать в качестве такой последовательности любую сходящуюся подпоследовательность из $\{S_n/\|S_n\|\}$, где $\{S_n\}$ — произвольная ведущая последовательность в $\mathcal{S}(N)$.*

Лемма 10.6. *Пусть $A = \mathcal{A}(M)$, где M предкомпактно, и пусть $N = L_M R_M$. Если $\rho_\chi(N) < \rho(N) = 1$ и полугруппа $\mathcal{S}(N)$ неограничена, то $\overline{\mathcal{S}_+(N)}$ содержит ненулевой компактный оператор T, такой что*

(i) *оператор $L_{Th} R_{Tg}$ компактен при любых $h, g \in A$;*
(ii) *если $r(N) < 1$, то $T(A) \subset \mathrm{Rad}(A)$.*

Бикомпактные идеалы, состоящие из квазинильпотентных элементов, мы будем называть *QB-идеалами.*

Следствие 10.7. *Пусть* $M \in \mathcal{M}_c(A)$. *Если* $\max\{\rho^{\chi}(M), r(M)\} < \rho(M) = 1$ *и полугруппа* $\mathcal{S}(L_M R_M)$ *неограничена, то* $\mathcal{A}(M)$ *имеет ненулевой* QB*-идеал.*

Следствие 10.8. *Пусть* $M \in \mathcal{M}_c(A)$. *Если* $\mathcal{A}(M)$ *не имеет ненулевых* QB*-идеалов, то равенство* (10.8) *справедливо.*

Теорема 10.9. *Формула* (10.8) *верна для любой банаховой алгебры* A *и любого предкомпактного множества* $M \subset A$.

Доказательство теоремы, как и доказательства ряда других результатов данного раздела, существенно использует технику теории топологических радикалов. Пусть $J = \mathrm{Rad}(A) \cap \mathcal{R}_{\mathrm{hc}}(A)$. Так как, в силу теоремы 7.26, $J \subset \mathcal{R}_{\mathrm{cq}}(A)$, то $\rho(M) = \rho(M/J)$ по теореме 5.6. Далее, алгебра A/J не имеет ненулевых QB-идеалов. Действительно, пусть I — какой-нибудь QB-идеал в A/J, тогда его прообраз U в A содержится в $\mathrm{Rad}(A)$ и $\mathcal{R}_{\mathrm{hc}}(A)$, поскольку радикалы устойчивы относительно расширений. Поэтому $U \subset J$, откуда $I = 0$.

Учитывая, что $A/J = \mathcal{A}(M/J)$, и применяя следствие 10.8, заключаем, что

$$\rho(M) = \rho(M/J) = \max\{\rho^{\chi}(M/J), r(M/J)\} \leqslant \max\{\rho^{\chi}(M), r(M)\}$$

в силу (10.7). Обратное неравенство очевидно.

10.4. Операторная БВ-формула.

Теперь уже легко получить формулу (10.3).

Теорема 10.10. *Если множество* $M \subset \mathcal{B}(X)$ *предкомпактно, то*

$$\rho(M) = \max\{\rho_e(M), r(M)\}.$$

В самом деле, из леммы 10.3 следует, что $\|L_M R_M\|_{\chi} \leqslant 16\|M\|_{\chi}\|M\|$. Заменяя M на M^n, извлекая корни n-й степени и переходя к пределу при $n \to \infty$, придем к неравенству $\rho^{\chi}(M)^2 = \rho_{\chi}(L_M R_M) \leqslant \rho_{\chi}(M)\rho(M)$. Применяя теорему 10.9, получим $\rho(M)^2 \leqslant \max\{\rho_{\chi}(M)\rho(M), r(M)^2\}$, откуда, в силу неравенств $r(M) \leqslant \rho(M)$ и (10.5),

$$\rho(M) \leqslant \max\{\rho_{\chi}(M), r(M)\} \leqslant \max\{\rho_e(M), r(M)\}.$$

Обратное неравенство очевидно.

10.5. Алгебраическая БВ-формула.

Наша следующая цель — доказать, что

$$\rho(M) = \max\{\rho(M/\mathcal{R}^r_{\mathrm{hc}}(A)), r(M)\} \tag{10.9}$$

для любой банаховой алгебры A и для любого $M \in \mathcal{M}_c(A)$. Нам будет удобнее сформулировать результат в более общей форме:

Теорема 10.11. *Если* J *— замкнутый гипокомпактный идеал банаховой алгебры* A, *то*

$$\rho(M) = \max\{\rho(M/J), r(M)\} \tag{10.10}$$

для любого предкомпактного множества $M \subset A$.

Схема доказательства такова. Если идеал J бикомпактен, то простым приемом (заменой идеала его степенью) задача сводится к случаю, когда все операторы $L_a R_b$, где $a, b \in J$, компактны на A (а не только на J). В этом случае существенная норма множества $L_M R_M$ легко оценивается через расстояние от M до J: $\|L_M R_M\|_e \leqslant 3\|M/J\|\|M\|$. Заменяя M на M^n, извлекая корни и переходя к пределу, получим, что $\rho_e(L_M R_M) \leqslant \rho(M/J)\rho(M)$. Следовательно, $\rho^{\chi}(M)^2 \leqslant \rho(M/J)\rho(M)$. Применяя (10.8), получим

$$\rho(M)^2 \leqslant \max\{(\rho^{\chi}(M))^2, r(M)^2\} \leqslant \rho(M)\max\{\rho(M/J), r(M)\},$$

что и требуется.

Переходом к фактор-алгебрам отсюда выводится следующий результат:

Лемма 10.12. *Если* $I \subset K$ *— замкнутые идеалы алгебры* A, *и алгебра* K/I *бикомпактна, то из справедливости равенства* (10.10) *при* $J = I$ *вытекает его справедливость при* $J = K$.

Теперь заметим, что из гипокомпактности идеала J следует существование такой возрастающей трансфинитной цепочки $\{J_\alpha\}_{\alpha\leqslant\beta}$ замкнутых идеалов алгебры A, что $J_0=0$, $J_\beta=J$, и все $J_{\alpha+1}/J_\alpha$ бикомпактны. Если есть ординалы α, для которых (10.10) при $J=J_\alpha$ не выполнено, то пусть γ — наименьший из них. Он не является предельным в силу леммы 5.1, и не имеет предыдущего в силу леммы 10.12. Значит, (10.10) выполнено для всех α.

Разумеется, теорема 10.10 является частным случаем теоремы 10.11, поскольку $\mathcal{K}(X)$ — бикомпактный идеал в $\mathcal{B}(X)$. Стоит отметить, что даже в применении к алгебре $\mathcal{B}(X)$ теорема 10.11 дает больше, чем теорема 10.10, поскольку $\mathcal{R}_{\mathrm{hc}}(\mathcal{B}(X))$ может быть шире, чем $\mathcal{K}(X)$ (см. замечание 7.13). В частности, для пространств Аргироса—Хейдона теорема 10.9 устанавливает совпадение $\rho(M)$ с $r(M)$ для всех предкомпактных множеств операторов.

10.6. Приложения к теории инвариантных подпространств. Оператор $T\in\mathcal{B}(X)$ называется *основным*, если $\rho(T)=\rho_e(T)$. Здесь мы применим теоремы типа Бергера—Вонга для доказательства нетранзитивности некоторых полугрупп основных операторов, а затем рассмотрим следствия этих результатов для семейств операторов, образующих другие алгебраические структуры (алгебры Ли, градуированные алгебры Ли, йордановы алгебры, тройные системы Ли).

Легко проверить, что если полугруппа $\mathcal{S}(M)$, порожденная предкомпактным множеством M, состоит из основных операторов, то $r(M)=r_e(M)$.

Теорема 10.13. *Если полугруппа $G\subset\mathcal{B}(X)$ состоит из основных операторов и содержит группу $\{\exp(tT):t\in\mathbb{R}\}$, где T — некоторый вольтерров оператор, то она имеет инвариантное подпространство.*

Доказательство. Наметим план доказательства этого результата.

Пусть M — конечное множество операторов из G. Положим

$$M_1=\{\exp(sT):s\in\mathbb{R},|s|\leqslant 1\}\cup M.$$

Для $t\in\mathbb{R}$ обозначим через $N(t)$ множество $\exp(tT)M_1\cup M_1$; ясно, что $N(t)$ предкомпактно.

Так как оператор T вольтерров, то $\rho(\exp(sT))=\rho_e(\exp(sT))=1$ для всех $s\in\mathbb{C}$.

Легко видеть, что оператор $\exp(tT)S-S$ компактен для любого $S\in M_1$, откуда следует, что $\pi_K(\exp(tT)S)=\pi_K(S)$. Следовательно, $\pi_K(\exp(tT)M_1)=\pi_K(M_1)$, $\pi_K(N(t))=\pi_K(M_1)$ и $\rho_e(N(t))=\rho_e(M_1)=\rho_e(M)$.

Применяя теорему 10.10, получим

$$\rho(N(t))=\max\{\rho_e(M),r(N(t))\}.$$

Так как все операторы из G основные, то $r(N(t))=R_e(N(t))\leqslant\rho_e(N(t))=\rho_e(M_1)=\rho_e(M)$. Таким образом,

$$\rho(N(t))\leqslant\rho_e(M),$$

функция $t\to\rho(N(t))$ ограничена на $\mathbb{R}$.

Рассмотрим теперь функцию $f(t)=\rho(N(t))$ на комплексной плоскости; из теоремы 5.2 следует, что она субгармонична на $\mathbb{C}$. Так как $\|N(t)\|\leqslant\|\exp(tT)\|\,\|M_1\|$, то $f(t)$ мажорируется функцией нулевого экспоненциального типа. Из общей теории субгармонических функций следует (см., например, книгу У. Хеймана и П. Кеннеди [45]), что эта функция постоянна.

Положим $M(t)=t^{-1}(\exp(tT)-1)M$ при $t\neq 0$, и пусть $M(0)=TM$; те же аргументы, что и выше, показывают, что функция $t\to\rho(M(t))$ субгармонична на $\mathbb{C}$. Так как $tM(t)\subset 2\cdot\mathrm{abs}(N(t))$ и ρ не меняется при переходе к выпуклой оболочке, то $\rho(M(t))$ — ограниченная субгармоническая функция, причем $\lim\limits_{t\to\infty}\rho(M(t))=0$, поскольку

$$\rho(M(t))\leqslant 2\,|t|^{-1}\,\rho(\mathrm{abs}(N(t)))=2\,|t|^{-1}\,\rho(N(0)).$$

Таким образом, $\rho(M(t))=0$, в частности, $\rho(M(0))=0$, т. е. $\rho(TM)=0$. Переходя к выпуклым оболочкам и учитывая, что $M\subset G$ произвольно, мы заключаем, что все операторы TW, где $W\in\mathrm{span}G=\mathcal{A}(G)$, квазинильпотентны. Это означает, что $T\in\mathrm{Rad}(A(G)$. Так как T компактен, то $A(G)$ имеет гиперинвариантное подпространство по теореме 7.19. $\square$

Было бы интересно ослабить в теореме 10.13 условие, что G содержит группу $\{\exp(tT) : t \in \mathbb{R}\}$ с вольтерровым T. Однако сделать это пока не удается. В частности, неизвестно, всякая ли группа операторов вида $1 + T$ с вольтерровыми T имеет инвариантное подпространство.

Одним из важнейших приложений теоремы 10.13 является решение поставленной Войтыньским [81] проблемы инвариантного подпространства для алгебр Ли вольтерровых операторов.

Теорема 10.14. *Пусть π — представление энгелевой банаховой алгебры Ли $\mathcal{L}$ в банаховом пространстве. Если $\overline{\pi(\mathcal{L})} \cap \mathcal{K}(X) \neq 0$, то $\pi(\mathcal{L})$ имеет гиперинвариантное подпространство.*

Здесь из формулировки исключен тривиальный случай представления операторами, кратными единичному (возможный лишь при $\dim X < \infty$). В этом случае инвариантных подпространств сколько угодно, но гиперинвариантных нет.

Схема доказательства теоремы 10.14 такова. Пусть $\mathcal{E} = \pi(\mathcal{L})$ и T — ненулевой оператор из $\overline{\mathcal{E}} \cap \mathcal{K}(X)$. Можно доказать, что если какой-то оператор $S \in \mathcal{E}$ имеет несвязный спектр, то у $\mathcal{E}$ есть ГИП: таковым является образ проектора Рисса, соответствующего компоненте $\sigma(S)$. Поэтому мы будем считать, что все операторы из $\mathcal{E}$ имеют связные спектры. По теореме Ньюбурга [58], то же верно для всех операторов из $\overline{\mathcal{E}}$. В частности, оператор T вольтерров.

Пусть $G = \{\exp(S) : S \in \mathcal{E}\}$. По теореме Войтыньского [83], G является группой. Так как $\sigma(\exp(S)) = \exp(\sigma(S))$, то G состоит из операторов со связным спектром, а потому ее замыкание $\overline{G}$ — полугруппа основных операторов, содержащая все операторы $\exp(tT)$. По теореме 10.13, $\overline{G}$ имеет гиперинвариантное подпространство, которое, очевидно, будет гиперинвариантным и для $\mathcal{E}$.

Следствие 10.15. *Всякая алгебра Ли вольтерровых операторов порождает алгебру, состоящую из вольтерровых операторов. Как следствие, такая алгебра Ли триангулируема и имеет гиперинвариантное подпространство.*

Для построения бесконечномерного варианта классической теории конечномерных алгебр Ли (в частности, для исследования естественных аналогов классов нильпотентных и разрешимых алгебр) оказался важен вопрос о том, имеет ли инвариантное подпространство алгебра Ли компактных операторов, обладающая ненулевым вольтерровым идеалом (Ли). Этот и близкие вопросы рассматривались в работе Ю. В. Туровского и В. С. Шульмана [72].

Теорема 10.16. *Пусть алгебра Ли $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}(X)$ состоит из операторов, имеющих одноточечный существенный спектр. Если $\mathcal{L}$ имеет ненулевой вольтерров идеал J, то она имеет инвариантное подпространство.*

Приведем одно из следствий этой теоремы, дополняющее следствие 10.15 и далеко не очевидное даже для вольтерровых алгебр (ассоциативных).

Следствие 10.17. *Пусть $\mathcal{L}$ — алгебра Ли вольтерровых операторов. Существует подпространство, инвариантное относительно множества $D(\mathcal{L})$ всех компактных операторов T, дифференцирующих $\mathcal{L}$, т. е. удовлетворяющих условию $TS - ST \in \mathcal{L}$ для любого $S \in \mathcal{L}$.*

Из многочисленных приложений теоремы 10.16 к структурной теории алгебр Ли компактных операторов и общих банаховых алгебр Ли с компактным присоединенных действием приведем лишь результаты о «компактных аналогах» радикала Леви—Мальцева и ниль-радикала.

В полной аналогии с конечномерным случаем будем называть *E-разрешимыми* банаховы алгебры Ли, у которых в любой фактор-алгебре (по замкнутому идеалу) есть ненулевой энгелев идеал.

Следствие 10.18.

(i) *Любая алгебра Ли $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}(X)$ (и любая банахова алгебра Ли с компактным присоединенным действием) имеет наибольший энгелев идеал $R^o(\mathcal{L})$ и наибольший E-разрешимый идеал $R(\mathcal{L})$.*

(ii) *Алгебра Ли $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}(X)$ имеет инвариантное подпространство тогда и только тогда, когда $R(\mathcal{L}) \neq 0$; $\mathcal{L}$ триангулируема тогда и только тогда, когда $R(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$.*

(iii) $[R(\mathcal{L}), R(\mathcal{L})] \subset R^0(\mathcal{L})$.

Отсюда следует, что алгебра Ли компактных операторов (и алгебра Ли с компактным присоединенным действием) E-разрешима тогда и только тогда, когда она коммутативна по модулю своего наибольшего энгелева идеала (в полной аналогии с классическим случаем).

Заметим, что отображение, сопоставляющее каждой алгебре Ли $\mathcal{L}$ с компактным присоединенным действием ее идеал $R(\mathcal{L})$ является радикалом на данном классе алгебр Ли, обобщающим радикал Леви—Мальцева. В работе Э. Киссина, Ю. В. Туровского и В. С. Шульмана [50] строился также бесконечномерный аналог другого классического радикала алгебр Ли: радикала Фраттини, который выделяет свойство банаховой алгебры Ли не иметь замкнутых подалгебр конечной коразмерности. Как показано в работе тех же авторов [49], это свойство эквивалентно отсутствию замкнутых идеалов конечной коразмерности.

Значительный интерес представляет также вопрос о критериях нетранзитивности другого важного класса неассоциативных операторных алгебр — йордановых. Напомним, что линейное подпространство $\mathcal{J} \subset \mathcal{B}(X)$ называется *йордановой алгеброй*, если $TS + ST \in J$ для любых $S, T \in \mathcal{J}$. Вопрос о существовании инвариантных подпространств для йордановых алгебр вольтерровых операторов изучался в работе М. Кеннеди, Ю. В. Туровского и В. С. Шульмана [48]. Оказалось, что изучение этого вопроса наиболее удобно проводить в значительно более общем контексте *градуированных алгебр Ли*.

Пусть Γ — коммутативная группа, а $\mathcal{L}$ — алгебра Ли. Будем говорить, что $\mathcal{L}$ является Γ-*субградуированной*, если каждому элементу $\gamma \in \Gamma$ соответствует подпространство $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$ (компонента алгебры $\mathcal{L}$), так что $[\mathcal{L}_\gamma, \mathcal{L}_\delta] \subset \mathcal{L}_{\gamma+\delta}$ и $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{L}_\gamma = \mathcal{L}$. Если последняя сумма прямая, то $\mathcal{L}$ называется Γ-*градуированной*. В дальнейшем Γ предполагается конечной.

Следующая теорема устанавливает триангулируемость Γ-субградуированных алгебр Ли компактных операторов при условиях вольтерровости некоторых их компонент.

Теорема 10.19. *Пусть алгебра Ли $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}(X)$ является Γ-субградуированной, и пусть H — такая подгруппа в Γ, что группа Γ/H циклическая.*

(i) *Если компоненты $\mathcal{L}_\gamma$ для всех $\gamma \in H$ состоят из вольтерровых операторов, то алгебра $\mathcal{L}$ триангулируема. В частности, при $\Gamma = \mathbb{Z}_n$ для триагулируемости достаточно, чтобы вольтерровой была подалгебра $\mathcal{L}_0$.*

(ii) *Если $\Gamma = \mathbb{Z}_2$, то для триангулируемости $\mathcal{L}$ достаточно, чтобы компонента $\mathcal{L}_1$ состояла из вольтерровых операторов.*

Можно сказать, что в утверждениях 10.15, 10.16 и 10.19 условие вольтерровости последовательно ослабляется: в первом из них вольтерровость требуется от всех операторов алгебры Ли, во втором от всех операторов из идеала, а в третьем от всех операторов из одной компоненты.

Подпространство $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}(X)$ называется тройной системой Ли, если $[\mathcal{E}, [\mathcal{E}, \mathcal{E}]] \subset \mathcal{E}$, т. е., $[x, [y, z]] \in \mathcal{E}$ для любых $x, y, z \in \mathcal{E}$. Этот класс алгебраических систем очень широк: достаточно сказать, что тройными системами Ли являются все операторные алгебры Ли и все йордановы операторные алгебры.

Если $\mathcal{E}$ — тройная система Ли, то полагая $\mathcal{L}_1 = \mathcal{E}$, $\mathcal{L}_0 = [\mathcal{E}, \mathcal{E}]$, мы получим $\mathbb{Z}_2$-градуированную алгебру Ли $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$. Применяя к ней теорему 10.19 (ii), получим:

Следствие 10.20. *Всякая тройная система Ли, состоящая из вольтерровых операторов, триангулируема.*

Отсюда немедленно вытекает следующий результат:

Следствие 10.21. *Всякая йорданова алгебра вольтерровых операторов триангулируема.*

Обширный перечень приложений к структурной теории градуированных алгебр Ли, тройных систем Ли и йордановых алгебр можно найти в [48].

Те результаты этого раздела, для которых мы не привели ссылок, были анонсированы в работе [10]; их доказательства были опубликованы в [11]. После появления препринтной версии статьи [11] (`arXiv:0805.0209[math.FA] 2 May 2008`) И. Моррис опубликовал в (тоже архивной) статье [57] другое доказательство формулы (10.3), основанное на мультипликативной эргодической теории. В [57] доказано также, что $\rho_e(M) = \rho_\chi(M)$ для любого предкомпактного множества M операторов в банаховом пространстве.

11. C*-версия формул Бергера—Вонга и непрерывность совместного спектрального радиуса

11.1. Спектральные характеристики и примитивные идеалы. Здесь будет рассмотрен вопрос о том, как различные спектральные характеристики элементов или подмножеств банаховой алгебры могут быть выражены через характеристики их образов в фактор-алгебрах (прежде всего — в фактор-алгебрах по примитивным идеалам). Особое внимание уделено совместному спектральному радиусу.

Из формулы (4.1) следует, что для любого элемента a произвольной банаховой алгебры A верно равенство

$$\rho(a) = \sup\{\rho(a/I) : I \in \mathrm{Prim}(A)\}. \tag{11.1}$$

Каким условиям должен удовлетворять набор идеалов (не обязательно примитивных), чтобы равенство (11.1) сохранялось? Можно ли перенести его на $\rho(M)$, где $M \subset A$ предкомпактно? Эти вопросы актуальны в спектральной теории.

Начнем со следующего простого результата.

Теорема 11.1. *Пусть $I_1, \ldots, I_n$ — замкнутые идеалы банаховой алгебры A, такие что $\bigcap\limits_{k=1}^{n} I_k \subset \mathrm{Rad}(A)$. Тогда*

$$\sigma(a) = \bigcup_{k=1}^{n} \sigma(a/I_k)$$

для любого $a \in A$.

Если алгебра рассеянна, то имеет место прямое обобщение данного равенства на бесконечные семейства идеалов:

Теорема 11.2. *Пусть A — банахова алгебра. Если изолированные точки плотны в спектре элемента $a \in A$, то $\sigma(a) = \overline{\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} \sigma(a/I_\alpha)}$ для любого семейства $\mathcal{F} = (I_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ замкнутых идеалов, пересечение которых содержится в радикале алгебры.*

В общем случае, теорема 11.1 на бесконечные цепочки не переносится, но имеет место более слабое соотношение:

Предложение 11.3. *Пусть A — алгебра, а $\mathcal{F} = (I_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$— семейство ее идеалов. Для $\alpha \in \Lambda$, положим $J_\alpha = \bigcap\limits_{\beta\neq\alpha} I_\beta$. Если $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha \subset \mathrm{rad}(A)$, то*

$$\sigma(a) = \left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} \sigma(a/I_\alpha)\right) \cup \left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} \sigma(a/J_\alpha)\right),$$

для любого $a \in A$.

В доказательствах соответствующих результатов для совместного спектрального радиуса существенно используются оценки $\rho(M)$ для семейств операторов на разрывах конечных цепочек, о которых шла речь в разделе 7 (см. лемма 7.20).

Напомним, что символом W_a мы обозначаем оператор L_aR_a на A, и что $W_M := \{W_a : a \in M\}$, где $M \subset A$.

Предложение 11.4. *Пусть A — банахова алгебра, $I_1, \ldots, I_n$ — ее замкнутые идеалы и $J = \bigcap\limits_{i=1}^{n} I_i$. Тогда*

$$\rho(M)^2 = \max\{\max_{1\leqslant i\leqslant n} \rho(M/I_i)^2, \rho(W_M|_J)\}, \tag{11.2}$$

для любого ограниченного множества $M \subset A$.

Следствие 11.5. *Пусть $\mathcal{F} = \{I_1, \ldots, I_n\}$ — конечный набор идеалов банаховой алгебры A, такой что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} I_i \subset \mathcal{R}_{cq}(A)$. Тогда*

$$\rho(M) = \max\{\rho(M/I_1), \ldots, \rho(M/I_n)\} \tag{11.3}$$

для любого предкомпактного подмножества $M \subset A$.

Теорема 11.6. *Пусть* $\mathcal{F}$ — *семейство замкнутых идеалов алгебры* A, *такое что* $\bigcap_{I \in \mathcal{F}} I = 0$, *а* $\mathcal{E}$ — *множество всех конечных пересечений идеалов из* $\mathcal{F}$. *Тогда*

$$\rho(M) = \max\left\{\inf_{K \in \mathbb{K}_{\mathcal{E}}(A)} \rho(M/K), \sup_{I \in \mathcal{F}} \rho(M/I)\right\} \tag{11.4}$$

для любого ограниченного подмножества M *алгебры* A.

Банахова алгебра A называется *алгеброй Бергера—Вонга*, если равенство $\rho(M) = r(M)$ выполнено для всех ее предкомпактных подмножеств M. Роль теорем типа Бергера—Вонга в этих вопросах объясняется тем, что для BW-радиуса верны те же соотношения, что и для индивидуальных спектральных радиусов:

Предложение 11.7. *Пусть* $\mathcal{F}$ — *семейство замкнутых идеалов банаховой алгебры* A, *такое что*

$$\rho(a) = \sup_{J \in \mathcal{F}} \rho(a/J)$$

для всех $a \in A$. *Тогда*

$$r(M) = \sup_{I \in \mathcal{F}} r(M/I) \tag{11.5}$$

для каждого ограниченного множества $M \subset A$.

Из предложения 11.7 и равенства (11.1) следует, что в алгебрах Бергера—Вонга равенство

$$\rho(M) = \sup_{I \in \operatorname{Prim}(A)} \rho(M/I) \tag{11.6}$$

выполнено для любого предкомпактного множества M.

Это позволяет получить приложение к вопросу о непрерывности функции $M \mapsto \rho(M)$:

Теорема 11.8. *Пусть* A — *алгебра Бергера—Вонга. Тогда любое предкомпактное подмножество идеала* $\mathcal{R}_s^{p*}(A)$ — *точка непрерывности совместного спектрального радиуса.*

11.2. ССР и топология пространства примитивных идеалов в C*-алгебрах. В дальнейшем нас будут интересовать свойства пространств примитивных идеалов банаховых алгебр, а эти пространства большей частью не хаусдорфовы.

Напомним, что (не обязательно хаусдорфово) пространство T называется *квазикомпактным*, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное.

Как обычно, функция $\phi : T \longrightarrow \mathbb{R}$ называется *полунепрерывной снизу* (*сверху*), если для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ множество $\{t \in T : \phi(t) \leqslant \lambda\}$ (соответственно, $\{t \in T : \phi(t) \geqslant \lambda\}$) замкнуто.

Выделим следующие два свойства, которыми может обладать банахова алгебра A:

(1_c) $\|a\| = \sup\{\|a/I\| : I \in \operatorname{Prim}(A)\}$ для любого $a \in A$;

(2_c) для любого $a \in A$ отображение $I \longmapsto \|a/I\|$ полунепрерывно сверху на $\operatorname{Prim}(A)$.

Лемма 11.9. *Пусть* M — *предкомпактное подмножества банаховой алгебры* A.

(i) *Если* A *обладает свойством* (1_c), *то* $\|M\| = \sup_{I \in \operatorname{Prim}(A)} \|M/I\|$.

(ii) *Если* A *обладает свойством* (2_c), *то отображение* $I \longmapsto \|M/I\|$ *полунепрерывно сверху на* $\operatorname{Prim}(A)$.

Теорема 11.10. *Пусть* A — *банахова алгебра, удовлетворяющая условиям* (1_c) *и* (2_c), *а* M — *ее предкомпактное подмножество. Если* $\rho(M/I) = r(M/I)$ *для всех* $I \in \operatorname{Prim}(A)$, *то*

$$\rho(M) = \sup_{I \in \operatorname{Prim}(A)} \rho(M/I) = r(M). \tag{11.7}$$

Заслуживает внимания (и используется в доказательствах некоторых дальнейших результатов) близкое к теореме 11.10 утверждение об алгебрах непрерывных функций на квазикомпактных пространствах.

Теорема 11.11. *Пусть B — банахова алгебра, $A = C(T, B)$ — алгебра всех непрерывных B-значных функций на квазикомпактном пространстве T.*

(i) *Если B — алгебра Бергера—Вонга, то и A — алгебра Бергера—Вонга.*

(ii) *Если спектральный радиус непрерывен на B, то совместный спектральный радиус непрерывен на A.*

Из результатов предыдущего раздела ясно, что в качестве B может выступать любая алгебра компактных операторов на банаховом пространстве.

Как мы знаем, для любого предкомпактного подмножества M произвольной банаховой алгебры A справедливо равенство

$$\rho(M) = \max\{r(M), \rho(M/\mathcal{R}_{hc}(A))\}. \tag{11.8}$$

Наша цель — выяснить, можно ли, работая с C*-алгебрами, заменять в этой важной формуле идеал $\mathcal{R}_{hc}(A)$ существенно большим идеалом $\mathcal{R}_{GCR}(A)$. Другими словами, нас интересует справедливость равенства

$$\rho(M) = \max\{r(M), \rho(M/\mathcal{R}_{GCR}(A))\}. \tag{11.9}$$

Наш подход основан на использовании примитивных идеалов; в частности, нас будет интересовать, для каких C*-алгебр выполнено равенство (11.6).

Предыдущие результаты уже дают нам полезную информацию. Можно показать, используя результаты Диксмье [34, гл. 3], что введенное выше условие (1_c) выполняется во всех C*-алгебрах, а (2_c) — во всех C*-алгебрах с хаусдорфовым спектром. Применяя теорему 11.10, мы можем заключить, что равенство (11.7) верно для всех CCR C*-алгебр с хаусдорфовым пространством примитивных идеалов.

Мы увидим, что этот результат верен в значительно большей общности. Условимся говорить, что топологическое пространство имеет *свойство* (QC), если пересечение направленного вниз семейства непустых квазикомпактных подмножеств непусто. Это свойство выделяет широкий класс пространств, включающий все хаусдорфовы пространства и замкнутый относительно многих естественных операций.

Пусть $\mathfrak{C}_{\mathfrak{qc}}$ — класс всех C*-алгебр A, для которых пространство $\mathrm{Prim}(A)$ имеет свойство (QC).

Вопрос: совпадает ли $\mathfrak{C}_{\mathfrak{qc}}$ с классом всех C*-алгебр?

Предложение 11.12.

(i) *Если C*-алгебра A входит в класс $\mathfrak{C}_{\mathfrak{qc}}$, то и все ее замкнутые идеалы и фактор-алгебры принадлежат этому классу.*

(ii) *Если A имеет замкнутый идеал $J \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{qc}}$, причем пространство $\mathrm{Prim}(A/J)$ хаусдорфово, то $A \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{qc}}$.*

(iii) *Если A является замыканием объединения направленного вверх семейства идеалов, каждый из которых принадлежит классу $\mathfrak{C}_{\mathfrak{qc}}$, то и A принадлежит $\mathfrak{C}_{\mathfrak{qc}}$.*

Следствие 11.13. *Все C*-алгебры типа 1 входят в $\mathfrak{C}_{\mathfrak{qc}}$.*

Теорема 11.14. *Если C*-алгебра A принадлежит классу $\mathfrak{C}_{\mathfrak{qc}}$, то равенство* (11.6) *выполняется для каждого предкомпактного множества $M \subset A$.*

Следствие 11.15. *Пусть A — C*-алгебра из класса $\mathfrak{C}_{\mathfrak{qc}}$, а M — ее предкомпактное подмножество. Если $\rho(M/I) = r(M/I)$ для всех $I \in \mathrm{Prim}(A)$, то*

$$\rho(M) = r(M).$$

Следующий результат устанавливает справедливость равенства (11.9) для C*-алгебр, удовлетворяющих условию (11.6) вместе со всеми своими фактор-алгебрами.

Предложение 11.16. *Пусть A — C*-алгебра. Если условие*

$$\rho(N) = \sup_{I \in \mathrm{Prim}(B)} \rho(N/I) \text{ для всех предкомпактных } N \subset B$$

выполняется для любой фактор-алгебры B C-алгебры A, то*

$$\rho(M) = \max\{r(M), \rho(M/\mathcal{R}_{GCR}(A))\}$$

для любого предкомпактного подмножества M алгебры A.

Следствие 11.17. *Если* $A \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{qc}}$, *то*

$$\rho(M) = \max\{r(M), \rho(M/\mathcal{R}_{GCR}(A))\}$$

для любого предкомпактного $M \subset A$.

В самом деле, так как класс $\mathfrak{C}_{\mathfrak{qc}}$ замкнут относительно перехода к фактор-алгебрам и каждая алгебра из $\mathfrak{C}_{\mathfrak{qc}}$ удовлетворяет условию (11.6), то достаточно просто применить предложение 11.16.

Следствие 11.18. *Всякая GCR C*-алгебра является алгеброй Бергера—Вонга.*

Следствие 11.19. *Пусть A — C*-алгебра. Всякое предкомпактное подмножество в* $\mathcal{R}_{GCR}(A)$ *является точкой непрерывности совместного спектрального радиуса.*

Действительно, так как для C*-алгебр $\mathcal{R}_s^{p*}(A) = \mathcal{R}_{GCR}(A)$ (теорема 4.12), то результат прямо следует из теоремы 11.8 и следствия (11.18).

Результаты данного раздела получены в работе Ю. В. Туровского и В. С. Шульмана [75].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андрунакиевич В. А.* К определению радикала кольца// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1952. — *16.* — С. 217–224.
2. *Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М.* Радикалы алгебр и структурная теория. — М.: Наука, 1979.
3. *Голод Е. С.* О нильалгебрах и финитно-аппроксимируемых p-группах// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1964. — *28.* — С. 273–276.
4. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Т. 1. — М.: ИЛ, 1962.
5. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.
6. *Зельманов Е. И.* Об энгелевых алгебрах Ли// Докл. АН СССР. — 1987. — *292*, № 2. — С. 265–268.
7. *Курош А. Г.* Радикалы колец и алгебр// Мат. сб. — 1953. — *33*, № 1. — С. 13–26.
8. *Ломоносов В. И.* Инвариантные подпространства для операторов, коммутирующих с компактными операторами// Функц. анализ и его прилож. — 1973. — *7.* — С. 213–214.
9. *Туровский Ю. В.* О спектральных свойствах некоторых лиевых подалгебр и спектральном радиусе подмножеств в банаховых алгебрах// Спектр. теор. опер. и ее прилож. — 1985. — *6.* — С. 144–181.
10. *Туровский Ю. В., Шульман В. С.* Радикалы в банаховых алгебрах и некоторые проблемы теории радикальных банаховых алгебр// Функц. анализ и его прилож. — 2001. — *35*, № 4. — С. 88–91.
11. *Туровский Ю. В., Шульман В. С.* Топологические радикалы и совместный спектральный радиус// Функц. анализ и его прилож. — 2012. — *46*, № 4. — С. 61–82.
12. *Шульман В. С.* Об инвариантных подпространствах вольтерровых операторов// Функц. анализ и его прилож. — 1984. — *18*, № 2. — С. 84–85.
13. *Albert A. A.* The radical of a non-associative algebra// Bull. Am. Math. Soc. — 1942. — *48.* — С. 891–897.
14. *Alexander J. C.* Compact Banach algebras// Proc. London Math. Soc. (3). — 1968. — *18.* — С. 1–18.
15. *Amitsur S. A.* A general theory of radicals, I: Radicals in complete lattices// Amer. J. Math. — 1952. — *74.* — С. 774–786.
16. *Amitsur S. A.* A general theory of radicals, II: Rings and bicategories// Amer. J. Math. — 1954. — *76*, № 1. — С. 100–125.
17. *Amitsur S. A.* A general theory of radicals, III: Applications// Amer. J. Math. — 1954. — *76*, № 1. — С. 126–136.
18. *Andreolas G., Anoussis M.* Topological radicals of nest algebras// arXiv:1608.05857v2 [math.OA] 10 Oct 2016.
19. *Argiros S. A., Haydon R.* A hereditarily indecomposable L_∞-space that solves the scalar-plus-compact problem// Acta Math. — 2011. — *206.* — С. 1–54.
20. *Aupetit B.* Propriétés spectrales des algèbres de Banach. — Berlin: Springer, 1979.
21. *Aupetit B.* Primer to spectral theory. — N.Y.: Springer, 1991.
22. *Aupetit B., Mathieu M.* The continuity of Lie homomorphisms// Stud. Math. — 2000. — *138.* — С. 193–199.
23. *Baer R.* Radical ideals// Amer. J. Math. — 1943. — *65.* — С. 537–568.
24. *Barnes B. A., Murphy G. J., Smyth M. R. F., West T. T.* Riesz and Fredholm theory in Banach algebras. — Boston: Pitman Publ. Inc., 1982.
25. *Berger M. A., Wang Y.* Bounded semigroups of matrices// Linear Algebra Appl. — 1992. — *166.* — С. 21–27.

26. *Bonsall F. F.* Operators that act compactly on an algebra of operators// Bull. London Math. Soc. — 1969. — *1*. — С. 163–170.
27. *Brown L. G., Douglas R. G., Fillmore P. A.* Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C*-algebras// Proc. of Conf. on Operator Theory, Halifax, Nova Scotia. — 1973. — С. 58–128.
28. *Brown F., McCoy N. H.* Some theorems on groups with applications to ring theory// Trans. Am. Math. Soc. — 1950. — *69*. — С. 302–311
29. *Burlando L.* Spectral continuity in some Banach algebras// Rocky Mountain J. Math. — 1993. — *23*. — С. 17–39.
30. *Curto R. E.* Spectral theory of elementary operators// В сб.: «Elementary operators and applications». — Singapour—New Jersey—London: World Sci. Publ., 1992. — С. 3–54.
31. *Davidson K. R.* C*-algebras by examples. — Providence: Am. Math. Soc., 1996.
32. *Defant A., Floret K.* Tensor norms and operator ideals. — Amsterdam: Elsevier, 1993.
33. *Divinsky N. J.* Rings and radicals. — London: Allen and Unwin, 1965.
34. *Dixmier J.* Les C*-algébres et leur reprèsentations. — Paris: Gauthier-Villars, 1964.
35. *Dixon P. G.* A Jacobson-semisimple Banach algebra with a dense nil subalgebra// Colloq. Math. — 1977. — *37*. — С. 81–82.
36. *Dixon P. G.* Topologically nilpotent Banach algebras and factorization// Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. — 1991. — *119*. — С. 329–341.
37. *Dixon P. G.* Topologically irreducible representations and radicals in Banach algebras// Proc. London Math. Soc. (3). — 1997. — *74*. — С. 174–200.
38. *Dixon P. G., Müller V.* A note on topologically nilpotent Banach algebras// Stud. Math. — 1992. — *102*. — С. 269–275.
39. *Dixon P. G., Willis G. A.* Approximate identities in extensions of topologically nilpotent Banach algebras// Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. — 1992. — *122*. — С. 45–52.
40. *Feldman I., Krupnik N.* On the continuity of the spectrum in certain Banach algebras// Integral Equ. Operator Theory. — 2000. — *38*. — С. 284–301.
41. *Gardner B. J., Wieland R.* Radical theory of rings. — New York: Marcel Dekker Inc., 2004.
42. *Gray M.* A radical approach to algebra. — Massachusetts: Addison-Wesley Publ. Comp., 1970.
43. *Guinand P. G.* On quasinilpotent semigroups of operators// Proc. Am. Math. Soc. — 1982. — *86*. — С. 485–486.
44. *Halmos P.* Hilbert space problem book. — Toronto—London: Van Nostrand, 1967.
45. *Hayman W. K., Kennedy C. B.* Subharmonic functions. Vol. 1. — London—New York—San Francisko: Academic Press, 1976.
46. *Jacobson N.* The radical and semi simplicity for arbitrary rings// Am. J. Math. — 1945. — *67*. — С. 300–320.
47. *Jungers R.* Joint spectral radius, theory and applications. — Berlin: Springer, 2009.
48. *Kennedy M., Shulman V. S., Turovskii Yu. V.* Invariant subspaces of subgraded Lie algebras of compact operators// Integral Equ. Operator Theory. — 2009. — *63*. — С. 47–93.
49. *Kissin E., Shulman V. S., Turovskii Yu. V.* Banach Lie algebras with Lie subalgebras of finite codimension have Lie ideals// J. London Math. Soc. (2). — 2009. — *80* . — С. 603–626.
50. *Kissin E., Shulman V. S., Turovskii Yu. V.* Topological radicals and Frattini theory of Banach Lie algebras// Integral Equ. Operator Theory. — 2012. — *74*. — С. 51–121
51. *Köthe G.* Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach dem Radikal vollstandig reduzibel ist// Math. Z. — 1930. — *32*. — С. 161–186.
52. *Köthe G.* Topological vector spaces. I. — New York: Spinger, 1969.
53. *Kozyakin V.* An annotated bibliography on convergence of matrix products and the theory of convergence of the joint/generalized spectral radius// Preprint Inst. Inform. Transmission Prob., 2013.
54. *Kusuda M.* A characterization of scattered C*-algebras and its applications to C*-crossed products// J. Operator Theory. — 2010. — *63*, № 2. — С. 417–424.
55. *Lebow A., Schechter M.* Semigroups of operators and measures of noncompactness// J. Funct. Anal. — 1971. — *7* . — С. 1–26.
56. *Levitzki A.* On the radical of a general ring// Bull. Am. Math. Soc. — 1943. — *43*. — С. 462–466.
57. *Morris I. D.* The generalized Berger—Wang formula and the spectral radius of linear cocycles// Preprint. — ArXiv:0906.2915v1 [math.DS] 16 Jun 2009.
58. *Newburgh J. D.* The variation of spectra// Duke Math. J. — 1951. — *18*. — С. 165–176.
59. *Palacios A. R.* The uniqueness of the complete norm topology in complete normed nonassociative algebras// J. Funct. Anal. — 1985. — *60*. — С. 1–15.

60. *Peng C., Turovskii Yu.* Topological radicals, VI. Scattered elements in Banach, Jordan, and associative algebras// Stud. Math. — 2016. — *235.* — С. 171–208.
61. *Peters J. R., Wogen R. W.* Commutative radical operator algebras// J. Operator Theory. — 1999. — *42.* — С. 405–424.
62. *Pietsch A.* Operator ideals. — Berlin: Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1978.
63. *Pietsch A.* History of Banach spaces and linear operators. — Boston: Birkhauser, 2007.
64. *Protasov V. Yu.* The generalized joint spectral radius. A geometric approach// Izv. Math. — 1997. — *61*, № 5. — С. 995–1030.
65. *Radjavi H., Rosenthal P.* Simultaneous triangularization. — N.Y.: Springer, 2000.
66. *Read C. J.* Quasinilpotent operators and the invariant subspace problem// J. London Math. Soc. (2). — 1997. — *56.* — С. 595–606.
67. *Ringrose J. R.* On some algebras of operators // Proc. London Math. Soc. — 1965. — *15.* — С. 61–83.
68. *Rota G.-C., Strang W. G.* A note on the joint spectral radius// Indag. Math. — 1960. — *22.* — С. 379–381.
69. *Shulman T.* Continuity of spectral radius and type I C*-algebras// arXiv: 1707.08848 (to appear in Proc. Am. Math. Soc.).
70. *Shulman V. S., Turovskii Yu. V.* Joint spectral radius, operator semigroups and a problem of a Wojtynski// J. Funct. Anal. — 2000. — *177.* — С. 383–441.
71. *Shulman V. S., Turovskii Yu. V.* Formulae for joint spectral radii of sets of operators// Stud. Math. — 2002. — *149.* — С. 23–37.
72. *Shulman V. S., Turovskii Yu. V.* Invariant subspaces of operator Lie algebras and Lie algebras with compact adjoint action// J. Funct. Anal. — 2005. — *223.* — С. 425–508.
73. *Shulman V. S., Turovskii Yu. V.* Topological radicals, I. Basic properties, tensor products and joint quasinilpotence// Banach Center Publ. — 2005. — *67.* — С. 293–333.
74. *Shulman V. S., Turovskii Yu. V.* Topological radicals, II. Applications to the spectral theory of multiplication operators// Oper. Theory Adv. Appl. — 2010. — *212.* — С. 45–114.
75. *Shulman V. S., Turovskii Yu. V.* Topological radicals, V. From algebra to spectral theory// Oper. Theory Adv. Appl. — 2014. — *233.* — С. 171–280.
76. *Szász F. A.* Radicals of rings — Budapest: Akadémiai Kiadó, 1981.
77. *Turovskii Yu. V.* Volterra semigroups have invariant subspaces// J. Funct. Anal. — 1999. — *182.* — С. 313–323.
78. *Vala K.* On compact sets of compact operators// Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. — 1964. — *351.* — С. 1–8.
79. *Vesentini E.* On the subharmonicity of the spectral radius// Boll. Unione Mat. Ital. (9). — 1968. — *4.* — С. 427–429.
80. *Willis G.* Compact approximation property does not imply approximation property// Stud. Math. — 1992. — *103.* — С. 99–108.
81. *Wojtynski W.* A note on compact Banach—Lie algebras of Volterra type// Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys. — 1978. — *26*, № 2. — С. 105–107.
82. *Wojtynski W.* On the existence of closed two-sided ideals in radical Banach algebras with compact elements// Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys. — 1978. — *26*, № 2. — С. 109–113.
83. *Wojtynski W.* Quasinilpotent Banach—Lie algebras are Baker—Campbell—Hausdorff// J. Funct. Anal. — 1998. — *153.* — С. 405–413.
84. *Zemanek J.* Spectral characterization of two-sided ideals in Banach algebras// Stud. Math. — 1980. — *67.* — С. 1–12.

E. Kissin
STORM/SCDM, London Metropolitan University,
166-220, Holloway Road, N7 8DB, UK
E-mail: e.kissin@londonmet.ac.uk

Ю. В. Туровский
171252, г. Конаково, ул. Учебная, д. 5, кв. 37
E-mail: yuri.turovskii@gmail.com

В. С. Шульман
Вологодский государственный университет,
160000, г. Вологда, ул. Ленина, д. 15
E-mail: victor.shulman80@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-3-490-546 UDC 512.7

On the Theory of Topological Radicals

© 2018 **E. Kissin, Yu. V. Turovskii, V. S. Shulman**

Светлой памяти Виктора Иосифовича Ломоносова

Abstract. In this paper, we review main directions and results of the theory of topological radicals. We consider applications to different problems in the theory of operators and Banach algebras.

REFERENCES

1. V. A. Andrunakievich, "K opredeleniyu radikala kol'tsa" [To the definition of a radical of a ring], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1952, **16**, 217–224 (in Russian).
2. V. A. Andrunakievich and Yu. M. Ryabukhin, *Radikaly algebr i strukturnaya teoriya* [Radicals of Algebras and Structural Theory], Nauka, Moscow, 1979 (in Russian).
3. E. C. Golod, "O nil'algebrakh i finitno-approksimiruemykh p-gruppakh" [On nil algebras and finite-approximable p-groups], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1964, **28**, 273–276 (in Russian).
4. N. Dunford and J. Schwartz, *Lineynye operatory. T. 1* [Linear Operators. Vol. 1], IL, Moscow, 1962 (Russian translation).
5. K. A. Zhevlakov, A. M. Slin'ko, I. P. Shestakov, and A. I. Shirshov, *Kol'tsa, blizkie k assotsiativnym* [Rings Close to Associative], Nauka, Moscow, 1978 (in Russian).
6. E. I. Zel'manov, "Ob engelevykh algebrakh Li" [On Engel Lie-algebras], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1987, **292**, No. 2, 265–268 (in Russian).
7. A. G. Kurosh, "Radikaly kolets i algebr" [Radicals of rings and algebras], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1953, **33**, No. 1, 13–26 (in Russian).
8. V. I. Lomonosov, "Invariantnye podprostranstva dlya operatorov, kommutiruyushchikh s kompaktnymi operatorami" [Invariant subspaces for operators commuting with compact operators], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1973, **7**, 213–214 (in Russian).
9. Yu. V. Turovskii, "O spektral'nykh svoystvakh nekotorykh lievykh podalgebr i spektral'nom radiuse podmnozhestv v banakhovykh algebrakh" [On spectral properties of some Lie-subalgebras and spectral radius of subsets in Banach algebras], *Spektr. teor. oper. i ee prilozh.* [Spectr. Theor. Oper. Appl.], 1985, **6**, 144–181 (in Russian).
10. Yu. V. Turovskii and B. C. Shul'man, "Radikaly v banakhovykh algebrakh i nekotorye problemy teorii radikal'nykh banakhovykh algebr" [Radicals in Banach algebras and some problems of the theory of radical Banach algebras], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2001, **35**, No. 4, 88–91 (in Russian).
11. Yu. V. Turovskii and B. C. Shul'man, "Topologicheskie radikaly i sovmestnyy spektral'nyy radius" [Topological radicals and mutual spectral radius], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2012, **46**, No. 4, 61–82 (in Russian).
12. B. C. Shul'man, "Ob invariantnykh podprostranstvakh vol'terrovykh operatorov" [On invariant subspaces of Volterra operators], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1984, **18**, No. 2, 84–85 (in Russian).
13. A. A. Albert, "The radical of a non-associative algebra," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1942, **48**, 891–897.
14. J. C. Alexander, "Compact Banach algebras," *Proc. London Math. Soc. (3)*, 1968, **18**, 1–18.
15. S. A. Amitsur, "A general theory of radicals, I: Radicals in complete lattices," *Amer. J. Math.*, 1952, **74**, 774–786.
16. S. A. Amitsur, "A general theory of radicals, II: Rings and bicategories," *Amer. J. Math.*, 1954, **76**, No. 1, 100–125.
17. S. A. Amitsur, "A general theory of radicals, III: Applications," *Amer. J. Math.*, 1954, **76**, No. 1, 126–136.
18. G. Andreolas and M. Anoussis, "Topological radicals of nest algebras," *ArXiv*: 1608.05857v2 [math.OA] 10 Oct 2016.

19. S. A. Argiros and R. Haydon, "A hereditarily indecomposable L_∞-space that solves the scalar-plus-compact problem," *Acta Math.*, 2011, **206**, 1–54.
20. B. Aupetit, *Propriétés Spectrales des Algèbres de Banach*, Springer, Berlin, 1979.
21. B. Aupetit, *Primer to Spectral Theory*, Springer, N.Y., 1991.
22. B. Aupetit and M. Mathieu, "The continuity of Lie homomorphisms," *Stud. Math.*, 2000, **138**, 193–199.
23. R. Baer, "Radical ideals," *Amer. J. Math.*, 1943, **65**, 537–568.
24. B. A. Barnes, G. J. Murphy, M. R. Smyth, and T. T. West, *Riesz and Fredholm Theory in Banach Algebras*, Pitman Publ. Inc., Boston, 1982.
25. M. A. Berger and Y. Wang, "Bounded semigroups of matrices," *Linear Algebra Appl.*, 1992, **166**, 21–27.
26. F. F. Bonsall, "Operators that act compactly on an algebra of operators," *Bull. London Math. Soc.*, 1969, **1**, 163–170.
27. L. G. Brown, R. G. Douglas, and P. A. Fillmore, "Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C*-algebras," *Proc. of Conf. on Operator Theory*, Halifax, Nova Scotia, 1973, 58–128.
28. F. Brown and N. H. McCoy, "Some theorems on groups with applications to ring theory," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1950, **69**, 302–311
29. L. Burlando, "Spectral continuity in some Banach algebras," *Rocky Mountain J. Math.*, 1993, **23**, 17–39.
30. R. E. Curto, "Spectral theory of elementary operators," In: *Elementary Operators and Applications*, World Sci. Publ., Singapour—New Jersey—London, 1992, pp. 3–54.
31. K. R. Davidson, *C*-Algebras by Examples*, Am. Math. Soc., Providence, 1996.
32. A. Defant and K. Floret, *Tensor Norms and Operator Ideals*, Elsevier, Amsterdam, 1993.
33. N. J. Divinsky, *Rings and Radicals*, Allen and Unwin, London, 1965.
34. J. Dixmier, *Les C*-algébres et leur Reprèsentations*, Gauthier-Villars, Paris, 1964.
35. P. G. Dixon, "A Jacobson-semisimple Banach algebra with a dense nil subalgebra," *Colloq. Math.*, 1977, **37**, 81–82.
36. P. G. Dixon, "Topologically nilpotent Banach algebras and factorization," *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 1991, **119**, 329–341.
37. P. G. Dixon, "Topologically irreducible representations and radicals in Banach algebras," *Proc. London Math. Soc. (3)*, 1997, **74**, 174–200.
38. P. G. Dixon and V. Müller, "A note on topologically nilpotent Banach algebras," *Stud. Math.*, 1992, **102**, 269–275.
39. P. G. Dixon and G. A. Willis, "Approximate identities in extensions of topologically nilpotent Banach algebras," *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 1992, **122**, 45–52.
40. I. Feldman and N. Krupnik, "On the continuity of the spectrum in certain Banach algebras," *Integral Equ. Operator Theory*, 2000, **38**, 284–301.
41. B. J. Gardner and R. Wieland, *Radical Theory of Rings*, Marcel Dekker Inc., New York, 2004.
42. M. Gray, *A Radical Approach to Algebra*, Addison-Wesley Publ. Comp., Massachusetts, 1970.
43. P. G. Guinand, "On quasinilpotent semigroups of operators," *Proc. Am. Math. Soc.*, 1982, **86**, 485–486.
44. P. Halmos, *Hilbert Space Problem Book*, Van Nostrand, Toronto—London, 1967.
45. W. K. Hayman and C. B. Kennedy, *Subharmonic Functions. Vol. 1*, Academic Press, London—New York—San Francisko, 1976.
46. N. Jacobson, "The radical and semi simplicity for arbitrary rings," *Am. J. Math.*, 1945, **67**, 300–320.
47. R. Jungers, *Joint Spectral Radius, Theory and Applications*, Springer, Berlin, 2009.
48. M. Kennedy, V. S. Shulman, and Yu. V. Turovskii, "Invariant subspaces of subgraded Lie algebras of compact operators," *Integral Equ. Operator Theory*, 2009, **63**, 47–93.
49. E. Kissin, V. S. Shulman, and Yu. V. Turovskii, "Banach Lie algebras with Lie subalgebras of finite codimension have Lie ideals," *J. London Math. Soc. (2)*, 2009, **80** , 603–626.
50. E. Kissin, V. S. Shulman, and Yu. V. Turovskii, "Topological radicals and Frattini theory of Banach Lie algebras," *Integral Equ. Operator Theory*, 2012, **74**, 51–121
51. G. Köthe, "Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach dem Radikal vollstandig reduzibel ist," *Math. Z.*, 1930, **32**, 161–186.
52. G. Köthe, *Topological Vector Spaces. I*, Springer, New York, 1969.
53. V. Kozyakin, "An annotated bibliography on convergence of matrix products and the theory of convergence of the joint/generalized spectral radius," Preprint Inst. Inform. Transmission Prob., 2013.
54. M. Kusuda, "A characterization of scattered C*-algebras and its applications to C*-crossed products," *J. Operator Theory*, 2010, **63**, No. 2, 417–424.
55. A. Lebow and M. Schechter, "Semigroups of operators and measures of noncompactness," *J. Funct. Anal.*, 1971, **7** , 1–26.
56. A. Levitzki, "On the radical of a general ring," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1943, **43**, 462–466.

57. I. D. Morris, “The generalized Berger—Wang formula and the spectral radius of linear cocycles,” *ArXiv*: 0906.2915v1 [math.DS] 16 Jun 2009.
58. J. D. Newburgh, “The variation of spectra,” *Duke Math. J.*, 1951, **18**, 165–176.
59. A. R. Palacios, “The uniqueness of the complete norm topology in complete normed nonassociative algebras,” *J. Funct. Anal.*, 1985, **60**, 1–15.
60. C. Peng and Yu. Turovskii, “Topological radicals, VI. Scattered elements in Banach, Jordan, and associative algebras,” *Stud. Math.*, 2016, **235**, 171–208.
61. J. R. Peters and R. W. Wogen, “Commutative radical operator algebras,” *J. Operator Theory*, 1999, **42**, 405–424.
62. A. Pietsch, *Operator Ideals*, Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978.
63. A. Pietsch, *History of Banach Spaces and Linear Operators*, Birkhauser, Boston, 2007.
64. V. Yu. Protasov, “The generalized joint spectral radius. A geometric approach,” *Izv. Math.*, 1997, **61**, No. 5, 995–1030.
65. H. Radjavi and P. Rosenthal, *Simultaneous Triangularization*, Springer, N.Y., 2000.
66. C. J. Read, “Quasinilpotent operators and the invariant subspace problem,” *J. London Math. Soc. (2)*, 1997, **56**, 595–606.
67. J. R. Ringrose, “On some algebras of operators,” *Proc. London Math. Soc.*, 1965, **15**, 61–83.
68. G.-C. Rota and W. G. Strang, “A note on the joint spectral radius,” *Indag. Math.*, 1960, **22**, 379–381.
69. T. Shulman, “Continuity of spectral radius and type I C*-algebras,” *ArXiv*: 1707.08848 (to appear in Proc. Am. Math. Soc.).
70. V. S. Shulman and Yu. V. Turovskii, “Joint spectral radius, operator semigroups and a problem of a Wojtynski,” *J. Funct. Anal.*, 2000, **177**, 383–441.
71. V. S. Shulman and Yu. V. Turovskii, “Formulae for joint spectral radii of sets of operators,” *Stud. Math.*, 2002, **149**, 23–37.
72. V. S. Shulman and Yu. V. Turovskii, “Invariant subspaces of operator Lie algebras and Lie algebras with compact adjoint action,” *J. Funct. Anal.*, 2005, **223**, 425–508.
73. V. S. Shulman and Yu. V. Turovskii, “Topological radicals, I. Basic properties, tensor products and joint quasinilpotence,” *Banach Center Publ.*, 2005, **67**, 293–333.
74. V. S. Shulman and Yu. V. Turovskii, “Topological radicals, II. Applications to the spectral theory of multiplication operators,” *Oper. Theory Adv. Appl.*, 2010, **212**, 45–114.
75. V. S. Shulman and Yu. V. Turovskii, “Topological radicals, V. From algebra to spectral theory,” *Oper. Theory Adv. Appl.*, 2014, **233**, 171–280.
76. F. A. Szász, *Radicals of Rings*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1981.
77. Yu. V. Turovskii, “Volterra semigroups have invariant subspaces,” *J. Funct. Anal.*, 1999, **182**, 313–323.
78. K. Vala, “On compact sets of compact operators,” *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 1964, **351**, 1–8.
79. E. Vesentini, “On the subharmonicity of the spectral radius,” *Boll. Unione Mat. Ital. (9)*, 1968, **4**, 427–429.
80. G. Willis, “Compact approximation property does not imply approximation property,” *Stud. Math.*, 1992, **103**, 99–108.
81. W. Wojtynski, “A note on compact Banach—Lie algebras of Volterra type,” *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys.*, 1978, **26**, No. 2, 105–107.
82. W. Wojtynski, “On the existence of closed two-sided ideals in radical Banach algebras with compact elements,” *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys.*, 1978, **26**, No. 2, 109–113.
83. W. Wojtynski, “Quasinilpotent Banach—Lie algebras are Baker—Campbell—Hausdorff,” *J. Funct. Anal.*, 1998, **153**, 405–413.
84. J. Zemanek, “Spectral characterization of two-sided ideals in Banach algebras,” *Stud. Math.*, 1980, **67**, 1–12.

E. Kissin
STORM/SCDM, London Metropolitan University, London, UK
E-mail: `e.kissin@londonmet.ac.uk`

Yu. V. Turovskii
E-mail: `yuri.turovskii@gmail.com`

V. S. Shulman
Vologda State University, Vologda, Russia
E-mail: `victor.shulman80@gmail.com`