Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 3 (2018). С. 459–489

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-3-459-489 УДК 517.9:532

ОПЕРАТОРНЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ ИДЕАЛЬНОЙ РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

© 2018 г. **Д. А. ЗАКОРА**

Аннотация. В работе исследуется задача о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости, заполняющей равномерно вращающийся либо неподвижный контейнер. Доказана теорема об однозначной сильной разрешимости соответствующей начально-краевой задачи. В случае, когда система не вращается, найдено асимптотическое поведение решения задачи при нагрузках специального вида. Исследована спектральная задача, ассоциированная с изучаемой системой. Доказаны утверждения о локализации спектра, о существенном и дискретном спектре, об асимптотике спектра. В случае, если система находится в невесомости и не вращается, доказаны утверждения о кратной базисности специальной системы элементов. В этом случае найдено разложение решения эволюционной задачи по специальной системе элементов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В работе изучается задача о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости, заполняющей равномерно вращающийся либо неподвижный контейнер. Модель идеальной релаксирующей жидкости является обобщением модели идеальной баротропной жидкости и состоит в учете эффектов памяти в соотношении, связывающем давление и плотность жидкости. Эта модель изучалась в [18, гл. 11, § 6] в случае неподвижного контейнера и при дополнительном условии на динамическую плотность.

Во втором разделе приводится постановка начально-краевой задачи, описывающей изучаемую систему. В третьем разделе начально-краевая задача сводится к задаче Коши для системы интегродифференциальных уравнений первого порядка в некоторых гильбертовых пространствах. Доказывается теорема об однозначной сильной разрешимости изучаемой задачи. При этом система интегродифференциальных уравнений и начальных условий специальным образом сводится к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка в некотором гильбертовом пространстве. Главный оператор этого уравнения есть операторная блок-матрица, а задача о спектре этого оператора ассоциируется с задачей о спектре идеальной релаксирующей жидкости. В случае, если система не вращается, этот оператор генерирует равномерно экспоненциально устойчивую полугруппу. Отсюда находится асимптотическое поведение решения изучаемой задачи при нагрузках, близких к почти периодическим.

В четвертом разделе исследуется спектр операторной блок-матрицы. В случае, если система вращается, существенный спектр оператора состоит из отрезка на мнимой оси, обусловленного внутренними инерционными волнами в жидкости, и набора отрезков на действительной оси,

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

обусловленного эффектами памяти в системе. В случае, когда система не вращается, существенный спектр задачи состоит только из отрезков на действительной оси. Если при этом система находится в невесомости, указанные отрезки схлопываются в конечный набор точек. Оставшийся спектр оператора — дискретный, расположен в некоторой вертикальной полосе и сгущается к бесконечности. В связи со спектральной задачей отметим здесь монографию [4] (см. также указанную там литературу), в которой проводится систематическое исследование широкого класса функционально-дифференциальных и интегродифференциальных уравнений методами спектральной теории.

В пятом разделе исследуется случай, когда система находится в невесомости и не вращается. В этом случае весь спектр главного оператора может быть найден из счетного набора характеристических уравнений. Доказано, что система корневых элементов главного оператора образует p-базис при $p > 3$ в основном гильбертовом пространстве. Отсюда находится представление решения исходной задачи в виде ряда по некоторой системе элементов.

2. Постановка задачи

Рассмотрим контейнер, равномерно вращающийся вокруг оси, сонаправленной с действием силы тяжести, и полностью заполненный идеальной неоднородной жидкостью. Будем считать, что жидкость занимает ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Обозначим через $\mathbf{n}$ единичный вектор, нормальный к границе $\partial\Omega$ и направленный вне области Ω. Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с контейнером, таким образом, что ось Ox_3 совпадает с осью вращения и направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится в области Ω. В этом случае равномерная скорость вращения контейнера запишется в виде $\omega_0\mathbf{e}_3$, где $\mathbf{e}_3$ — орт оси вращения Ox_3, а $\omega_0 > 0$, для определенности. Будем считать, что внешнее стационарное поле сил $\mathbf{F}_0$ является гравитационным и действует вдоль оси вращения, т. е. $\mathbf{F}_0 = -g\mathbf{e}_3$, $g > 0$.

Рассмотрим состояние относительного равновесия жидкости. Из уравнения Эйлера движения идеальной жидкости, записанного в подвижной системе координат, найдем формулу для градиента стационарного давления (см. [9, гл. 5, § 1, п. 1]):

$$\nabla P_0 = \rho_0\big(-\omega_0^2\mathbf{e}_3 \times (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}) - g\mathbf{e}_3\big) = \rho_0\nabla\Big(\frac{\omega_0^2}{2}|\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}|^2 - gx_3\Big) = \rho_0\nabla\Big(\frac{\omega_0^2}{2}(x_1^2 + x_2^2) - gx_3\Big), \quad (2.1)$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор текущей точки области Ω, а ρ_0 — стационарная плотность жидкости.

В состоянии относительного равновесия динамические составляющие давления и плотности, отвечающие за эффекты релаксации в жидкости, отсутствуют. Поэтому будем считать, что в состоянии относительного равновесия жидкость баротропна и удовлетворяет следующему уравнению состояния: $P_0 = a_\infty^2\rho_0$, где a_∞ — скорость звука в жидкости. Из этого уравнения и соотношения (2.1) заключаем, что ρ_0 и a_∞^2 могут быть в общем случае функциями параметра $z := 2^{-1}\omega_0^2(x_1^2 + x_2^2) - gx_3$. Далее будем считать, что в жидкости задана скорость звука $a_\infty^2 = \mathrm{const}$, тогда стационарная плотность может быть найдена из (2.1) как функция параметра z следующим образом: $\rho_0(z) = \rho_0(0)\exp(za_\infty^{-2})$, где $\rho_0(0)$ — плотность жидкости в начале координат. При этом стационарная плотность ρ_0 будет постоянной, только если в системе отсутствует вращение и гравитационное поле, т. е. при $\omega_0 = 0$ и $g = 0$.

Представим теперь полное давление и плотность жидкости в виде: $\widehat{P}(t,x) = P_0(z) + p(t,x)$, $\widehat{\rho}(t,x) = \rho_0(z) + \widetilde{\rho}(t,x)$, где $p(t,x)$ и $\widetilde{\rho}(t,x)$ — это динамическое давление и плотность, соответственно, возникающие при малых движениях жидкости относительно стационарного состояния. Предположим, что динамические составляющие удовлетворяют следующему реологическому соотношению:

$$P_m\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)\nabla p(t,x) = a_\infty^2\Big(P_m\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big) + \rho_0(z)Q_{m-1}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)\Big)\nabla\widetilde{\rho}(t,x), \quad (2.2)$$

где $P_m(\lambda)$, $Q_{m-1}(\lambda)$ — полиномы степеней m и $m-1$, соответственно. Предположим, что корни полинома $P_m(\lambda)$ вещественны, различны и отрицательны, обозначим их через $-b_l$ $(l = \overline{1,m})$, а дробь $Q_{m-1}(\lambda)P_m^{-1}(\lambda)$ имеет следующее разложение:

$$\frac{Q_{m-1}(\lambda)}{P_m(\lambda)} = \sum_{l=1}^{m}\frac{k_l}{b_l + \lambda}, \quad (2.3)$$

где $k_l > 0$ $(l = \overline{1,m})$. Из определяющего соотношения (2.2) с помощью преобразования Лапласа и представлений (2.3) можно вывести (см. [7, с. 43–46]) следующее уравнение состояния:

$$\nabla p(t,x) = a_\infty^2 \nabla\widetilde{\rho}(t,x) - a_\infty^2 \rho_0(z) \sum_{l=1}^{m} \int_0^t e^{-b_l(t-s)} \nabla\big(k_l \widetilde{\rho}(s,x)\big)\, ds. \tag{2.4}$$

В (2.4) мы пренебрегли экспоненциально затухающим во времени слагаемым, порождаемым состоянием жидкости в начальный момент времени. Это слагаемое можно считать отнесенным к полю внешних сил. Числа b_l^{-1} имеют смысл времен релаксации в системе, а k_l — некоторые структурные постоянные. В качестве математического обобщения будем считать, что $k_l = k_l(x)$ — непрерывно дифференцируемые положительные и отделенные от нуля функции. В случае, когда система не вращается и находится в невесомости ($\omega_0 = 0$, $g = 0$), функции $k_l(x)$ будем считать положительными константами.

Осуществим линеаризацию уравнения Эйлера, записанного в подвижной системе координат, относительно состояния относительного равновесия. С использованием уравнения состояния (2.4) получим задачу о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости, заполняющей равномерно вращающееся твердое тело:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}(t,x)}{\partial t} - 2\omega_0\big(\mathbf{u}(t,x)\times \mathbf{e}_3\big) + \nabla\Big(\dfrac{a_\infty^2}{\rho_0(z)}\widetilde{\rho}(t,x)\Big) - \displaystyle\sum_{l=1}^{m}\int_0^t e^{-b_l(t-s)}\nabla\big(a_\infty^2 k_l(x)\widetilde{\rho}(s,x)\big)\,ds = \mathbf{f}(t,x), \\ \dfrac{\partial \widetilde{\rho}(t,x)}{\partial t} + \operatorname{div}\big(\rho_0(z)\mathbf{u}(t,x)\big) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \qquad \mathbf{u}(t,x)\cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega), \end{cases}$$

где $\mathbf{u}(t,x)$ — поле скоростей жидкости в подвижной системе координат, а $\mathbf{f}(t,x)$ — малое поле внешних сил, наложенное на гравитационное поле.

Осуществим в полученной системе, с целью ее симметризации, следующую замену:

$$a_\infty \rho_0^{-1/2}(z)\widetilde{\rho}(t,x) =: \rho(t,x).$$

В результате получим основную задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}(t,x)}{\partial t} - 2\omega_0\big(\mathbf{u}(t,x)\times \mathbf{e}_3\big) + \\ \qquad + \nabla\big(a_\infty \rho_0^{-1/2}(z)\rho(t,x)\big) - \displaystyle\sum_{l=1}^{m}\int_0^t e^{-b_l(t-s)}\nabla\big(a_\infty \rho_0^{1/2}(z) k_l(x)\rho(s,x)\big)\,ds = \mathbf{f}(t,x), \\ \dfrac{\partial \rho(t,x)}{\partial t} + a_\infty \rho_0^{-1/2}(z)\operatorname{div}\big(\rho_0(z)\mathbf{u}(t,x)\big) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \qquad \mathbf{u}(t,x)\cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega). \end{cases} \tag{2.5}$$

Для полноты формулировки задачи зададим начальные условия:

$$\mathbf{u}(0,x) = \mathbf{u}^0(x), \quad \rho(0,x) = \rho^0(x). \tag{2.6}$$

Всюду далее будем предполагать, что физические параметры связаны следующим неравенством, характеризующим малость времен релаксации b_l^{-1} или структурных функций $k_l(x)$:

$$1 - \sum_{l=1}^{m} \frac{k_l(x)\rho_0(z)}{b_l} > 0 \quad \forall\, x \in \overline{\Omega} \quad \Big(z = \frac{\omega_0^2}{2}(x_1^2 + x_2^2) - g x_3\Big). \tag{2.7}$$

3. Теорема о разрешимости начально-краевой задачи и об асимптотическом поведении решений при нагрузках специального вида

В этом разделе начально-краевая задача (2.5)-(2.6), описывающая малые движения вращающейся идеальной релаксирующей жидкости, с помощью специальных операторов сводится к задаче Коши (3.20) (в векторно-матричной форме (3.21)) для системы дифференциально-операторных уравнений в гильбертовом пространстве. Затем исследуется вопрос разрешимости задачи Коши (3.21) и доказывается теорема 3.1.

В случае, когда система не вращается, т. е. при $\omega_0 = 0$, исследуется поведение решения задачи (2.5)-(2.6) при нагрузках вида $\mathbf{f}(t,x) = \mathbf{g}(t,x) + \sum\limits_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathbf{f}_k(t,x)$, где $\sigma_k \in \mathbb{R}$ $(k = \overline{0,n})$. Доказывается теорема 3.2 об асимптотическом поведении решения задачи.

3.1. Проектирование уравнений движения. Для перехода к операторной формулировке задачи (2.5)-(2.6) применим метод ортогонального проектирования уравнений движения на специальные подпространства [9]. Введем векторное пространство $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$ со скалярным произведением и нормой следующего вида:

$$(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)} := \int\limits_\Omega \rho_0(z)\mathbf{u}_1(x)\cdot\overline{\mathbf{u}_2(x)}\,d\Omega, \quad \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)} = \int\limits_\Omega \rho_0(z)|\mathbf{u}(x)|^2\,d\Omega. \tag{3.1}$$

В силу свойств функции $\rho_0(z)$ очевидно, что нормы в пространствах $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$ и $\mathbf{L}_2(\Omega)$ эквивалентны, а значит $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$ — гильбертово. Можно проверить, что имеет место разложение (аналог разложения Г. Вейля пространства векторных полей $\mathbf{L}_2(\Omega)$ (см. [9, гл. 2, § 1, п. 8])):

$$\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0) = \mathbf{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus\mathbf{G}(\Omega,\rho_0), \tag{3.2}$$

$$\mathbf{J}_0(\Omega,\rho_0) := \bigl\{\mathbf{u}\in\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0) \bigm| \operatorname{div}\bigl(\rho_0(z)\mathbf{u}\bigr) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \mathbf{u}_n := \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega)\bigr\},$$

$$\mathbf{G}(\Omega,\rho_0) := \Bigl\{\mathbf{u}\in\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0) \Bigm| \quad \mathbf{u} = \nabla\varphi, \quad \int\limits_\Omega \varphi\,d\Omega = 0\Bigr\}.$$

Здесь операции div$\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}_n$ понимаются в смысле теории обобщенных функций (распределений), см. [9, гл. 2, § 1, п. 6]. Введем ортопроекторы P_0 и P_G пространства $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$ на $\mathbf{J}_0(\Omega,\rho_0)$ и $\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)$ соответственно. Будем разыскивать поле $\mathbf{u}$ в виде:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \nabla\varphi, \quad \text{где} \quad \mathbf{v}\in\mathbf{J}_0(\Omega,\rho_0), \quad \nabla\varphi\in\mathbf{G}(\Omega,\rho_0). \tag{3.3}$$

Подставим представление (3.3) в уравнения (2.5) и применим к правой и левой частям первого уравнения ортопроекторы P_0 и P_G, отвечающие разложению (3.2). Преобразуем также граничное условие в (2.5) и начальные условия (2.6). В результате получим следующую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathbf{v}(t,x)}{\partial t} - 2\omega_0 P_0\bigl(\mathbf{v}(t,x)\times\mathbf{e}_3\bigr) - 2\omega_0 P_0\bigl(\nabla\varphi(t,x)\times\mathbf{e}_3\bigr) = P_0\mathbf{f}(t,x), \\ \dfrac{\partial\nabla\varphi(t,x)}{\partial t} - 2\omega_0 P_G\bigl(\mathbf{v}(t,x)\times\mathbf{e}_3\bigr) - 2\omega_0 P_G\bigl(\nabla\varphi(t,x)\times\mathbf{e}_3\bigr) + \\ \qquad +\nabla\bigl(a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\rho(t,x)\bigr) - \sum\limits_{l=1}^{m}\int\limits_0^t e^{-b_l(t-s)}\nabla\bigl(a_\infty\rho_0^{1/2}(z)k_l(x)\rho(s,x)\bigr)\,ds = P_G\mathbf{f}(t,x), \\ \dfrac{\partial\rho(t,x)}{\partial t} + a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\operatorname{div}\bigl(\rho_0(z)\nabla\varphi(t,x)\bigr) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \qquad \dfrac{\partial\varphi(t,x)}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega), \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\mathbf{v}(0,x) = P_0\mathbf{u}^0(x), \quad \nabla\varphi(0,x) = P_G\mathbf{u}^0(x), \quad \rho(0,x) = \rho^0(x). \tag{3.5}$$

3.2. Операторная формулировка задачи. Введем операторы S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22}:

$$S_{11}\mathbf{v} := iP_0(\mathbf{v}\times\mathbf{e}_3), \quad S_{12}\nabla\varphi := iP_0(\nabla\varphi\times\mathbf{e}_3), \quad S_{21}\mathbf{v} := iP_G(\mathbf{v}\times\mathbf{e}_3), \quad S_{22}\nabla\varphi := iP_G(\nabla\varphi\times\mathbf{e}_3). \tag{3.6}$$

Обозначим через S операторный блок, составленный из операторов S_{jk} и действующий в гильбертовом пространстве $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0) = \mathbf{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)$. Имеет место лемма, доказательство которой подобно доказательству аналогичной леммы о свойствах кориолисова оператора из [9].

Лемма 3.1 (см. [9, гл. 5, § 1, п. 2]). *Оператор S является самосопряженным и ограниченным в $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$: $S = S^*$, $S\in\mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0))$; более того, $\|S\| = 1$. Спектр оператора S_{11} существенный* (*см.* [19]) *и заполняет отрезок* $[-1,1]$: $\sigma(S_{11}) = \sigma_{ess}(S_{11}) = [-1,1]$ (*здесь через $\sigma_{ess}(S_{11})$ обозначен существенный* (*предельный*) *спектр оператора S_{11} — см. определение* 4.1).

Будем считать далее, что граница $\partial\Omega$ области Ω класса C^2.

Лемма 3.2. *Введем пространство*

$$\mathbf{H}_A := \{\nabla\varphi \in \mathbf{W}_2^1(\Omega) \Big| \ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } \partial\Omega), \quad \int\limits_\Omega \varphi \, d\Omega = 0\}$$

с нормой, порожденной скалярным произведением следующего вида:

$$(\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2)_A := \int\limits_\Omega \frac{a_\infty^2}{\rho_0(z)} \operatorname{div}\bigl(\rho_0(z)\nabla\varphi_1\bigr)\overline{\operatorname{div}\bigl(\rho_0(z)\nabla\varphi_2\bigr)} \, d\Omega.$$

Пространство $\mathbf{H}_A$ является гильбертовым, оно компактно вложено в пространство $\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)$. Порождающий оператор A гильбертовой пары $(\mathbf{H}_A;\mathbf{G}(\Omega,\rho_0))$, являющийся самосопряженным и положительно определенным в $\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)$, обладает дискретным спектром. Для каждого поля $\nabla q \in \mathbf{G}(\Omega,\rho_0)$ существует и единственно обобщенное решение задачи

$$-\nabla\Bigl(\frac{a_\infty^2}{\rho_0(z)}\operatorname{div}\bigl(\rho_0(z)\nabla\varphi\bigr)\Bigr) = \nabla q \quad (\text{в } \Omega), \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega), \qquad \int\limits_\Omega \varphi \, d\Omega = 0,$$

выражаемое формулой $\nabla\varphi = A^{-1}\nabla q$. Более того, $A^{-1} \in \mathfrak{S}_p(\mathbf{G}(\Omega,\rho_0))$ при $p > 3/2$ и справедлива следующая асимптотическая формула для собственных значений оператора A:

$$\lambda_k(A) = \Bigl(\frac{1}{6\pi^2 a_\infty^6}\int\limits_\Omega \rho_0^{-3/2}(z)\, d\Omega\Bigr)^{-2/3} k^{2/3}(1 + o(1)) \quad (k \to +\infty).$$

Доказательство. **1.** Покажем, что $\mathbf{H}_A$ — гильбертово пространство. Рассмотрим задачу

$$L\varphi := -\operatorname{div}\bigl(\rho_0(z)\nabla\varphi\bigr) = f \quad (\text{в } \Omega), \qquad B\varphi := \frac{\partial\varphi}{\partial n} = g \quad (\text{на } \partial\Omega). \tag{3.7}$$

Можно проверить, что дифференциальное выражение L правильно эллиптично, а граничное условие B накрывает его (см. [2, гл. 3, § 6, п. 1, с. 222]). Таким образом, задача (3.7) эллиптична, а ее ядро, т. е. решение задачи (3.7) при $f \equiv 0$, $g \equiv 0$, как несложно проверить, состоит из констант. Из [2, гл. 3, § 6, п. 2, лемма 6.3] следует, что существует такая константа $c > 0$, что

$$c^{-1}\|\varphi\|^2_{W_2^2(\Omega)} \leqslant \|L\varphi\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant c\|\varphi\|^2_{W_2^2(\Omega)} \quad \forall\, \varphi \in W_2^2(\Omega, B), \tag{3.8}$$

$$\text{где} \quad W_2^2(\Omega,B) := \{\varphi \in W_2^2(\Omega) \Big| \ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } \partial\Omega), \quad (\varphi,1)_{L_2(\Omega)} = 0\}.$$

Из (3.8) для каждого поля $\nabla\varphi \in \mathbf{H}_A$ выведем следующие неравенства:

$$\|\nabla\varphi\|_A^2 \geqslant c^{-1}a_\infty^2 \min_{x\in\overline{\Omega}} \rho_0^{-1}(z)\|\varphi\|^2_{W_2^2(\Omega)} \geqslant c^{-1}a_\infty^2 \min_{x\in\overline{\Omega}} \rho_0^{-1}(z)\|\nabla\varphi\|^2_{\mathbf{W}_2^1(\Omega)}, \tag{3.9}$$

$$\|\nabla\varphi\|_A^2 \leqslant c a_\infty^2 \max_{x\in\overline{\Omega}} \rho_0^{-1}(z)\|\varphi\|^2_{W_2^2(\Omega)} \leqslant c c_1 a_\infty^2 \max_{x\in\overline{\Omega}} \rho_0^{-1}(z)\|\nabla\varphi\|^2_{\mathbf{W}_2^1(\Omega)}, \tag{3.10}$$

где $c_1 > 0$ некоторая константа. Таким образом, $\mathbf{H}_A$ — гильбертово пространство.

2. Пространство $\mathbf{H}_A$ является плотным множеством в $\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)$. Из неравенства (3.9), с учетом того, что $\|\nabla\varphi\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)} \leqslant \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} \rho_0(z)\|\nabla\varphi\|^2_{\mathbf{W}_2^1(\Omega)}$ для каждого $\nabla\varphi \in \mathbf{W}_2^1(\Omega) \cap \mathbf{G}(\Omega,\rho_0)$, следует, что $\mathbf{H}_A$ и $\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)$ образуют гильбертову пару $(\mathbf{H}_A;\mathbf{G}(\Omega,\rho_0))$.

Найдем порождающий оператор A указанной гильбертовой пары; он определяется из тождества (см. [9, гл. 1, § 3, п. 1, формула (3.5)])

$$(A\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2)_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)} = (\nabla\varphi_1,\nabla\varphi_2)_A, \quad \nabla\varphi_1 \in \mathcal{D}(A), \quad \nabla\varphi_2 \in \mathbf{H}_A. \tag{3.11}$$

Для дважды дифференцируемого поля $\nabla\varphi_1$ с использованием формулы Грина для оператора Лапласа тождество (3.11) можно преобразовать следующим образом:

$$(A\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2)_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)} = \int\limits_\Omega \frac{a_\infty^2}{\rho_0(z)} \operatorname{div}\bigl(\rho_0(z)\nabla\varphi_1\bigr)\operatorname{div}\bigl(\rho_0(z)\nabla\varphi_2\bigr)\, d\Omega =$$

$$= -\int\limits_\Omega \rho_0(z)\nabla\Bigl(\frac{a_\infty^2}{\rho_0(z)}\operatorname{div}\bigl(\rho_0(z)\nabla\varphi_1\bigr)\Bigr)\cdot\nabla\varphi_2\, d\Omega + \int\limits_{\partial\Omega} a_\infty^2 \operatorname{div}\bigl(\rho_0(z)\nabla\varphi_1\bigr)\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\, dS =$$

$$= \Big(-\nabla\Big(\frac{a_\infty^2}{\rho_0(z)}\operatorname{div}\big(\rho_0(z)\nabla\varphi_1\big)\Big), \nabla\varphi_2\Big)_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}.$$

Отсюда следует, что дважды дифференцируемое решение уравнения $A\nabla\varphi_1 = \nabla q$ является решением задачи

$$-\nabla\Big(\frac{a_\infty^2}{\rho_0(z)}\operatorname{div}\big(\rho_0(z)\nabla\varphi_1\big)\Big) = \nabla q \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega), \quad \int\limits_\Omega \varphi_1\, d\Omega = 0.$$

Эта задача имеет единственное обобщенное решение $\nabla\varphi_1 = A^{-1}\nabla q$ для каждого поля $\nabla q \in \mathbf{G}(\Omega,\rho_0)$.

Из неравенств (3.9)-(3.10) и компактности вложения пространства $\mathbf{W}_2^1(\Omega)$ в $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$ следует, что пространство $\mathbf{H}_A$ компактно вложено в $\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)$. Это влечет компактность оператора A^{-1}, а значит, оператор A обладает дискретным спектром. Асимптотическая формула для собственных значений оператора A следует из общих формул из работы [3]. $\square$

Введем скалярное гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ функций суммируемых со своими квадратами по области Ω, а также его подпространство $L_{2,\rho_0}(\Omega) := \{f \in L_2(\Omega) \mid (f, \rho_0^{1/2})_{L_2(\Omega)} = 0\}$. Ортопроектор пространства $L_2(\Omega)$ на подпространство $L_{2,\rho_0}(\Omega)$ имеет следующий вид:

$$\Pi f := f - (f, \rho_0^{1/2})_{L_2(\Omega)}\|\rho_0^{1/2}\|_{L_2(\Omega)}^{-2}\rho_0^{1/2}(z).$$

Определим оператор

$$B\nabla\varphi := a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\operatorname{div}\big(\rho_0(z)\nabla\varphi\big), \quad \mathcal{D}(B) := \mathbf{H}_A. \tag{3.12}$$

Тогда $B : \mathcal{D}(B) \subset \mathbf{G}(\Omega,\rho_0) \to L_{2,\rho_0}(\Omega)$, $\operatorname{Ker}B = \{0\}$, оператор B замкнут и

$$B^*\rho = -\nabla\big(a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\rho\big), \quad \mathcal{D}(B^*) = W_2^1(\Omega) \cap L_{2,\rho_0}(\Omega), \quad \operatorname{Ker}B^* = \{0\}. \tag{3.13}$$

По теореме о полярном представлении замкнутого оператора [15, гл. 8, § 1] существует унитарный оператор $U : \mathbf{G}(\Omega,\rho_0) \to L_{2,\rho_0}(\Omega)$ такой, что $B = UA^{1/2}$.

Определим операторы

$$M_l\rho := \Pi\rho_0 k_l \Pi\rho \quad (l = \overline{1,m}). \tag{3.14}$$

Эти операторы, очевидно, являются ограниченными, самосопряженными и положительно определенными операторами в $L_{2,\rho_0}(\Omega)$. Кроме того, $M_l\mathcal{D}(B^*) \subset \mathcal{D}(B^*)$ $(l = \overline{1,m})$. Из (2.7) следует, что $I - \sum\limits_{l=1}^m b_l^{-1}M_l \gg 0$.

С помощью введенных операторов задачу (3.4)-(3.5) перепишем в виде основной задачи Коши для следующей системы дифференциально-операторных уравнений в гильбертовых пространствах $\mathbf{J}_0(\Omega,\rho_0)$, $\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)$ и $L_{2,\rho_0}(\Omega)$:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = -2\omega_0 i\big[S_{11}\mathbf{v} + S_{12}\nabla\varphi\big] + P_0\mathbf{f}(t), \\ &\frac{d\nabla\varphi(t)}{dt} = -2\omega_0 i\big[S_{21}\mathbf{v} + S_{22}\nabla\varphi\big] + B^*\rho(t) - \sum_{l=1}^m \int\limits_0^t e^{-b_l(t-s)}B^*M_l\rho(s)\, ds + P_G\mathbf{f}(t), \\ &\frac{d\rho(t)}{dt} = -B\nabla\varphi(t), \qquad \mathbf{v}(0) = P_0\mathbf{u}^0, \quad \nabla\varphi(0) = P_G\mathbf{u}^0, \quad \rho(0) = \rho^0. \end{aligned}\right. \tag{3.15}$$

Определение 3.1. *Сильным решением исходной начально-краевой задачи* (2.5)-(2.6) назовем такие $\mathbf{u}$ и ρ, для которых $\mathbf{v}$, $\nabla\varphi$ и ρ являются сильным решением задачи Коши (3.15). В свою очередь *сильным решением задачи Коши* (3.15) назовем такие $\mathbf{v}$, $\nabla\varphi$ и ρ, что $\nabla\varphi(t) \in \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A^{1/2})$, $\rho(t) \in \mathcal{D}(B^*)$ для любого $t \in \mathbb{R}_+$, $B^*\rho(t)$, $\nabla\varphi'(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathbf{G}(\Omega,\rho_0))$, $B\nabla\varphi(t)$, $\rho'(t) \in C(\mathbb{R}_+; L_{2,\rho_0}(\Omega))$, выполнены начальные условия и уравнения из (3.15) для любого $t \in \mathbb{R}_+ := [0,+\infty)$.

3.3. Теорема о разрешимости.

Теорема 3.1. *Пусть* $P_0\mathbf{u}^0 \in \mathbf{J}_0(\Omega,\rho_0)$, $P_G\mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(B)$, $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$, $\mathbf{f}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+;\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0))$. *Тогда задача Коши* (3.15) *имеет единственное сильное решение.*

Доказательство. **1.** Предположим, что задача (3.15) имеет сильное решение, и сведем ее к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка.

Пусть $\nabla\varphi(t)$, $\rho(t)$ — сильное решение системы (3.15) (см. определение 3.1). С использованием леммы 3.2, интегрирования по частям и формул (3.12)–(3.14) можно проверить, что функции $\mathbf{v}(t)$, $\nabla\varphi(t)$ и $\rho(t)$ удовлетворяют также следующей системе:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = -2\omega_0 i\big[S_{11}\mathbf{v} + S_{12}\nabla\varphi\big] + P_0\mathbf{f}(t), \\ \dfrac{d\nabla\varphi(t)}{dt} = -2\omega_0 i\big[S_{21}\mathbf{v} + S_{22}\nabla\varphi\big] + A^{1/2}\Big\{U^*\Big[I - \displaystyle\sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l}M_l\Big]\rho(t) + \sum_{l=1}^m e^{-b_l t}\frac{1}{b_l}U^* M_l\rho^0 + \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{l=1}^m U^*\Big[\frac{1}{b_l}M_l\Big]^{1/2}\int_0^t e^{-b_l(t-s)}\Big[\frac{1}{b_l}M_l\Big]^{1/2}\frac{d\rho(s)}{ds}\,ds\Big\} + P_G\mathbf{f}(t), \\ \dfrac{d\rho(t)}{dt} = -UA^{1/2}\nabla\varphi(t). \end{cases} \tag{3.16}$$

Введем по $\rho(t)$ следующие функции:

$$u_0(t) := -\Big[I - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l}M_l\Big]^{1/2}\rho(t), \quad u_l(t) := -\int_0^t e^{-b_l(t-s)}\Big[\frac{1}{b_l}M_l\Big]^{1/2}\frac{d\rho(s)}{ds}\,ds \quad (l=\overline{1,m}). \tag{3.17}$$

Функции $u_0(t)$, $u_l(t)$ $(l=\overline{1,m})$ непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}_+$. Из (3.16), (3.17) получим, что они удовлетворяют следующей системе уравнений и начальных условий:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = -\Big\{2\omega_0 i\big[S_{11}\mathbf{v} + S_{12}A^{-1/2}A^{1/2}\nabla\varphi\big]\Big\} + P_0\mathbf{f}(t), \\ \dfrac{d\nabla\varphi(t)}{dt} = -A^{1/2}\Big\{2\omega_0 i\big[A^{-1/2}S_{21}\mathbf{v} + A^{-1/2}S_{22}A^{-1/2}A^{1/2}\nabla\varphi\big] + \\ \quad + U^*\Big[I - \displaystyle\sum_{l=1}^m\frac{1}{b_l}M_l\Big]^{1/2}u_0(t) + \sum_{l=1}^m U^*\Big[\frac{1}{b_l}M_l\Big]^{1/2}u_l(t) - \sum_{l=1}^m e^{-b_l t}\frac{1}{b_l}U^*M_l\rho^0\Big\} + P_G\mathbf{f}(t), \\ \dfrac{du_0(t)}{dt} = -\Big\{-\Big[I - \displaystyle\sum_{l=1}^m\frac{1}{b_l}M_l\Big]^{1/2}UA^{1/2}\nabla\varphi(t)\Big\}, \\ \dfrac{du_l(t)}{dt} = -\Big\{-\Big[\dfrac{1}{b_l}M_l\Big]^{1/2}UA^{1/2}\nabla\varphi(t) + b_l u_l(t)\Big\} \quad (l=\overline{1,m}), \end{cases} \tag{3.18}$$

$$\mathbf{v}(0) = P_0\mathbf{u}^0, \quad \nabla\varphi(0) = P_G\mathbf{u}^0, \quad u_0(0) = -\Big[I - \sum_{l=1}^m\frac{1}{b_l}M_l\Big]^{1/2}\rho^0, \quad u_l(0) = 0 \quad (l=\overline{1,m}).$$

Определим операторы

$$\begin{gathered} T_{11} := 2\omega_0 iS_{11}, \;\; T_{12} := 2\omega_0 iS_{12}A^{-1/2}, \;\; T_{21} := 2\omega_0 iA^{-1/2}S_{21}, \;\; T_{22} := 2\omega_0 iA^{-1/2}S_{22}A^{-1/2}, \\ Q_0 := \Big[I - \sum_{l=1}^m\frac{1}{b_l}M_l\Big]^{1/2}U, \quad Q_l := \Big[\frac{1}{b_l}M_l\Big]^{1/2}U \quad (l=\overline{1,m}) \end{gathered} \tag{3.19}$$

и перепишем систему (3.18) следующим образом:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = -\Big[T_{11}\mathbf{v} + T_{12}A^{1/2}\nabla\varphi\Big] + P_0\mathbf{f}(t), \\
\dfrac{d\nabla\varphi(t)}{dt} = -A^{1/2}\Big[T_{21}\mathbf{v} + T_{22}A^{1/2}\nabla\varphi + Q_0^* u_0(t) + \sum\limits_{l=1}^{m} Q_l^* u_l(t) - \sum\limits_{l=1}^{m} e^{-b_l t} Q_l^* Q_l U^* \rho^0\Big] + P_G\mathbf{f}(t), \\
\dfrac{du_0(t)}{dt} = -\Big[- Q_0 A^{1/2}\nabla\varphi(t)\Big], \\
\dfrac{du_l(t)}{dt} = -\Big[- Q_l A^{1/2}\nabla\varphi(t) + b_l u_l(t)\Big] \quad (l = \overline{1,m}),
\end{cases}
$$
$$
\mathbf{v}(0) = P_0\mathbf{u}^0, \quad \nabla\varphi(0) = P_G\mathbf{u}^0, \quad u_0(0) = -Q_0 U^*\rho^0, \quad u_l(0) = 0 \quad (l = \overline{1,m}). \tag{3.20}
$$

Систему (3.20) запишем в виде задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{\omega_0} := \mathbf{J}_0(\Omega,\rho_0) \oplus \mathbf{G}(\Omega,\rho_0) \oplus \big(\oplus_{l=0}^m L_{2,\rho_0}(\Omega)\big)$:

$$
\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}_{\omega_0}\big(\xi + \xi_{\rho^0}(t)\big) + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0, \tag{3.21}
$$
$$
\xi(t) := \big(\mathbf{v}(t); \nabla\varphi(t); w(t)\big)^\tau := \big(\mathbf{v}(t); \nabla\varphi(t); u_0(t); u_1(t); \ldots; u_m(t)\big)^\tau,
$$
$$
\xi_{\rho^0}(t) := \big(0; 0; -(Q_0^*)^{-1}\sum_{l=1}^m e^{-b_l t} Q_l^* Q_l U^*\rho^0; 0; \ldots; 0\big)^\tau, \tag{3.22}
$$
$$
\xi^0 := \big(P_0\mathbf{u}^0; P_G\mathbf{u}^0; -Q_0 U^*\rho^0; 0; \ldots; 0\big)^\tau, \quad \mathcal{F}(t) := \big(P_0\mathbf{f}(t); P_G\mathbf{f}(t); 0; 0; \ldots; 0\big)^\tau.
$$

Оператор $\mathcal{A}_{\omega_0}$ определяется по следующим формулам:

$$
\mathcal{A}_{\omega_0} = \operatorname{diag}(I, A^{1/2}, \mathcal{I}) \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{21} & T_{22} & \mathcal{Q}^* \\ 0 & -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \operatorname{diag}(I, A^{1/2}, \mathcal{I}), \tag{3.23}
$$
$$
\mathcal{Q} := \big(Q_0, Q_1, \ldots, Q_m\big)^\tau, \quad \mathcal{G} := \operatorname{diag}\big(0, b_1 I, \ldots, b_m I\big), \quad \mathcal{I} := \operatorname{diag}\big(I, I, \ldots, I\big),
$$
$$
\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\omega_0}) = \Big\{\xi = (\mathbf{v}; \nabla\varphi; w)^\tau \in \mathcal{H} \Big| \ \mathbf{v} \in \mathbf{J}_0(\Omega,\rho_0), \ \ \nabla\varphi \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \ \ \mathcal{Q}^* w \in \mathcal{D}(A^{1/2})\Big\}.
$$

2. Докажем, что оператор $-\mathcal{A}_{\omega_0}$ является генератором C_0-полугруппы.

Оператор $\mathcal{A}_{\omega_0}$ плотно определен, так как множество $\mathbf{J}_0(\Omega,\rho_0) \oplus \mathcal{D}(A^{1/2}) \oplus \big(\oplus_{l=0}^m \mathcal{D}(B^*)\big)$ содержится в $\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\omega_0})$ и плотно в $\mathcal{H}$. Оператор $\mathcal{A}_{\omega_0}$ аккретивен. Действительно, из леммы 3.1, (3.19) и (3.23) следует, что

$$
\operatorname{Re}\big(\mathcal{A}_{\omega_0}\xi, \xi\big)_{\mathcal{H}} = \big(\mathcal{G}w, w\big)_{\oplus_{l=0}^m L_{2,\rho_0}(\Omega)} = \sum_{l=1}^m b_l \|u_l\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)} \geqslant 0, \quad \forall\, \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\omega_0}).
$$

Осталось доказать, что оператор $\mathcal{A}_{\omega_0}$ замкнут и максимален. Для этого достаточно установить, что оператор $\mathcal{A}_{\omega_0}$ имеет на отрицательной полуоси регулярные точки. В связи с этим рассмотрим операторный пучок следующего вида:

$$
\mathcal{L}(\lambda) := \begin{pmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda A^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{Q}^* \end{pmatrix} \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \Big(0, \mathcal{Q}\Big) = \begin{pmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda A^{-1} + \mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q} \end{pmatrix}, \tag{3.24}
$$

где $\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) := (\mathcal{G} - \lambda)^{-1}$ — резольвента оператора $\mathcal{G}$. Из (3.19) и (3.23) найдем, что при всех $\lambda < 0$

$$
\operatorname{Re}\mathcal{L}(\lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda A^{-1} + \mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q} \end{pmatrix} \gg 0.
$$

Отсюда и из факторизации оператора $\mathcal{A}_{\omega_0} - \lambda$ в форме Шура—Фробениуса теперь найдем, что при всех $\lambda < 0$ оператор $\mathcal{A}_{\omega_0} - \lambda$ непрерывно обратим и

$$\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}_{\omega_0}) = \operatorname{diag}\big(I, A^{-1/2}, \mathcal{I}\big) \begin{pmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & 0 \\ T_{21} & T_{22} - \lambda A^{-1} & \mathcal{Q}^* \\ 0 & -\mathcal{Q} & \mathcal{G} - \lambda \end{pmatrix}^{-1} \operatorname{diag}\big(I, A^{-1/2}, \mathcal{I}\big) =$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & A^{-1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q} & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \big[\mathcal{L}^{-1}(\lambda)\big]_{11} & \big[\mathcal{L}^{-1}(\lambda)\big]_{12} & 0 \\ \big[\mathcal{L}^{-1}(\lambda)\big]_{21} & \big[\mathcal{L}^{-1}(\lambda)\big]_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & A^{-1/2} & -\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ 0 & 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

3. Осуществим в задаче (3.21) замену искомой функции $\zeta(t) := \xi(t) + \xi_{\rho^0}(t)$, с учетом (3.22) получим следующую задачу Коши

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\mathcal{A}_{\omega_0}\zeta + \xi'_{\rho^0}(t) + \mathcal{F}(t), \quad \zeta(0) = \zeta^0 := \big(P_0\mathbf{u}^0; P_G\mathbf{u}^0; -(Q_0^*)^{-1}U^*\rho^0; 0; \ldots; 0\big)^\tau. \quad (3.26)$$

Оператор $-\mathcal{A}_{\omega_0}$ является генератором C_0-полугруппы $\mathcal{U}(t)$. Из условий на начальные данные следует, что $\mathbf{v}(0) = P_0\mathbf{u}^0 \in \mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0)$, $\nabla\varphi(0) = P_G\mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A^{1/2})$, $\mathcal{Q}^*w(0) = -U^*\rho^0 = -A^{-1/2}(UA^{1/2})^*\rho^0 = -A^{-1/2}B^*\rho^0 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, т. е. $\zeta^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\omega_0})$. Из условия на функцию $\mathbf{f}(t)$ следует, что $\xi'_{\rho^0}(t) + \mathcal{F}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_{\omega_0})$. Из теоремы о разрешимости абстрактной задачи Коши (см. [10, гл. 1, § 6, п. 2, теорема 6.5], [17, гл. 2, § 1, теорема 1.3]) следует, что задача Коши (3.26) имеет единственное решение $\zeta(t)$ такое, что $\zeta(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\omega_0})$ при $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathcal{A}_{\omega_0}\zeta(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_{\omega_0})$, $\zeta(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_{\omega_0})$. Отсюда выводится утверждение о сильной разрешимости. □

3.4. Об асимптотическом поведении решений при отсутствии вращения ($\omega_0 = 0$) **и при нагрузках специального вида.** Предположим, что в системе отсутствует вращение, т. е., что $\omega_0 = 0$. В этом случае система (3.15) операторных уравнений и начальных условий распадается, и из нее может быть найдена вихревая составляющая $\mathbf{v}(t) \in \mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0)$ поля скоростей релаксирующей жидкости:

$$\mathbf{v}(t) = P_0\mathbf{u}^0 + \int_0^t P_0\mathbf{f}(s)\,ds.$$

Таким образом, система (3.15) преобразуется в задачу Коши для следующей системы из двух дифференциально-операторных уравнений в гильбертовых пространствах $\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$ и $L_{2,\rho_0}(\Omega)$:

$$\begin{cases} \dfrac{d\nabla\varphi(t)}{dt} = B^*\rho(t) - \displaystyle\sum_{l=1}^m \int_0^t e^{-b_l(t-s)}B^*M_l\rho(s)\,ds + P_G\mathbf{f}(t), \\ \dfrac{d\rho(t)}{dt} = -B\nabla\varphi(t), \qquad \nabla\varphi(0) = P_G\mathbf{u}^0, \quad \rho(0) = \rho^0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Систему (3.27) можно свести, как и в теореме 3.1, к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := \mathbf{G}(\Omega, \rho_0) \oplus \big(\oplus_{l=0}^m L_{2,\rho_0}(\Omega)\big)$:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}\big(\xi + \xi_{\rho^0}(t)\big) + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0, \quad (3.28)$$

$$\xi(t) := \big(\nabla\varphi(t); w(t)\big)^\tau := \big(\nabla\varphi(t); u_0(t); u_1(t); \ldots; u_m(t)\big)^\tau,$$

$$\xi_{\rho^0}(t) := \big(0; -(Q_0^*)^{-1}\sum_{l=1}^m e^{-b_lt}Q_l^*Q_lU^*\rho^0; 0; \ldots; 0\big)^\tau, \quad (3.29)$$

$$\xi^0 := \big(P_G\mathbf{u}^0; -Q_0U^*\rho^0; 0; \ldots; 0\big)^\tau, \quad \mathcal{F}(t) := \big(P_G\mathbf{f}(t); 0; 0; \ldots; 0\big)^\tau.$$

Оператор $\mathcal{A}$ в (3.28) определяется по следующим формулам:

$$\mathcal{A} = \operatorname{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}) \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \operatorname{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}) = \begin{pmatrix} 0 & A^{1/2}\mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q}A^{1/2} & \mathcal{G} \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

$$\mathcal{Q} := \big(Q_0, Q_1, \ldots, Q_m\big)^\tau, \quad \mathcal{G} := \operatorname{diag}\big(0, b_1I, \ldots, b_mI\big), \quad \mathcal{I} := \operatorname{diag}\big(I, I, \ldots, I\big),$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Big\{\xi = (\nabla\varphi; w)^\tau \in \mathcal{H} \big|\ \nabla\varphi \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \ \ \mathcal{Q}^*w \in \mathcal{D}(A^{1/2})\Big\}.$$

Резольвента $\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$, как и в (3.25), может быть найдена из факторизации оператора $\mathcal{A}-\lambda$ в форме Шура—Фробениуса:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) &= \operatorname{diag}(A^{-1/2},\mathcal{I})\begin{pmatrix}-\lambda A^{-1} & \mathcal{Q}^*\\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G}-\lambda\end{pmatrix}^{-1}\operatorname{diag}(A^{-1/2},\mathcal{I}) =\\ &= \begin{pmatrix}A^{-1/2} & 0\\ \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q} & \mathcal{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L^{-1}(\lambda) & 0\\ 0 & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{-1/2} & -\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\\ 0 & \mathcal{I}\end{pmatrix} =\\ &= \begin{pmatrix}A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2} & -A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\\ \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2} & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\big[\mathcal{I}-\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\big]\end{pmatrix},\\ &\lambda\notin\sigma(\mathcal{G})\cup\sigma(L(\lambda)),\quad L(\lambda):=-\lambda A^{-1}+\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}.\end{aligned}\tag{3.31}$$

Оператор $-\mathcal{A}$ является генератором равномерно экспоненциально устойчивой C_0-полугруппы $\mathcal{U}(t)$ (см. [6]), тип которой может быть оценен по специальной формуле. Таким образом, существуют $\omega>0$ и $M\geqslant 1$ такие, что

$$\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\leqslant Me^{-\omega t}\quad \forall\, t\in\mathbb{R}_+.\tag{3.32}$$

Основным утверждением в данном пункте является следующая теорема.

Теорема 3.2. *Пусть* $P_G\mathbf{u}^0\in\mathcal{D}(B)$, $\rho^0\in\mathcal{D}(B^*)$, $\mathbf{f}(t)\in C^1(\mathbb{R}_+;\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0))$. *Тогда задача Коши* (3.27) *имеет единственное сильное решение.*

Пусть $\mathbf{f}(t)=\mathbf{g}(t)+\sum\limits_{k=0}^{n}e^{-i\sigma_k t}\mathbf{f}_k(t)$, *где* $\mathbf{g}(t)$, $\mathbf{f}_k(t)\in C^1(\mathbb{R}_+;\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0))$, $\sigma_k\in\mathbb{R}$ $(k=\overline{0,n})$ (*будем считать далее, что* $\sigma_0=0$, $\sigma_k\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ $(k=\overline{1,n})$). *Тогда существуют константы* $\omega>0$, $M_1\geqslant 1$, $M_2\geqslant 1$ *такие, что при всех* $t\in\mathbb{R}_+$ *выполнено неравенство*

$$\begin{aligned}&\Big\|\nabla\varphi(t)+\sum_{k=1}^{n}e^{-i\sigma_k t}i\sigma_k\mathbf{M}(i\sigma_k)P_G\mathbf{f}_k(t)\Big\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}+\\ &\qquad+\Big\|\rho(t)+B\Big(\mathbf{M}(0)P_G\mathbf{f}_0(t)+\sum_{k=1}^{n}e^{-i\sigma_k t}\mathbf{M}(i\sigma_k)P_G\mathbf{f}_k(t)\Big)\Big\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}\leqslant\\ &\qquad\leqslant M_1e^{-2\omega t}\Big[\|P_G\mathbf{u}^0\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}+\|\rho^0\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}+\sum_{k=0}^{n}\|\mathbf{f}_k(0)\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}\Big]+\\ &\qquad\qquad+M_2\Big[\int_0^t e^{-\omega(t-s)}\Big(\|\mathbf{g}(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}+\sum_{k=0}^{n}\|\mathbf{f}'_k(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}\Big)\,ds\Big]^2,\end{aligned}\tag{3.33}$$

$$\mathbf{M}(\lambda):=A^{-1/2}\Big[I+\lambda^2A^{-1}-\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{b_l-\lambda}U^*M_lU\Big]^{-1}A^{-1/2}.\tag{3.34}$$

В частности, если $\|\mathbf{g}(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}$, $\|\mathbf{f}'_k(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}\to 0$ $(k=\overline{0,n})$ *при* $t\to+\infty$, *то*

$$\begin{aligned}&\Big\|\nabla\varphi(t)+\sum_{k=1}^{n}e^{-i\sigma_k t}i\sigma_k\mathbf{M}(i\sigma_k)P_G\mathbf{f}_k(t)\Big\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}+\\ &\quad+\Big\|\rho(t)+B\Big(\mathbf{M}(0)P_G\mathbf{f}_0(t)+\sum_{k=1}^{n}e^{-i\sigma_k t}\mathbf{M}(i\sigma_k)P_G\mathbf{f}_k(t)\Big)\Big\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}\to 0\quad(t\to+\infty).\end{aligned}\tag{3.35}$$

Если дополнительно $\mathbf{f}_k(t)=\mathbf{0}$ $(k=\overline{1,n})$, $\mathbf{f}_0(t)=\nabla p(t)$, $p(t)\in\mathcal{D}(B^*)$, $\|\nabla p'(t)\|_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}\to 0$ *при* $t\to+\infty$, *то*

$$\|\nabla\varphi(t)\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}+\Big\|\rho(t)-\Big[I-\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{b_l}M_l\Big]^{-1}\big(a_\infty^{-1}\rho_0^{1/2}(z)p(t)\big)\Big\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}\to 0\quad(t\to+\infty).\tag{3.36}$$

Доказательство. Утверждение о разрешимости следует из теоремы 3.1.

1. Пусть $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t) + \sum\limits_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathbf{f}_k(t)$, где $\mathbf{g}(t)$, $\mathbf{f}_k(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0))$, $\sigma_k \in \mathbb{R}$ $(k = \overline{0, n})$. Представим функцию $\mathcal{F}(t)$ из (3.28) следующим образом:

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{T}(t) + \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathcal{F}_k(t), \quad \mathcal{T}(t) := \big(P_G\mathbf{g}(t); 0; \ldots; 0\big)^{\tau}, \quad \mathcal{F}_k(t) := \big(P_G\mathbf{f}_k(t); 0; \ldots; 0\big)^{\tau} \ \ (k = \overline{0, n}). \tag{3.37}$$

Из формулы для оператора $\mathcal{A}^{-1}$, которая может быть найдена непосредственно, из (3.37) и (3.31) теперь найдем, что

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_0(\mathcal{A})\mathcal{F}_0 &= \mathcal{A}^{-1}\mathcal{F}_0 = \big(0; (Q_0^*)^{-1}A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_0; 0; \ldots; 0\big)^{\tau}, \\
\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t) &= \big(A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_k(t); \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_k(t)\big)^{\tau} = \\
&= \big(A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_k(t); \frac{1}{-\lambda}Q_0L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_k(t); \\
&\qquad \frac{1}{b_1 - \lambda}Q_1L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_k(t); \ldots; \frac{1}{b_m - \lambda}Q_mL^{-1}(\lambda)A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_k(t)\big)^{\tau} \\
&\qquad \forall\, \lambda \in i\mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad k = \overline{1, n}.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Пусть $\nabla\varphi(t), \rho(t)$ — сильное решение задачи Коши (3.27). Используя представление $Q_0^*Q_0 = I - \sum\limits_{l=1}^{m} Q_l^*Q_l = I - \sum\limits_{l=1}^{m} b_l^{-1}U^*M_lU$ и формулы (3.34), (3.37), (3.38), (3.17), (3.28) при $t \in \mathbb{R}_+$ получим

$$\begin{aligned}
&\Big\|\nabla\varphi(t) + \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k\mathbf{M}(i\sigma_k)P_G\mathbf{f}_k(t)\Big\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)} + \\
&\qquad + \Big\|\rho(t) + B\Big(\mathbf{M}(0)P_G\mathbf{f}_0(t) + \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathbf{M}(i\sigma_k)P_G\mathbf{f}_k(t)\Big)\Big\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)} = \\
&= \Big\|\nabla\varphi(t) + \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k A^{-1/2}\Big[I - \sigma_k^2A^{-1} - \sum_{l=1}^{m}\frac{1}{b_l - i\sigma_k}U^*M_lU\Big]^{-1}A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_k(t)\Big\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)} + \\
&\qquad + \Big\|\rho(t) + UA^{1/2}\Big(A^{-1/2}\Big[I - \sum_{l=1}^{m}\frac{1}{b_l}U^*M_lU\Big]^{-1}A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_0(t) + \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t}A^{-1/2}\Big[I - \sigma_k^2A^{-1} - \sum_{l=1}^{m}\frac{1}{b_l - i\sigma_k}U^*M_lU\Big]^{-1}A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_k(t)\Big)\Big\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Отсюда, из (3.30), (3.31) (см. формулу для пучка $L(\lambda)$) получим, что

$$\begin{aligned}
&\Big\|\nabla\varphi(t) + \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k\mathbf{M}(i\sigma_k)P_G\mathbf{f}_k(t)\Big\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)} + \\
&\qquad + \Big\|\rho(t) + B\Big(\mathbf{M}(0)P_G\mathbf{f}_0(t) + \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathbf{M}(i\sigma_k)P_G\mathbf{f}_k(t)\Big)\Big\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)} = \\
&\qquad = \Big\|\nabla\varphi(t) - \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t}A^{-1/2}L^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_k(t)\Big\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)} + \\
&+ \Big\|\rho(t) + U\Big((Q_0^*Q_0)^{-1}A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_0(t) + \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-i\sigma_k t}}{-i\sigma_k}L^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_k(t)\Big)\Big\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)} \leqslant \\
&\qquad \leqslant \Big\|\nabla\varphi(t) - \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t}A^{-1/2}L^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_k(t)\Big\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)} +
\end{aligned}$$

$$+\|UQ_0^{-1}\|^2\Big\|u_0(t)-(Q_0^*)^{-1}A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_0(t)-\sum_{k=1}^n\frac{e^{-i\sigma_kt}}{-i\sigma_k}Q_0L^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_k(t)\Big\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}+$$
$$+\sum_{l=1}^m\Big\|u_l(t)-\sum_{k=1}^n\frac{e^{-i\sigma_kt}}{b_l-i\sigma_k}Q_lL^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_k(t)\Big\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}\leqslant$$
$$\leqslant\max\{1,\|UQ_0^{-1}\|^2\}\cdot\Big\|\xi(t)-\mathcal{R}_0(\mathcal{A})\mathcal{F}_0-\sum_{k=1}^ne^{-i\sigma_kt}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t)\Big\|^2_{\mathcal{H}}. \quad (3.39)$$

Напомним, что оператор $-\mathcal{A}$ — генератор равномерно экспоненциально устойчивой C_0-полугруппы $\mathcal{U}(t)$, удовлетворяющей неравенству (3.32). Будем искать (единственное) решение задачи (3.28) при $\mathcal{F}(t)=\mathcal{T}(t)+\sum\limits_{k=0}^n e^{-i\sigma_kt}\mathcal{F}_k(t)$ в виде $\xi(t)=-\xi_{\rho_0}(t)+\sum\limits_{k=0}^n e^{-i\sigma_kt}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t)+\eta(t)$. Тогда функция $\eta(t)$ будет решением следующей задачи Коши:

$$\begin{gathered}\frac{d\eta}{dt}=-\mathcal{A}\eta+\xi'_{\rho^0}(t)+\mathcal{T}(t)-\sum_{k=0}^ne^{-i\sigma_kt}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}'_k(t),\\ \eta(0)=\xi^0+\xi_{\rho_0}(0)-\sum_{k=0}^n\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(0)\in\mathcal{D}(\mathcal{A}).\end{gathered}\quad (3.40)$$

Из (3.40) найдем, что

$$\xi(t)=\sum_{k=0}^ne^{-i\sigma_kt}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t)-\xi_{\rho^0}(t)+\mathcal{U}(t)\Big(\xi^0+\xi_{\rho_0}(0)-\sum_{k=0}^n\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(0)\Big)+$$
$$+\int_0^t\mathcal{U}(t-s)\Big(\xi'_{\rho^0}(s)+\mathcal{T}(s)-\sum_{k=0}^ne^{-i\sigma_ks}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}'_k(s)\Big)\,ds. \quad (3.41)$$

Из (3.41), (3.37) и (3.32) найдем, что

$$\Big\|\xi(t)-\mathcal{R}_0(\mathcal{A})\mathcal{F}_0(t)-\sum_{k=1}^ne^{-i\sigma_kt}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t)\Big\|^2_{\mathcal{H}}=$$
$$=\Big\|\mathcal{U}(t)\Big(\xi^0+\xi_{\rho_0}(0)-\sum_{k=0}^n\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(0)\Big)-\xi_{\rho^0}(t)+$$
$$+\int_0^t\mathcal{U}(t-s)\Big(\xi'_{\rho^0}(s)+\mathcal{T}(s)-\sum_{k=0}^ne^{-i\sigma_ks}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}'_k(s)\Big)\,ds\Big\|^2_{\mathcal{H}}\leqslant$$
$$\leqslant\Big[Me^{-\omega t}\Big(\|\xi^0+\xi_{\rho_0}(0)\|_{\mathcal{H}}+\sup_{\lambda\in i\mathbb{R}}\|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\sum_{k=0}^n\|\mathbf{f}_k(0)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}\Big)+\big\|\xi_{\rho^0}(t)\big\|_{\mathcal{H}}+$$
$$+M\int_0^te^{-\omega(t-s)}\Big(\|\xi'_{\rho^0}(s)\|_{\mathcal{H}}+\|\mathbf{g}(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}+\sup_{\lambda\in i\mathbb{R}}\|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\sum_{k=0}^n\|\mathbf{f}'_k(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}\Big)\,ds\Big]^2. \quad (3.42)$$

Используя формулы для $\xi_{\rho^0}(t)$ и ξ^0 (см. (3.29)), из (3.42) найдем

$$\Big\|\xi(t)-\mathcal{R}_0(\mathcal{A})\mathcal{F}_0-\sum_{k=1}^ne^{-i\sigma_kt}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t)\Big\|^2_{\mathcal{H}}\leqslant$$
$$\leqslant\Big[Me^{-\omega t}\big(\|P_G\mathbf{u}^0\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}+\|(Q_0^*)^{-1}U^*\|^2\|\rho^0\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}\big)^{1/2}+$$
$$+Me^{-\omega t}\sup_{\lambda\in i\mathbb{R}}\|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\sum_{k=0}^n\|\mathbf{f}_k(0)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}+$$

$$+ Me^{-\omega t}\|\rho^0\|_{L_{2,\rho_0}(\Omega)} \sum_{l=1}^{m} \|(Q_0^*)^{-1}Q_l^*Q_l\| \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \left\{ \frac{e^{-(b_l-\omega)t}}{M} + b_l \int\limits_0^t e^{-(b_l-\omega)s}\,ds \right\} +$$

$$+ M \int\limits_0^t e^{-\omega(t-s)} \Big(\|\mathbf{g}(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)} + \sup_{\lambda\in i\mathbb{R}} \|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sum_{k=0}^{n} \|\mathbf{f}_k'(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)} \Big)\,ds \Bigg]^2 \leqslant$$

$$\leqslant Ne^{-2\omega t} \Big[\|P_G\mathbf{u}^0\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)} + \|\rho^0\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)} + \sum_{k=0}^{n} \|\mathbf{f}_k(0)\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)} \Big] +$$

$$+ (n+4)M^2 \Bigg[\int\limits_0^t e^{-\omega(t-s)} \Big(\|\mathbf{g}(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)} + \sup_{\lambda\in i\mathbb{R}} \|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sum_{k=0}^{n} \|\mathbf{f}_k'(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)} \Big)\,ds \Bigg]^2, \quad (3.43)$$

$$N := (n+4)M^2 \max\Bigg\{ 1, \sup_{\lambda\in i\mathbb{R}} \|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|^2_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}, \|(Q_0^*)^{-1}U^*\|^2 +$$

$$+ \Bigg[\sum_{l=1}^{m} \|(Q_0^*)^{-1}Q_l^*Q_l\| \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \left\{ \frac{e^{-(b_l-\omega)t}}{M} + b_l \int\limits_0^t e^{-(b_l-\omega)s}\,ds \right\} \Bigg]^2 \Bigg\}. \quad (3.44)$$

Из (3.39), (3.43), (3.44) следует (3.33) с константами

$$M_1 = N \max\big\{1, \|UQ_0^{-1}\|^2\big\},$$
$$M_2 = (n+4)M^2 \max\Big\{1, \sup_{\lambda\in i\mathbb{R}} \|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|^2_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\Big\} \cdot \max\big\{1, \|UQ_0^{-1}\|^2\big\}.$$

2. Докажем формулу (3.35). Пусть $\|\mathbf{g}(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)} \to 0$, $\|\mathbf{f}_k'(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)} \to 0$ $(k=\overline{0,n})$ при $t\to+\infty$. Очевидно, достаточно доказать, что интегральное слагаемое в (3.33) стремится к нулю при $t\to+\infty$. Обозначим $h(t) := \|\mathbf{g}(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)} + \sum\limits_{k=0}^{n} \|\mathbf{f}_k'(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}$. Фиксируем $\varepsilon>0$ и выберем последовательно числа $t_{\varepsilon,1}$ и $t_{\varepsilon,2}$ следующим образом:

$$t_{\varepsilon,1} > 0: \ \sup_{t\geqslant t_{\varepsilon,1}} h(t) < \frac{\varepsilon\omega}{2}, \qquad t_{\varepsilon,2} := \frac{1}{\omega} \ln\Big[\frac{2}{\varepsilon\omega} \big(e^{\omega t_{\varepsilon,1}} - 1\big) \sup_{t\geqslant 0} h(t) \Big].$$

Теперь для любого $t \geqslant t(\varepsilon) := \max\{t_{\varepsilon,1}, t_{\varepsilon,2}\}$ найдем, что

$$\int\limits_0^t e^{-\omega(t-s)} h(s)\,ds = \int\limits_0^{t_{\varepsilon,1}} e^{-\omega(t-s)} h(s)\,ds + \int\limits_{t_{\varepsilon,1}}^t e^{-\omega(t-s)} h(s)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^{-\omega t}}{\omega} \big(e^{\omega t_{\varepsilon,1}} - 1\big) \sup_{t\geqslant 0} h(t) + \frac{1}{\omega} \sup_{t\geqslant t_{\varepsilon,1}} h(t) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

3. Пусть $\mathbf{f}_k(t) = \mathbf{0}$ $(k=\overline{1,n})$, $\mathbf{f}_0(t) = \nabla p(t)$, $p(t)\in\mathcal{D}(B^*)$, $\|\nabla p'(t)\|_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)} \to 0$ при $t\to+\infty$. Тогда $P_G\mathbf{f}_0(t) = \nabla p(t) = -B^*\big(a_\infty^{-1}\rho_0^{1/2}(z)p(t)\big)$ и из (3.13)-(3.14), (3.34) найдем, что

$$B\mathbf{M}(0)P_G\mathbf{f}_0(t) = -(UA^{1/2})A^{-1/2} \Big[I - \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{b_l} U^*M_lU \Big]^{-1} A^{-1/2}B^*\big(a_\infty^{-1}\rho_0^{1/2}(z)p(t)\big) =$$

$$= -\Big[I - \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{b_l} M_l \Big]^{-1} UA^{-1/2}B^*\big(a_\infty^{-1}\rho_0^{1/2}(z)p(t)\big) = -\Big[I - \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{b_l} M_l \Big]^{-1} BA^{-1}B^*\big(a_\infty^{-1}\rho_0^{1/2}(z)p(t)\big) =$$

$$= -\Big[I - \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{b_l} M_l \Big]^{-1} (BA^{-1/2})(BA^{-1/2})^*\Big|_{\mathcal{D}(B^*)} \big(a_\infty^{-1}\rho_0^{1/2}(z)p(t)\big) =$$

$$= -\Big[I - \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{b_l} M_l\Big]^{-1} (UU^*)\Big|_{\mathcal{D}(B^*)} \big(a_\infty^{-1} \rho_0^{1/2}(z) p(t)\big) = -\Big[I - \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{b_l} M_l\Big]^{-1} \big(a_\infty^{-1} \rho_0^{1/2}(z) p(t)\big).$$

Отсюда и из (3.35) следует (3.36). □

4. Задача о спектре идеальной релаксирующей жидкости

В этом разделе исследуются спектры операторов $\mathcal{A}_{\omega_0}$ (см. (3.23)) и $\mathcal{A}$ (см. (3.30)), связанных с задачей о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости, заполняющей вращающийся и, соответственно, неподвижный контейнер. Основным утверждением здесь является следующая теорема, доказываемая в леммах 4.1–4.6.

Теорема 4.1. *Имеют место следующие утверждения.*

1. $\{b_1, \dots, b_m\} \notin \sigma_p(\mathcal{A}_{\omega_0})$, $\{0, b_1, \dots, b_m\} \notin \sigma_p(\mathcal{A})$, *где* $\sigma_p(\mathcal{A}_{\omega_0})$, $\sigma_p(\mathcal{A})$ — *точечные спектры операторов* $\mathcal{A}_{\omega_0}$ *и* $\mathcal{A}$ (*лемма* 4.1). *Спектр оператора* $\mathcal{A}$ *расположен симметрично относительно действительной оси* (*лемма* 4.2).
2. *Для существенных спектров* $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_{\omega_0})$, $\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ *операторов* $\mathcal{A}_{\omega_0}$ *и* $\mathcal{A}$ *справедливы формулы*
$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}_{\omega_0}) = \big[-2\omega_0 i, 2\omega_0 i\big] \cup \sigma_{ess}(\mathcal{A}), \quad \sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \big|\ 1 - \sum_{l=1}^{m} \frac{\rho_0(z) k_l(x)}{b_l - \lambda} = 0, \ \ x \in \overline{\Omega}\Big\}.$$
Множество $\mathbb{C} \backslash \sigma_{ess}(\mathcal{A}_{\omega_0})$ ($\mathbb{C} \backslash \sigma_{ess}(\mathcal{A})$) *состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора* $\mathcal{A}_{\omega_0}$ (*оператора* $\mathcal{A}$) (*лемма* 4.3).
3. *Имеет место включение* $\sigma(\mathcal{A}_{\omega_0}) \subset \Lambda := \{\lambda \in \mathbb{C} |\ 0 \leqslant \mathrm{Re}\lambda \leqslant b_m\}$. *Оператор* $\mathcal{A}_{\omega_0}$ *имеет две ветви собственных значений* $\{\lambda_k^{(\pm i\infty)}(\mathcal{A}_{\omega_0})\}_{k=1}^{\infty}$, *расположенных в области* Λ *со следующей асимптотикой* (*лемма* 4.4):
$$\lambda_k^{(\pm i\infty)}(\mathcal{A}_{\omega_0}) = \pm i \lambda_k^{1/2}(A)(1 + o(1)) \quad (k \to +\infty).$$
4. *Существует* $\beta > 0$ *такое, что* (*лемма* 4.5)
$$\sigma(\mathcal{A}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Im}\lambda \neq 0\} \subset \Big\{\lambda \in \mathbb{C} |\ \beta \leqslant \mathrm{Re}\lambda < \frac{b_m}{2}\Big\}.$$
5. *Если* $\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega, \rho_0))}$ *достаточно мала, то точки из множества* $\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ *не могут быть предельными для* (*комплексно сопряженных*) *ветвей собственных значений из* $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ (*лемма* 4.6).

4.1. Основные спектральные задачи и операторные пучки. Будем разыскивать решения уравнения (3.21) при $\mathcal{F}(t) \equiv 0$ и $\xi_{\rho_0}(t) \equiv 0$ в виде $\xi(t) = \exp(-\lambda t)\xi$, где λ — спектральный параметр, а ξ — амплитудный элемент. В результате придем к следующей основной спектральной задаче:
$$\mathcal{A}_{\omega_0} \xi = \lambda \xi, \quad \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\omega_0}) \subset \mathcal{H}_{\omega_0}, \tag{4.1}$$
которую будем ассоциировать с задачей о спектре идеальной релаксирующей жидкости, заполняющей равномерно вращающийся контейнер (оператор $\mathcal{A}_{\omega_0}$ определен в (3.23)).

При $\lambda \notin \{0, b_1, \dots, b_m\} = \sigma(\mathcal{G})$ с задачей (4.1) свяжем также следующую спектральную задачу:
$$\mathcal{L}(\lambda) \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \nabla\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda A^{-1} + \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \mathcal{Q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \nabla\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \big(\mathbf{v}; \nabla\varphi\big)^\tau \in \mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \mathbf{G}(\Omega, \rho_0). \tag{4.2}$$

В случае, когда система не вращается, т. е. $\omega_0 = 0$, будем разыскивать решения уравнения (3.28) при $\mathcal{F}(t) \equiv 0$ и $\xi_{\rho_0}(t) \equiv 0$ в виде $\xi(t) = \exp(-\lambda t)\xi$, где λ — спектральный параметр, а ξ — амплитудный элемент. В результате придем к следующей основной спектральной задаче:
$$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi, \quad \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}, \tag{4.3}$$
которую будем ассоциировать с задачей о спектре идеальной релаксирующей жидкости, заполняющей неподвижный контейнер (оператор $\mathcal{A}$ определен в (3.30)).

При $\lambda \notin \{0, b_1, \dots, b_m\} = \sigma(\mathcal{G})$ с задачей (4.3) свяжем следующую спектральную задачу:
$$L(\lambda)\nabla\varphi = \big[-\lambda A^{-1} + \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \mathcal{Q}\big]\nabla\varphi =$$

$$= \Big[-\lambda A^{-1} - \frac{1}{\lambda} Q_0^* Q_0 + \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{b_l - \lambda}\, Q_l^* Q_l \Big] \nabla\varphi = 0, \quad \nabla\varphi \in \mathbf{G}(\Omega, \rho_0). \tag{4.4}$$

Операторы T_{jk}, Q_l определены в (3.19).

4.2. О существенном и дискретном спектре задачи.

Лемма 4.1. $\{b_1, \ldots, b_m\} \notin \sigma_p(\mathcal{A}_{\omega_0})$, $\{0, b_1, \ldots, b_m\} \notin \sigma_p(\mathcal{A})$, *где* $\sigma_p(\mathcal{A}_{\omega_0})$, $\sigma_p(\mathcal{A})$ — *точечные спектры операторов* $\mathcal{A}_{\omega_0}$ *и* $\mathcal{A}$.

Доказательство. Запишем уравнение $(\mathcal{A}_{\omega_0} - \lambda)\xi = \xi_0$ в виде системы (см. (3.20), (3.23), (3.19)):

$$\begin{cases} 2\omega_0 i S_{11}\mathbf{v} + 2\omega_0 i S_{12}\nabla\varphi - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{v}_0, \\ 2\omega_0 i S_{21}\mathbf{v} + 2\omega_0 i S_{22}\nabla\varphi + A^{1/2}\Big[Q_0^* u_0(t) + \sum_{l=1}^{m} Q_l^* u_l(t)\Big] - \lambda\nabla\varphi = \nabla\varphi_0, \\ -Q_0 A^{1/2}\nabla\varphi(t) - \lambda u_0 = u_{00}, \\ -Q_l A^{1/2}\nabla\varphi(t) + b_l u_l(t) - \lambda u_l = u_{l0} \quad (l = \overline{1,m}). \end{cases} \tag{4.5}$$

Положим в (4.5) $\lambda = b_q$, $\xi_0 = (\mathbf{v}_0; \nabla\varphi_0; u_{00}; u_{10}; \ldots; u_{m0})^\tau = 0$. Из четвертого уравнения при $l = q$ найдем, что $\nabla\varphi = 0$. Теперь из третьего уравнения и четвертого уравнения при $l \neq q$ получим, что $u_l = 0$, а из первого уравнения, (3.6) и леммы 3.1, что $\mathbf{v} = 0$. Теперь из второго уравнения системы (4.5) следует, что $u_q = 0$. Таким образом, $\xi = 0$ и $b_q \notin \sigma_p(\mathcal{A}_{\omega_0})$. Аналогичным образом доказывается утверждение для оператора $\mathcal{A}$. □

Лемма 4.2. *Спектр оператора* $\mathcal{A}$, *за исключением точек* $\{0, b_1, \ldots, b_m\} = \sigma(\mathcal{G})$, *совпадает со спектром пучка* $L(\lambda)$ *и расположен симметрично относительно действительной оси.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \rho(L(\lambda))$, тогда из (3.31) следует, что $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$. Пусть теперь $\lambda \in \rho(\mathcal{A})\backslash\sigma(\mathcal{G})$. Предположим, что $\lambda \notin \rho(L(\lambda))$. Тогда $L^{-1}(\lambda)$ существует, однако неограничен.

По теореме [15, гл. 8, § 1, теоремы 2 и 3] о полярном разложении плотно определенного замкнутого оператора существует единственный частично изометричный оператор $\mathcal{U}$, действующий из $\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$ в $\bigoplus_{l=0}^{m} L_{2,\rho_0}(\Omega)$, такой, что

$$\mathcal{Q} = \mathcal{U}(\mathcal{Q}^*\mathcal{Q})^{1/2}, \quad \mathcal{Q}^* = (\mathcal{Q}^*\mathcal{Q})^{1/2}\mathcal{U}^*, \quad \mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathcal{I}, \quad \mathcal{R}(\mathcal{Q}^*) = \mathcal{R}((\mathcal{Q}^*\mathcal{Q})^{1/2}) = \mathbf{G}(\Omega, \rho_0).$$

Отсюда следует, что существует последовательность $\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \oplus_{l=0}^{m} L_{2,\rho_0}(\Omega)$ такая, что $\|w_k\| = 1$, $\|L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})w_k\|_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)} \to +\infty$ $(k \to +\infty)$. Тогда

$$\|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})w_k\|^2 \geqslant \|\mathcal{G} - \lambda\|^{-2}_{\mathcal{L}(\oplus_{l=0}^{m} L_{2,\rho_0}(\Omega))} \|\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})w_k\|^2 \geqslant$$
$$\geqslant \|\mathcal{G} - \lambda\|^{-2}_{\mathcal{L}(\oplus_{l=0}^{m} L_{2,\rho_0}(\Omega))} \gamma(\mathcal{Q}^*\mathcal{Q})\, \|L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})w_k\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)} \to +\infty \quad (k \to +\infty),$$

где $\gamma(\mathcal{Q}^*\mathcal{Q}) > 0$ — нижняя грань оператора $\mathcal{Q}^*\mathcal{Q}$. Отсюда и из (3.31) получим противоречие с предположением $\lambda \in \rho(\mathcal{A})\backslash\sigma(\mathcal{G})$. Таким образом, $\lambda \in \rho(L(\lambda))$. Из проведенных рассуждений следует, что $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(L(\lambda))$.

Симметричность расположения спектра оператора $\mathcal{A}$ относительно действительной оси следует из самосопряженности пучка $L(\lambda)$: $L^*(\lambda) = L(\overline{\lambda})$ (см. [11, гл. 4, § 30, п. 1]). □

Определение 4.1. *Существенным спектром* оператора $\mathcal{A}_{\omega_0}$ (спектральной задачи (4.1)) назовем множество $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_{\omega_0}) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\mathcal{A}_{\omega_0} - \lambda)$ – не фредгольмов$\}$.

Лемма 4.3. *Имеют место следующие формулы*:

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}_{\omega_0}) = \big[-2\omega_0 i, 2\omega_0 i\big] \cup \sigma_{ess}(\mathcal{A}), \quad \sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \Big| \ 1 - \sum_{l=1}^{m} \frac{\rho_0(z)k_l(x)}{b_l - \lambda} = 0, \ x \in \overline{\Omega}\Big\}. \tag{4.6}$$

Множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A}_{\omega_0})$ $(\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A}))$ *состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора* $\mathcal{A}_{\omega_0}$ (*оператора* $\mathcal{A}$).

Доказательство. **1.** Запишем оператор $\mathcal{A}_{\omega_0}$ (см. (3.23)) следующим образом относительно разложения $\mathcal{H}_{\omega_0} := \mathbf{J}_0(\Omega,\rho_0) \oplus \big[\mathbf{G}(\Omega,\rho_0) \oplus \big(\oplus_{l=0}^m L_{2,\rho_0}(\Omega)\big)\big] = \mathbf{J}_0(\Omega,\rho_0) \oplus \mathcal{H}$:

$$\mathcal{A}_{\omega_0} = \begin{pmatrix} 2\omega_0 i S_{11} & \mathcal{S}_{12} \\ \mathcal{S}_{21} & \mathcal{A}+\mathcal{S}_{22} \end{pmatrix}, \ \ \mathcal{S}_{12} := \begin{pmatrix} 2\omega_0 i S_{12}, 0 \end{pmatrix}, \ \ \mathcal{S}_{21} = \begin{pmatrix} 2\omega_0 i S_{21} \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ \mathcal{S}_{22} = \begin{pmatrix} 2\omega_0 i S_{22} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

где операторы S_{jk} определены в (3.6) (см. лемму 3.1), а оператор $\mathcal{A}$ определен в (3.30).

Из теоремы [8, гл. 4, § 5, п. 6, теорема 5.35] об устойчивости существенного спектра при относительно компактных возмущениях, равенств (4.7), формулы для $\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})$ (см. (3.31)), включения $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathbf{G}(\Omega,\rho_0))$ (см. лемму 3.2) и соотношений

$$\begin{gathered} \mathcal{A}_{\omega_0} = \begin{pmatrix} 2\omega_0 i S_{11} & 0 \\ \mathcal{S}_{21} & \mathcal{A} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{S}_{12} \\ 0 & \mathcal{S}_{22} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{S}_{12} \\ 0 & \mathcal{S}_{22} \end{pmatrix} \mathcal{R}_\lambda\left(\begin{pmatrix} 2\omega_0 i S_{11} & 0 \\ \mathcal{S}_{21} & \mathcal{A} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{S}_{12} \\ 0 & \mathcal{S}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{R}_\lambda(2\omega_0 i S_{11}) & 0 \\ -\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\mathcal{S}_{21}\mathcal{R}_\lambda(2\omega_0 i S_{11}) & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} -\mathcal{S}_{12}\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\mathcal{S}_{21}\mathcal{R}_\lambda(2\omega_0 i S_{11}) & \mathcal{S}_{12}\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) \\ -\mathcal{S}_{22}\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\mathcal{S}_{21}\mathcal{R}_\lambda(2\omega_0 i S_{11}) & \mathcal{S}_{22}\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_{\omega_0}) \end{gathered}$$

получим, что

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}_{\omega_0}) = \sigma_{ess}\left(\begin{pmatrix} 2\omega_0 i S_{11} & 0 \\ \mathcal{S}_{21} & \mathcal{A} \end{pmatrix}\right). \quad (4.8)$$

Из [8, гл. 4, § 5, п. 6, задача 5.38], соотношения

$$\mathcal{R}_\lambda\left(\begin{pmatrix} 2\omega_0 i S_{11} & 0 \\ \mathcal{S}_{21} & \mathcal{A} \end{pmatrix}\right) - \mathcal{R}_\lambda\left(\begin{pmatrix} 2\omega_0 i S_{11} & 0 \\ 0 & \mathcal{A} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\mathcal{S}_{21}\mathcal{R}_\lambda(2\omega_0 i S_{11}) & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_{\omega_0}),$$

формулы (4.8) и леммы 3.1 теперь найдем, что

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}_{\omega_0}) = \sigma_{ess}\left(\begin{pmatrix} 2\omega_0 i S_{11} & 0 \\ 0 & \mathcal{A} \end{pmatrix}\right) = \sigma_{ess}(2\omega_0 i S_{11}) \cup \sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \big[-2\omega_0 i, 2\omega_0 i\big] \cup \sigma_{ess}(\mathcal{A}). \quad (4.9)$$

2. Докажем формулу для существенного спектра операторного пучка $L(\lambda)$ (см. (3.31)):

$$\sigma_{ess}(L(\lambda)) = \Big\{\lambda \in \mathbb{C}\big|\ 1 - \sum_{l=1}^m \frac{\rho_0(z)k_l(x)}{b_l-\lambda} = 0, \ \ x \in \overline{\Omega}\Big\}. \quad (4.10)$$

Пусть $\lambda \notin \sigma(\mathcal{G})$. Из леммы 3.2, теоремы [16, гл. 17, § 4, теорема 4.3] об относительно компактных возмущениях, формулы (3.19) и преобразований

$$\begin{aligned} -\lambda L(\lambda) &= \lambda^2 A^{-1} - \lambda \mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q} = \lambda^2 A^{-1} + Q_0^*Q_0 + \sum_{l=1}^m \frac{-\lambda}{b_l-\lambda}\,Q_l^*Q_l = \\ &= \lambda^2 A^{-1} + U^*\Big[I - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l}M_l\Big]U + \sum_{l=1}^m \frac{-\lambda}{b_l(b_l-\lambda)}\,U^*M_lU = \\ &= \lambda^2 A^{-1} + I - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l-\lambda}\,U^*M_lU = \lambda^2 A^{-1} + U^*\Pi\Big[1 - \sum_{l=1}^m \frac{\rho_0 k_l}{b_l-\lambda}\Big]\Pi U \end{aligned}$$

получим, что

$$\sigma_{ess}(L(\lambda)) = \sigma_{ess}\Big(U^*\Pi\Big[1 - \sum_{l=1}^m \frac{\rho_0 k_l}{b_l-\lambda}\Big]\Pi U\Big) = \sigma_{ess}\Big(\Pi\Big[1 - \sum_{l=1}^m \frac{\rho_0 k_l}{b_l-\lambda}\Big]\Pi\Big).$$

Отсюда, из одномерности (а значит, и компактности) ортогонального проектора $I - \Pi$ и теоремы [16, гл. 17, § 4, теорема 4.3] следует (4.10).

3. Докажем вторую формулу в (4.6). Пусть $\lambda \notin \sigma(\mathcal{G})$ и оператор $L(\lambda)$ (см. (3.31)) фредгольмов. Из теоремы [16, гл. 17, § 3, теорема 3.1] о произведении фредгольмовых операторов и (3.30) найдем, что оператор

$$\mathcal{A}-\lambda=\begin{pmatrix}A^{1/2}&0\\0&\mathcal{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\lambda A^{-1}&\mathcal{Q}^*\\-\mathcal{Q}&\mathcal{G}-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{1/2}&0\\0&\mathcal{I}\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}A^{1/2}&0\\0&\mathcal{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\\0&\mathcal{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L(\lambda)&0\\0&\mathcal{G}-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&0\\-\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}&\mathcal{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{1/2}&0\\0&\mathcal{I}\end{pmatrix},$$

фредгольмов. Следовательно, для существенного спектра оператора $\mathcal{A}$ получаем включение $\sigma_{ess}(\mathcal{A})\subset\sigma_{ess}(L(\lambda))$. Из леммы 4.2 следует, что $\sigma_{ess}(\mathcal{A})=\sigma_{ess}(L(\lambda))$. Отсюда и (4.10) следует вторая формула в (4.6).

4. Множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A}_{\omega_0})$ ($\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$) является связным, а оператор $\mathcal{A}_{\omega_0}$ ($\mathcal{A}$) имеет регулярные точки. Отсюда и из [16, гл. 17, § 2, теорема 2.1] (или [8, гл. 4, § 5, п. 2, теорема 5.17] — теорема об устойчивости индекса и дефекта замкнутого оператора) следует, что множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A}_{\omega_0})$ ($\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$) состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора $\mathcal{A}_{\omega_0}$ ($\mathcal{A}$). □

Замечание 4.1. Существенный спектр $\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ представляет из себя объединение m отрезков, расположенных на интервалах (b_{l-1},b_l) ($l=\overline{1,m}$, $b_0:=0$). В случае $\omega_0=0$ и $g=0$ отрезки, составляющие множество $\sigma_{ess}(\mathcal{A})$, схлопываются и превращается в набор m точек, расположенных на тех же интервалах.

4.3. О локализации и асимптотике дискретного спектра.

Лемма 4.4. *Имеет место включение $\sigma(\mathcal{A}_{\omega_0})\subset\Lambda:=\{\lambda\in\mathbb{C}|\ 0\leqslant\mathrm{Re}\lambda\leqslant b_m\}$. Оператор $\mathcal{A}_{\omega_0}$ имеет две ветви собственных значений $\{\lambda_k^{(\pm i\infty)}(\mathcal{A}_{\omega_0})\}_{k=1}^\infty$, расположенных в области Λ со следующей асимптотикой (см. лемму 3.2):*

$$\lambda_k^{(\pm i\infty)}(\mathcal{A}_{\omega_0})=\pm i\lambda_k^{1/2}(A)(1+o(1))\quad(k\to+\infty).\tag{4.11}$$

Доказательство. Включение $\sigma(\mathcal{A}_{\omega_0})\subset\Lambda$ следует из [8, гл. 5, § 3, п. 1, теорема 3.2] и того простого факта, что числовая область значений оператора $\mathcal{A}_{\omega_0}$ содержится в Λ.

Из (3.25) следует, что собственные значения оператора $\mathcal{A}_{\omega_0}$ являются также собственными значениями операторного пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ (см. (4.2)). Верно и обратное. Таким образом, в области $\mathbb{C}\backslash[\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\omega)\cup\sigma(\mathcal{G})]$ спектральная задача (4.1) эквивалентна задаче (4.2):

$$\begin{cases}\big(T_{11}-\lambda\big)\mathbf{v}+T_{12}\nabla\varphi=0,\\ T_{21}\mathbf{v}+\big(T_{22}-\lambda A^{-1}+\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}\big)\nabla\varphi=0,\quad\mathbf{v}\in\mathbf{J}_0(\Omega,\rho_0),\ \ \nabla\varphi\in\mathbf{G}(\Omega,\rho_0),\end{cases}$$

или, с учетом (3.19),

$$\big[\lambda^2A^{-1}-\lambda T_{22}+\lambda T_{21}\mathcal{R}_\lambda(T_{11})T_{12}-\lambda\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}\big]\nabla\varphi=$$
$$=\Big[\lambda^2A^{-1}-\lambda T_{22}+\lambda T_{21}\mathcal{R}_\lambda(T_{11})T_{12}+Q_0^*Q_0+\sum_{l=1}^m\frac{-\lambda}{b_l-\lambda}\,Q_l^*Q_l\Big]\nabla\varphi=$$
$$=\Big[I+\lambda^2A^{-1}-2\omega_0i\lambda A^{-1/2}S_{22}A^{-1/2}+\lambda T_{21}\mathcal{R}_\lambda(T_{11})T_{12}-\sum_{l=1}^m\frac{1}{b_l-\lambda}\,U^*M_lU\Big]\nabla\varphi=$$
$$=:\big[I+\lambda^2A^{-1}+G(\lambda)\big]\nabla\varphi=0.\tag{4.12}$$

С использованием оценок из [14] найдем, что при $\lambda\to\infty$ ($\lambda\in\Lambda\backslash[\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\omega)\cup\sigma(\mathcal{G})]$)

$$\|(I-\lambda A^{-1/2})^{-1}G(\lambda)(I+\lambda A^{-1/2})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega,\rho_0))}\leqslant$$
$$\leqslant2\omega_0|\lambda|\cdot\|(I-\lambda A^{-1/2})^{-1}A^{-1/4}(A^{-1/4}S_{22}A^{-1/4})\|_{\mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega,\rho_0))}\cdot\|(I+\lambda A^{-1/2})^{-1}A^{-1/4}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega,\rho_0))}+$$
$$+\|(I-\lambda A^{-1/2})^{-1}T_{21}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega,\rho_0))}\cdot\|\lambda\mathcal{R}_\lambda(T_{11})T_{12}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega,\rho_0))}\cdot\|(I+\lambda A^{-1/2})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega,\rho_0))}+$$
$$+\sum_{l=1}^m\frac{1}{|b_l-\lambda|}\,\|(I-\lambda A^{-1/2})^{-1}U^*M_lU(I+\lambda A^{-1/2})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega,\rho_0))}=o(1).$$

Отсюда и из [13] (см. также [1]) следует, что спектральная задача (4.12), а значит и оператор $\mathcal{A}_{\omega_0}$, имеет в области Λ две ветви собственных значений, удовлетворяющих асимптотической формуле (4.11). □

Лемма 4.5. *Существует $\beta > 0$ такое, что*

$$\sigma(\mathcal{A}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Im}\lambda \neq 0\} \subset \big\{\lambda \in \mathbb{C} |\ \beta \leqslant \mathrm{Re}\lambda < \frac{b_m}{2}\big\}.$$

Доказательство. Множество $\sigma(\mathcal{A}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Im}\lambda \neq 0\}$ в силу леммы 4.3 состоит из изолированных собственных значений конечной кратности. Пусть $\lambda^{(+i)}$ — собственное значение оператора $\mathcal{A}$ из $\{\lambda \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Im}\lambda \neq 0\}$. Тогда $\lambda^{(+i)}$ является также собственным значением пучка $L(\lambda)$ (см. (4.4) и лемму 4.2), т. е. существует $0 \neq \nabla\varphi^{(+i)} \in \mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$ такой, что $L(\lambda^{(+i)})\nabla\varphi^{(+i)} = 0$. Умножая последнее равенство скалярно на $\nabla\varphi^{(+i)}$, получим уравнение, которому удовлетворяет $\lambda^{(+i)}$:

$$-\lambda p - \frac{1}{\lambda} q_0 + \sum_{l=1}^{m} \frac{q_l}{b_l - \lambda} = 0, \tag{4.13}$$

$$p := \frac{\|A^{-1/2}\nabla\varphi^{(+i)}\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}}{\|\nabla\varphi^{(+i)}\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}}, \quad q_l := \frac{\|Q_l\nabla\varphi^{(+i)}\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}}{\|\nabla\varphi^{(+i)}\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}} \quad (l = \overline{0,m}).$$

Уравнение (4.13) имеет m действительных положительных корней и еще два корня — пару комплексно сопряженных чисел, либо пару действительных положительных чисел. Рассмотрим ситуацию, когда имеется пара комплексно сопряженных корней $\lambda^{(+i)}$ и $\lambda^{(-i)} := \overline{\lambda^{(+i)}}$. В этом случае обозначим действительные корни уравнения (4.13) через $\lambda^{(l)}$ и запишем (4.13) в виде

$$(-1)^m p\,(\lambda - \lambda^{(+i)})(\lambda - \lambda^{(-i)}) \prod_{l=1}^{m}(\lambda - \lambda^{(l)}) =$$
$$= \lambda^{m+2}(-1)^m p + \lambda^{m+1}(-1)^{m+1} p\Big[2\mathrm{Re}\lambda^{(\pm i)} + \sum_{l=1}^{m}\lambda^{(l)}\Big] + \dots = 0. \tag{4.14}$$

С другой стороны, уравнение (4.13) можно переписать в следующем виде:

$$\lambda^2 p \prod_{l=1}^{m}(b_l - \lambda) + q_0 \prod_{l=1}^{m}(b_l - \lambda) - \lambda \sum_{l=1}^{m} q_l \prod_{k=1,\, k\neq l}^{m}(b_k - \lambda) =$$
$$= \lambda^{m+2}(-1)^m p + \lambda^{m+1}(-1)^{m+1} p \sum_{l=1}^{m} b_l + \dots = 0. \tag{4.15}$$

Приравнивая коэффициенты при λ^{m+1} в уравнениях (4.14) и (4.15), найдем, что

$$0 < \mathrm{Re}\lambda^{(\pm i)} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m}(b_l - \lambda^{(l)}) < \frac{b_m}{2}. \tag{4.16}$$

Далее, выделим из (4.13) действительную и мнимую части, получим

$$\mathrm{Re}\lambda\Big[p + \frac{q_0}{|\lambda|^2} + \sum_{l=1}^{m}\frac{q_l}{|b_l - \lambda|^2}\Big] = \sum_{l=1}^{m}\frac{q_l b_l}{|b_l - \lambda|^2}, \quad \mathrm{Im}\lambda\Big[\frac{q_0}{|\lambda|^2} + \sum_{l=1}^{m}\frac{q_l}{|b_l - \lambda|^2} - p\Big] = 0. \tag{4.17}$$

Допустим, что оператор $\mathcal{A}$ имеет в $\{\lambda \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Im}\lambda > 0\}$ последовательность собственных значений $\{\lambda_k^{(+i)}\}_{k=1}^{+\infty}$ такую, что $\mathrm{Re}\lambda_k^{(+i)} \to 0$ при $k \to +\infty$. При этом $|\lambda_k^{(+i)}| \to +\infty$ при $k \to +\infty$, так как дискретный спектр оператора $\mathcal{A}$ может сгущаться только к ∞ и к $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} |\ \lambda > 0\}$ (см. лемму 4.3). Таким образом, числа $\lambda_k^{(+i)}$ удовлетворяют уравнениям (4.13) при

$$p_k := \frac{\|A^{-1/2}\nabla\varphi_k^{(+i)}\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}}{\|\nabla\varphi_k^{(+i)}\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}}, \quad q_{lk} := \frac{\|Q_l\nabla\varphi_k^{(+i)}\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}}{\|\nabla\varphi_k^{(+i)}\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}} \quad (l = \overline{0,m}). \tag{4.18}$$

Можно считать (см. (3.19)), что существуют пределы последовательностей

$$\lim_{k\to+\infty} p_k = p_0 \geqslant 0, \quad \lim_{k\to+\infty} q_{lk} = q_{l0} > 0 \quad (l = \overline{0,m}), \tag{4.19}$$

иначе мы ограничимся соответствующими сходящимися подпоследовательностями.

Теперь из (4.19) и (4.17) найдем, что

$$\lim_{k\to+\infty} \mathrm{Re}\lambda_k^{(+i)} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{l=1}^{m} \frac{q_{lk} b_l |\lambda_k^{(+i)}|^2}{|b_l - \lambda_k^{(+i)}|^2}}{2\Big[q_{0k} + \displaystyle\sum_{l=1}^{m} \frac{q_{lk}|\lambda_k^{(+i)}|^2}{|b_l - \lambda_k^{(+i)}|^2}\Big]} = \frac{\displaystyle\sum_{l=1}^{m} q_{l0} b_l}{2\Big[q_{00} + \displaystyle\sum_{l=1}^{m} q_{l0}\Big]} > 0.$$

Полученное противоречие и (4.16) завершают доказательство. □

Лемма 4.6. *Если $\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega,\rho_0))}$ достаточно мала, то точки из множества $\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ не могут быть предельными для (комплексно сопряженных) ветвей собственных значений из $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.*

Доказательство. Предположим, что оператор $\mathcal{A}$ имеет ветвь собственных значений $\{\lambda_k^{(+i)}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Im}\lambda > 0\}$, стремящихся к числу $\gamma \in \sigma_{ess}(\mathcal{A})$. При этом $\gamma \notin \{0, b_1, \ldots, b_m\}$ в силу лемм 4.1, 4.3. Тогда числа $\lambda_k^{(+i)}$ суть корни уравнения (4.13) с коэффициентами, определяемыми по формулам (4.18). При этом числа $\lambda_k^{(-i)} := \overline{\lambda_k^{(+i)}}$ также будут собственными значениями оператора $\mathcal{A}$ (см. лемму 4.2) и будут корнями уравнения (4.13) при тех же коэффициентах (4.18). Таким образом, числа $\lambda_k^{(\pm i)}$ будут корнями следующих функций:

$$f_k(\lambda) := -\lambda p_k - \frac{1}{\lambda}\, q_{0k} + \sum_{l=1}^{m} \frac{q_{lk}}{b_l - \lambda}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Можно считать, не ограничивая общности, что для коэффициентов выполнены формулы (4.19). В противном случае мы ограничимся соответствующими подпоследовательностями. По предельным коэффициентам определим следующую функцию:

$$f(\lambda) := -\lambda p_0 - \frac{1}{\lambda}\, q_{00} + \sum_{l=1}^{m} \frac{q_{l0}}{b_l - \lambda}.$$

Таким образом, последовательность функций $\{f_k(\lambda)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится (равномерно) к функции $f(\lambda)$ в каждой замкнутой ограниченной области, не содержащей точек из $\sigma(\mathcal{G}) = \{0, b_1, \ldots, b_m\}$. По теореме Гурвица (см. [12, гл. 4, § 3, п. 3.6]) функция $f(\lambda)$ имеет в точке $\lambda = \gamma$ кратный нуль, т. е. $f'(\gamma) = 0$. Итак, имеем

$$\begin{aligned} 0 = f'(\gamma) = \lim_{k\to+\infty} f_k'(\gamma) = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\|\nabla\varphi_k^{(+i)}\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}} \Big[-\|A^{-1/2}\nabla\varphi_k^{(+i)}\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)} + \\ + \frac{\|Q_0\nabla\varphi_k^{(+i)}\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}}{\gamma^2} + \sum_{l=1}^{m} \frac{\|Q_l\nabla\varphi_k^{(+i)}\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}}{(b_l - \gamma)^2}\Big] \geqslant \\ \geqslant \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\|\nabla\varphi_k^{(+i)}\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}} \Big[-\|A^{-1/2}\|^2_{\mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega,\rho_0))} \cdot \|\nabla\varphi_k^{(+i)}\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)} + \end{aligned}$$

$$+\min\Big\{\frac{1}{\gamma^2},\frac{1}{(b_l-\gamma)^2}\ \ (l=\overline{1,m})\Big\}\big(\mathcal{Q}^*\mathcal{Q}\nabla\varphi_k^{(+i)},\nabla\varphi_k^{(+i)}\big)_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}\Big]\geqslant$$
$$\geqslant\min\Big\{\frac{1}{\gamma^2},\frac{1}{(b_l-\gamma)^2}\ \ (l=\overline{1,m})\Big\}\gamma(\mathcal{Q}^*\mathcal{Q})-\|A^{-1/2}\|^2_{\mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega,\rho_0))},$$

где $\gamma(\mathcal{Q}^*\mathcal{Q})>0$ — нижняя грань оператора $\mathcal{Q}^*\mathcal{Q}$ (см. (3.19), (3.30)). Таким образом, при достаточно малой $\|A^{-1}\|^2_{\mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega,\rho_0))}$ из последней оценки получим противоречие: $0=f'(\gamma)>0$. □

5. Случай отсутствия вращения и гравитационного поля ($\omega_0=0$, $g=0$)

5.1. Постановка задачи. Пусть $\omega_0=0$ и $g=0$, т. е. система не вращается и находится в невесомости. В этом случае считаем, что постоянны стационарная плотность $\rho_0=\mathrm{const}$ и структурные константы $k_l>0$ $(l=\overline{1,m})$. Все константы задачи связаны неравенством (2.7).

В рассматриваемом случае $L_{2,\rho_0}(\Omega)=L_{2,\Omega}:=\{f\in L_2(\Omega)\mid (f,1)_{L_2(\Omega)}=0\}$. Операторы M_l (см. (3.14)) станут операторами умножения элементов пространства $L_{2,\Omega}$ на константы ρ_0k_l.

Будем считать, в соответствии с теоремой 3.2 (или теоремой 3.1), что $\rho^0\in\mathcal{D}(B^*)$. Тогда в уравнении (3.28) $\xi_{\rho^0}(t)\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$ (см. (3.30)), и скобки в уравнении (3.28) можно раскрыть. Запишем уравнение из (3.28) в виде системы и применим к обеим частям второго и последующих уравнений оператор U^*. Полученную систему вместе с соответствующим начальным условием перепишем в виде задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}:=\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)\oplus\big(\oplus_{l=0}^m\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)\big)$:

$$\frac{d\zeta}{dt}=-\mathcal{A}\zeta+\zeta_{\rho^0}(t)+\mathcal{F}(t),\quad \zeta(0)=\zeta^0, \tag{5.1}$$
$$\zeta(t):=\big(\nabla\varphi(t);\mathbf{w}(t)\big)^\tau:=\big(\nabla\varphi(t);\mathbf{u}_0(t);\mathbf{u}_1(t);\ldots;\mathbf{u}_m(t)\big)^\tau,\quad \mathbf{u}_l(t):=U^*u_l(t)\quad (l=\overline{0,m}),$$
$$\zeta_{\rho^0}(t):=\Big(\sum_{l=1}^m e^{-b_lt}\frac{\rho_0k_l}{b_l}B^*\rho^0;0;0;\ldots;0\Big)^\tau,\quad \mathcal{F}(t):=\big(P_G\mathbf{f}(t);0;0;\ldots;0\big)^\tau,$$
$$\zeta^0:=\Big(P_G\mathbf{u}^0;-\Big[1-\sum_{l=1}^m\frac{\rho_0k_l}{b_l}\Big]^{1/2}U^*\rho^0;0;\ldots;0\Big)^\tau.$$

Оператор $\mathcal{A}$ в (5.1) определяется по следующим формулам:

$$\mathcal{A}=\mathrm{diag}(A^{1/2},\mathcal{I})\begin{pmatrix}0&\mathcal{Q}^*\\-\mathcal{Q}&\mathcal{G}\end{pmatrix}\mathrm{diag}(A^{1/2},\mathcal{I})=\begin{pmatrix}0&A^{1/2}\mathcal{Q}^*\\-\mathcal{Q}A^{1/2}&\mathcal{G}\end{pmatrix}, \tag{5.2}$$
$$\mathcal{Q}:=\big(\beta_0^{1/2}I,\beta_1^{1/2}I,\ldots,\beta_m^{1/2}I\big)^\tau,\quad \mathcal{G}:=\mathrm{diag}\big(0,b_1I,\ldots,b_mI\big),\quad \mathcal{I}:=\mathrm{diag}\big(I,I,\ldots,I\big),$$
$$\beta_0:=1-\sum_{l=1}^m\frac{\rho_0k_l}{b_l},\quad \beta_l:=\frac{\rho_0k_l}{b_l}\quad (l=\overline{1,m}),$$
$$\mathcal{D}(\mathcal{A})=\Big\{\xi=(\nabla\varphi;\mathbf{w})^\tau\in\mathcal{H}\Big|\ \nabla\varphi\in\mathcal{D}(A^{1/2}),\ \ \mathcal{Q}^*\mathbf{w}\in\mathcal{D}(A^{1/2})\Big\}.$$

Замечание 5.1. В рассматриваемом частном случае (в этом разделе) основное гильбертово пространство $\mathcal{H}$ и операторный блок $\mathcal{A}$ определяются несколько иначе, чем в (3.28)–(3.30). Здесь основная задача Коши (5.1) записана так, что в конструкции операторного блока $\mathcal{A}$, кроме оператора A (см. лемму 3.2), все входящие в него операторы пропорциональны единичным. Оператор (5.2) унитарно эквивалентен оператору (3.30).

5.2. Спектральная задача и лемма о пересчете корневых элементов. Рассмотрим задачу о спектре оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}\xi=\lambda\xi,\quad \xi\in\mathcal{D}(\mathcal{A})\subset\mathcal{H}. \tag{5.3}$$

При $\lambda\notin\{0,b_1,\ldots,b_m\}=\sigma(\mathcal{G})$, как и в (4.3)-(4.4), с задачей (5.3) свяжем спектральную задачу для операторного пучка $L(\lambda)$:

$$L(\lambda)\nabla\eta:=\big[-\lambda A^{-1}+\mathcal{Q}^*(\mathcal{G}-\lambda)^{-1}\mathcal{Q}\big]\nabla\eta=0,\quad \nabla\eta\in\mathbf{G}(\Omega,\rho_0). \tag{5.4}$$

Определение 5.1 (см. [11, гл. 2, § 11, с 61]). Пусть λ_0 — собственное значение (с.з.), а $\nabla\eta_0$ — отвечающий ему собственный элемент (с.э.) оператор-функции $L(\lambda)$, т. е. $L(\lambda_0)\nabla\eta_0 = 0$. Элементы $\nabla\eta_1, \nabla\eta_2, \ldots, \nabla\eta_{n-1}$ называют *присоединенными* к с.э. $\nabla\eta_0$, если $\sum\limits_{k=0}^{j}(k!)^{-1}L^{(k)}(\lambda_0)\nabla\eta_{j-k} = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$. Число n называют *длиной* цепочки $\{\nabla\eta_k\}_{k=0}^{n-1}$ из собственного и присоединенных элементов (с.п.э.).

Следующая лемма по аналогии с [11, гл. 2, § 12, следствие 12.4] установлена в [5].

Лемма 5.1. *Пусть набор элементов $\{\xi_k = (\nabla\varphi_k; \mathbf{w}_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$ является цепочкой из с.п.э. задачи* (5.3)*, отвечающей с.з. λ_0, тогда $\{\nabla\eta_k\}_{k=0}^{n-1} := \{A^{1/2}\nabla\varphi_k\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из с.п.э. задачи* (5.4)*, отвечающая собственному значению λ_0.*

Обратно, пусть набор элементов $\{\nabla\eta_k\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из с.п.э. спектральной задачи (5.4)*, отвечающая с.з. λ_0, тогда набор $\{\xi_k = (A^{-1/2}\nabla\eta_k; \mathbf{w}_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$, где $\mathbf{w}_k = \sum\limits_{l=0}^{k}(\mathcal{G}-\lambda_0)^{-(k-l+1)}\mathcal{Q}\nabla\eta_l$, является цепочкой из с.п.э. спектральной задачи* (5.3).

Пусть $\lambda_k = \lambda_k(A^{-1})$, $\nabla\eta_k = \nabla\eta_k(A^{-1})$ $(k \in \mathbb{N})$ — k-е собственное значение и соответствующий ему нормированный к единице собственный элемент оператора A^{-1}. Тогда $\nabla\eta_k$ — собственный элемент операторного пучка $L(\lambda)$, и спектр задачи (5.4), а значит, и задачи (5.3), может быть полностью найден из следующей последовательности характеристических уравнений:

$$\mathcal{Q}^*(\mathcal{G}-\lambda)^{-1}\mathcal{Q} \equiv -\frac{1}{\lambda}\beta_0 + \sum_{l=1}^{m}\frac{\beta_l}{b_l-\lambda} = \lambda\lambda_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{5.5}$$

Здесь и далее $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}^*$ и $\mathcal{G}$ мы будем понимать также как вектор-столбец, вектор-строку и матрицу соответственно, действующие в $\mathbb{C}^{m+1}$.

Определим характеристические функции

$$\begin{gathered} g_k(\lambda) := \mathcal{Q}^*(\mathcal{G}-\lambda)^{-1}\mathcal{Q} - \lambda\lambda_k \equiv -\frac{1}{\lambda}\beta_0 + \sum_{l=1}^{m}\frac{\beta_l}{b_l-\lambda} - \lambda\lambda_k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ g_\infty(\lambda) := \mathcal{Q}^*(\mathcal{G}-\lambda)^{-1}\mathcal{Q} \equiv -\frac{1}{\lambda}\beta_0 + \sum_{l=1}^{m}\frac{\beta_l}{b_l-\lambda} \equiv -\frac{1}{\lambda}\Big[\sum_{l=0}^{m}\beta_l - \sum_{l=1}^{m}\frac{\beta_l b_l}{b_l-\lambda}\Big]. \end{gathered} \tag{5.6}$$

Обозначим через γ_p $(p = \overline{1,m})$ корни уравнения $g_\infty(\lambda) = 0$. Простые геометрические рассуждения показывают, что $\gamma_p \in (b_{p-1}, b_p)$ $(p = \overline{1,m},\ b_0 := 0)$, $g'_\infty(\gamma_p) > 0$ $(p = \overline{1,m})$.

Обозначим через $\lambda_k^{(p)}$ $(p = \overline{1,m+2})$ корни уравнения $g_k(\lambda) = 0$ при каждом $k \in \mathbb{N}$. Можно проверить, что это уравнение всегда имеет m действительных корней $\lambda_k^{(p)} \in (\gamma_p, b_p)$ $(p = \overline{1,m})$ и еще два корня. Если $g'_k(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ $(p = \overline{1,m})$, то $g'_k(\lambda_k^{(p)}) > 0$. Оставшиеся два корня $\lambda_k^{(m+1)}$ и $\lambda_k^{(m+2)}$ являются комплексно сопряженными начиная с некоторого номера k_0. В силу конечной кратности собственных значений оператора A^{-1} легко видеть также, что может быть только конечное количество номеров $k \in \mathbb{N}$, при которых характеристическое уравнение $g_k(\lambda) = 0$ имеет кратные (действительные) корни.

Оператор (5.2) подчиняется теореме 4.1, при этом его более простая структура позволяет уточнить информацию о спектре. Применение асимптотических методов к уравнениям (5.6) приводит к следующей теореме.

Теорема 5.1. $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$. *Спектр оператора $\mathcal{A}$ (или пучка $L(\lambda)$) расположен в правой открытой полуплоскости и в $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ состоит из изолированных конечнократных собственных значений, которые расположены симметрично относительно действительной полуоси. Все собственные значения можно разбить на $(m+2)$-е серии $\{\lambda_k^{(p)}\}_{k=1}^{\infty}$ $(p = \overline{1,m})$, $\{\lambda_k^{(m+1)}\}_{k=1}^{\infty} := \{\lambda_k^{(+i\infty)}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\lambda_k^{(m+2)}\}_{k=1}^{\infty} := \{\lambda_k^{(-i\infty)}\}_{k=1}^{\infty}$ со следующим асимптотическим поведением*:

$$\lambda_k^{(p)} = \gamma_p + \frac{\gamma_p}{g'_\infty(\gamma_p)}\lambda_k(A^{-1}) + O(\lambda_k^2(A^{-1})) \quad (k \to +\infty), \quad p = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\lambda_k^{(\pm i\infty)} = \pm i\alpha^{1/2}\lambda_k^{-1/2}(A^{-1}) + \sum_{l=1}^{m}\frac{\beta_l b_l}{2\alpha} + O(\lambda_k^{1/2}(A^{-1})) \quad (k\to+\infty), \quad \alpha := \sum_{l=0}^{m}\beta_l = 1.$$

5.3. Некоторые леммы о системах векторов в $\mathbb{C}^{m+2}$. В соответствии с леммой 5.1 собственные элементы оператора $\mathcal{A}$, после группировки по сериям (см. теорему 5.1), могут быть записаны следующим образом:

$$\widetilde{\xi}_k^{(p)} = \big(A^{-1/2}\nabla\eta_k; (\mathcal{G}-\lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}\nabla\eta_k\big)^\tau = \big(\lambda_k^{1/2}; (\mathcal{G}-\lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}\big)^\tau\nabla\eta_k \equiv$$
$$\equiv \Big(\lambda_k^{1/2}; \frac{-\beta_0^{1/2}}{\lambda_k^{(p)}}; \frac{\beta_1^{1/2}}{b_1-\lambda_k^{(p)}}; \dots; \frac{\beta_m^{1/2}}{b_m-\lambda_k^{(p)}}\Big)^\tau\nabla\eta_k, \quad p=\overline{1,m+2}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

В связи с этой формулой докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 5.2. *Пусть* $J := \mathrm{diag}(1,-I)$ — *матрица в* $\mathbb{C}^{m+2} = \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}^{m+1}$,

$$\varphi_k^{(p)} := R_{k,p}\big(\lambda_k^{1/2}; (\mathcal{G}-\lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}\big)^\tau, \quad p=\overline{1,m+2}, \quad k\in\mathbb{N},$$
$$R_{k,p} := \begin{cases} \big[g'_\infty(\gamma_p)\big]^{-1/2}, & p=\overline{1,m}, \quad k\in\mathbb{N}, \\ \big[2\lambda_k\big]^{-1/2}, & p=m+1,m+2, \quad k\in\mathbb{N}. \end{cases} \tag{5.7}$$

При всех $p,q=\overline{1,m+2}$, $k\in\mathbb{N}$ *имеют место следующие формулы*:

$$\big(J\varphi_k^{(p)},\varphi_k^{(q)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = 0 \ \ (\lambda_k^{(p)}\neq\overline{\lambda_k^{(q)}}), \quad \big(J\varphi_k^{(p)},\overline{\varphi_k^{(p)}}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = -g'_k(\lambda_k^{(p)})R^2_{k,p}. \tag{5.8}$$

Доказательство. При $\lambda_k^{(p)}\neq\overline{\lambda_k^{(q)}}$ из (5.5), (5.6), $g_k(\lambda_k^{(p)})=0$ и тождества Гильберта найдем, что

$$\big(J\varphi_k^{(p)},\varphi_k^{(q)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = R_{k,p}R_{k,q}\Big[\lambda_k - \big((\mathcal{G}-\lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q},(\mathcal{G}-\lambda_k^{(q)})^{-1}\mathcal{Q}\big)_{\mathbb{C}^{m+1}}\Big] =$$
$$= R_{k,p}R_{k,q}\Big[\lambda_k - \mathcal{Q}^*(\mathcal{G}-\overline{\lambda_k^{(q)}})^{-1}(\mathcal{G}-\lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}\Big] =$$
$$= R_{k,p}R_{k,q}\Big[\lambda_k - \frac{1}{\overline{\lambda_k^{(q)}}-\lambda_k^{(p)}}\Big[\mathcal{Q}^*(\mathcal{G}-\overline{\lambda_k^{(q)}})^{-1}\mathcal{Q} - \mathcal{Q}^*(\mathcal{G}-\lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}\Big]\Big] =$$
$$= R_{k,p}R_{k,q}\Big[\lambda_k - \frac{1}{\overline{\lambda_k^{(q)}}-\lambda_k^{(p)}}\Big[\overline{\lambda_k^{(q)}}\lambda_k - \lambda_k^{(p)}\lambda_k\Big]\Big] = 0.$$

Далее, из (5.5) имеем

$$\big(J\varphi_k^{(p)},\overline{\varphi_k^{(p)}}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = R^2_{k,p}\Big[\lambda_k - \mathcal{Q}^*(\mathcal{G}-\lambda_k^{(p)})^{-2}\mathcal{Q}\Big] = -g'_k(\lambda_k^{(p)})R^2_{k,p}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 5.3. *Пусть* $M_k := M_k(\varphi_k^{(1)},\varphi_k^{(2)},\dots,\varphi_k^{(m+2)})$ $(k\in\mathbb{N})$ — *матрица, столбцами которой являются векторы* $\varphi_k^{(p)}$ $(p=\overline{1,m+2})$. *Имеют место следующие утверждения.*

1) *Существует* $C_1>0$ *такое, что* $\|M_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}\leqslant C_1$ *при всех* $k\in\mathbb{N}$.
2) *Если* $g'_k(\lambda_k^{(p)})\neq 0$ $(p=\overline{1,m+2},\ k\in\mathbb{N})$, *то* $\det M_k\neq 0$.
3) *В условиях пункта* 2) *существует* $C_2>0$ *такое, что* $\|M_k^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}\leqslant C_2$ *при всех* $k\in\mathbb{N}$.

Доказательство. Из теоремы 5.1 несложно вывести, что нормы $\|\varphi_k^{(p)}\|_{\mathbb{C}^{m+2}}$ равномерно ограничены при $p=\overline{1,m+2}$, $k\in\mathbb{N}$. Отсюда и из оценки

$$\|M_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}\leqslant\Big[\sum_{p=1}^{m+2}\|\varphi_k^{(p)}\|^2_{\mathbb{C}^{m+2}}\Big]^{1/2}$$

следует первое утверждение леммы.

Далее, с помощью формул (5.7), (5.8) из леммы 5.2 найдем, что

$$M_k^\tau J M_k = -\mathrm{diag}\big(g'_k(\lambda_k^{(1)})R^2_{k,1}, g'_k(\lambda_k^{(2)})R^2_{k,2},\dots,g'_k(\lambda_k^{(m+2)})R^2_{k,m+2}\big).$$

Отсюда следует, что

$$(-1)^{m+1}\bigl(\det M_k\bigr)^2=\det M_k^\tau JM_k=(-1)^{m+2}\prod_{p=1}^{m+2}g_k'(\lambda_k^{(p)})R_{k,p}^2,$$

а значит, учитывая (5.7) и $g_k'(\lambda_k^{(p)})\neq 0$ ($p=\overline{1,m+2},\ k\in\mathbb{N}$), получим, что

$$\bigl(\det M_k\bigr)^2=-1\cdot\frac{-g_k'(\lambda_k^{(m+1)})}{2\lambda_k}\cdot\frac{-g_k'(\lambda_k^{(m+2)})}{2\lambda_k}\cdot\prod_{p=1}^{m}\frac{g_k'(\lambda_k^{(p)})}{g_\infty'(\gamma_p)}\neq 0.$$

Далее, с использованием (5.5), (5.6) и теоремы 5.1 вычислим

$$\lim_{k\to+\infty}\bigl(\det M_k\bigr)^2=-\prod_{p=1}^{m}\lim_{k\to+\infty}\frac{g_k'(\lambda_k^{(p)})}{g_\infty'(\gamma_p)}\cdot\lim_{k\to+\infty}\frac{-g_k'(\lambda_k^{(m+1)})}{2\lambda_k}\cdot\lim_{k\to+\infty}\frac{-g_k'(\lambda_k^{(m+2)})}{2\lambda_k}=-1.$$

Отсюда, из 1) и оценки $\|M_k^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}\leqslant|\det M_k|^{-1}\|M_k\|^{m+1}_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}$ (см. [8, гл. 1, § 4, п. 2, формула (4.12)]) следует третье утверждение в лемме. □

Лемма 5.4. *Система векторов*

$$\begin{aligned}
&\varphi_\infty^{(p)}:=\bigl[g_\infty'(\gamma_p)\bigr]^{-1/2}\bigl(0;(\mathcal{G}-\gamma_p)^{-1}\mathcal{Q}\bigr)^\tau,\quad p=\overline{1,m},\\
&\varphi_\infty^{(m+1)}\equiv\varphi_\infty^{(+i\infty)}:=2^{-1/2}\bigl(1;+i\alpha^{-1/2}\mathcal{Q}\bigr)^\tau,\\
&\varphi_\infty^{(m+2)}\equiv\varphi_\infty^{(-i\infty)}:=2^{-1/2}\bigl(1;-i\alpha^{-1/2}\mathcal{Q}\bigr)^\tau,\quad \alpha=\sum_{l=0}^{m}\beta_l=1,
\end{aligned}\tag{5.9}$$

является ортонормированным базисом в $\mathbb{C}^{m+2}=\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}^{m+1}$.

Доказательство проводится, как и в лемме 5.2, прямой проверкой с учетом соотношений (5.5), (5.6), $g_\infty(\gamma_p)=0$ и тождества Гильберта.

Лемма 5.5. *Пусть* $M_\infty:=M_\infty(\varphi_\infty^{(1)},\varphi_\infty^{(2)},\dots,\varphi_\infty^{(m+2)})$ — *матрица, столбцами которой являются векторы* $\varphi_\infty^{(p)}$ $(p=\overline{1,m+2})$. *Тогда* $M_\infty^*=M_\infty^{-1}$.

Доказательство проводится прямой проверкой с использованием леммы 5.4.

Замечание 5.2. Система (5.9) является предельной для системы (5.7) при $k\to+\infty$. Далее из системы (5.9) и собственных элементов оператора A будет сконструирован ортонормированный базис пространства $\mathcal{H}$. Дальнейшая идея состоит в том, чтобы оценить уклонение системы собственных (а в вырожденном случае — системы корневых) элементов оператора $\mathcal{A}$ от построенного ортонормированного базиса пространства $\mathcal{H}$.

В связи с этим замечанием докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма 5.6. *Существует* $C>0$ *такое, что при всех* $k\in\mathbb{N}$

$$\|M_k-M_\infty\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}\leqslant C\bigl[\lambda_k(A^{-1})\bigr]^{1/2}.$$

Доказательство. Как и в лемме 5.3, воспользуемся формулой

$$\|M_k-M_\infty\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}\leqslant\Bigl[\sum_{p=1}^{m+2}\|\varphi_k^{(p)}-\varphi_\infty^{(p)}\|^2_{\mathbb{C}^{m+2}}\Bigr]^{1/2}.\tag{5.10}$$

Из (5.7), (5.9), теоремы 5.1 при $p=\overline{1,m}$ и тождества Гильберта имеем

$$\begin{aligned}
\varphi_k^{(p)}-\varphi_\infty^{(p)}&=\bigl[g_\infty'(\gamma_p)\bigr]^{-1/2}\Bigl(\lambda_k^{1/2};\Bigl[(\mathcal{G}-\lambda_k^{(p)})^{-1}-(\mathcal{G}-\gamma_p)^{-1}\Bigr]\mathcal{Q}\Bigr)^\tau=\\
&=\bigl[g_\infty'(\gamma_p)\bigr]^{-1/2}\Bigl(\lambda_k^{1/2};\bigl[\lambda_k^{(p)}-\gamma_p\bigr](\mathcal{G}-\lambda_k^{(p)})^{-1}(\mathcal{G}-\gamma_p)^{-1}\mathcal{Q}\Bigr)^\tau=\\
&=\lambda_k^{1/2}\cdot\bigl[g_\infty'(\gamma_p)\bigr]^{-1/2}\Bigl(1;\lambda_k^{1/2}\Bigl[\frac{\gamma_p}{g_\infty'(\gamma_p)}+O(\lambda_k)\Bigr](\mathcal{G}-\lambda_k^{(p)})^{-1}(\mathcal{G}-\gamma_p)^{-1}\mathcal{Q}\Bigr)^\tau
\end{aligned}$$

при $k \to +\infty$. Отсюда следует, что

$$\exists\, C_p > 0: \quad \|\varphi_k^{(p)} - \varphi_\infty^{(p)}\|_{\mathbb{C}^{m+2}} \leqslant C_p\big[\lambda_k(A^{-1})\big]^{1/2}, \quad p = \overline{1,m}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{5.11}$$

Из (5.7), (5.9), теоремы 5.1 при $p = m+1$ и тождества Гильберта имеем

$$\begin{aligned}\varphi_k^{(m+1)} - \varphi_\infty^{(m+1)} &= \frac{1}{2^{1/2}}\Big(0; \Big[\frac{1}{\lambda_k^{1/2}}(\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+1)})^{-1} - i\alpha^{-1/2} I\Big]\mathcal{Q}\Big)^\tau = \\ &= \frac{1}{2^{1/2}}\Big(0; \Big[I - i\alpha^{-1/2}\lambda_k^{1/2}(\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+1)})\Big](\lambda_k^{1/2}\mathcal{G} - \lambda_k^{1/2}\lambda_k^{(m+1)})^{-1}\mathcal{Q}\Big)^\tau = \\ &= \lambda_k^{1/2}\cdot\frac{1}{2^{1/2}}\Big(0; \Big[\frac{i\alpha^{-3/2}}{2}\sum_{l=1}^m k_l I - i\alpha^{-1/2}\mathcal{G} + O(\lambda_k^{1/2})\Big](\lambda_k^{1/2}\mathcal{G} - \lambda_k^{1/2}\lambda_k^{(m+1)})^{-1}\mathcal{Q}\Big)^\tau\end{aligned}$$

при $k \to +\infty$. Аналогичные вычисления справедливы и при $p = m+2$. Таким образом, имеют место неравенства (5.11) при $p = m+1$ и $p = m+2$. Теперь из (5.10) и (5.11) следует утверждение леммы. □

5.4. О p-базисности системы корневых элементов оператора $\mathcal{A}$. Следствием лемм 5.4 и 5.5 является следующее утверждение.

Лемма 5.7. *Система элементов* $\{\xi_{k,\infty}^{(p)} := \varphi_\infty^{(p)}\nabla\eta_k\}_{p=\overline{1,m+2},\ k\in\mathbb{N}}$ *является ортонормированным базисом пространства* $\mathcal{H}$.

Доказательство. Ортонормированность введенной системы следует из леммы 5.4 и ортонормированности системы $\{\nabla\eta_k\}_{k=1}^\infty$. Покажем, что введенная система полна в $\mathcal{H}$. Пусть существует $\xi = (\nabla\varphi; \mathbf{u}_0; \mathbf{u}_1; \ldots; \mathbf{u}_m)^\tau \in \mathcal{H}$ такой, что $\big(\xi_{k,\infty}^{(p)}, \xi\big)_{\mathcal{H}} = 0$ при всех $p = \overline{1, m+2}$, $k \in \mathbb{N}$. Последнее означает, что

$$M_\infty^\tau\big((\nabla\eta_k, \nabla\varphi)_{\mathbf{H}}; (\nabla\eta_k, \mathbf{u}_0)_{\mathbf{H}}; (\nabla\eta_k, \mathbf{u}_1)_{\mathbf{H}}; \ldots; (\nabla\eta_k, \mathbf{u}_m)_{\mathbf{H}}\big)^\tau = 0 \quad (\mathbf{H} = \mathbf{G}(\Omega, \rho_0))$$

при $k \in \mathbb{N}$. Отсюда, из леммы 5.5 и из полноты системы $\{\nabla\eta_k\}_{k=1}^\infty$ в пространстве $\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$ тогда получим, что $\nabla\varphi = \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_1 = \cdots = \mathbf{u}_m = 0$. т. е., $\xi = 0$. □

С помощью набора матриц S_k ($k \in \mathbb{N}$), действующих в $\mathbb{C}^{m+2}$, определим оператор

$$\mathcal{S}\xi := \sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\xi_{k,\infty}^{(1)}; \ldots; \xi_{k,\infty}^{(m+2)}\Big) S_k \begin{pmatrix} \big(\xi, \xi_{k,\infty}^{(1)}\big)_{\mathcal{H}} \\ \vdots \\ \big(\xi, \xi_{k,\infty}^{(m+2)}\big)_{\mathcal{H}}\end{pmatrix} := \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\sum_{p=1}^{m+2}\xi_{k,\infty}^{(p)}\sum_{q=1}^{m+2} S_k^{pq}\big(\xi, \xi_{k,\infty}^{(q)}\big)_{\mathcal{H}}\right]$$

и будем писать при этом $\mathcal{S} \longleftrightarrow S_k$.

Лемма 5.8. *Имеют место следующие утверждения.*

1) $\|\mathcal{S}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leqslant \sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\|S_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}$.
2) *Пусть* $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. *Если* $\mathcal{S} \longleftrightarrow S_k$, *то* $\mathcal{S}^* \longleftrightarrow S_k^*$.
3) *Пусть* $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, *тогда* $\mathcal{S}\mathcal{T} \longleftrightarrow S_k T_k$. *В частности,* $\mathcal{S}^{-1} \longleftrightarrow S_k^{-1}$.

Доказательство. Лемма доказывается непосредственной проверкой с использованием ортонормированности системы $\{\xi_{k,\infty}^{(p)}\}_{p=\overline{1,m+2},\ k\in\mathbb{N}}$. □

Основываясь на доказанных фактах, установим две теоремы: о p-базисности специальным образом нормированной системы собственных элементов оператора $\mathcal{A}$ в невырожденном случае, а также о p-базисности системы корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ в вырожденном случае.

Теорема 5.2. *Пусть* $g_k'(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ ($p = \overline{1, m+2}$, $k \in \mathbb{N}$). *Тогда система собственных элементов* $\{\xi_k^{(p)} := \varphi_k^{(p)}\nabla\eta_k\}_{p=\overline{1,m+2},\ k\in\mathbb{N}}$ *оператора* $\mathcal{A}$ *образует* p-*базис пространства* $\mathcal{H}$ *при* $p > 3$ (*напомним, что* $A^{-1} \in \mathfrak{S}_p(H)$ *при* $p > 3/2$ — *см. лемму* 3.2).

Доказательство. Положим $\mathcal{S}\longleftrightarrow S_k:=M_\infty^*M_k$ и покажем, что $\mathcal{S}\xi_{l,\infty}^{(q)}=\xi_l^{(q)}$ при $q=\overline{1,m+2}$, $l\in\mathbb{N}$. Учитывая, что $S_k^{pq}=\overline{(\varphi_\infty^{(p)},\varphi_k^{(q)})_{\mathbb{C}^{m+2}}}$ и $(\xi_l^{(q)},\xi_{k,\infty}^{(p)})_{\mathcal{H}}=0$ при $l\neq k$, вычислим

$$\begin{aligned}\mathcal{S}\xi_{l,\infty}^{(q)}&=\Big(\xi_{l,\infty}^{(1)};\dots;\xi_{l,\infty}^{(m+2)}\Big)M_\infty^*M_l\Big(0;\dots;0;1_q;0;\dots;0\Big)^\tau=\\&=\Big(\xi_{l,\infty}^{(1)};\dots;\xi_{l,\infty}^{(m+2)}\Big)\Big(\overline{(\varphi_\infty^{(1)},\varphi_l^{(q)})_{\mathbb{C}^{m+2}}};\dots;\overline{(\varphi_\infty^{(m+2)},\varphi_l^{(q)})_{\mathbb{C}^{m+2}}}\Big)^\tau=\\&=\sum_{p=1}^{m+2}\overline{(\varphi_\infty^{(p)},\varphi_l^{(q)})_{\mathbb{C}^{m+2}}}\xi_{l,\infty}^{(p)}=\sum_{p=1}^{m+2}(\varphi_l^{(q)},\varphi_\infty^{(p)})_{\mathbb{C}^{m+2}}\xi_{l,\infty}^{(p)}=\\&=\sum_{p=1}^{m+2}(\xi_l^{(q)},\xi_{l,\infty}^{(p)})_{\mathcal{H}}\xi_{l,\infty}^{(p)}=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{m+2}(\xi_l^{(q)},\xi_{k,\infty}^{(p)})_{\mathcal{H}}\xi_{k,\infty}^{(p)}=\xi_l^{(q)}.\end{aligned}$$

Из леммы 5.8, условия $g_k'(\lambda_k^{(p)})\neq0$ ($p=\overline{1,m+2}$, $k\in\mathbb{N}$), лемм 5.3 и 5.5 следует, что оператор $\mathcal{S}$ непрерывно обратим: $\mathcal{S}^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Отсюда и из леммы 5.7 тогда следует, что система элементов $\{\xi_k^{(p)}\}_{p=\overline{1,m+2},\,k\in\mathbb{N}}$ — базис Рисса пространства $\mathcal{H}$. Для доказательства теоремы остается показать, что $\mathcal{S}=\mathcal{I}+\mathcal{T}$, где $\mathcal{T}\in\mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ при $p>3$.

Положим $T_k:=M_k-M_\infty$, тогда с учетом лемм 5.5 и 5.8 получим, что

$$\mathcal{S}\longleftrightarrow M_\infty^*M_k=M_\infty^*(M_\infty+T_k)=I+M_\infty^*T_k\longleftrightarrow\mathcal{I}+\mathcal{T},\quad \mathcal{T}^*\mathcal{T}\longleftrightarrow(T_k^*M_\infty)(M_\infty^*T_k)=T_k^*T_k.$$

Обозначим через $\lambda_k\big((\mathcal{T}^*\mathcal{T})^{1/2}\big)$ и $\lambda_k\big((T^*T)^{1/2}\big)$ собственные значения оператора $(\mathcal{T}^*\mathcal{T})^{1/2}$ и матрицы $(T^*T)^{1/2}$ соответственно, занумерованные в порядке убывания и с учетом кратности. Тогда из последних соотношений и леммы 5.7 получим, что

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{+\infty}\lambda_r^p\big((\mathcal{T}^*\mathcal{T})^{1/2}\big)&=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=1}^{m+2}\lambda_l^p\big((T_k^*T_k)^{1/2}\big)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=1}^{m+2}\big[\lambda_l\big(T_k^*T_k\big)\big]^{p/2}\leqslant\\&\leqslant(m+2)\sum_{k=1}^{+\infty}\big[\lambda_{\max}\big(T_k^*T_k\big)\big]^{p/2}=(m+2)\sum_{k=1}^{+\infty}\|T_k^*T_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}^{p/2}\leqslant\\&\leqslant(m+2)\sum_{k=1}^{+\infty}\|T_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}^p\leqslant(m+2)C^p\sum_{k=1}^{+\infty}\big[\lambda_k(A^{-1})\big]^{p/2}<+\infty\end{aligned}$$

при $p/2>3/2$, так как $A^{-1}\in\mathfrak{S}_p(H)$ при $p>3/2$. Следовательно, $\mathcal{T}\in\mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ при $p>3$. □

Рассмотрим теперь ситуацию, когда при некотором $k\in\mathbb{N}$ уравнение $g_k(\lambda)=0$ имеет кратный корень. В этом случае может быть один или два двукратных корня, либо один трехкратный корень.

Разберем случай двукратного корня. В этом случае при некоторых $k\in\mathbb{N}$ (таких номеров конечное количество) будет либо $\lambda_k^{(m+1)}=\lambda_k^{(m+2)}\in\mathbb{R}$, либо $\lambda_k^{(p_1)}=\lambda_k^{(m+1)}$, $\lambda_k^{(p_2)}=\lambda_k^{(m+2)}$ при некоторых $p_1,p_2\in\{1,\dots,m\}$. Не ограничивая общности, предположим первую ситуацию. Пусть $\nabla\eta$ — это первый присоединенный элемент к собственному элементу $\nabla\eta_k$ пучка $L(\lambda)$ в точке $\lambda_k^{(m+2)}$ (см. определение 5.1). Тогда $L'(\lambda_k^{(m+2)})\nabla\eta_k=g_k'(\lambda_k^{(m+2)})\nabla\eta_k=0$ и

$$L'(\lambda_k^{(m+2)})\nabla\eta_k+L(\lambda_k^{(m+2)})\nabla\eta=g_k'(\lambda_k^{(m+2)})\nabla\eta_k+L(\lambda_k^{(m+2)})\nabla\eta=L(\lambda_k^{(m+2)})\nabla\eta=0.$$

Таким образом, в качестве первого присоединенного к $\nabla\eta_k$ элемента можно взять элемент $\nabla\eta_k$.

Пусть $\xi_{k0}^{(m+2)}=\big(\lambda_k^{1/2}\nabla\eta_k;(\mathcal{G}-\lambda_k^{(m+2)})^{-1}\mathcal{Q}\nabla\eta_k\big)^\tau$ — собственный элемент оператора $\mathcal{A}$, отвечающий с.з. $\lambda_k^{(m+2)}$ (см. лемму 5.1). Вычислим в соответствии с леммой 5.1 присоединенный элемент η_1 оператора $\mathcal{A}$. Поскольку присоединенный элемент определяется с точностью до собственного элемента, то можно считать, что $\xi_{k1}^{(m+2)}=\eta_1-\xi_{k0}^{(m+2)}=\big(0;(\mathcal{G}-\lambda_k^{(m+2)})^{-2}\mathcal{Q}\nabla\eta_k\big)^\tau$. Следовательно, оператор $\mathcal{A}$ имеет следующую цепочку из собственного и присоединенного к нему элемента:

$$\begin{aligned}\xi_{k0}^{(m+2)}&=\big(\lambda_k^{1/2};(\mathcal{G}-\lambda_k^{(m+2)})^{-1}\mathcal{Q}\big)^\tau\nabla\eta_k=:\varphi_{k0}^{(m+2)}\nabla\eta_k,\\ \xi_{k1}^{(m+2)}&=\big(\ 0;(\mathcal{G}-\lambda_k^{(m+2)})^{-2}\mathcal{Q}\big)^\tau\nabla\eta_k=:\varphi_{k1}^{(m+2)}\nabla\eta_k.\end{aligned}\tag{5.12}$$

Разберем теперь ситуацию, когда при некотором $k \in \mathbb{N}$ уравнение $g_k(\lambda) = 0$ имеет трехкратный корень. В этом случае при некотором $p \in \{1, \ldots, m\}$ будет $\lambda_k^{(p)} = \lambda_k^{(m+1)} = \lambda_k^{(m+2)} \in \mathbb{R}$. Пусть $\nabla\eta$ — это второй присоединенный элемент к собственному элементу $\nabla\eta_k$ пучка $L(\lambda)$ в точке $\lambda_k^{(p)}$. Тогда $L''(\lambda_k^{(p)})\nabla\eta_k = g_k''(\lambda_k^{(p)})\nabla\eta_k = g_\infty''(\lambda_k^{(p)})\nabla\eta_k = 0$, $L'(\lambda_k^{(p)})\nabla\eta_k = g_k'(\lambda_k^{(p)})\nabla\eta_k = 0$ и

$$2^{-1}L''(\lambda_k^{(p)})\nabla\eta_k + L'(\lambda_k^{(p)})\nabla\eta_k + L(\lambda_k^{(p)})\nabla\eta = \\ = 2^{-1}g_\infty''(\lambda_k^{(p)})\nabla\eta_k + g_k'(\lambda_k^{(p)})\nabla\eta_k + L(\lambda_k^{(p)})u = L(\lambda_k^{(p)})\nabla\eta = 0.$$

Таким образом, в качестве второго присоединенного к $\nabla\eta_k$ элемента можно взять элемент $\nabla\eta_k$.

Вычислим в соответствии с леммой 5.1 первый η_1 и второй η_2 присоединенные элементы оператора $\mathcal{A}$. Легко проверить, что цепочкой из собственного и присоединенных к нему элементов будет также $\xi_{k0}^{(p)}$, $\xi_{k1}^{(p)} := \eta_1 - \xi_{k0}^{(p)}$, $\xi_{k2}^{(p)} := \eta_2 - \eta_1$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \xi_{k0}^{(p)} &= \big(\lambda_k^{1/2}; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}\big)^\tau \nabla\eta_k =: \varphi_{k0}^{(p)}\nabla\eta_k, \\ \xi_{k1}^{(p)} &= \big(\ \ 0; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-2}\mathcal{Q}\big)^\tau \nabla\eta_k =: \varphi_{k1}^{(p)}\nabla\eta_k, \\ \xi_{k2}^{(p)} &= \big(\ \ 0; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-3}\mathcal{Q}\big)^\tau \nabla\eta_k =: \varphi_{k2}^{(p)}\nabla\eta_k. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Далее будем считать, что система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ нормируется следующим образом. *Если собственный элемент не имеет присоединенного, то он выбирается по формуле из леммы* 5.1. *Если собственный элемент имеет один или два присоединенных элемента, то соответствующая цепочка выбирается по формуле* (5.12) *или* (5.13) *соответственно.*

Отметим, что собственных элементов оператора $\mathcal{A}$, имеющих один или два присоединенных элемента может быть лишь конечное количество.

Теорема 5.3. *Система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$, нормированных специальным образом, образует p-базис пространства $\mathcal{H}$ при $p > 3$.*

Доказательство. Покажем сначала, что система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ полна в $\mathcal{H}$. Рассмотрим для простоты ситуацию, когда у оператора $\mathcal{A}$ есть одно собственное значение $\lambda_s^{(p)}$, которому отвечает цепочка из собственного и одного или двух присоединенных элементов. Проведем доказательство в несколько этапов.

1. Пусть собственному значению $\lambda_s^{(m+2)}$ оператора $\mathcal{A}$ отвечает цепочка из собственного и присоединенного к нему элемента, определяемых по формулам (5.12). Предположим, что рассматриваемая система не полна в $\mathcal{H}$ и существует $\xi = (\nabla\varphi; \mathbf{u}_0; \mathbf{u}_1; \ldots; \mathbf{u}_m)^\tau \in \mathcal{H}$ такой, что

$$\begin{aligned} &\big(\xi_k^{(p)}, \xi\big)_{\mathcal{H}} = 0, \ \ p = \overline{1, m+2}, \ \ k = 1, 2, \ldots, s-1, s+1, \ldots, \\ &\big(\xi_s^{(p)}, \xi\big)_{\mathcal{H}} = 0, \ \ p = \overline{1, m}, \quad \big(\xi_{s0}^{(m+2)}, \xi\big)_{\mathcal{H}} = 0, \quad \big(\xi_{s1}^{(m+2)}, \xi\big)_{\mathcal{H}} = 0. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Первая строчка в (5.14) означает, что

$$M_k^\tau\big((\nabla\eta_k, \nabla\varphi)_{\mathbf{H}}; (\nabla\eta_k, \mathbf{u}_0)_{\mathbf{H}}; \big(\nabla\eta_k, \mathbf{u}_1)_{\mathbf{H}}; \ldots; (\nabla\eta_k, \mathbf{u}_m)_{\mathbf{H}}\big)^\tau = 0 \quad (\mathbf{H} = \mathbf{G}(\Omega, \rho_0))$$

при $k = 1, 2, \ldots, s-1, s+1, \ldots$ (см. лемму 5.3). Отсюда следует, что

$$(\nabla\eta_k, \nabla\varphi)_{\mathbf{H}} = (\nabla\eta_k, \mathbf{u}_0)_{\mathbf{H}} = \cdots = (\nabla\eta_k, \mathbf{u}_m)_{\mathbf{H}} = 0, \quad k \in \mathbb{N}\backslash\{s\}. \tag{5.15}$$

Вторая строчка в (5.14) означает, что

$$M_{s,1}^\tau\big((\nabla\eta_s, \nabla\varphi)_{\mathbf{H}}; (\nabla\eta_s, \mathbf{u}_0)_{\mathbf{H}}; \big(\nabla\eta_s, \mathbf{u}_1)_{\mathbf{H}}; \ldots; (\nabla\eta_s, \mathbf{u}_m)_{\mathbf{H}}\big)^\tau = 0 \quad (\mathbf{H} = \mathbf{G}(\Omega, \rho_0)),$$

где $M_{s,1} = M_{s,1}(\varphi_s^{(1)}, \varphi_s^{(2)}, \ldots, \varphi_s^{(m)}, \varphi_{s0}^{(m+2)}, \varphi_{s1}^{(m+2)})$ — матрица, столбцами которой являются соответствующие векторы. Покажем, что $\det M_{s,1} \neq 0$, тогда из последней системы, соотношений (5.15) и полноты в $\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$ системы $\{\nabla\eta_k\}_{k=1}^\infty$ получим, что $\nabla\varphi = \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_1 = \cdots = \mathbf{u}_m = 0$, т. е., $\xi = 0$.

Пусть, как и в лемме 5.2, $J = \mathrm{diag}(1, -I)$. Несложно проверить, что

$$\begin{gathered} \big(J\varphi_{s0}^{(m+2)}, \varphi_{s0}^{(m+2)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = 0, \quad \big(J\varphi_{s0}^{(m+2)}, \varphi_{s1}^{(m+2)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = -\frac{1}{2}g_s''(\lambda_s^{(m+2)}) \neq 0, \\ \big(J\varphi_{s1}^{(m+2)}, \varphi_{s1}^{(m+2)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = -\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m+2)}). \end{gathered} \tag{5.16}$$

Для дальнейших вычислений понадобится формула, которая может быть получена последовательным дифференцированием тождества Гильберта:

$$(\mathcal{G}-\lambda)^{-n}(\mathcal{G}-\mu)^{-1}=\frac{1}{(\mu-\lambda)^n}(\mathcal{G}-\mu)^{-1}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(\mu-\lambda)^{k+1}}(\mathcal{G}-\lambda)^{-(n-k)}, \qquad \mu,\lambda\in\rho(\mathcal{G}),\quad n\in\mathbb{N}. \tag{5.17}$$

С использованием соотношений $g_s(\lambda_s^{(p)})=0$ $(p=\overline{1,m})$ (см. (5.6)), $g_s(\lambda_s^{(m+2)})=g_s'(\lambda_s^{(m+2)})=0$, формулы (5.17) при $n=2$, можно найти, что при всех $p=\overline{1,m}$

$$\begin{aligned}
\bigl(J\varphi_s^{(p)},\varphi_{s1}^{(m+2)}\bigr)_{\mathbb{C}^{m+2}}&=-R_{s,p}\bigl((\mathcal{G}-\lambda_s^{(p)})^{-1}\mathcal{Q},(\mathcal{G}-\lambda_s^{(m+2)})^{-2}\mathcal{Q}\bigr)_{\mathbb{C}^{m+1}}=\\
&=-R_{s,p}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G}-\lambda_s^{(m+2)})^{-2}(\mathcal{G}-\lambda_s^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}=\\
&=-R_{s,p}\mathcal{Q}^*\Bigl[\frac{(\mathcal{G}-\lambda_s^{(p)})^{-1}}{(\lambda_s^{(p)}-\lambda_s^{(m+2)})^2}-\frac{(\mathcal{G}-\lambda_s^{(m+2)})^{-2}}{\lambda_s^{(p)}-\lambda_s^{(m+2)}}-\frac{(\mathcal{G}-\lambda_s^{(m+2)})^{-1}}{(\lambda_s^{(p)}-\lambda_s^{(m+2)})^2}\Bigr]\mathcal{Q}=\\
&=-R_{s,p}\Bigl[\frac{\lambda_s^{(p)}\lambda_k}{(\lambda_s^{(p)}-\lambda_s^{(m+2)})^2}-\frac{\lambda_k}{\lambda_s^{(p)}-\lambda_s^{(m+2)}}-\frac{\lambda_s^{(m+2)}\lambda_k}{(\lambda_s^{(p)}-\lambda_s^{(m+2)})^2}\Bigr]=0.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Из (5.16) и (5.18) найдем, что

$$M_{s,1}^\tau JM_{s,1}=\begin{pmatrix}
-g_s'(\lambda_s^{(1)})R_{s,1}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & -g_s'(\lambda_s^{(2)})R_{s,2}^2 & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2!}g_s''(\lambda_s^{(m+2)})\\
0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{2!}g_s''(\lambda_s^{(m+2)}) & -\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m+2)})
\end{pmatrix},$$

$$(-1)^{m+1}\bigl(\det M_{s,1}\bigr)^2=\det M_{s,1}^\tau JM_{s,1}=(-1)^{m+1}\Bigl[\frac{1}{2!}g_s''(\lambda_s^{(m+2)})\Bigr]^2\prod_{p=1}^m g_s'(\lambda_s^{(p)})R_{s,p}^2\neq 0.$$

Следовательно, $\det M_{s,1}\neq 0$.

2. Пусть теперь собственному значению $\lambda_s^{(p)}$ оператора $\mathcal{A}$ отвечает цепочка из собственного и двух присоединенных элементов, определяемых по формулам (5.13). Не ограничивая общности, можно считать, что $p=m$. Предположим, что система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ не полна в $\mathcal{H}$ и существует $\xi=(\nabla\varphi;\mathbf{u}_0;\mathbf{u}_1;\ldots;\mathbf{u}_m)^\tau\in\mathcal{H}$ такой, что

$$\begin{aligned}
&\bigl(\xi_k^{(p)},\xi\bigr)_{\mathcal{H}}=0,\ \ p=\overline{1,m+2},\ \ k=1,2,\ldots,s-1,s+1,\ldots,\\
&\bigl(\xi_s^{(p)},\xi\bigr)_{\mathcal{H}}=0,\ \ p=\overline{1,m-1},\quad \bigl(\xi_{s0}^{(m)},\xi\bigr)_{\mathcal{H}}=0,\quad \bigl(\xi_{s1}^{(m)},\xi\bigr)_{\mathcal{H}}=0,\quad \bigl(\xi_{s2}^{(m)},\xi\bigr)_{\mathcal{H}}=0.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Первая строчка в (5.19), как и выше, влечет (5.15). Вторая строчка в (5.19) означает, что

$$M_{s,2}^\tau\bigl((\nabla\eta_s,\nabla\varphi)_{\mathbf{H}};(\nabla\eta_s,\mathbf{u}_0)_{\mathbf{H}};(\nabla\eta_s,\mathbf{u}_1)_{\mathbf{H}};\ldots;(\nabla\eta_s,\mathbf{u}_m)_{\mathbf{H}}\bigr)^\tau=0\quad (\mathbf{H}=\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)),$$

где $M_{s,2}=M_{s,2}(\varphi_s^{(1)},\ldots,\varphi_s^{(m-1)},\varphi_{s0}^{(m)},\varphi_{s1}^{(m)},\varphi_{s2}^{(m)})$ — матрица, столбцами которой являются соответствующие векторы. Покажем, что $\det M_{s,2}\neq 0$, тогда из последней системы, соотношений (5.15) и полноты в $\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)$ системы $\{\nabla\eta_k\}_{k=1}^\infty$ получим, как и выше, что $\nabla\varphi=\mathbf{u}_0=\mathbf{u}_1=\cdots=\mathbf{u}_m=0$ и, значит, $\xi=0$.

Несложно проверить, что

$$\begin{gathered}
\bigl(J\varphi_{s0}^{(m)},\varphi_{s0}^{(m)}\bigr)_{\mathbb{C}^{m+2}}=0,\quad \bigl(J\varphi_{s0}^{(m)},\varphi_{s1}^{(m)}\bigr)_{\mathbb{C}^{m+2}}=0,\\
\bigl(J\varphi_{s0}^{(m)},\varphi_{s2}^{(m)}\bigr)_{\mathbb{C}^{m+2}}=\bigl(J\varphi_{s1}^{(m)},\varphi_{s1}^{(m)}\bigr)_{\mathbb{C}^{m+2}}=-\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m)})\neq 0,\\
\bigl(J\varphi_{s1}^{(m)},\varphi_{s2}^{(m)}\bigr)_{\mathbb{C}^{m+2}}=-\frac{1}{4!}g_s^{(4)}(\lambda_s^{(m)}),\quad \bigl(J\varphi_{s2}^{(m)},\varphi_{s2}^{(m)}\bigr)_{\mathbb{C}^{m+2}}=-\frac{1}{5!}g_s^{(5)}(\lambda_s^{(m)}),\\
\bigl(J\varphi_s^{(p)},\varphi_{s1}^{(m)}\bigr)_{\mathbb{C}^{m+2}}=0,\quad p=1,2,\ldots,m-1.
\end{gathered} \tag{5.20}$$

Здесь последнее соотношение выводится также как в (5.18). Далее, с использованием соотношений $g_s(\lambda_s^{(p)})=0$ ($p=\overline{1,m-1}$) (см. (5.6)), $g_s(\lambda_s^{(m)})=g_s'(\lambda_s^{(m)})=g_s''(\lambda_s^{(m)})=0$, формулы (5.17) при $n=3$ можно найти, что при всех $p=\overline{1,m-1}$

$$\begin{aligned}
\big(J\varphi_s^{(p)},\varphi_{s2}^{(m)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} &= -R_{s,p}\big((\mathcal{G}-\lambda_s^{(p)})^{-1}\mathcal{Q},(\mathcal{G}-\lambda_s^{(m)})^{-3}\mathcal{Q}\big)_{\mathbb{C}^{m+1}} = \\
&= -R_{s,p}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G}-\lambda_s^{(m)})^{-3}(\mathcal{G}-\lambda_s^{(p)})^{-1}\mathcal{Q} = \\
&= -R_{s,p}\mathcal{Q}^*\Big[\frac{(\mathcal{G}-\lambda_s^{(p)})^{-1}}{(\lambda_s^{(p)}-\lambda_s^{(m)})^3}-\frac{(\mathcal{G}-\lambda_s^{(m)})^{-3}}{\lambda_s^{(p)}-\lambda_s^{(m)}}-\frac{(\mathcal{G}-\lambda_s^{(m)})^{-2}}{(\lambda_s^{(p)}-\lambda_s^{(m)})^2}-\frac{(\mathcal{G}-\lambda_s^{(m)})^{-1}}{(\lambda_s^{(p)}-\lambda_s^{(m)})^3}\Big]\mathcal{Q} = \\
&= -R_{s,p}\Big[\frac{\lambda_s^{(p)}\lambda_k}{(\lambda_s^{(p)}-\lambda_s^{(m)})^3}-\frac{\lambda_k}{(\lambda_s^{(p)}-\lambda_s^{(m)})^2}-\frac{\lambda_s^{(m)}\lambda_k}{(\lambda_s^{(p)}-\lambda_s^{(m+2)})^3}\Big]=0.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Из (5.20) и (5.21) найдем, что

$$M_{s,2}^{\tau}JM_{s,2}=$$

$$=\begin{pmatrix}
-g_s'(\lambda_s^{(1)})R_{s,1}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & -g_s'(\lambda_s^{(2)})R_{s,2}^2 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m)})\\
0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m)}) & -\frac{1}{4!}g_s^{(4)}(\lambda_s^{(m)})\\
0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m)}) & -\frac{1}{4!}g_s^{(4)}(\lambda_s^{(m)}) & -\frac{1}{5!}g_s^{(5)}(\lambda_s^{(m)})
\end{pmatrix},$$

$$(-1)^{m+1}\big(\det M_{s,2}\big)^2=\det M_{s,2}^{\tau}JM_{s,2}=(-1)^{m-1}\Big[\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m)})\Big]^3\prod_{p=1}^{m-1}g_s'(\lambda_s^{(p)})R_{s,p}^2\neq 0.$$

Таким образом, $\det M_{s,2}\neq 0$, и система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ полна в $\mathcal{H}$.

3. Построим теперь, как и в теореме 5.2, оператор $\mathcal{S}\longleftrightarrow S_k:=M_\infty^*M_k$ с заменой вырожденных матриц M_s на какие-либо невырожденные. При этом оператор $\mathcal{S}$ будет непрерывно обратим и по-прежнему представим в виде $\mathcal{S}=\mathcal{I}+\mathcal{T}$, где $\mathcal{T}\in\mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ ($p>3$), так как вырожденных матриц M_s может быть лишь конечное количество. Таким образом, система $\{\mathcal{S}\xi_{k,\infty}^{(p)}\}_{p=\overline{1,m+2},\,k\in\mathbb{N}}$ есть p-базис ($p>3$) пространства $\mathcal{H}$, который отличается от системы специальным образом нормированных корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ лишь на конечное количество элементов. Отсюда следует, что система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$, учитывая ее полноту, есть также p-базис ($p>3$) пространства $\mathcal{H}$. □

5.5. Построение биортогональной системы в невырожденном случае и представление решения исходной задачи. В качестве следствия из леммы 5.2 и теоремы 5.2 сформулируем следующее утверждение.

Теорема 5.4. *Пусть* $g_k'(\lambda_k^{(p)})\neq 0$ ($p=\overline{1,m+2}$, $k\in\mathbb{N}$). *Тогда система*

$$\xi_k^{(p)}:=R_{k,p}\big(\lambda_k^{1/2};(\mathcal{G}-\lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}\big)^{\tau}\nabla\eta_k,\quad p=\overline{1,m+2},\quad k\in\mathbb{N},$$

$$R_{k,p}:=\begin{cases}\big[g_\infty'(\gamma_p)\big]^{-1/2}, & p=\overline{1,m},\quad k\in\mathbb{N},\\ \big[2\lambda_k\big]^{-1/2}, & p=m+1,m+2,\quad k\in\mathbb{N}\end{cases}$$

собственных элементов оператора $\mathcal{A}$ *образует* p*-базис пространства* $\mathcal{H}$ *при* $p>3$, *согласно теореме* 5.2, *и имеет следующую биортогональную систему*:

$$\zeta_k^{(p)}:=-\big[g_k'(\overline{\lambda_k^{(p)}})R_{k,p}\big]^{-1}\big(\lambda_k^{1/2};-(\mathcal{G}-\overline{\lambda_k^{(p)}})^{-1}\mathcal{Q}\big)^{\tau}\nabla\eta_k,\quad p=\overline{1,m+2},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Доказательство. Теорема доказывается непосредственной проверкой. □

Будем разыскивать решение задачи (5.1) в виде разложения по базису, составленному из собственных элементов оператора $\mathcal{A}$:

$$\zeta(t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{m+2} C_k^{(p)}(t)\xi_k^{(p)}, \quad C_k^{(p)}(0) = \big(\zeta^0, \zeta_k^{(p)}\big)_{\mathcal{H}}.$$

Отсюда и из (5.1) найдем, что

$$\zeta(t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{m+2}\left[e^{-\lambda_k^{(p)}t}\big(\zeta^0, \zeta_k^{(p)}\big)_{\mathcal{H}} + \int_0^t e^{-\lambda_k^{(p)}(t-s)}\big(\zeta_{\rho^0}(s) + \mathcal{F}(s), \zeta_k^{(p)}\big)_{\mathcal{H}}\,ds\right]\xi_k^{(p)}. \tag{5.22}$$

Учитывая явный вид ζ^0, $\zeta_{\rho^0}(t)$, $\mathcal{F}(t)$ (см. (5.1)), (5.2) и теорему 5.4, найдем

$$\big(\zeta^0, \zeta_k^{(p)}\big)_{\mathcal{H}} = \frac{-\lambda_k^{1/2}(A^{-1})}{g_k'(\lambda_k^{(p)})R_{k,p}}\left[\big(P_G\mathbf{u}^0, \nabla\eta_k\big)_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)} - \frac{\beta_0}{\lambda_k^{(p)}}\big(B^*\rho^0, \nabla\eta_k\big)_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}\right], \tag{5.23}$$

$$\big(\zeta_{\rho^0}(t) + \mathcal{F}(t), \zeta_k^{(p)}\big)_{\mathcal{H}} = \frac{-\lambda_k^{1/2}(A^{-1})}{g_k'(\lambda_k^{(p)})R_{k,p}}\left[\sum_{l=1}^{m} e^{-b_l t}\beta_l\big(B^*\rho^0, \nabla\eta_k\big)_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)} + \big(P_G\mathbf{f}(t), \nabla\eta_k\big)_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}\right]. \tag{5.24}$$

Подставим (5.23), (5.24) в (5.22). После простых вычислений получим представление для решения задачи Коши (5.1):

$$\begin{aligned}\zeta(t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{m+2}\frac{-\lambda_k^{1/2}(A^{-1})}{g_k'(\lambda_k^{(p)})R_{k,p}}\Bigg[&e^{-\lambda_k^{(p)}t}\big(P_G\mathbf{u}^0, \nabla\eta_k(A)\big)_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)} + \\ &+ \left\{g_\infty(\lambda_k^{(p)})e^{-\lambda_k^{(p)}t} - \sum_{l=1}^{m}\frac{\beta_l e^{-b_l t}}{b_l - \lambda_k^{(p)}}\right\}\big(B^*\rho^0, \nabla\eta_k(A)\big)_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)} + \\ &+ \int_0^t e^{-\lambda_k^{(p)}(t-s)}\big(P_G\mathbf{f}(s), \nabla\eta_k(A)\big)_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}\,ds\Bigg]\xi_k^{(p)}.\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая вид $\zeta(t)$, $\xi_k^{(p)}$, связь (3.17) функций $u_0(t)$ и $\rho(t)$, найдем представление для решения $\nabla\varphi(t)$, $\rho(t)$ задачи (3.27) (в случае, когда $g = 0$):

$$\begin{pmatrix}\nabla\varphi(t)\\ \rho(t)\end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{m+2} T_k^{(p)}(t)\begin{pmatrix}\lambda_k^{-1/2}(A)\nabla\eta_k(A)\\ (\lambda_k^{(p)})^{-1}U\nabla\eta_k(A)\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}T_k^{(p)}(t) := \frac{-\lambda_k^{-1/2}(A)}{g_k'(\lambda_k^{(p)})}\Bigg[&e^{-\lambda_k^{(p)}t}\big(\mathbf{u}^0, \nabla\eta_k(A)\big)_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)} + \\ &+ \left\{g_\infty(\lambda_k^{(p)})e^{-\lambda_k^{(p)}t} - \sum_{l=1}^{m}\frac{\rho_0 k_l e^{-b_l t}}{b_l(b_l - \lambda_k^{(p)})}\right\}\big(B^*\rho^0, \nabla\eta_k(A)\big)_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)} + \\ &+ \int_0^t e^{-\lambda_k^{(p)}(t-s)}\big(\mathbf{f}(s), \nabla\eta_k(A)\big)_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}\,ds\Bigg],\end{aligned}$$

где $g_k(\lambda)$ и $g_\infty(\lambda)$ определены в (5.6).

Автор приносит благодарность проф. Н. Д. Копачевскому за обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Авакян В. А.* Асимптотическое распределение спектра линейного пучка, возмущенного аналитической оператор-функцией// Функц. анализ и его прилож. — 1978. — *12*, № 2. — С. 66-67.
2. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — Киев: Наукова думка, 1965.

3. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра дифференциальных уравнений// Итоги науки и техн. Сер. мат. анализ. — 1977. — *14*. — С. 5–58.
4. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М.: МАКС Пресс, 2016.
5. *Закора Д. А.* Операторный подход к модели Ильюшина вязкоупругого тела параболического типа// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *57*. — С. 31–64.
6. *Закора Д. А.* Экспоненциальная устойчивость одной полугруппы и приложения// Мат. заметки. — 2018. — *103*, № 5. — С. 702–719.
7. *Звягин В. Г., Турбин М. В.* Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина—Фойгта// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *31*. — С. 3–144.
8. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
9. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
10. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
11. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: Штиинца, 1986.
12. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Т. 1. — М.: Наука, 1967.
13. *Оразов М. Б.* Некоторые вопросы спектральной теории несамосопряженных операторов и связанные с ними задачи из механики// Дисс. докт. физ.-мат. наук (01.01.02). — Ашхабад, 1982.
14. *Радзиевский Г. В.* Квадратичный пучок операторов// Препринт. — Киев, 1976.
15. *Birman M. Sh., Solomjak M. Z.* Spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space. — Dordrecht—Boston—Lancaser—Tokyo: D. Reidel Publ. Co., 1986.
16. *Gohberg I., Goldberg S., Kaashoek M. A.* Classes of linear operators. Vol. 1. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1990.
17. *Goldstein J. A.* Semigroups of linear operators and applications. — New York: Oxford University Press, 1989.
18. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2: Nonselfadjoint problems for viscous fluids. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 2003.
19. *Ralston J. V.* On stationary modes in inviscid rotating fluids// J. Math. Anal. Appl. — 1973. — *44*. — С. 366–383.

Д. А. Закора
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
295007, Симферополь, проспект Вернадского, 4;
Воронежский государственный университет,
394006, Воронеж, Университетская площадь, 1
E-mail: dmitry.zkr@gmail.com, dmitry_@crimea.edu

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-3-459-489 UDC 517.9:532

Operator Approach to the Problem on Small Motions of an Ideal Relaxing Fluid

© 2018 **D. A. Zakora**

Abstract. In this paper, we study the problem on small motions of an ideal relaxing fluid that fills a uniformly rotating or fixed container. We prove a theorem on uniform strong solvability of the corresponding initial-boundary value problem. In the case where the system does not rotate, we find an asymptotic behavior of the solution under the stress of special form. We investigate the spectral problem associated with the system under consideration. We obtain results on localization of the spectrum, on essential and discrete spectrum, and on spectral asymptotics. For nonrotating system in zero-gravity conditions we prove the multiple basis property of a special system of elements. In this case, we find an expansion of the solution of the evolution problem in the special system of elements.

REFERENCES

1. V. A. Avakyan, "Asimptoticheskoe raspredelenie spektra lineynogo puchka, vozmushchennogo analiticheskoy operator-funktsiey" [Asymptotic distribution of the spectrum of a linear pencil perturbed by an analytic operator-function], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1978, **12**, No. 2, 66-67 (in Russian).
2. Yu. M. Berezanskiy, *Razlozhenie po sobstvennym funktsiyam samosopryazhennykh operatorov* [Expansion in Eigenfunctions of Self-Adjoint Operators], Naukova dumka, Kiev, 1965 (in Russian).
3. M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, "Asimptotika spektra differentsial'nykh uravneniy" [Asymptotics of the spectrum of differential equations], *Itogi nauki i tekhn. Ser. mat. analiz* [Totals Sci. Tech. Ser. Math. Anal.], 1977, **14**, 5–58 (in Russian).
4. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, *Spektral'nyy analiz funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Spectral Analysis of Functional Differential Equations], MAKS Press, Moscow, 2016 (in Russian).
5. D. A. Zakora, "Operatornyy podkhod k modeli Il'yushina vyazkouprugogo tela parabolicheskogo tipa" [Operator approach to the Ilyushin model for a viscoelastic body of parabolic type], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **57**, 31–64 (in Russian).
6. D. A. Zakora, "Eksponentsial'naya ustoychivost' odnoy polugruppy i prilozheniya" [Exponential stability of one semigroup and applications], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2018, **103**, No. 5, 702–719 (in Russian).
7. V. G. Zvyagin and M. V. Turbin, "Issledovanie nachal'no-kraevykh zadach dlya matematicheskikh modeley dvizheniya zhidkostey Kel'vina—Foygta" [The study of initial-boundary value problems for mathematical models of the motion of Kelvin–Voigt fluids], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2009, **31**, 3–144 (in Russian).
8. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
9. N. D. Kopachevsky, S. G. Kreyn, and Ngo Zuy Kan, *Operatornye metody v lineynoy gidrodinamike: evolyutsionnye i spektral'nye zadachi* [Operator Methods in Linear Hydrodynamics: Evolution and Spectral Problems], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
10. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
11. A. S. Markus, *Vvedenie v spektral'nuyu teoriyu polinomial'nykh operatornykh puchkov* [Introduction to Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils], Shtiintsa, Kishinev, 1986 (in Russian).
12. A. I. Markushevich, *Teoriya analiticheskikh funktsiy. T. 1* [Theory of Analytic Functions. Vol. 1], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
13. M. B. Orazov, "Nekotorye voprosy spektral'noy teorii nesamosopryazhennykh operatorov i svyazannye s nimi zadachi iz mekhaniki" [Some questions of spectral theory of nonself-adjoint operators and related problems of mechanics], *Doctoral Thesis*, Ashkhabad, 1982 (in Russian).
14. G. V. Radzievskiy, "Kvadratichnyy puchok operatorov" [Quadratic pencil of operators], *Preprint*, Kiev, 1976 (in Russian).
15. M. Sh. Birman and M. Z. Solomjak, *Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space*, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht—Boston—Lancaser—Tokyo, 1986.
16. I. Gohberg, S. Goldberg, and M. A. Kaashoek, *Classes of Linear Operators. Vol. 1*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 1990.
17. J. A. Goldstein, *Semigroups of Linear Operators and Applications*, Oxford University Press, New York, 1989.
18. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-Adjoint Problems for Viscous Fluids*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 2003.
19. J. V. Ralston, "On stationary modes in inviscid rotating fluids," *J. Math. Anal. Appl.*, 1973, **44**, 366–383.

D. A. Zakora

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia;

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: dmitry.zkr@gmail.com, dmitry_@crimea.edu