Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 3 (2018). С. 427–458

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-3-427-458 УДК 517.984

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ С УСЛОВИЯМИ РАЗРЫВА

© 2018 г. **С. А. БУТЕРИН**

Аннотация. Рассматривается возмущение интегральным оператором свертки оператора Штурма—Лиувилля на конечном интервале с краевыми условиями Дирихле и условиями разрыва в середине интервала. Исследуется обратная задача восстановления сверточного слагаемого по спектру. Вопрос сведен к решению так называемого основного нелинейного интегрального уравнения с особенностью, для вывода и исследования которого проведен детальный анализ ядер операторов преобразования для рассматриваемого интегро-дифференциального выражения. Доказывается глобальная разрешимость основного уравнения, что позволяет доказать единственность решения обратной задачи и получить необходимые и достаточные условия ее разрешимости в терминах асимптотики спектра. Доказательство конструктивно и дает алгоритм решения обратной задачи.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение . . . 427
2. Характеристическая функция и операторы преобразования . . . 429
3. Дополнительные свойства ядер операторов преобразования . . . 438
4. Основное нелинейное интегральное уравнение обратной задачи . . . 442
5. Решение основного уравнения на второй половине интервала . . . 447
6. Решение обратной задачи. Доказательство теоремы 1.2 . . . 453
7. Информация о финансовой поддержке . . . 454
Список литературы . . . 454

1. Введение

1.1. Предварительные сведения. Обратные задачи спектрального анализа заключаются в восстановлении операторов по их спектральным характеристикам. Такие задачи часто возникают в математике, механике, физике, электронике, геофизике, метеорологии и других областях естествознания и техники. Наиболее полные результаты в теории обратных задач получены для дифференциальных операторов Штурма—Лиувилля и Дирака (см. монографии [10, 12, 18, 27, 47] и литературу в них), а в последствии — и для дифференциальных операторов высших порядков, а также для дифференциальных систем с произвольным расположением характеристических чисел главной части [17–19, 46, 47]. Однако классические методы решения обратных задач (такие, как метод оператора преобразования [10, 12, 18, 27] и метод спектральных отображений [17, 18, 27, 46, 47]), которые для дифференциальных операторов позволяют получить глобальное решение обратных задач вместе с необходимыми и достаточными условиями их разрешимости, не работают для интегро-дифференциальных и других классов нелокальных операторов. Поэтому общая теория обратных задач для интегро-дифференциальных операторов еще не построена, а имеются лишь отдельные фрагменты, не составляющие общей картины [2–4, 6, 8, 11, 14, 15, 20–26, 31, 32, 34, 36, 41, 48–50]. В то же время, интегро-дифференциальные операторы представляют значительный интерес в связи с многочисленными приложениями (см., например, [35]).

1.2. Постановка задачи. В работе исследуется обратная задача для интегро-дифференциального оператора ℓ, соответствующего следующей краевой задаче $L = L(q, M, \alpha_0, \alpha_1, \beta)$ с условиями разрыва в середине интервала:

$$\ell y = -y'' + q(x)y + \int_0^x M(x-t)y(t)\,dt = \lambda y, \quad x \in \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big) \cup \Big(\frac{\pi}{2}, \pi\Big), \tag{1.1}$$

$$y\Big(\frac{\pi}{2}+0\Big) = \alpha_0 y\Big(\frac{\pi}{2}-0\Big), \quad y'\Big(\frac{\pi}{2}+0\Big) = \alpha_1 y'\Big(\frac{\pi}{2}-0\Big) + \beta y\Big(\frac{\pi}{2}-0\Big), \tag{1.2}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0, \tag{1.3}$$

где $q(x)$, $M(x)$ — комплекснозначные функции, такие что $q(x) \in L_2(0,\pi)$ и

$$(\pi - x)M(x) \in L_2(0,\pi), \tag{1.4}$$

а α_0, α_1, β — комплексные числа, причем выполняется условие регулярности $\alpha_0 + \alpha_1 \neq 0$.

Пусть $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — спектр краевой задачи L. Доказывается следующая теорема.

Теорема 1.1. *Собственные значения λ_k, $k \in \mathbb{N}$, задачи L имеют вид*

$$\lambda_k = \Big(k + \frac{\omega_1 - (-1)^k\omega_2}{\pi k} + \frac{\varkappa_k}{k}\Big)^2, \quad \{\varkappa_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in l_2, \tag{1.5}$$

где

$$\omega_1 = \frac{\beta}{\alpha_0+\alpha_1} + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(x)\,dx, \quad \omega_2 = \frac{\beta}{\alpha_0+\alpha_1} + \frac{\alpha_0-\alpha_1}{2(\alpha_0+\alpha_1)}\Big(\int_{\pi/2}^{\pi} q(x)\,dx - \int_0^{\pi/2} q(x)\,dx\Big). \tag{1.6}$$

Рассмотрим следующую обратную задачу.

Задача 1.1. По заданному спектру $\{\lambda_k\}_{k\geqslant 1}$ краевой задачи L вида (1.1)–(1.3) найти функцию $M(x)$ в предположении, что потенциал $q(x)$ и параметры разрыва $\alpha_0, \alpha_1, \beta$ известны априори.

1.3. История вопроса и основной результат работы. Присутствие разрыва в математической модели связано с разрывными свойствами материалов или с наличием разрыва в соответствующем физическом процессе. Для дифференциальных операторов с условиями разрыва обратные задачи исследовались в [16, 28, 29, 33, 37–40, 42–45]. Различные аспекты обратных задач для интегро-дифференциальных операторов без разрыва изучались в [2, 6, 8, 11, 14, 15, 20–22, 24–26, 31, 32, 34, 41, 48–50]. В частности, в [2, 11, 15] задача 1.1 исследовалась в случае, когда $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ и $\beta = 0$. Так, например, в [15] была установлена единственность ее решения, локальная разрешимость и устойчивость. В [2] было построено глобальное решение задачи 1.1 и получены необходимые и достаточные условия ее разрешимости в терминах асимптотики спектра. При этом в [2] использовался иной, нежели в [15], метод (см. также [22] для случая $q(x) \equiv const$), основанный на сведении обратной задачи к так называемому основному нелинейному интегральному уравнению с особенностью, которое было решено глобально. В дальнейшем, развивая идеи этого метода, были исследованы обратные задачи для интегро-дифференциальных систем Дирака [21], для интегро-дифференциальных операторов на геометрическом графе [20], а также для скалярных интегро-дифференциальных операторов дробных порядков [31, 32].

Целью настоящей работы является доказательство единственности решения задачи 1.1, а также получение необходимых и достаточных условий ее разрешимости в случае наличия разрыва (1.2) у решения соответствующей краевой задачи. При этом, как будет видно из дальнейшего, необходимо наложить на параметры разрыва следующее дополнительное ограничение:

$$\alpha_0 + \alpha_1 \notin (-\infty, 0]. \tag{1.7}$$

Доказывается следующая теорема.

Теорема 1.2. *Пусть задана произвольная комплекснозначная функция $q(x) \in L_2(0,\pi)$ и комплексные числа α_0, α_1, β, причем выполнено* (1.7). *Тогда для всякой последовательности комплексных чисел $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ вида* (1.5), (1.6) *существует единственная* (*с точностью до значений на множестве нулевой меры*) *функция $M(x)$, $(\pi-x)M(x) \in L_2(0,\pi)$, такая что последовательность $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ является спектром соответствующей краевой задачи $L(q, M, \alpha_0, \alpha_1, \beta)$.*

Таким образом, асимптотика (1.5), (1.6) *является необходимым и достаточным условием разрешимости обратной задачи.*

Доказательство теоремы 1.2 конструктивно и дает алгоритм решения обратной задачи (см. ниже алгоритм 6.1). Использованный метод позволяет получить аналогичные результаты и для произвольного конечного набора точек разрыва.

Отметим, что обратные задачи для интегро-дифференциальных операторов с условиями разрыва исследовались также в [3,4,23,36]. При этом в [3,23] рассматривались операторы первого порядка, а в [4,36] — второго. В [36] исследовался вопрос единственности решения обратной задачи в специальном случае, когда терпит разрыв только y', но его величина зависит от λ. В [4] установлена единственность решения и получены необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи в случае $q(x) = 0$, но в более широком классе сверточных ядер, а именно когда под интегралом в (1.1) вместо $y(t)$ присутствует $y'(t)$. Следует отметить, что случай $q(x) \neq 0$ значительно более трудный.

1.4. О структуре работы. В следующем разделе исследуется характеристическая функция краевой задачи L и доказывается теорема 1.1. Для этих целей используется специальное решение уравнения (1.1), а также строятся операторы преобразования, связанные с соответствующим интегро-дифференциальным выражением. В разделе 3 устанавливаются дополнительные свойства ядер операторов преобразования, которые будут использованы в дальнейшем при доказательстве разрешимости обратной задачи. В разделе 4 выводится основное нелинейное интегральное уравнение обратной задачи и отыскивается его решение на первой половине интервала. В разделе 5 находится решение основного уравнения на второй половине интервала, при этом центральным местом является исследование особенности некоторого линейного интегрального уравнения Вольтерра третьего рода. В разделе 6 доказывается теорема 1.2 и приводится конструктивная процедура решения обратной задачи.

2. Характеристическая функция и операторы преобразования

2.1. Характеристическая функция. Построим решение $y = U(x,\lambda)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$U(0,\lambda) = 0, \quad U'(0,\lambda) = 1, \tag{2.1}$$

а также условиям разрыва (1.2). Для этой цели рассмотрим непрерывно дифференцируемые решения $C(x,\lambda) = C(x,\lambda;q,M)$, $S(x,\lambda) = S(x,\lambda;q,M)$ уравнения (1.1), удовлетворяющие начальным условиям

$$C(0,\lambda) = S'(0,\lambda) = 1, \quad C'(0,\lambda) = S(0,\lambda) = 0. \tag{2.2}$$

Здесь и далее для того, чтобы подчеркнуть зависимость той или иной функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ от каких-либо функций $f_1,\ldots,f_m$, иногда будем писать $f(x_1,\ldots,x_n;f_1,\ldots,f_m)$. Непосредственной подстановкой в (1.1), (1.2) и (2.1) легко проверить, что функция $U(x,\lambda)$ имеет вид

$$U(x,\lambda) = \begin{cases} S(x,\lambda), \quad 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}, \\ S(x,\lambda) + (\alpha_0 - 1)S\Big(\dfrac{\pi}{2},\lambda\Big)C_1\Big(x - \dfrac{\pi}{2},\lambda\Big) + \\ \qquad + \Big((\alpha_1 - 1)S'\Big(\dfrac{\pi}{2},\lambda\Big) + \beta S\Big(\dfrac{\pi}{2},\lambda\Big)\Big)S_1\Big(x - \dfrac{\pi}{2},\lambda\Big), \quad \dfrac{\pi}{2} < x \leqslant \pi, \end{cases} \tag{2.3}$$

где

$$C_1(x,\lambda) = C(x,\lambda;q_1,M), \quad S_1(x,\lambda) = S(x,\lambda;q_1,M), \quad q_1(x) = q\Big(x + \frac{\pi}{2}\Big), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}. \tag{2.4}$$

Нетрудно видеть, что в силу единственности решения задачи Коши (1.1), (1.2), (2.1) собственные значения краевой задачи L совпадает с нулями целой функции

$$\Delta(\lambda) := U(\pi,\lambda) \tag{2.5}$$

с учетом кратности, которая называется *характеристической функцией* задачи L.

2.2. Операторы преобразования. В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Интегральные уравнения*

$$F(x,t,\tau)=F_0(x,t,\tau)+\frac{1}{2}\Big(\int\limits_t^x q(s)\,ds\int\limits_\tau^t F(s,\xi,\tau)\,d\xi+\int\limits_{\frac{t+\tau}{2}}^t q(s)\,ds\int\limits_\tau^{2s-t}F(s,\xi,\tau)\,d\xi-$$
$$-\int\limits_{\frac{\tau-t}{2}+x}^x q(s)\,ds\int\limits_\tau^{2(s-x)+t}F(s,\xi,\tau)\,d\xi+\int\limits_0^{t-\tau}M(s)\,ds\int\limits_t^x d\xi\int\limits_\tau^{t-s}F(\xi-s,\eta,\tau)\,d\eta+$$
$$+\int\limits_0^{t-\tau}M(s)\,ds\int\limits_{\frac{t+\tau+s}{2}}^t d\xi\int\limits_\tau^{2\xi-t-s}F(\xi-s,\eta,\tau)\,d\eta-$$
$$-\int\limits_0^{t-\tau}M(s)\,ds\int\limits_{\frac{s+\tau-t}{2}+x}^x d\xi\int\limits_\tau^{2(\xi-x)+t-s}F(\xi-s,\eta,\tau)\,d\eta\Big),\quad 0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant x\leqslant\pi,\tag{2.6}$$

$$G(x,t,\tau)=G_0(x,t,\tau)+\frac{1}{2}\Big(\int\limits_0^{x-t}ds\int\limits_{\tau+s}^{t+s}q(\xi)G(\xi,\xi-s,\tau)\,d\xi+\int\limits_0^{\frac{t-\tau}{2}}ds\int\limits_{\tau+s}^{t-s}q(\xi)G(\xi,\xi-s,\tau)\,d\xi+$$
$$+\int\limits_{x-t}^{x-\frac{t+\tau}{2}}ds\int\limits_{\tau+s}^{2x-t-s}q(\xi)G(\xi,\xi-s,\tau)\,d\xi+\int\limits_0^{t-\tau}M(s)\,ds\int\limits_0^{x-t}d\xi\int\limits_\tau^{t-s}G(\xi+\eta,\eta,\tau)\,d\eta+$$
$$+\int\limits_0^{t-\tau}M(s)\,ds\int\limits_0^{\frac{t-\tau-s}{2}}d\xi\int\limits_\tau^{t-s-2\xi}G(\xi+\eta,\eta,\tau)\,d\eta+$$
$$+\int\limits_0^{t-\tau}M(s)\,ds\int\limits_{x-t}^{x-\frac{t+\tau+s}{2}}d\xi\int\limits_\tau^{2(x-\xi)-t-s}G(\xi+\eta,\eta,\tau)\,d\eta\Big),\quad 0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant x\leqslant\pi,\tag{2.7}$$

с непрерывными свободными членами $F_0(x,t,\tau)$ и $G_0(x,t,\tau)$ имеют единственные решения $F(x,t,\tau)=F(x,t,\tau;q,M)$ и $G(x,t,\tau)=G(x,t,\tau;q,M)$, соответственно, также являющиеся, в свою очередь, непрерывными функциями.

Доказательство. Для уравнения (2.6) метод последовательных приближений дает

$$F(x,t,\tau)=\sum_{k=0}^\infty F_k(x,t,\tau),\tag{2.8}$$

где

$$F_{k+1}(x,t,\tau)=\frac{1}{2}\Big(\int\limits_t^x q(s)\,ds\int\limits_\tau^t F_k(s,\xi,\tau)\,d\xi+\int\limits_{\frac{t+\tau}{2}}^t q(s)\,ds\int\limits_\tau^{2s-t}F_k(s,\xi,\tau)\,d\xi-$$
$$-\int\limits_{\frac{\tau-t}{2}+x}^x q(s)\,ds\int\limits_\tau^{2(s-x)+t}F_k(s,\xi,\tau)\,d\xi+\int\limits_0^{t-\tau}M(s)\,ds\int\limits_t^x d\xi\int\limits_\tau^{t-s}F_k(\xi-s,\eta,\tau)\,d\eta+$$

$$+\int\limits_0^{t-\tau} M(s)\,ds \int\limits_{\frac{t+\tau+s}{2}}^{t} d\xi \int\limits_{\tau}^{2\xi-t-s} F_k(\xi-s,\eta,\tau)\,d\eta-$$

$$-\int\limits_0^{t-\tau} M(s)\,ds \int\limits_{\frac{s+\tau-t}{2}+x}^{x} d\xi \int\limits_{\tau}^{2(\xi-x)+t-s} F_k(\xi-s,\eta,\tau)\,d\eta\Big), \quad k\geqslant 0. \quad (2.9)$$

Положим

$$F_0 := \max_{0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant x\leqslant\pi} |F_0(x,t,\tau)|, \quad C=\int\limits_0^{\pi}|q(s)|\,ds+\frac{3}{4}\int\limits_0^{\pi}(\pi-s)|M(s)|\,ds.$$

Покажем, что

$$|F_k(x,t,\tau)|\leqslant F_0\frac{(Ct)^k}{k!}, \quad 0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant x\leqslant\pi, \quad k\geqslant 0. \quad (2.10)$$

В самом деле, при $k=0$ оценка (2.10) очевидна. Предполагая, что она верна при $k=j$ для некоторого $j\geqslant 0$, покажем ее справедливость и для $k=j+1$. Согласно (2.9) и (2.10), будем иметь

$$|F_{j+1}(x,t,\tau)|\leqslant\frac{1}{2}\Big(\int\limits_{\frac{t+\tau}{2}}^{x}|q(s)|\,ds\int\limits_{\tau}^{t}|F_j(s,\xi,\tau)|\,d\xi+\int\limits_{\frac{\tau-t}{2}+x}^{x}|q(s)|\,ds\int\limits_{\tau}^{t}|F_j(s,\xi,\tau)|\,d\xi+$$

$$+\int\limits_0^{t-\tau}|M(s)|\,ds\int\limits_{\frac{t+\tau+s}{2}}^{x}d\xi\int\limits_{\tau}^{t}|F_j(\xi-s,\eta,\tau)|\,d\eta+\int\limits_0^{t-\tau}|M(s)|\,ds\int\limits_{\frac{s+\tau-t}{2}+x}^{x}d\xi\int\limits_{\tau}^{t}|F_j(\xi-s,\eta,\tau)|\,d\eta\Big).$$

Поскольку в последних двух интегралах $2x-t-\tau-s\leqslant 2(\pi-s)$ и $t-\tau-s\leqslant\pi-s$, приходим к оценке

$$|F_{j+1}(x,t,\tau)|\leqslant F_0\frac{C^j}{2j!}\Big(\int\limits_{\frac{t+\tau}{2}}^{x}|q(s)|\,ds\int\limits_{\tau}^{t}\xi^j\,d\xi+\int\limits_{\frac{\tau-t}{2}+x}^{x}|q(s)|\,ds\int\limits_{\tau}^{t}\xi^j\,d\xi+$$

$$+\frac{3}{2}\int\limits_0^{t-\tau}(\pi-s)|M(s)|\,ds\int\limits_{\tau}^{t}\eta^j\,d\eta\Big)\leqslant F_0\frac{(Ct)^{j+1}}{(j+1)!},$$

которая совпадает с (2.10) для $k=j+1$. Таким образом, ряд (2.8) сходится равномерно в пирамиде $0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant x\leqslant\pi$, а значит, его сумма является решением уравнения (2.6).

Для единственности достаточно показать, что $F_0(x,t,\tau)\equiv 0$ влечет $F(x,t,\tau)\equiv 0$. В самом деле, при нулевом свободном члене определим $F_k(x,t,\tau)$ по формулам (2.9), положив $F_0(x,t,\tau):=F(x,t,\tau)$. Тогда, очевидно, $F_k(x,t,\tau)=F(x,t,\tau)$ для всех $k\geqslant 0$, и в силу (2.10) приходим к $F(x,t,\tau)\equiv 0$.

Для уравнения (2.7) рассуждения аналогичны. □

Заметим, что в уравнениях (2.6) и (2.7) переменная τ фактически является параметром, т. е. утверждение леммы 2.1 останется справедливым, если зафиксировать $\tau\in[0,\pi)$.

Следующая лемма дает операторы преобразования для функций $S(x,\lambda)$ и $C(x,\lambda)$.

Лемма 2.2. *Положим $\rho^2=\lambda$. Имеют место следующие представления*:

$$S(x,\lambda)=\frac{\sin\rho x}{\rho}+\int\limits_0^x P(x,t)\frac{\sin\rho(x-t)}{\rho}\,dt, \quad (2.11)$$

$$C(x,\lambda)=\cos\rho x+\int\limits_0^x Q(x,t)\cos\rho(x-t)\,dt, \quad (2.12)$$

где функции

$$P(x,t)=P(x,t;q,M)=F(x,t,0;q,M),\quad Q(x,t)=Q(x,t;q,M)=G(x,t,0;q,M) \tag{2.13}$$

являются решениями уравнений (2.6) *и* (2.7), *соответственно, при* $\tau=0$ *и*

$$F_0(x,t,0)=\frac{1}{2}\Big(\int\limits_{\frac{t}{2}}^{x-\frac{t}{2}} q(s)\,ds+\int\limits_0^t (x-t)M(s)\,ds\Big), \tag{2.14}$$

$$G_0(x,t,0)=\frac{1}{2}\Big(\int\limits_0^{x-\frac{t}{2}} q(s)\,ds+\int\limits_0^{\frac{t}{2}} q(s)\,ds+\int\limits_0^t (x-s)M(s)\,ds\Big).$$

При этом функции $P(x,t)$ *и* $Q(x,t)$ *непрерывны в треугольнике* $0\leqslant t\leqslant x\leqslant\pi$. *Кроме того,* $P(x,\,\cdot\,)$, $Q(x,\,\cdot\,)\in W_2^1[0,x]$ *для всех* $x\in(0,\pi]$ *и* $P(\,\cdot\,,t)$, $Q(\,\cdot\,,t)\in W_2^1[t,\pi]$ *для всех* $t\in[0,\pi)$, *а также*

$$P(x,0)=Q(x,0)=\frac{1}{2}\int\limits_0^x q(t)\,dt,\quad P(x,x)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant\pi. \tag{2.15}$$

Доказательство. Подстановкой легко проверить, что задача Коши (1.1), (2.2) для функции $y=S(x,\lambda)$ равносильна интегральному уравнению

$$S(x,\lambda)=\frac{\sin\rho x}{\rho}+\int\limits_0^x \frac{\sin\rho(x-t)}{\rho}\Big(q(t)S(t,\lambda)+\int\limits_0^t M(t-s)S(s,\lambda)\,ds\Big)\,dt. \tag{2.16}$$

Подставляя искомое представление (2.11) в уравнение (2.16) и умножая на ρ, получим

$$\int\limits_0^x P(x,t)\sin\rho(x-t)\,dt=\sum_{\nu=1}^4 \mathcal{P}_\nu(x,\lambda), \tag{2.17}$$

где

$$\mathcal{P}_1(x,\lambda)=\int\limits_0^x \sin\rho(x-t)q(t)\,dt\int\limits_0^t \cos\rho s\,ds,$$

$$\mathcal{P}_2(x,\lambda)=\int\limits_0^x \sin\rho(x-t)\,dt\int\limits_0^t M(t-s)\,ds\int\limits_0^s \cos\rho\xi\,d\xi,$$

$$\mathcal{P}_3(x,\lambda)=\int\limits_0^x \sin\rho(x-t)q(t)\,dt\int\limits_0^t P(t,t-s)\,ds\int\limits_0^s \cos\rho\xi\,d\xi,$$

$$\mathcal{P}_4(x,\lambda)=\int\limits_0^x \sin\rho(x-t)\,dt\int\limits_0^t M(t-s)\,ds\int\limits_0^s P(s,s-\xi)\,d\xi\int\limits_0^\xi \cos\rho\eta\,d\eta.$$

Поскольку

$$\sin\rho(x-t)\cos\rho s=\frac{1}{2}\Big(\sin\rho(x-t+s)+\sin\rho(x-t-s)\Big),$$

преобразуя переменные и меняя порядок интегрирования, получаем

$$\mathcal{P}_1(x,\lambda)=\frac{1}{2}\int\limits_0^x q(t)\,dt\int\limits_{x-2t}^x \sin\rho s\,ds=\frac{1}{2}\int\limits_0^x \sin\rho(x-t)\,dt\int\limits_{\frac{t}{2}}^{x-\frac{t}{2}} q(s)\,ds, \tag{2.18}$$

$$\mathcal{P}_2(x,\lambda)=\frac{1}{2}\int\limits_0^x\Big(\int\limits_{x-t}^x\sin\rho s\,ds\int\limits_0^{x-s}M(\xi)\,d\xi+\int\limits_{x-2t}^{x-t}\sin\rho s\,ds\int\limits_0^{2t-x+s}M(\xi)\,d\xi\Big)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^x\sin\rho t\,dt\int\limits_{x-t}^x ds\int\limits_0^{x-t}M(\xi)\,d\xi=\frac{1}{2}\int\limits_0^x(x-t)\sin\rho(x-t)\,dt\int\limits_0^t M(s)\,ds,\quad(2.19)$$

$$\mathcal{P}_3(x,\lambda)=\frac{1}{2}\int\limits_0^x q(t)\,dt\Big(\int\limits_{x-t}^x\sin\rho s\,ds\int\limits_{s-x+t}^t P(t,t-\xi)\,d\xi+$$

$$+\int\limits_{x-2t}^{x-t}\sin\rho s\,ds\int\limits_{x-t-s}^t P(t,t-\xi)\,d\xi\Big)dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^x\sin\rho(x-t)\Big(\int\limits_t^x q(s)\,ds\int\limits_0^t P(s,\xi)\,d\xi+$$

$$+\int\limits_{\frac{t}{2}}^t q(s)\,ds\int\limits_0^{2s-t}P(s,\xi)\,d\xi-\int\limits_{x-\frac{t}{2}}^x q(s)\,ds\int\limits_0^{2(s-x)+t}P(s,\xi)\,d\xi\Big)dt,\quad(2.20)$$

$$\mathcal{P}_4(x,\lambda)=\frac{1}{2}\int\limits_0^x\Big(\int\limits_{x-t}^x\sin\rho s\,ds\int\limits_0^{x-s}M(\xi)\,d\xi\int\limits_0^{x-s-\xi}P(t-\xi,\eta)\,d\eta+$$

$$+\int\limits_{x-2t}^{x-t}\sin\rho s\,ds\int\limits_0^{2t-x+s}M(\xi)\,d\xi\int\limits_0^{2t-x+s-\xi}P(t-\xi,\eta)\,d\eta\Big)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^x\sin\rho(x-t)\Big(\int\limits_0^t M(s)\,ds\int\limits_t^x d\xi\int\limits_0^{t-s}P(\xi-s,\eta)\,d\eta+$$

$$+\int\limits_0^t M(s)\,ds\int\limits_{\frac{t+s}{2}}^t d\xi\int\limits_0^{2\xi-t-s}P(\xi-s,\eta)\,d\eta-\int\limits_0^t M(s)\,ds\int\limits_{\frac{s-t}{2}+x}^x d\xi\int\limits_0^{2(\xi-x)+t-s}P(\xi-s,\eta)\,d\eta\Big)dt.\quad(2.21)$$

Согласно (2.18)–(2.21) тождество (2.17) выполняется при всех $\lambda\in\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда функция $P(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$P(x,t)=\frac{1}{2}\Big(\int\limits_{\frac{t}{2}}^{x-\frac{t}{2}}q(s)\,ds+\int\limits_0^t(x-t)M(s)\,ds+\int\limits_t^x q(s)\,ds\int\limits_0^t P(s,\xi)\,d\xi+$$

$$+\int\limits_{\frac{t}{2}}^t q(s)\,ds\int\limits_0^{2s-t}P(s,\xi)\,d\xi-\int\limits_{x-\frac{t}{2}}^x q(s)\,ds\int\limits_0^{2(s-x)+t}P(s,\xi)\,d\xi+$$

$$+\int\limits_0^t M(s)\,ds\int\limits_t^x d\xi\int\limits_0^{t-s}P(\xi-s,\eta)\,d\eta+\int\limits_0^t M(s)\,ds\int\limits_{\frac{t+s}{2}}^t d\xi\int\limits_0^{2\xi-t-s}P(\xi-s,\eta)\,d\eta-$$

$$-\int\limits_0^t M(s)\,ds\int\limits_{\frac{s-t}{2}+x}^x d\xi\int\limits_0^{2(\xi-x)+t-s}P(\xi-s,\eta)\,d\eta\Big),\quad 0\leqslant t\leqslant x\leqslant\pi,\quad(2.22)$$

которое, в свою очередь, в соответствии с (2.13), (2.14) равносильно уравнению (2.6) при $\tau=0$.

Остальные свойства функции $P(x,t)$ непосредственно вытекают из вида уравнения (2.22). Для $C(x,\lambda)$ и $Q(x,\lambda)$ доказательство аналогично. $\square$

2.3. Различные представления характеристической функции. Обозначим

$$f*g(x)=\int\limits_0^x f(x-t)g(t)\,dt,\quad f*1(x)=\int\limits_0^x f(t)\,dt.$$

Следующая лемма дает основополагающее представление для характеристической функции.

Лемма 2.3. *Характеристическая функция краевой задачи L имеет вид*

$$\Delta(\lambda)=\frac{\alpha_0+\alpha_1}{2}\frac{\sin\rho\pi}{\rho}+\int\limits_0^\pi w(x)\frac{\sin\rho x}{\rho}\,dx,\quad w(x)\in W_2^1[0,\pi],\tag{2.23}$$

причем функция $w(x)$ удовлетворяет краевым условиям

$$w(0)=\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha_0-\alpha_1}{4}\Big(\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}q(x)\,dx-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}q(x)\,dx\Big),\quad w(\pi)=\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha_0+\alpha_1}{4}\int\limits_0^\pi q(x)\,dx.\tag{2.24}$$

При этом имеет место представление

$$w(\pi-x)=\frac{\beta}{2}+w_1(x)+V(x),\quad 0\leqslant x\leqslant\pi,\tag{2.25}$$

где

$$V(x)=V(x;M)=\frac12\begin{cases}(\alpha_0-1)\Big(w_2+w_3+w_2*w_3\Big)(x)+\\ \qquad+(\alpha_1-1)\Big(w_4+w_5+w_4*w_5\Big)(x)+\\ \qquad\qquad+\beta\Big(w_2+w_4+w_2*w_4\Big)*1(x),\quad 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ (\alpha_0-1)V_1(x)+(\alpha_1-1)V_2(x)+\beta V_3(x),\quad \dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\pi,\end{cases}\tag{2.26}$$

$$w_1(x)=w_1(x;M)=P(\pi,x;q,M),\quad 0\leqslant x\leqslant\pi,\tag{2.27}$$

$$\left.\begin{array}{r}w_2(x)=w_2(x;M)=P\Big(\dfrac{\pi}{2},x;q,M\Big),\ w_3(x)=w_3(x;M)=Q\Big(\dfrac{\pi}{2},x;q_1,M\Big),\\ w_4(x)=w_4(x;M)=P\Big(\dfrac{\pi}{2},x;q_1,M\Big),\ w_5(x)=w_5(x;M)=K\Big(\dfrac{\pi}{2},x;q,M\Big),\\ w_6(x)=w_6(x;M)=w_4*1(x),\qquad\qquad\end{array}\right\}\ 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\tag{2.28}$$

$$K(x,t;q,M)=P(x,t;q,M)+\int\limits_0^t P_x(x,\tau;q,M)\,d\tau,\tag{2.29}$$

$$V_1(x)=V_1(x;M)=w_3(\pi-x)-w_2(\pi-x)+\int\limits_{x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}w_2(t)w_3(x-t)\,dt-$$
$$-\int\limits_{\pi-x}^{\frac{\pi}{2}}w_2(t)w_3(x-\pi+t)\,dt+\int\limits_0^{x-\frac{\pi}{2}}w_2(t)w_3(\pi-x+t)\,dt,\tag{2.30}$$

$$V_2(x)=V_2(x;M)=w_5(\pi-x)-w_4(\pi-x)+\int\limits_{x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}w_4(t)w_5(x-t)\,dt-$$

$$-\int_{\pi-x}^{\frac{\pi}{2}} w_4(t)w_5(x-\pi+t)\,dt + \int_0^{x-\frac{\pi}{2}} w_4(t)w_5(\pi-x+t)\,dt, \quad (2.31)$$

$$V_3(x) = V_3(x;M) = w_6(\pi-x) + w_2 * 1(\pi-x) + \int_{x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} w_2(t)w_6(x-t)\,dt -$$

$$-\int_{\pi-x}^{\frac{\pi}{2}} w_2(t)w_6(x-\pi+t)\,dt + \int_0^{x-\frac{\pi}{2}} w_2(t)w_6(\pi-x+t)\,dt. \quad (2.32)$$

Доказательство. Согласно лемме 2.2, функции

$$P_1(x,t) := P(x,t;q_1,M), \quad Q_1(x,t) := Q(x,t;q_1,M)$$

непрерывны в треугольнике $0 \leqslant t \leqslant x \leqslant \pi/2$ и $P_1(x,\,\cdot\,)$, $Q_1(x,\,\cdot\,) \in W_2^1[0,x]$ для всех $x \in (0,\pi/2]$, а также

$$P_1(x,0) = Q_1(x,0) = \frac{1}{2}\int_0^x q_1(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+x} q(t)\,dt, \quad P_1(x,x) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}. \quad (2.33)$$

Таким образом, согласно (2.15), (2.27)–(2.29) и (2.33) имеем

$$w_1(x) \in W_2^1[0,\pi], \quad w_\nu(x) \in W_2^1\Big[0,\frac{\pi}{2}\Big], \ \ \nu = \overline{2,6}, \quad (2.34)$$

$$\left.\begin{aligned} w_1(0) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(t)\,dt, \quad w_2(0) = w_5(0) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)\,dt, \\ w_3(0) = w_4(0) = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} q(t)\,dt, \quad w_6(0) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (2.35)$$

$$w_1(\pi) = w_2\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = w_4\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 0. \quad (2.36)$$

Далее, согласно (2.3) и (2.5) получаем

$$\Delta(\lambda) = S(\pi,\lambda) + (\alpha_0-1)S\Big(\frac{\pi}{2},\lambda\Big)C_1\Big(\frac{\pi}{2},\lambda\Big) + \Big((\alpha_1-1)S'\Big(\frac{\pi}{2},\lambda\Big) + \beta S\Big(\frac{\pi}{2},\lambda\Big)\Big)S_1\Big(\frac{\pi}{2},\lambda\Big), \quad (2.37)$$

где в силу (2.4), (2.11)–(2.13), (2.27) и (2.28) будем иметь

$$S(\pi,\lambda) = \frac{1}{\rho}\Big(\sin\rho\pi + \int_0^{\pi} w_1(x)\sin\rho(\pi-x)\,dx\Big), \quad (2.38)$$

$$S\Big(\frac{\pi}{2},\lambda\Big) = \frac{1}{\rho}\Big(\sin\frac{\rho\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} w_2(x)\sin\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx\Big), \quad (2.39)$$

$$C_1\Big(\frac{\pi}{2},\lambda\Big) = \cos\frac{\rho\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} w_3(x)\cos\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx, \quad (2.40)$$

$$S_1\Big(\frac{\pi}{2},\lambda\Big) = \frac{1}{\rho}\Big(\sin\frac{\rho\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} w_4(x)\sin\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx\Big). \quad (2.41)$$

Кроме того, дифференцируя (2.11) с учетом (2.15), а затем интегрируя по частям, получаем

$$S'(x,\lambda)=\cos\rho x+\int\limits_0^x P_x(x,t)\frac{\sin\rho(x-t)}{\rho}\,dt+\int\limits_0^x P(x,t)\cos\rho(x-t)\,dt=$$

$$=\cos\rho x+\int\limits_0^x \cos\rho(x-t)\,dt\int\limits_0^t P_x(x,\tau)\,d\tau+\int\limits_0^x P(x,t)\cos\rho(x-t)\,dt.$$

Таким образом, согласно определениям (2.13) и (2.29) будем иметь

$$S'(x,\lambda)=\cos\rho x+\int\limits_0^x K(x,t;q,M)\cos\rho(x-t)\,dt,$$

и, наконец, согласно (2.28) приходим к представлению

$$S'\Big(\frac{\pi}{2},\lambda\Big)=\cos\frac{\rho\pi}{2}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_5(x)\cos\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx. \tag{2.42}$$

Подставляя представления (2.38)–(2.42) в (2.37), получаем

$$\Delta(\lambda)=\sum_{j=0}^{9}\Delta_j(\lambda), \tag{2.43}$$

где

$$\Delta_0(\lambda):=\frac{\alpha_0+\alpha_1}{2}\frac{\sin\rho\pi}{\rho}+\int\limits_0^{\pi}\Big(\frac{\beta}{2}+w_1(x)\Big)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx, \tag{2.44}$$

$$\Delta_1(\lambda):=\frac{\alpha_0-1}{\rho}\cos\frac{\rho\pi}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_2(x)\sin\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx=\frac{\alpha_0-1}{2\rho}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_2(x)\Big(\sin\rho(\pi-x)-\sin\rho x\Big)\,dx=$$

$$=\frac{\alpha_0-1}{2}\Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_2(x)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} w_2(\pi-x)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx\Big), \tag{2.45}$$

$$\Delta_2(\lambda):=\frac{\alpha_0-1}{\rho}\sin\frac{\rho\pi}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_3(x)\cos\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx=$$

$$=\frac{\alpha_0-1}{2}\Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_3(x)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} w_3(\pi-x)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx\Big), \tag{2.46}$$

$$\Delta_3(\lambda):=\frac{\alpha_0-1}{\rho}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_2(x)\sin\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_3(x)\cos\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx=$$

$$=\frac{\alpha_0-1}{2\rho}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_2(x)\,dx\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_3(t)\Big(\sin\rho(\pi-x-t)+\sin\rho(t-x)\Big)\,dt=$$

$$=\frac{\alpha_0-1}{2\rho}\Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_2(x)\,dx\int\limits_x^{x+\frac{\pi}{2}} w_3(t-x)\sin\rho(\pi-t)\,dt+$$

$$+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_2(x)\,dx \int\limits_{x+\frac{\pi}{2}}^{x+\pi} w_3(\pi+x-t)\sin\rho(\pi-t)\,dt\Big) =$$

$$= \frac{\alpha_0-1}{2}\Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_2 * w_3(x)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\Big(\int\limits_{x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} w_2(t)w_3(x-t)\,dt -$$

$$-\int\limits_{\pi-x}^{\frac{\pi}{2}} w_2(t)w_3(x-\pi+t)\,dt + \int\limits_0^{x-\frac{\pi}{2}} w_2(t)w_3(\pi-x+t)\,dt\Big)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx\Big) \quad (2.47)$$

и, аналогично,

$$\Delta_4(\lambda) := \frac{\alpha_1-1}{\rho}\cos\frac{\rho\pi}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_4(x)\sin\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx =$$

$$= \frac{\alpha_1-1}{2}\Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_4(x)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} w_4(\pi-x)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx\Big), \quad (2.48)$$

$$\Delta_5(\lambda) := \frac{\alpha_1-1}{\rho}\sin\frac{\rho\pi}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_5(x)\cos\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx =$$

$$= \frac{\alpha_1-1}{2}\Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_5(x)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} w_5(\pi-x)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx\Big), \quad (2.49)$$

$$\Delta_6(\lambda) := \frac{\alpha_1-1}{\rho}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_4(x)\sin\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_5(x)\cos\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx =$$

$$= \frac{\alpha_1-1}{2}\Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_4 * w_5(x)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\Big(\int\limits_{x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} w_4(t)w_5(x-t)\,dt-$$

$$-\int\limits_{\pi-x}^{\frac{\pi}{2}} w_4(t)w_5(x-\pi+t)\,dt + \int\limits_0^{x-\frac{\pi}{2}} w_4(t)w_5(\pi-x+t)\,dt\Big)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx\Big), \quad (2.50)$$

$$\Delta_7(\lambda) := \frac{\beta}{\rho^2}\sin\frac{\rho\pi}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_4(x)\sin\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx = \frac{\beta}{\rho}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_4(x)\sin\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\rho x\,dx =$$

$$= \frac{\beta}{2}\Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_6(x)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} w_6(\pi-x)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx\Big), \quad (2.51)$$

$$\Delta_8(\lambda) := \frac{\beta}{\rho^2}\sin\frac{\rho\pi}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_2(x)\cos\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx =$$

$$= \frac{\beta}{2}\Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_2 * 1(x)\frac{\sin\rho(\pi - x)}{\rho}\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} w_2 * 1(\pi - x)\frac{\sin\rho(\pi - x)}{\rho}\,dx\Big), \quad (2.52)$$

$$\Delta_9(\lambda) := \frac{\beta}{\rho^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_2(x)\sin\rho\Big(\frac{\pi}{2} - x\Big)\,dx\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_4(x)\sin\rho\Big(\frac{\pi}{2} - x\Big)\,dx =$$

$$= \frac{\beta}{\rho}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_2(x)\sin\rho\Big(\frac{\pi}{2} - x\Big)\,dx\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_6(x)\cos\rho\Big(\frac{\pi}{2} - x\Big)\,dx =$$

$$= \frac{\beta}{2}\Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_2 * w_6(x)\frac{\sin\rho(\pi - x)}{\rho}\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\Big(\int\limits_{x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} w_2(t)w_6(x - t)\,dt -$$

$$- \int\limits_{\pi - x}^{\frac{\pi}{2}} w_2(t)w_6(x - \pi + t)\,dt + \int\limits_0^{x-\frac{\pi}{2}} w_2(t)w_6(\pi - x + t)\,dt\Big)\frac{\sin\rho(\pi - x)}{\rho}\,dx\Big). \quad (2.53)$$

Подставляя (2.44)–(2.53) в (2.43), приходим к (2.23), где функция $w(x)$ имеет вид (2.25). При этом, согласно (2.26), (2.30)–(2.32) и (2.34) заключаем, что $w(x) \in W_2^1[0, \pi/2]$ и $w(x) \in W_2^1[\pi/2, \pi]$. Далее, используя (2.26), (2.30)–(2.32) и (2.35), вычисляем

$$V\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{\alpha_0 - 1}{2}(w_3 + w_2 * w_3)\Big(\frac{\pi}{2}\Big) + \frac{\alpha_1 - 1}{2}(w_5 + w_4 * w_5)\Big(\frac{\pi}{2}\Big) +$$
$$+ \frac{\beta}{2}(w_2 + w_4 + w_2 * w_4) * 1\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = V\Big(\frac{\pi}{2} + 0\Big),$$

что вместе с (2.25) и (2.34) дает $w(x) \in W_2^1[0, \pi]$. Наконец, используя (2.25), (2.26), (2.30)–(2.32) и (2.36), получаем (2.24). □

Известным методом (см., например, [12]) при помощи теоремы Руше [13] доказывается следующее утверждение.

Лемма 2.4. *Всякая функция* $\Delta(\lambda)$ *вида* (2.23), (2.24) *имеет бесконечное множество нулей* λ_k, $k \in \mathbb{N}$, *вида* (1.5), (1.6).

Отметим, что теорема 1.1 является прямым следствием леммы 2.4. Также известным методом при помощи теоремы Адамара [9] о разложении целой функции в бесконечное произведение доказывается следующее утверждение (см., например, [15]).

Лемма 2.5. *Всякая функция* $\Delta(\lambda)$ *вида* (2.23) *определяется своими нулями однозначно. При этом*

$$\Delta(\lambda) = \pi\frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k - \lambda}{k^2}. \quad (2.54)$$

3. Дополнительные свойства ядер операторов преобразования

3.1. Предварительное наблюдение. Заметим, что для всякого фиксированного $\delta \in (0, \pi]$ каждое из интегральных уравнений (2.6) и (2.7) можно сузить на множество

$$\mathcal{D}_\delta := \Big\{(x, t, \tau) : 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant \min\{\delta, x\}\Big\}.$$

Иными словами, при $(x, t, \tau) \in \mathcal{D}_\delta$ правые части этих уравнений зависят от значений неизвестной функции только на множестве $\mathcal{D}_\delta$. При этом очевидно, что на $\mathcal{D}_\delta$ решения соответствующих «суженных» уравнений совпадают с решениями исходных. Поэтому функции $F(x, t, \tau; q, M)$ и

$G(x,t,\tau;q,M)$ при $(x,t,\tau)\in\mathcal{D}_\delta$ зависят от значений функции $M(s)$ только при $s\in(0,\delta)$. В частности, ввиду (2.13), функции $P(x,t)$ и $Q(x,t)$ на трапеции

$$D_\delta := \Big\{(x,t) : 0\leqslant x\leqslant \pi,\ 0\leqslant t\leqslant \min\{\delta,x\}\Big\}$$

зависят от $M(s)$ тоже только при $s\in(0,\delta)$. Введем обозначения

$$\|f\|_\delta := \|f\|_{L_2(0,\delta)} = \sqrt{\int_0^\delta |f(x)|^2\,dx},\quad B_{\delta,r} := \{f : \|f\|_\delta\leqslant r\},\quad B_\delta := B_{\delta,1}. \tag{3.1}$$

3.2. Локальные оценки. Следующая лемма дает оценки для ядер $P(x,t)=P(x,t;q,M)$ и $Q(x,t)=Q(x,t;q,M)$ при $(x,t)\in D_\delta$ для малых $\delta>0$.

Лемма 3.1. *Существуют $\delta_q\in(0,\pi]$ и $C_q>0$, зависящие только от функции $q(x)$, такие что для любого $\delta\in(0,\delta_q]$ и для всех $M,\ \tilde M\in B_\delta$ при $(x,t)\in D_\delta$ справедливы оценки*

$$|P(x,t)|\leqslant C_q,\quad |\hat P(x,t)|\leqslant C_q\sqrt{\delta}\|\hat M\|_\delta,\quad |Q(x,t)|\leqslant C_q,\quad |\hat Q(x,t)|\leqslant C_q\sqrt{\delta}\|\hat M\|_\delta, \tag{3.2}$$

где $\hat P(x,t)=P(x,t;q,M)-P(x,t;q,\tilde M)$, $\hat Q(x,t)=Q(x,t;q,M)-Q(x,t;q,\tilde M)$, $\hat M=M-\tilde M$.

Доказательство. Докажем утверждение леммы для $P(x,t)$; для $Q(x,t)$ доказательство аналогично. Положим

$$C_q := \pi+\max\Big\{\pi,\int_0^\pi |q(x)|\,dx\Big\},\quad \delta_q := (2C_q)^{-1},\quad P := \max_{(x,t)\in D_\delta}|P(x,t)|,\ \ \hat P := \max_{(x,t)\in D_\delta}|\hat P(x,t)|.$$

Тогда в силу (2.22) имеем $P\leqslant C_q/2+C_q\delta P$, т. е. $P\leqslant(2-2\delta C_q)^{-1}C_q$. Учитывая, что $2C_q\delta\leqslant 2C_q\delta_q=1$, приходим к первой оценке в (3.2). Далее, почленно вычитая уравнение (2.22) для $P(x,t;q,\tilde M)$ (т. е. при $M(x)=\tilde M(x)$) из уравнения для $P(x,t;q,M)$, будем иметь

$$\hat P(x,t)=\frac12\Big(\int_t^x q(s)\,ds\int_0^t \hat P(s,\xi)\,d\xi+\int_{\frac t2}^t q(s)\,ds\int_0^{2s-t}\hat P(s,\xi)\,d\xi-$$

$$-\int_{x-\frac t2}^x q(s)\,ds\int_0^{2(s-x)+t}\hat P(s,\xi)\,d\xi\Big)+\frac12\int_0^t \hat M(s)\Big((x-t)+\int_t^x d\xi\int_0^{t-s}P(\xi-s,\eta)\,d\eta+$$

$$+\int_{\frac{t+s}{2}}^t d\xi\int_0^{2\xi-t-s}P(\xi-s,\eta)\,d\eta-\int_{\frac{s-t}{2}+x}^x d\xi\int_0^{2(\xi-x)+t-s}P(\xi-s,\eta)\,d\eta\Big)\,ds+$$

$$+\frac12\int_0^t \tilde M(s)\Big(\int_t^x d\xi\int_0^{t-s}\hat P(\xi-s,\eta)\,d\eta+\int_{\frac{t+s}{2}}^t d\xi\int_0^{2\xi-t-s}\hat P(\xi-s,\eta)\,d\eta-$$

$$-\int_{\frac{s-t}{2}+x}^x d\xi\int_0^{2(\xi-x)+t-s}\hat P(\xi-s,\eta)\,d\eta\Big)\,ds,$$

откуда приходим к $\hat P\leqslant C_q\delta\hat P+\pi\sqrt{\delta}\|\hat M\|_\delta$, что дает вторую оценку в (3.2). □

3.3. Пошаговая линеаризуемость. В дальнейшем для каждого фиксированного $\delta \in (0,\pi]$ будем использовать обозначения

$$M_1(x) = \begin{cases} M(x), & x \in (0,\delta), \\ 0, & x \in (\delta,\sigma), \end{cases} \qquad M_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0,\delta), \\ M(x), & x \in (\delta,\sigma), \end{cases} \tag{3.3}$$

где $\sigma = \min\{2\delta, \pi\}$.

Лемма 3.2. *Для всякого $\delta \in (0,\pi/2]$ имеет место представление*

$$P(x,t;q,M) = P(x,t;q,M_1) + \int\limits_0^t F(x,t,\tau;q,M_1)M_2(\tau)\,d\tau, \quad (x,t) \in D_{2\delta}, \tag{3.4}$$

где функция $F(x,t,\tau;q,M_1)$ является решением уравнения (2.6) *при $M_1(x)$ вместо $M(x)$, $(x,t,\tau) \in \mathcal{D}_{2\delta}$ и*

$$F_0(x,t,\tau) = \frac{1}{2}\Big(x - t + \int\limits_t^x ds \int\limits_0^{t-\tau} P(s-\tau,\xi;q,M_1)\,d\xi +$$
$$+ \int\limits_{\frac{t+\tau}{2}}^t ds \int\limits_0^{2s-t-\tau} P(s-\tau,\xi;q,M_1)\,d\xi - \int\limits_{\frac{\tau-t}{2}+x}^x ds \int\limits_0^{2(s-x)+t-\tau} P(s-\tau,\xi;q,M_1)\,d\xi\Big). \tag{3.5}$$

Доказательство. С помощью непосредственной подстановки получаем, что правая часть (3.4) является решением интегрального уравнения (2.22) при $(x,t) \in D_{2\delta}$ тогда и только тогда, когда при $(x,t) \in D_{2\delta}$ выполняется следующее соотношение:

$$\int\limits_0^t F(x,t,\tau;q,M_1)M_2(\tau)\,d\tau = \int\limits_0^t F_0(x,t,\tau)M_2(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^3 (\mathcal{Q}_k(x,t) + \mathcal{M}_k(x,t)), \tag{3.6}$$

где функция $F_0(x,t,\tau)$ определяется по формуле (3.5), а также после перемены порядка интегрирования имеем

$$\mathcal{Q}_1(x,t) := \int\limits_t^x q(s)\,ds \int\limits_0^t d\xi \int\limits_0^\xi F(s,\xi,\tau;q,M_1)M_2(\tau)\,d\tau =$$
$$= \int\limits_t^x q(s)\,ds \int\limits_0^t M_2(\tau)\,d\tau \int\limits_\tau^t F(s,\xi,\tau;q,M_1)\,d\xi = \int\limits_0^t M_2(\tau)\,d\tau \int\limits_t^x q(s)\,ds \int\limits_\tau^t F(s,\xi,\tau;q,M_1)\,d\xi,$$

$$\mathcal{Q}_2(x,t) := \int\limits_{\frac{t}{2}}^t q(s)\,ds \int\limits_0^{2s-t} d\xi \int\limits_0^\xi F(s,\xi,\tau;q,M_1)M_2(\tau)\,d\tau =$$
$$= \int\limits_{\frac{t}{2}}^t q(s)\,ds \int\limits_0^{2s-t} M_2(\tau)\,d\tau \int\limits_\tau^{2s-t} F(s,\xi,\tau;q,M_1)\,d\xi = \int\limits_0^t M_2(\tau)\,d\tau \int\limits_{\frac{t+\tau}{2}}^t q(s)\,ds \int\limits_\tau^{2s-t} F(s,\xi,\tau;q,M_1)\,d\xi,$$

$$\mathcal{Q}_3(x,t) := -\int\limits_{x-\frac{t}{2}}^x q(s)\,ds \int\limits_0^{2(s-x)+t} d\xi \int\limits_0^\xi F(s,\xi,\tau;q,M_1)M_2(\tau)\,d\tau =$$

$$= -\int\limits_{x-\frac{t}{2}}^{x} q(s)\,ds \int\limits_{0}^{2(s-x)+t} M_2(\tau)\,d\tau \int\limits_{\tau}^{2(s-x)+t} F(s,\xi,\tau;q,M_1)\,d\xi =$$

$$= -\int\limits_{0}^{t} M_2(\tau)\,d\tau \int\limits_{\frac{\tau-t}{2}+x}^{x} q(s)\,ds \int\limits_{\tau}^{2(s-x)+t} F(s,\xi,\tau;q,M_1)\,d\xi$$

и, кроме того,

$$\mathcal{M}_1(x,t) := \int\limits_0^t M(s)\,ds \int\limits_t^x d\xi \int\limits_0^{t-s} d\eta \int\limits_0^{\eta} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)M_2(\tau)\,d\tau, \tag{3.7}$$

$$\mathcal{M}_2(x,t) := \int\limits_0^t M(s)\,ds \int\limits_{\frac{t+s}{2}}^{t} d\xi \int\limits_0^{2\xi-t-s} d\eta \int\limits_0^{\eta} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)M_2(\tau)\,d\tau,$$

$$\mathcal{M}_3(x,t) := -\int\limits_0^t M(s)\,ds \int\limits_{\frac{s-t}{2}+x}^{x} d\xi \int\limits_0^{2(\xi-x)+t-s} d\eta \int\limits_0^{\eta} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)M_2(\tau)\,d\tau.$$

Меняя порядок интегрирования в (3.7) и учитывая, что $M(x) = M_1(x) + M_2(x)$ при $x \in (0, 2\delta)$, получаем

$$\mathcal{M}_1(x,t) = \int\limits_0^t M(s)\,ds \int\limits_0^{t-s} M_2(\tau)\,d\tau \int\limits_t^x d\xi \int\limits_{\tau}^{t-s} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)\,d\eta =$$

$$= \int\limits_0^t M_2(\tau)\,d\tau \int\limits_0^{t-\tau} (M_1(s)+M_2(s))\,ds \int\limits_t^x d\xi \int\limits_{\tau}^{t-s} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)\,d\eta. \tag{3.8}$$

Поскольку $M_2(x) = 0$ на $(0,\delta)$ и $t \in [0, 2\delta]$, будем иметь

$$\int\limits_0^t M_2(\tau)\,d\tau \int\limits_0^{t-\tau} M_2(s)\,ds \int\limits_t^x d\xi \int\limits_{\tau}^{t-s} F(\xi-s,\eta,\tau;M_1)\,d\eta = 0.$$

Таким образом, под вторым интегралом в (3.8) исчезает слагаемое $M_2(s)$, а значит, получим

$$\mathcal{M}_1(x,t) = \int\limits_0^t M_2(\tau)\,d\tau \int\limits_0^{t-\tau} M_1(s)\,ds \int\limits_t^x d\xi \int\limits_{\tau}^{t-s} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)\,d\eta.$$

Аналогичным образом вычисляем

$$\mathcal{M}_2(x,t) = \int\limits_0^t M(s)\,ds \int\limits_{\frac{t+s}{2}}^{t} d\xi \int\limits_0^{2\xi-t-s} M_2(\tau)\,d\tau \int\limits_{\tau}^{2\xi-t-s} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)\,d\eta =$$

$$= \int\limits_0^t M(s)\,ds \int\limits_0^{t-s} M_2(\tau)\,d\tau \int\limits_{\frac{t+\tau+s}{2}}^{t} d\xi \int\limits_{\tau}^{2\xi-t-s} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)\,d\eta =$$

$$= \int\limits_0^t M_2(\tau)\,d\tau \int\limits_0^{t-\tau} M_1(s)\,ds \int\limits_{\frac{t+\tau+s}{2}}^{t} d\xi \int\limits_{\tau}^{2\xi-t-s} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)\,d\eta,$$

$$\mathcal{M}_3(x,t) = -\int\limits_0^t M(s)\,ds \int\limits_{\frac{s-t}{2}+x}^{x} d\xi \int\limits_0^{2(\xi-x)+t-s} M_2(\tau)\,d\tau \int\limits_\tau^{2(\xi-x)+t-s} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)\,d\eta =$$

$$= -\int\limits_0^t M(s)\,ds \int\limits_0^{t-s} M_2(\tau)\,d\tau \int\limits_{\frac{s+\tau-t}{2}+x}^{x} d\xi \int\limits_\tau^{2(\xi-x)+t-s} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)\,d\eta =$$

$$= -\int\limits_0^t M_2(\tau)\,d\tau \int\limits_0^{t-\tau} M_1(s)\,ds \int\limits_{\frac{s+\tau-t}{2}+x}^{x} d\xi \int\limits_\tau^{2(\xi-x)+t-s} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)\,d\eta.$$

Учитывая все сделанные преобразования, заключаем, что если функция $F(x,t,\tau;q,M_1)$ удовлетворяет условиям леммы, то выполняется тождество (3.6). Таким образом, обе части (3.4) будут удовлетворять одному и тому же уравнению (2.22), имеющему единственное решение, что и доказывает лемму. □

Аналогично лемме 3.2 доказывается следующее утверждение.

Лемма 3.3. *Для всякого* $\delta \in (0,\pi/2]$ *имеет место представление*

$$Q(x,t;q,M) = Q(x,t;q,M_1) + \int\limits_0^t G(x,t,\tau;q,M_1)M_2(\tau)\,d\tau, \quad (x,t)\in D_{2\delta},$$

где функция $G(x,t,\tau;q,M_1)$ *является решением уравнения* (2.7) *при* $M_1(x)$ *вместо* $M(x)$, $(x,t,\tau)\in\mathcal{D}_{2\delta}$ *и*

$$G_0(x,t,\tau) = \frac{1}{2}\Big(x-\tau+\int\limits_0^{x-t} ds\int\limits_0^{t-\tau} Q(\xi+s,\xi;q,M_1)\,d\xi +$$

$$+\int\limits_0^{\frac{t-\tau}{2}} ds \int\limits_0^{t-\tau-2s} Q(\xi+s,\xi;q,M_1)\,d\xi + \int\limits_{x-t}^{x-\frac{t+\tau}{2}} ds \int\limits_0^{2(x-s)-t-\tau} Q(\xi+s,\xi;q,M_1)\,d\xi\Big).$$

4. Основное нелинейное интегральное уравнение обратной задачи

4.1. Основное уравнение. Дифференцируя соотношение (2.25) по x, получаем

$$-w'(\pi-x) = w_1'(x;M) + V'(x;M), \quad 0<x<\pi. \tag{4.1}$$

На это соотношение можно смотреть, как на нелинейное уравнение относительно функции $M(x)$, которое мы назовем *основным нелинейным интегральным уравнением обратной задачи* или кратко *основным уравнением*.

Основное уравнение (4.1) занимает центральное место при исследовании задачи 1.1. Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть выполнено условие* (1.7). *Тогда для любой функции* $w(x)\in W_2^1[0,\pi]$, *удовлетворяющей краевым условиям* (2.24), *уравнение* (4.1) *имеет единственное решение* $M(x)$, *удовлетворяющее условию* (1.4).

Отметим, что из определения функций $w_1(x)$ и $V(x)$ нетрудно увидеть, что правая часть (4.1) при $x\in(0,\pi/2)$ не зависит от значений функции $M(x)$ на $(\pi/2,\pi)$. Это обстоятельство позволяет сначала решить уравнение (4.1) отдельно на интервале $(0,\pi/2)$, а затем — на $(\pi/2,\pi)$. В связи с этим доказательство теоремы 4.1 подразделяется на два основных этапа. На первом этапе устанавливается существование и единственность квадратично суммируемого решения на интервале $(0,\pi/2)$, а на втором этапе решение отыскивается уже на интервале $(\pi/2,\pi)$. Если основная трудность, которую необходимо преодолеть на первом этапе, связана с нелинейностью данного уравнения, то на втором этапе трудность связана с наличием в уравнении особенности и, как следствие, с попаданием решения в нужный класс (1.4). Данный раздел посвящен первому этапу.

Для каждого $k=\overline{1,5}$ разложим функцию $w_k(x)$ на сумму трех функций:

$$w_k(x)=w_{k,1}(x)+w_{k,2}(x)+w_{k,3}(x),$$

где

$$\left.\begin{gathered}
w_{1,1}(x)=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x}{2}}^{\pi-\frac{x}{2}}q(t)\,dt,\quad w_{1,2}(x)=\frac{1}{2}(\pi-x)\int\limits_0^x M(t)\,dt,\\
w_{2,1}(x)=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}}q(t)\,dt,\quad w_{2,2}(x)=\frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\int\limits_0^x M(t)\,dt,\\
w_{3,1}(x)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi-x}{2}}q_1(t)\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{x}{2}}q_1(t)\,dt,\quad w_{3,2}(x)=\frac{1}{2}\int\limits_0^x\Big(\frac{\pi}{2}-t\Big)M(t)\,dt,\\
w_{4,1}(x)=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}}q_1(t)\,dt,\quad w_{4,2}(x)=w_{2,2}(x),\\
w_{5,1}(x)=w_{2,1}(x)+\frac{1}{2}\int\limits_{\pi-\frac{x}{2}}^{\pi}q_1(t)\,dt,\quad w_{5,2}(x)=w_{2,2}(x).
\end{gathered}\right\}\tag{4.2}$$

Таким образом, $w_{k,3}(x)$ определяются по формулам

$$w_{k,3}(x):=w_k(x)-w_{k,1}(x)-w_{k,2}(x),\quad k=\overline{1,5}.\tag{4.3}$$

Кроме того, положим

$$w_{k,4}(x):=w_{k,2}(x)+w_{k,3}(x),\quad k=\overline{2,5}.\tag{4.4}$$

С учетом введенных обозначений, а также формул (2.26)–(2.29), уравнение (4.1) на первой половине интервала $(0,\pi)$ примет вид

$$g(x)=A(x)M(x)+\mathcal{F}M(x),\quad 0<x<\frac{\pi}{2},\tag{4.5}$$

где $g(x)\in L_2(0,\pi/2)$ — свободный член, определяемый по формуле

$$\begin{gathered}
g(x)=-w'(\pi-x)-w'_{1,1}(x)-\frac{\alpha_0-1}{2}\Big(w'_{2,1}+w'_{3,1}+w_2(0)w_{3,1}+w'_{2,1}*w_{3,1}\Big)(x)-\\
-\frac{\alpha_0-1}{2}\Big(w'_{4,1}+w'_{5,1}+w_4(0)w_{5,1}+w'_{4,1}*w_{5,1}\Big)(x)-\frac{\beta}{2}\Big(w_{2,1}+w_{4,1}+w_{2,1}*w_{4,1}\Big)(x),\\
A(x)=\frac{\alpha_0+\alpha_1}{4}\pi-\frac{\alpha_0+\alpha_1-1}{2}x,
\end{gathered}\tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}M(x)=\frac{1-\alpha_0-2\alpha_1}{4}\int\limits_0^x M(t)\,dt+w'_{1,3}(x)+\\
+\frac{\alpha_0-1}{2}\Big(w'_{2,3}+w'_{3,3}+w_2(0)w_{3,4}+w'_{2,1}*w_{3,4}+w'_{2,4}*w_3\Big)(x)+\\
+\frac{\alpha_1-1}{2}\Big(w'_{4,3}+w'_{5,3}+w_4(0)w_{5,4}+w'_{4,1}*w_{5,4}+w'_{4,4}*w_5\Big)(x)+\\
+\frac{\beta}{2}\Big(w_{2,4}+w_{4,4}+w_{2,1}*w_{4,4}+w_{2,4}*w_4\Big)(x).
\end{aligned}\tag{4.7}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Коэффициент* $A(x)$ *в уравнении* (4.5) *удовлетворяет условию*

$$A(x)\neq 0,\quad x\in\Big[0,\frac{\pi}{2}\Big],\tag{4.8}$$

тогда и только тогда, когда выполняется условие (1.7).

Доказательство. Согласно (4.6), условие (4.8) является противоположным условию

$$\frac{\alpha_0+\alpha_1}{\alpha_0+\alpha_1-1}\in[0,1],$$

которое, в свою очередь, равносильно $\alpha_0+\alpha_1\in(-\infty,0]$, что и доказывает лемму. □

4.2. Классы $\mathcal{E}_b$. Прежде чем перейти непосредственно к доказательству разрешимости уравнения (4.5), проведем некоторую вспомогательную работу.

Определение 4.1. Оператор $\mathcal{D}: L_2(0,b)\to L_2(0,b)$ назовем *оператором класса* $\mathcal{E}_b$ (т. е. $\mathcal{D}\in\mathcal{E}_b$), если выполнены следующие четыре условия:

1) для всякой функции $f(x)\in L_2(0,b)$ и для любого числа $\gamma\in(0,b)$ функция $\mathcal{D}f(x)$ на $(0,\gamma)$ не зависит от значений $f(x)$ на (γ,b);
2) для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta\in(0,b]$, такое что $\mathcal{D}: B_\delta\to B_{\delta,\varepsilon}$, где B_δ и $B_{\delta,\varepsilon}$ определены в (3.1);
3) для любого $\alpha>0$ найдется $\delta\in(0,b]$, такое что для любых функций $f(x),\tilde f(x)\in B_\delta$ имеет место оценка $\|\mathcal{D}f-\mathcal{D}\tilde f\|_\delta\leqslant\alpha\|f-\tilde f\|_\delta$;
4) для всякого $\delta\in(0,b/2]$ и для любой функции $f(x)\in L_2(0,2\delta)$ справедливо представление

$$\mathcal{D}f(x)=\mathcal{D}f_1(x)+\int\limits_\delta^x R(x,t;f_1)f_2(t)\,dt,\quad 0<x<2\delta, \tag{4.9}$$

где

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\delta),\\ 0, & x\in(\delta,2\delta),\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases} 0, & x\in(0,\delta),\\ f(x), & x\in(\delta,2\delta),\end{cases} \tag{4.10}$$

функция $R(x,t;f_1)$ суммируема с квадратом в треугольнике $\delta<t<x<2\delta$ и не зависит от $f_2(x)$.

Замечание 4.1. В условиях 2)–4) определения 4.1 тем же символом $\mathcal{D}$ обозначено расширение оператора $\mathcal{D}$ на пространства $L_2(0,\delta)$, $\delta<b$, которое в силу условия 1) определено однозначно.

Замечание 4.2. Нетрудно убедиться, что для всякого оператора $\mathcal{D}\in\mathcal{E}_b$ в условиях 2) и 3) можно взять любое достаточно малое $\delta>0$. Иными словами, эти условия можно эквивалентно представить следующим образом:

2') для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta\in(0,b]$, такое что $\mathcal{D}: B_{\delta_1}\to B_{\delta_1,\varepsilon}$ для всех $\delta_1\in(0,\delta]$;
3') для любого $\alpha>0$ найдется $\delta\in(0,b]$, такое что для любых функций $f(x),\tilde f(x)\in B_{\delta_1}$ имеет место оценка $\|\mathcal{D}f-\mathcal{D}\tilde f\|_{\delta_1}\leqslant\alpha\|f-\tilde f\|_{\delta_1}$ для всех $\delta_1\in(0,\delta]$.

В самом деле, пусть $f(x)$, $\tilde f(x)\in B_{\delta_1}$ при некотором $\delta_1\in(0,\delta]$. Положим

$$f_c(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\delta_1),\\ 0, & x\in(\delta_1,\delta),\end{cases}\qquad \tilde f_c(x)=\begin{cases} \tilde f(x), & x\in(0,\delta_1),\\ 0, & x\in(\delta_1,\delta).\end{cases}$$

Тогда $f_c(x)$, $\tilde f_c(x)\in B_\delta$. Согласно 2) будем иметь $\mathcal{D}f_c(x)\in B_{\delta,\varepsilon}$. С другой стороны, в силу 1)

$$\|\mathcal{D}f\|_{\delta_1}=\|\mathcal{D}f_c\|_{\delta_1}\leqslant\|\mathcal{D}f_c\|_\delta\leqslant\varepsilon,$$

и $2'$) доказано. Далее, согласно 3) имеем

$$\|\mathcal{D}f_c-\mathcal{D}\tilde f_c\|_\delta\leqslant\alpha\|f_c-\tilde f_c\|_\delta=\alpha\|f-\tilde f\|_{\delta_1}.$$

С другой стороны, в силу 1) получаем

$$\|\mathcal{D}f-\mathcal{D}\tilde f\|_{\delta_1}=\|\mathcal{D}f_c-\mathcal{D}\tilde f_c\|_{\delta_1}\leqslant\|\mathcal{D}f_c-\mathcal{D}\tilde f_c\|_\delta\leqslant\alpha\|f-\tilde f\|_{\delta_1}$$

и приходим к $3'$).

Следующая лемма устанавливает замкнутость класса $\mathcal{E}_b$ относительно некоторых операций.

Лемма 4.2. *Пусть $\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2\in\mathcal{E}_b$, а $g_1(x)$ и $g_2(x)$ — ограниченные на интервале $(0,b)$ функции. Тогда $\mathcal{D}\in\mathcal{E}_b$, где оператор $\mathcal{D}$ определен любым из следующих способов*:

а) $\mathcal{D}f(x)=g_1(x)\mathcal{D}_1f(x)+g_2(x)\mathcal{D}_2f(x)$;

b) $\mathcal{D}f(x) = \mathcal{D}_1 f * \mathcal{D}_2 f(x)$;
c) $\mathcal{D}f(x) = \mathcal{D}_1 f * (g_1 f)(x)$;
d) $\mathcal{D}f(x) = \int\limits_0^x K(x,t) f(t)\, dt$;
e) $\mathcal{D}f(x) = \int\limits_0^x K(x,t)\mathcal{D}_1 f(t)\, dt$;
f) $\mathcal{D}f(x) = f_1(x)$.

Здесь функция $K(x,t)$ суммируема с квадратом в треугольнике $0 < t < x < b$, а функция $f_1(x) \in L_2(0,b)$ не зависит от $f(x)$.

Доказательство. Положим
$$g_k := \sup_{0<x<b} |g_k(x)|, \quad k = 1, 2.$$

a) Условия 1) и 4) определения 4.1 очевидны. Условия 2) и 3) следуют из оценок
$$\|\mathcal{D}f\|_\delta \leqslant g_1 \|\mathcal{D}_1 f\|_\delta + g_2 \|\mathcal{D}_2 f\|_\delta, \quad \|\mathcal{D}f - \mathcal{D}\tilde{f}\|_\delta \leqslant g_1 \|\mathcal{D}_1 f - \mathcal{D}_1 \tilde{f}\|_\delta + g_2 \|\mathcal{D}_2 f - \mathcal{D}_2 \tilde{f}\|_\delta,$$
соответственно.

b) Условие 1) очевидным образом следует из представлений
$$\mathcal{D}f(x) = \int\limits_0^x \mathcal{D}_1 f(t) \mathcal{D}_2 f(x-t)\, dt = \int\limits_0^x \mathcal{D}_1 f(x-t) \mathcal{D}_2 f(t)\, dt.$$
Условия 2) и 3) следуют из оценок $\|\mathcal{D}f\|_\delta \leqslant \sqrt{\delta} \|\mathcal{D}_1 f\|_\delta \|\mathcal{D}_2 f\|_\delta$ и
$$\|\mathcal{D}f - \mathcal{D}\tilde{f}\|_\delta \leqslant \sqrt{\delta}\Big(\|\mathcal{D}_1 f\|_\delta \|\mathcal{D}_2 f - \mathcal{D}_2 \tilde{f}\|_\delta + \|\mathcal{D}_2 \tilde{f}\|_\delta \|\mathcal{D}_1 f - \mathcal{D}_1 \tilde{f}\|_\delta \Big).$$
Далее, при $x \in (0, 2\delta)$ согласно (4.9) будем иметь
$$\mathcal{D}f(x) = \int\limits_0^x \Big(\mathcal{D}_1 f_1(x-t) + \int\limits_\delta^{x-t} R_1(x-t, \tau; f_1) f_2(\tau)\, d\tau \Big) \Big(\mathcal{D}_2 f_1(t) + \int\limits_\delta^t R_2(t, \tau; f_1) f_2(\tau)\, d\tau \Big)\, dt.$$
Меняя порядок интегрирования, получаем
$$\mathcal{D}f(x) = \mathcal{D}f_1(x) + \int\limits_\delta^x R(x-t, \tau; f_1) f_2(\tau)\, d\tau + h(x), \quad 0 < x < 2\delta,$$
где
$$R(x,t; f_1) = \int\limits_0^{x-t} \Big(R_2(x-\tau, t; f_1) \mathcal{D}_1 f_1(\tau) + R_1(x-\tau, t; f_1) \mathcal{D}_2 f_1(\tau) \Big)\, d\tau,$$
$$h(x) = \int\limits_\delta^x f_2(t)\, dt \int\limits_\delta^{x-t} f_2(\tau)\, d\tau \int\limits_\tau^{x-t} R_1(x-s, t; f_1) R_2(s, \tau; f_1)\, ds.$$
В силу (4.10) имеем $h(x) = 0$ при $x \in [0, 2\delta]$. Кроме того, нетрудно показать, что $R(x,t; f_1)$ суммируема с квадратом в треугольнике $\delta < t < x < 2\delta$, и 4) доказано для b).

Для c)–e) доказательство аналогично, а f) очевидно. □

Теорема 4.2. *Пусть $f(x) \in L_2(0,b)$ и $\mathcal{D} \in \mathcal{E}_b$. Тогда уравнение*
$$f(x) = y(x) + \mathcal{D}y(x), \quad 0 < x < b, \tag{4.11}$$
имеет единственное решение $y(x) \in L_2(0,b)$.

Доказательство. Согласно условию 1) из определения 4.1 уравнение (4.11) можно решать шагами, т. е. для любого $\gamma \in (0,b)$ сначала отыскать решение на интервале $(0,\gamma)$, а затем продолжить это решение на (γ,b).

Выберем $\delta>0$ так, чтобы оно отвечало условиям 2) и 3) из определения 4.1 для $\varepsilon=1/2$ и некоторого фиксированного $\alpha\in(0,1)$, соответственно, и чтобы $\|f\|_\delta\leqslant 1/2$. Рассмотрим оператор $\psi y(x):=f(x)-\mathcal{D}y(x)$, который в силу нашего выбора δ отображает шар B_δ в себя и является в нем сжатием. Таким образом, согласно принципу сжимающих отображений, уравнение (4.11) на интервале $(0,\delta)$ имеет единственное решение в шаре B_δ.

Далее, пусть для некоторого $\delta\in(0,b/2)$ на интервале $(0,\delta)$ решение уравнения (4.11) уже найдено. Будем искать решение на $(0,2\delta)$ в виде $y(x)=y_1(x)+y_2(x)$, где $y_1(x)=0$ на $(\delta,2\delta)$, а $y_2(x)=0$ на $(0,\delta)$. Тогда согласно условию 4) из определения 4.1 уравнение (4.11) на $(\delta,2\delta)$ примет вид

$$f_1(x)=y_2(x)+\int\limits_\delta^x R(x,t)y_2(t)\,dt,\quad \delta<x<2\delta, \tag{4.12}$$

где функции $f_1(x)=f(x)-\mathcal{D}y_1(x)$ и $R(x,t)=R(x,t;y_1)$ суммируемы с квадратом в своих областях определения и не зависят от $y_2(x)$. Уравнение (4.12) имеет единственное решение $y_2(x)\in L_2(\delta,2\delta)$. Продолжая этот процесс, за конечное число шагов находим суммируемое с квадратом решение $y(x)$ уравнения (4.11) на всем интервале $(0,b)$.

Покажем, что найденное решение единственно. Пусть $\tilde y(x)\in L_2(0,b)$ — еще одно решение. Тогда в соответствии с нашим первоначальным выбором $\delta>0$ при некотором $\delta_1\in(0,\delta)$ оба решения на интервале $(0,\delta_1)$ попадут в шар B_{δ_1}, и значит, в силу принципа сжимающих отображений $y(x)=\tilde y(x)$ п.в. на $(0,\delta_1)$, а ввиду единственности продолжения решения на (δ_1,b) они совпадут и на всем $(0,b)$. $\square$

4.3. Решение основного уравнения на первой половине интервала. Используя результаты предыдущего подраздела, здесь мы докажем разрешимость нелинейного уравнения (4.5).

Лемма 4.3. *Оператор $\mathcal{F}$, определенный формулой* (4.7), *принадлежит классу $\mathcal{E}_{\pi/2}$.*

Доказательство. Согласно (4.2)–(4.4), (4.7) и лемме 4.2 достаточно доказать, что $w_{k,3}^{(j)}(x)=w_{k,3}^{(j)}(x;M)$, как операторы от $M(x)$, принадлежат классу $\mathcal{E}_{\pi/2}$ для всех $k=\overline{1,5}$ и $j=0,1$.

Покажем, например, что $w_{1,3}(x;M)$, $w_{1,3}'(x;M)\in\mathcal{E}_\pi$. В самом деле, согласно (2.22), (2.27), (4.2) и (4.3) имеем

$$w_{1,3}(x;M)=\frac12\Big(\int\limits_x^\pi q(s)\,ds\int\limits_0^x P(s,\xi;q,M)\,d\xi+\int\limits_{\frac{x}{2}}^x q(s)\,ds\int\limits_0^{2s-x}P(s,\xi;q,M)\,d\xi-$$

$$-\int\limits_{\pi-\frac{x}{2}}^\pi q(s)\,ds\int\limits_0^{2(s-\pi)+x}P(s,\xi;q,M)\,d\xi+\int\limits_0^x M(s)\,ds\int\limits_x^\pi d\xi\int\limits_0^{x-s}P(\xi-s,\eta;q,M)\,d\eta+$$

$$+\int\limits_0^x M(s)\,ds\int\limits_{\frac{x+s}{2}}^x d\xi\int\limits_0^{2\xi-x-s}P(\xi-s,\eta;q,M)\,d\eta-$$

$$-\int\limits_0^x M(s)\,ds\int\limits_{\pi+\frac{s-x}{2}}^\pi d\xi\int\limits_0^{2(\xi-\pi)+x-s}P(\xi-s,\eta;q,M)\,d\eta\Big),$$

$$w_{1,3}'(x;M)=\frac12\Big(\int\limits_x^\pi q(s)P(s,x;q,M)\,ds-\int\limits_{\frac{x}{2}}^x q(s)P(s,2s-x;q,M)\,d\xi-$$

$$-\int\limits_{\pi-\frac{x}{2}}^{\pi} q(s)P(s,2(s-\pi)+x;q,M)\,ds+\int\limits_{0}^{x} M(s)\,ds\int\limits_{x}^{\pi} P(\xi-s,x-s;q,M)d\xi-$$

$$-\int\limits_{0}^{x} M(s)\,ds\int\limits_{\frac{x+s}{2}}^{x} P(\xi-s,2\xi-x-s;q,M)d\xi-$$

$$-\int\limits_{0}^{x} M(s)\,ds\int\limits_{\pi+\frac{s-x}{2}}^{\pi} P(\xi-s,2(\xi-\pi)+x-s;q,M)d\xi\Big).$$

Заметим, что во всех подынтегральных выражениях двух предыдущих формул значение аргумента функции M, а также второго аргумента функции P никогда не превосходит x. Используя это обстоятельство и опираясь на леммы 3.1 и 3.2, нетрудно проверить, что для операторов $w_{1,3}(x;M)$, и $w'_{1,3}(x;M)$ выполняются все условия в определении 4.1.

Для операторов $w_{k,3}^{(j)}(x)=w_{k,3}^{(j)}(x;M)$, $j=0,1$, при $k=\overline{2,5}$ доказательство аналогично, с той разницей, что при таких k функции $w_{k,3}(x)$ определены только при $x\in(0,\pi/2)$, а значит, соответствующие операторы принадлежат только $\mathcal{E}_{\pi/2}$. □

Из лемм 4.1–4.3 и теоремы 4.2 непосредственно вытекает, что уравнение (4.5) имеет единственное решение $M(x)\in L_2(0,\pi/2)$, что, в свою очередь, означает разрешимость основного уравнения (4.1) на первой половине интервала $(0,\pi)$.

5. Решение основного уравнения на второй половине интервала

5.1. Сведение к линейному интегральному уравнению Вольтерра третьего рода. Согласно (2.27) и (3.4) имеем

$$w_1(x;M)=w_1(x;M_1)+\int\limits_0^x F(\pi,x,t;q,M_1)M_2(t)\,dt,\quad 0\leqslant x\leqslant\pi, \tag{5.1}$$

где функции $M_1(x)$ и $M_2(x)$ определены по формулам (3.3) при $\delta=\pi/2$, $\sigma=\pi$. В силу (2.6) и (3.5) справедливо тождество

$$F(\pi,x,x;q,M_1)=\frac{\pi-x}{2}. \tag{5.2}$$

Дифференцируя представление (5.1) по x и учитывая (5.2), получаем

$$w_1'(x;M)=w_1'(x;M_1)+\frac{\pi-x}{2}M_2(x)+\int\limits_0^x \Phi(x,t;q,M_1)M_2(t)\,dt,\quad 0<x<\pi, \tag{5.3}$$

где функция

$$\Phi(x,t;q,M)=\frac{\partial}{\partial x}F(\pi,x,t;q,M) \tag{5.4}$$

суммируема с квадратом в треугольнике $0<t<x<\pi$. Используя (5.3), можно записать основное уравнение (4.1) следующим образом:

$$g_1(x)=(\pi-x)M_2(x)+2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^x \Phi(x,t;q,M_1)M_2(t)\,dt,\quad 0<x<\pi, \tag{5.5}$$

где функция $g_1(x)\in L_2(0,\pi)$ имеет вид

$$g_1(x)=-2w'(\pi-x)-2w_1'(x;M_1)-2V'(x;M),\quad 0<x<\pi. \tag{5.6}$$

Заметим, что согласно (2.26) и (2.28)–(2.32) функция $V(x;M)$ на интервале $(\pi/2,\pi)$ зависит от значений функции $M(x)$ только при $x\in(0,\pi/2)$, т. е. $V(x;M)=V(x;M_1)$ на всем $(0,\pi)$. Поэтому соотношение (5.5) на интервале $(\pi/2,\pi)$ становится линейным интегральным уравнением Вольтерра относительно функции $M_2(x)$ со свободным членом $g_1(x)$. Однако за счет наличия множителя $(\pi - x)$ оно является так называемым уравнением третьего рода, которое имеет на интервале $(\pi/2, \pi)$ единственное решение $M_2(x)$, принадлежащее классу $L_2(\pi/2, T)$ для всякого $T \in (\pi/2, \pi)$.

Таким образом, с учетом предыдущего раздела приходим к тому, что основное уравнение (4.1) имеет единственное решение $M(x)$, $0 < x < \pi$, принадлежащее классу $L_2(0, T)$ для всякого $T \in (0, \pi)$. По причине наличия множителя $(\pi - x)$ в (5.5) пока трудно сказать что-либо о его суммируемости на всем интервале $0 < x < \pi$. Целью данного раздела является доказательство того, что решение $M(x)$ удовлетворяет условию (1.4).

5.2. Предварительное уточнение. Перепишем (5.5) в виде

$$g_1(x) = h(x) - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{h(t)}{\pi - t}\, dt + \varphi(x), \quad 0 < x < \pi, \tag{5.7}$$

где $h(x) = (\pi - x)M_2(x)$,

$$\varphi(x) = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x} \Psi(x,t)h(t)\, dt, \quad \Psi(x,t) = \frac{2\Phi(x,t;q,M_1) + 1}{\pi - t}. \tag{5.8}$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 5.1. *Пусть η, θ — вещественные числа, $\theta \geqslant 0$. Решение $y(x)$ уравнения*

$$y(x) = f(x) + \eta \int\limits_{a}^{x} \frac{y(t)\, dt}{b - t}, \quad a < x < b, \tag{5.9}$$

удовлетворяет условию $(b-x)^\theta y(x) \in L_2(a,b)$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий (в зависимости от значения разности $\eta - \theta$):

1) $(b-x)^\theta f(x) \in L_2(a,b)$ *при* $\eta - \theta < 1/2$;
2) $(b-x)^\theta f(x) \in L_2(a,b)$,

$$\int\limits_{a}^{b} (b-x)^{\eta-1} f(x)\, dx = 0 \tag{5.10}$$

при $\eta - \theta > 1/2$.

Для доказательства нам потребуется следующее утверждение (см. [1]), которое следует из частного случая неравенств Харди [30].

Предложение 5.1. *Зафиксируем $\alpha < 1/2$. Операторы*

$$T_\alpha f = \frac{1}{(b-x)^\alpha} \int\limits_{a}^{x} \frac{f(t)\, dt}{(b-t)^{1-\alpha}}, \quad T_\alpha^* f = \frac{1}{(b-x)^{1-\alpha}} \int\limits_{x}^{b} \frac{f(t)\, dt}{(b-t)^{\alpha}}, \quad a < x < b,$$

отображают $L_2(a,b)$ в $L_2(a,b)$ и ограничены.

Доказательство леммы 5.1. Подстановкой нетрудно проверить, что решение уравнения (5.9) имеет вид

$$y(x) = f(x) + \frac{\eta}{(b-x)^\eta} \int\limits_{a}^{x} (b-t)^{\eta-1} f(t)\, dt. \tag{5.11}$$

Пусть $\eta - \theta < 1/2$. Легко видеть, что $(b-x)^\theta y(x) = f_0(x) + \eta T_\alpha f_0(x)$, где $f_0(x) = (b-x)^\theta f(x) \in L_2(a,b)$, $\alpha = \eta - \theta < 1/2$. Согласно предложению 5.1 имеем $(b-x)^\theta y(x) \in L_2(a,b)$.

Пусть теперь $\eta - \theta > 1/2$. Используя (5.10), преобразуем (5.11) к виду

$$y(x) = f(x) - \frac{\eta}{(b-x)^\eta} \int\limits_{x}^{b} (b-t)^{\eta-1} f(t)\, dt,$$

откуда, умножая на $(b-x)^\theta$, получаем $(b-x)^\theta y(x) = f_0(x) - \eta T_\alpha^* f_0(x)$, где $\alpha = \theta - \eta + 1 < 1/2$. Снова используя предложение 5.1, получаем $(b-x)^\theta y(x) \in L_2(a,b)$.

Достаточность доказана, перейдем к необходимости. Согласно (5.9) имеем

$$(b-x)^\theta |f(x)| \leqslant |y_0(x)| + \eta \int\limits_a^x \frac{|y_0(t)|\,dt}{b-t} \in L_2(a,b),$$

где $y_0(x) = (b-x)^\theta y(x) \in L_2(a,b)$. Пусть $\eta - \theta > 1/2$. Тогда

$$(b-x)^{\eta-1} y(x) = (b-x)^{\eta-\theta-1} y_0(x) \in L(0,\pi).$$

Поэтому, умножая обе части (5.9) на $(b-x)^{\eta-1}$, интегрируя от a до b и меняя порядок интегрирования в повторном интеграле, будем иметь

$$\int\limits_a^b (b-x)^{\eta-1} f(x)\,dx = \int\limits_a^b (b-x)^{\eta-1} y(x)\,dx - \eta \int\limits_a^b \frac{y(x)\,dx}{b-x} \int\limits_x^b (b-t)^{\eta-1}\,dt = 0,$$

т. е. приходим к (5.10). □

Лемма 5.2. *Зафиксируем $\eta \geqslant 0$. Уравнение*

$$y(x) = f(x) + \eta \int\limits_a^x \frac{y(t)\,dt}{b-t} + \int\limits_a^x G(x,t) y(t)\,dt, \quad a < x < b, \tag{5.12}$$

где

$$(b-x)^\eta f(x) \in L_2(a,b), \quad \int\limits_a^b \int\limits_a^x |G(x,t)|^2\,dt\,dx < \infty,$$

имеет единственное решение $y(x)$, $(b-x)^\eta y(x) \in L_2(a,b)$.

Доказательство. Положим $\beta(x) = (x-b)^{2\eta+1}/(2\eta+1)$ и обозначим через $L_{2,\beta}(a,b)$ пространство функций $f(x)$, $a < x < b$, с нормой

$$\|f\|_{L_{2,\beta}} = \sqrt{\int\limits_a^b |f(x)|^2\,d\beta(x)} = \sqrt{\int\limits_a^b (b-x)^{2\eta} |f(x)|^2\,dx}.$$

Пусть линейный ограниченный оператор F взаимно однозначно отображает банахово пространство $\mathcal{B}$ на себя, а линейный оператор $G : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ вполне непрерывен. Тогда если оператор $S = F + G$ является инъекцией, то он является и биекцией $\mathcal{B}$ на $\mathcal{B}$. Действительно, обозначив $S_1 = SF^{-1}$, имеем $S_1 = E + G_1$, где E — единичный оператор, а $G_1 = GF^{-1}$. Тогда S_1 — инъекция, а G_1 вполне непрерывен. Согласно альтернативе Фредгольма (см. [5]) S_1 — биекция. Следовательно, S — тоже биекция. Обозначим $F := E - \eta T_0$,

$$Gy := -\int\limits_a^x G(x,t) y(t)\,dt = -\int\limits_a^x G_\beta(x,t) y(t)\,d\beta(t), \quad G_\beta(x,t) := \frac{G(x,t)}{(b-t)^{2\eta}},$$

и запишем уравнение (5.12) в операторном виде: $f = Fy + Gy$. С помощью предложения 5.1 легко показать, что оператор F ограничен в $L_{2,\beta}(a,b)$, и согласно лемме 5.1 для $\theta = \eta$ он является биекцией $L_{2,\beta}(a,b)$ на $L_{2,\beta}(a,b)$. Кроме того, легко видеть, что оператор G отображает $L_{2,\beta}(a,b)$ в себя. Поскольку

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^x |G_\beta(x,t)|^2\,d\beta(t)\,d\beta(x) \leqslant \int\limits_a^b \int\limits_a^x |G(x,t)|^2\,dt\,dx < \infty,$$

то G является оператором Гильберта—Шмидта, а значит, он вполне непрерывен в $L_{2,\beta}(a,b)$ (см., например, [7]). Осталось заметить, что $F + G$ — инъекция, а следовательно, и биекция $L_{2,\beta}(a,b)$ на $L_{2,\beta}(a,b)$. □

В силу (2.6), (3.5) и (5.4) будем иметь

$$\Phi(x,t;q,M)=\frac{1}{2}\Big(-1+\int_x^\pi P(s-t,x-t;q,M)\,ds-$$
$$-\int_{\frac{x+t}{2}}^{x} P(s-t,2s-x-t;q,M)\,ds-\int_{\frac{t-x}{2}+\pi}^{\pi} P(s-t,2(s-\pi)+x-t;q,M)\,ds+$$
$$+\int_x^\pi q(s)F(s,x,t;q,M)\,ds-\int_{\frac{x+t}{2}}^{x} q(s)F(s,2s-x,t;q,M)\,ds-$$
$$-\int_{\frac{t-x}{2}+\pi}^{\pi} q(s)F(s,2(s-\pi)+x,t;q,M)\,ds+\int_0^{x-t} M(s)\,ds\int_x^\pi F(\xi-s,x-s,t;q,M)\,d\xi-$$
$$-\int_0^{x-t} M(s)\,ds\int_{\frac{x+t+s}{2}}^{x} F(\xi-s,2\xi-x-s,t;q,M)\,d\xi-$$
$$-\int_0^{x-t} M(s)\,ds\int_{\frac{s+t-x}{2}+\pi}^{\pi} F(\xi-s,2(\xi-\pi)+x-s,t;q,M)\,d\xi\Big). \quad (5.13)$$

Согласно (5.8) и (5.13) функция $\Psi(x,t)$ суммируема с квадратом в треугольнике $\pi/2<t<x<\pi$, и, применяя лемму 5.2 к (5.7), (5.8), получаем $(\pi-x)h(x)\in L_2(0,\pi)$.

5.3. Окончательное уточнение. До сих пор использовалась лишь принадлежность производной $w'(x)$ классу $L_2(0,\pi)$. Покажем теперь, что выполнение краевых условий (2.24) влечет (1.4), т. е. уточним, что $h(x)\in L_2(0,\pi)$. Для этой цели потребуется лемма 5.1 и следующие два вспомогательные утверждения.

Лемма 5.3. *Зафиксируем $\theta\in[1/3,1]$. Тогда если $(\pi-x)^\theta h(x)\in L_2(0,\pi)$, то*
$$(\pi-x)^{\theta-\frac{1}{3}}\varphi(x)\in L_2(0,\pi).$$

Доказательство. Согласно (5.8) и (5.13) найдется функция $f(x)\in L_2(0,\pi)$, такая что $|\Psi(x,t)|\leqslant f(t)$. Таким образом, получаем
$$(\pi-x)^{\theta-\frac{1}{3}}|\varphi(x)|\leqslant(\pi-x)^{-\frac{1}{3}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)(\pi-t)^\theta|h(t)|\,dt\leqslant C(\pi-x)^{-\frac{1}{3}}\in L_2(0,\pi),$$
что и требовалось доказать. □

Лемма 5.4. *Если $(\pi-x)^{1-\varepsilon}h(x)\in L_2(0,\pi)$ при некотором $\varepsilon>0$, то*
$$\int_0^\pi \varphi(x)\,dx=0. \quad (5.14)$$

Доказательство. В силу (5.2), (5.4) и (5.8) имеем
$$\int_0^\zeta\varphi(x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\zeta}\varphi(x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\zeta}dx\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\Big(2\frac{\partial}{\partial x}F(\pi,x,\tau;q,M_1)+1\Big)\frac{h(\tau)}{\pi-\tau}\,d\tau=$$
$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\zeta}\frac{h(\tau)}{\pi-\tau}\,d\tau\int_\tau^\zeta\Big(2\frac{\partial}{\partial x}F(\pi,x,\tau;q,M_1)+1\Big)\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\zeta}\frac{h(\tau)}{\pi-\tau}\Big(2F(\pi,\zeta,\tau;q,M_1)-(\pi-\zeta)\Big)\,d\tau.$$

Согласно (2.6), (3.5) приходим к соотношению

$$\int_0^\zeta \varphi(x)\,dx = \sum_{k=1}^6 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\zeta} \frac{h(\tau)}{\pi-\tau} F_k(\zeta,\tau)\,d\tau, \tag{5.15}$$

где

$$F_1(\zeta,\tau) := \int_\zeta^\pi ds \int_0^{\zeta-\tau} P(s-\tau,\xi;q,M_1)\,d\xi,$$

$$F_2(\zeta,\tau) := \int_{\frac{\zeta+\tau}{2}}^{\zeta} ds \int_0^{2s-\zeta-\tau} P(s-\tau,\xi;q,M_1)\,d\xi - \int_{\frac{\tau-\zeta}{2}+\pi}^{\pi} ds \int_0^{2(s-\pi)+\zeta-\tau} P(s-\tau,\xi;q,M_1)\,d\xi,$$

$$F_3(\zeta,\tau) := \int_\zeta^\pi q(s)\,ds \int_\tau^\zeta F(s,\xi,\tau;q,M_1)\,d\xi,$$

$$F_4(\zeta,\tau) := \int_{\frac{\zeta+\tau}{2}}^{\zeta} q(s)\,ds \int_\tau^{2s-\zeta} F(s,\xi,\tau;q,M_1)\,d\xi - \int_{\frac{\tau-\zeta}{2}+\pi}^{\pi} q(s)\,ds \int_\tau^{2(s-\pi)+\zeta} F(s,\xi,\tau;q,M_1)\,d\xi,$$

$$F_5(\zeta,\tau) := \int_0^{\zeta-\tau} M_1(s)\,ds \int_\zeta^\pi d\xi \int_\tau^{\zeta-s} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)\,d\eta,$$

$$F_6(\zeta,\tau) := \int_0^{\zeta-\tau} M_1(s)\,ds \int_{\frac{\zeta+\tau+s}{2}}^{\zeta} d\xi \int_\tau^{2\xi-\zeta-s} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)\,d\eta -$$

$$- \int_0^{\zeta-\tau} M_1(s)\,ds \int_{\frac{s+\tau-\zeta}{2}+\pi}^{\pi} d\xi \int_\tau^{2(\xi-\pi)+\zeta-s} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)\,d\eta.$$

В оставшейся части доказательства одним и тем же символом C будем обозначать различные константы в оценках, не зависящие от аргументов функций.

Так как $P(x,t;q,M_1)$ — ограниченная функция, то

$$|F_1(\zeta,\tau)| \leqslant \int_\zeta^\pi ds \int_0^{\zeta-\tau} |P(s-\tau,\xi;q,M_1)|\,d\xi \leqslant C(\pi-\zeta)(\zeta-\tau).$$

Далее, доопределяя функцию $P(x,t;q,M_1)$ нулем вне треугольника D_π и преобразуя пределы интегрирования, будем иметь

$$F_2(\zeta,\tau) = \int_{\frac{\zeta+\tau}{2}}^{\frac{\tau-\zeta}{2}+\pi} ds \int_0^{2s-\zeta-\tau} P(s-\tau,\xi;q,M_1)\,d\xi + \int_{\frac{\tau-\zeta}{2}+\pi}^{\zeta} ds \int_{2(s-\pi)+\zeta-\tau}^{2s-\zeta-\tau} P(s-\tau,\xi;q,M_1)\,d\xi -$$

$$- \int_\zeta^\pi ds \int_0^{2(s-\pi)+\zeta-\tau} P(s-\tau,\xi;q,M_1)\,d\xi.$$

Здесь

$$\Bigl|\int\limits_{\frac{\zeta+\tau}{2}}^{\frac{\tau-\zeta}{2}+\pi} ds \int\limits_0^{2s-\zeta-\tau} P(s-\tau,\xi;q,M_1)\,d\xi\Bigr| \leqslant C \int\limits_{\frac{\zeta+\tau}{2}}^{\frac{\tau-\zeta}{2}+\pi} ds \int\limits_0^{2s-\zeta-\tau} d\xi \leqslant C(\pi-\zeta)^2,$$

$$\Bigl|\int\limits_{\frac{\tau-\zeta}{2}+\pi}^{\zeta} ds \int\limits_{2(s-\pi)+\zeta-\tau}^{2s-\zeta-\tau} P(s-\tau,\xi;q,M_1)\,d\xi\Bigr| \leqslant C\Bigl(\frac{\zeta-\tau}{2}+\pi-\zeta\Bigr)(\pi-\zeta),$$

$$\Bigl|\int\limits_{\zeta}^{\pi} ds \int\limits_0^{2(s-\pi)+\zeta-\tau} P(s-\tau,\xi;q,M_1)\,d\xi\Bigr| \leqslant C(\pi-\zeta)\Bigl(2(\pi-\zeta)+\zeta-\tau\Bigr).$$

Таким образом, приходим к оценке

$$|F_2(\zeta,\tau)| \leqslant C(\pi-\zeta)(\pi-\tau).$$

Далее, так как $F(x,t,\tau;q,M_1)$ — ограниченная функция, а $q(x), M_1(x) \in L_2(0,\pi)$, аналогично приходим к следующим оценкам для остальных $F_k(\zeta,\tau)$:

$$|F_3(\zeta,\tau)| \leqslant \int\limits_{\zeta}^{\pi} |q(s)|\,ds \int\limits_{\tau}^{\zeta} |F(s,\xi,\tau;q,M_1)|\,d\xi \leqslant C\sqrt{\pi-\zeta}(\zeta-\tau),$$

$$|F_4(\zeta,\tau)| = \int\limits_{\frac{\zeta+\tau}{2}}^{\frac{\tau-\zeta}{2}+\pi} |q(s)|\,ds \int\limits_{\tau}^{2s-\zeta} |F(s,\xi,\tau;q,M_1)|\,d\xi + \\ + \Bigl|\int\limits_{\frac{\tau-\zeta}{2}+\pi}^{\zeta} q(s)\,ds \int\limits_{2(s-\pi)+\zeta}^{2s-\zeta} F(s,\xi,\tau;q,M_1)\,d\xi\Bigr| + \\ + \Bigl|\int\limits_{\zeta}^{\pi} q(s)\,ds \int\limits_{\tau}^{2(s-\pi)+\zeta} F(s,\xi,\tau;q,M_1)\,d\xi\Bigr| \leqslant C\sqrt{\pi-\zeta}(\pi-\tau),$$

$$|F_5(\zeta,\tau)| \leqslant \int\limits_0^{\zeta-\tau} |M_1(s)|\,ds \int\limits_{\zeta}^{\pi} d\xi \int\limits_{\tau}^{\zeta-s} |F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)|\,d\eta \leqslant C(\pi-\zeta)(\zeta-\tau)^{\frac{3}{2}},$$

$$|F_6(\zeta,\tau)| = \int\limits_0^{\zeta-\tau} |M_1(s)|\,ds \int\limits_{\frac{\zeta+\tau+s}{2}}^{\frac{s+\tau-\zeta}{2}+\pi} d\xi \int\limits_{\tau}^{2\xi-\zeta-s} |F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)|\,d\eta + \\ + \Bigl|\int\limits_0^{\zeta-\tau} M_1(s)\,ds \int\limits_{\frac{s+\tau-\zeta}{2}+\pi}^{\zeta} d\xi \int\limits_{2(\xi-\pi)+\zeta-s}^{2\xi-\zeta-s} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)\,d\eta\Bigr| + \\ + \Bigl|\int\limits_0^{\zeta-\tau} M_1(s)\,ds \int\limits_{\zeta}^{\pi} d\xi \int\limits_{\tau}^{2(\xi-\pi)+\zeta-s} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)\,d\eta\Bigr| \leqslant C\sqrt{\zeta-\tau}(\pi-\zeta)(\pi-\tau).$$

Итак, справедлива следующая общая оценка:

$$|F_k(\zeta,\tau)| \leqslant C\sqrt{\pi-\zeta}\,(\pi-\tau), \quad k=\overline{1,6},$$

которая вместе с (5.15) дает

$$\Big|\int\limits_0^\zeta \varphi(x)\,dx\Big| \leqslant C(\pi-\zeta)^{\frac{\varepsilon}{2}} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\zeta} \frac{(\pi-\tau)^{1-\varepsilon}|h(\tau)|}{(\pi-\tau)^{\frac{1-\varepsilon}{2}}}\,d\tau,$$

где правая часть стремится к нулю при $\zeta\to\pi$, что влечет (5.14). □

Рассмотрим соотношение (5.7). Имеем $g_1(x)$, $(\pi-x)h(x)\in L_2(0,\pi)$. Согласно лемме 5.3 получаем $(\pi-x)^{2/3}\varphi(x)\in L_2(0,\pi)$. Применяя лемму 5.1 к (5.7), (5.8), уточняем $(\pi-x)^{2/3}h(x)\in L_2(0,\pi)$. Снова используя лемму 5.3, получим $(\pi-x)^{1/3}\varphi(x)\in L_2(0,\pi)$.

Далее, согласно лемме 5.4 имеем (5.14). Кроме того, согласно (5.6) будем иметь

$$\int\limits_0^\pi g_1(x)\,dx = 2\Big(w(\pi-x)-w_1(x;M_1)-V(x;M)\Big)\Big|_{x=0}^{\pi}. \tag{5.16}$$

Используя (2.24), вычисляем

$$2w(\pi-x)\Big|_{x=0}^{\pi} = 2(w(0)-w(\pi)) = -\alpha_0\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} q(x)\,dx - \alpha_1\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} q(x)\,dx. \tag{5.17}$$

В силу (2.35) и (2.36) имеем

$$-2w_1(x;M_1)\Big|_{x=0}^{\pi} = 2(w_1(0)-w_1(\pi)) = \int\limits_0^\pi q(x)\,dx. \tag{5.18}$$

Наконец, используя (2.26), (2.30)–(2.32), (2.35) и (2.36) получим

$$-2V(x;M)\Big|_{x=0}^{\pi} = 2(V(0)-V(\pi)) = \alpha_0\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} q(x)\,dx + \alpha_1\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} q(x)\,dx - \int\limits_0^\pi q(x)\,dx. \tag{5.19}$$

Таким образом, в силу (5.16)–(5.19) приходим к равенству

$$\int\limits_0^\pi g_1(x)\,dx = 0,$$

которое вместе с (5.7), (5.14) и леммой 5.1 дает $(\pi-x)^{1/3}h(x)\in L_2(0,\pi)$. Снова применяя леммы 5.1 и 5.3, окончательно уточняем, что $(\pi-x)M_2(x)=h(x)\in L_2(0,\pi)$, и приходим к утверждению теоремы 4.1.

6. Решение обратной задачи. Доказательство теоремы 1.2

Известным методом (см., например, [22, лемма 3.3]) доказывается следующее утверждение, являющееся обратным к лемме 2.5.

Лемма 6.1. *Пусть заданы произвольные комплексные числа* λ_k, $k\geqslant 1$, *вида* (1.5), (1.6). *Тогда функция* $\Delta(\lambda)$, *определенная по формуле* (2.54), *имеет вид* (2.23), (2.24).

Отметим также, что лемма 6.1 может быть получена непосредственно из [22, леммы 3.3 и 3.4].

Доказательство теоремы 1.2. Пусть задана комплекснозначная функция $q(x)\in L_2(0,\pi)$ и комплексные числа α_0, α_1, β, причем $\alpha_0+\alpha_1\notin(-\infty,0]$, а также некоторая последовательность комплексных чисел $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ вида (1.5), (1.6). Тогда согласно лемме 6.1 функция $\Delta(\lambda)$, построенная по формуле (2.54), имеет вид (2.23) с некоторой функцией $w(x)\in W_2^1[0,\pi]$, удовлетворяющей краевым условиям (2.24). В силу теоремы 4.1 основное уравнение (4.1) с этой функцией $w(x)$ имеет единственное решение $M(x)$, удовлетворяющее условию (1.4). Рассмотрим соответствующую краевую задачу $L = L(q, M, \alpha_0, \alpha_1, \beta)$. Пусть $\tilde{\Delta}(\lambda)$ — ее характеристическая функция. Тогда согласно лемме 2.3 она имеет вид

$$\tilde{\Delta}(\lambda) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2} \frac{\sin \rho\pi}{\rho} + \int_0^\pi \tilde{w}(x) \frac{\sin \rho x}{\rho}\, dx, \quad \tilde{w}(x) \in W_2^1[0, \pi], \tag{6.1}$$

где

$$\tilde{w}(\pi - x) = \frac{\beta}{2} + w_1(x; M) + V(x; M), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \tag{6.2}$$

а функции $w_1(x; M)$ и $V(x; M)$ определены при помощи формул (2.25)–(2.29). При этом

$$\tilde{w}(\pi) = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{4} \int_0^\pi q(x)\, dx = w(\pi). \tag{6.3}$$

Дифференцируя (6.2) по x и сравнивая с (4.1), получаем $\tilde{w}'(x) = w'(x)$ п.в. на $(0, \pi)$, а учитывая (6.3) и тот факт, что $w(x), \tilde{w}(x) \in W_2^1[0, \pi]$, приходим к тождеству $\tilde{w}(x) \equiv w(x)$. Итак, принимая во внимание (2.23) и (6.1), окончательно заключаем, что $\tilde{\Delta}(\lambda) \equiv \Delta(\lambda)$. Таким образом, спектр построенной краевой задачи L совпадает с заданной последовательностью $\{\lambda_k\}_{k\geqslant 1}$.

Единственность $M(x)$ следует из единственности решения основного уравнения (4.1). □

Доказательство теоремы 1.2 конструктивно и дает следующий алгоритм решения задачи 1.1.

Алгоритм 6.1. *Пусть заданы спектр* $\{\lambda_k\}_{k\geqslant 1}$ *некоторой краевой задачи* $L(q, M, \alpha_0, \alpha_1, \beta)$, *функция* $q(x)$ *и числа* α_0, α_1, β.

1) *Строим функцию* $\Delta(\lambda)$ *по формуле* (2.54).
2) *В соответствии с* (2.23) *вычисляем функцию* $w(x)$ *по формуле*

$$w(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} k\Delta(k^2) \sin kx.$$

3) *Находим функцию* $M(x)$ *из основного уравнения* (4.1).

7. Информация о финансовой поддержке

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17-11-01193).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутерин С.А.* Обратная спектральная задача восстановления оператора свертки, возмущенного одномерным оператором// Мат. заметки. — 2006. — *80*, № 5. — С. 668–682.
2. *Бутерин С.А.* О восстановлении сверточного возмущения оператора Штурма—Лиувилля по спектру// Дифф. уравн. — 2010. — *46*, № 1. — С. 146–149.
3. *Бутерин С.А.* Обратная спектральная задача для интегро-дифференциальных операторов с условием разрыва// В сб.: «Математика. Механика. Т. 17». — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2015. — С. 9–12.
4. *Бутерин С.А.* Обратная задача для интегро-дифференциального оператора второго порядка с условием разрыва// В сб.: «Совр. пробл. теории функций и их прил.». — Саратов: Изд-во «Научная книга», 2018. — С. 70–73.
5. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962.
6. *Еремин М.С.* Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения второго порядка с особенностью// Дифф. уравн. — 1988. — *24*, № 2. — С. 350–351.
7. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.
8. *Курышова Ю.В.* Обратная спектральная задача для интегро-дифференциальных операторов// Мат. заметки. — 2007. — *81*, № 6. — С. 855–866.
9. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. — М.: Гостехиздат, 1956.
10. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Операторы Штурма—Лиувилля и Дирака. — М.: Наука, 1988.
11. *Маламуд М.М.* О некоторых обратных задачах// В сб.: «Краевые задачи математической физики». — Киев: Наукова Думка, 1979. — С. 116–124.
12. *Марченко В.А.* Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения. — Киев: Наукова думка, 1977.

13. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Физматгиз, 1977.
14. *Юрко В. А.* Обратная задача для интегро-дифференциальных операторов первого порядка// В сб.: «Функциональный анализ». — Ульяновск, 1984. — С. 144–151.
15. *Юрко В. А.* Обратная задача для интегро-дифференциальных операторов// Мат. заметки. — 1991. — *50*, № 5. — С. 134–144.
16. *Юрко В. А.* О краевых задачах с условиями разрыва внутри интервала// Дифф. уравн. — 2000. — *36*, № 8. — С. 1139–1140.
17. *Юрко В. А.* Обратная задача для дифференциальных систем на конечном интервале в случае кратных корней характеристического многочлена// Дифф. уравн. — 2005. — *41*, № 6. — С. 781–786.
18. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. — М.: Физматлит, 2007.
19. *Beals R., Deift P., Tomei C.* Direct and inverse scattering on the line. — Providence: AMS, 1988.
20. *Bondarenko N. P.* An inverse problem for an integro-differential operator on a star-shaped graph// Math. Methods Appl. Sci. — 2018. — *41*, № 4. — С. 1697–1702.
21. *Bondarenko N., Buterin S.* On recovering the Dirac operator with an integral delay from the spectrum// Results Math. — 2017. — *71*, № 3-4. — С. 1521–1529.
22. *Buterin S. A.* On an inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator// Results Math. — 2007. — *50*, № 3-4. — С. 173–181.
23. *Buterin S. A.* On inverse spectral problems for first-order integro-differential operators with discontinuities// Appl. Math. Lett. — 2018. — *78*. — С. 65–71.
24. *Buterin S. A., Choque Rivero A. E.* On inverse problem for a convolution integro-differential operator with Robin boundary conditions// Appl. Math. Lett. — 2015. — *48*. — С. 150–155.
25. *Buterin S. A., Sat M.* On the half inverse spectral problem for an integro-differential operator// Inverse Probl. Sci. Eng. — 2017. — *25*, № 10. — С. 1508–1518.
26. *Buterin S. A., Vasiliev S. V.* On uniqueness of recovering the convolution integro-differential operator from the spectrum of its non-smooth one-dimensional perturbation// Bound. Value Probl. — 2018. — *2018*, № 55. — `https://doi.org/10.1186/s13661-018-0974-2`.
27. *Freiling G., Yurko V. A.* Inverse Sturm—Liouville problems and their applications. — New York: NOVA Science Publ., 2001.
28. *Freiling G., Yurko V. A.* Inverse spectral problems for singular non-selfadjoint differential operators with discontinuities in an interior point// Inverse Problems. — 2002. — *18*. — С. 757–773.
29. *Hald O. H.* Discontinuous inverse eigenvalue problems// Commun. Pure Appl. Math. — 1984. — *37*. — С. 539–577.
30. *Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G.* Inequalities. — Cambridge: Cambridge University Press, 1988.
31. *Ignatiev M.* On an inverse spectral problem for one integro-differential operator of fractional order// J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2018. — DOI: 10.1515/jiip-2017-0121.
32. *Ignatyev M.* On an inverse spectral problem for the convolution integro-differential operator of fractional order// Results Math. — 2018. — DOI: 10.1007/s00025-018-0800-2.
33. *Krueger R. J.* Inverse problems for nonabsorbing media with discontinuous material properties// J. Math. Phys. — 1982. — *23*, № 3. — С. 396–404.
34. *Kuryshova Yu. V., Shieh C.-T.* An inverse nodal problem for integro-differential operators// J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2010. — *18*, № 4. — С. 357–369.
35. *Lakshmikantham V., Rama Mohana Rao M.* Theory of integro-differential equations. — Singapore: Gordon & Breach Sci. Publ., 1995.
36. *Manafov M. Dzh.* An inverse spectral problem for Sturm—Liouville operator with integral delay// Electron. J. Differ. Equ. — 2017. — *2017*, № 12. — С. 1–8.
37. *Shepelsky D. G.* The inverse problem of reconstruction of the medium's conductivity in a class of discontinuous and increasing functions// В сб.: «Spectral Operator Theory and Related Topics». — Providence: Am. Math. Soc., 1994. — С. 209–232.
38. *Shieh C.-T., Yurko V. A.* Inverse nodal and inverse spectral problems for discontinuous boundary value problems// J. Math. Anal. Appl. — 2008. — *347*. — С. 266–272.
39. *Wang Y.-P.* Inverse problems for Sturm—Liouville operators with interior discontinuities and boundary conditions dependent on the spectral parameter// Math. Methods Appl. Sci. — 2013. — *36*, № 7. — С. 857–868.
40. *Wang Y. P.* Inverse problems for discontinuous Sturm—Liouville operators with mixed spectral data// Inverse Probl. Sci. Eng. — 2015. — *23*, № 7. — С. 1180–1198.
41. *Wang Y.-P., Wei G.* The uniqueness for Sturm—Liouville problems with aftereffect// Acta Math. Sci. — 2012. — *32A*, № 6. — С. 1171–1178.

42. *Wang Y. P., Yurko V. A.* On the inverse nodal problems for discontinuous Sturm—Liouville operators// J. Differ. Equ. — 2016. — *260*, № 5. — C. 4086–4109.
43. *Yang C. F.* Inverse nodal problems of discontinuous Sturm—Liouville operator// J. Differ. Equ. — 2013. — *254*, № 4. — C. 1992–2014.
44. *Yang C.-F., Yang X.-P.* An interior inverse problem for the Sturm—Liouville operator with discontinuous conditions// Appl. Math. Lett. — 2009. — *22*, № 9. — C. 1315–1319.
45. *Yurko V. A.* Integral transforms connected with discontinuous boundary value problems// Integral Transforms Spec. Funct. — 2000. — 10, № 2. — C. 141–164.
46. *Yurko V. A.* Inverse spectral problems for differential operators and their applications. — Amsterdam: Gordon & Breach Sci. Publ., 2000.
47. *Yurko V. A.* Method of spectral mappings in the inverse problem theory. — Utrecht: VSP, 2002.
48. *Yurko V. A.* An inverse spectral problems for integro-differential operators// Far East J. Math. Sci. — 2014. — *92*, № 2. — C. 247–261.
49. *Yurko V. A.* Inverse problems for second order integro-differential operators// Appl. Math. Lett. — 2017. — *74*. — C. 1–6.
50. *Yurko V. A.* Inverse spectral problems for first order integro-differential operators// Bound. Value Probl. — 2017. — *2017*, № 98. — https://doi.org/10.1186/s13661-017-0831-8.

С. А. Бутерин
Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, 410012, Саратов, ул. Астраханская, д. 83, корпус IX
E-mail: buterinsa@info.sgu.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-3-427-458 UDC 517.984

Inverse Spectral Problem for Integrodifferential Sturm–Liouville Operators with Discontinuity Conditions

 S. A. Buterin

Abstract. We consider the Sturm—Liouville operator perturbed by a convolution integral operator on a finite interval with Dirichlet boundary-value conditions and discontinuity conditions in the middle of the interval. We study the inverse problem of restoration of the convolution term by the spectrum. The problem is reduced to solution of the so-called main nonlinear integral equation with a singularity. To derive and investigate this equations, we do detailed analysis of kernels of transformation operators for the integrodifferential expression under consideration. We prove the global solvability of the main equation, this implies the uniqueness of solution of the inverse problem and leads to necessary and sufficient conditions for its solvability in terms of spectrum asymptotics. The proof is constructive and gives the algorithm of solution of the inverse problem.

REFERENCES

1. S. A. Buterin, "Obratnaya spektral'naya zadacha vosstanovleniya operatora svertki, vozmushchennogo odnomernym operatorom" [Inverse spectral problem of restoration of a convolution operator perturbed by a one-dimensional operator], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2006, **80**, No. 5, 668–682 (in Russian).
2. S. A. Buterin, "O vosstanovlenii svertochnogo vozmushcheniya operatora Shturma—Liuvillya po spektru" [On restoration of a convolutional perturbation of the Sturm—Liouville operator from the spectrum], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2010, **46**, No. 1, 146–149 (in Russian).
3. S. A. Buterin, "Obratnaya spektral'naya zadacha dlya integro-differentsial'nykh operatorov s usloviem razryva" [Inverse spectral problem for integrodifferential operators with discontinuity condition], In: *Matematika. Mekhanika. T. 17* [Mathematics. Mechanics. Vol. 17], Saratov Univ, Saratov, 2015, pp. 9–12 (in Russian).

4. S. A. Buterin, “Obratnaya zadacha dlya integro-differentsial’nogo operatora vtorogo poryadka s usloviem razryva” [Inverse problem for a second-order integrodifferential operator with discontinuity condition], In: *Sovr. probl. teorii funktsiy i ikh pril.* [Contemp. Probl. Funct. Theory Appl.], Nauchnaya kniga, Saratov, 2018, pp. 70–73 (in Russian).
5. N. Dunford and J. Schwartz, *Lineynye operatory. Obshchaya teoriya* [Linear Operators. General Theory], IL, Moscow, 1962 (Russian translation).
6. M. S. Eremin, “Obratnaya zadacha dlya integro-differentsial’nogo uravneniya vtorogo poryadka s osobennost’yu” [Inverse problem for a second-order integrodifferential equation with a singularity], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1988, **24**, No. 2, 350–351 (in Russian).
7. K. Yosida, *Funktsional’nyy analiz* [Functional Analysis], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
8. Yu. V. Kuryshova, “Obratnaya spektral’naya zadacha dlya integro-differentsial’nykh operatorov” [Inverse spectral problem for integrodifferential operators], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2007, **81**, No. 6, 855–866 (in Russian).
9. B. Ya. Levin, *Raspredelenie korney tselykh funktsiy* [Distribution of Roots of Entire Functions], Gostekhizdat, Moscow, 1956 (in Russian).
10. B. M. Levitan and I. S. Sargsyan, *Operatory Shturma—Liuvillya i Diraka* [Sturm—Liouville and Dirac Operators], Nauka, Moscow, 1988 (in Russian).
11. M. M. Malamud, “O nekotorykh obratnykh zadachakh” [On some inverse problems], In: *Kraevye zadachi matematicheskoy fiziki* [Boundary-value Problems of Mathematical Physics], Naukova Dumka, Kiev, 1979, pp. 116–124 (in Russian).
12. V. A. Marchenko, *Operatory Shturma—Liuvillya i ikh prilozheniya* [Sturm—Liouville Operators and Their Applications], Naukova dumka, Kiev, 1977 (in Russian).
13. I. I. Privalov, *Vvedenie v teoriyu funktsiy kompleksnogo peremennogo* [Introduction to the Theory of Functions of Complex Variable], Fizmatgiz, Moscow, 1977 (in Russian).
14. V. A. Yurko, “Obratnaya zadacha dlya integro-differentsial’nykh operatorov pervogo poryadka” [Inverse problem for first-order integrodifferential operators], In: *Funktsional’nyy analiz* [Functional Analysis], Ul’yanovsk, 1984, pp. 144–151 (in Russian).
15. V. A. Yurko, “Obratnaya zadacha dlya integro-differentsial’nykh operatorov” [Inverse problem for integrodifferential operators], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1991, **50**, No. 5, 134–144 (in Russian).
16. V. A. Yurko, “O kraevykh zadachakh s usloviyami razryva vnutri intervala” [On boundary-value problems with discontinuity conditions inside the interval], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2000, **36**, No. 8, 1139–1140 (in Russian).
17. V. A. Yurko, “Obratnaya zadacha dlya differentsial’nykh sistem na konechnom intervale v sluchae kratnykh korney kharakteristicheskogo mnogochlena” [Inverse problem for differential systems on a finite interval in the case of multiple roots of the characteristic polynomial], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2005, **41**, No. 6, 781–786 (in Russian).
18. V. A. Yurko, *Vvedenie v teoriyu obratnykh spektral’nykh zadach* [Introduction to the Theory of Inverse Spectral Problems], Fizmatlit, Moscow, 2007 (in Russian).
19. R. Beals, P. Deift, and C. Tomei, *Direct and Inverse Scattering on the Line*, AMS, Providence, 1988.
20. N. P. Bondarenko, “An inverse problem for an integro-differential operator on a star-shaped graph,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2018, **41**, No. 4, 1697–1702.
21. N. Bondarenko and S. Buterin, “On recovering the Dirac operator with an integral delay from the spectrum,” *Results Math.*, 2017, **71**, No. 3-4, 1521–1529.
22. S. A. Buterin, “On an inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator,” *Results Math.*, 2007, **50**, No. 3-4, 173–181.
23. S. A. Buterin, “On inverse spectral problems for first-order integro-differential operators with discontinuities,” *Appl. Math. Lett.*, 2018, **78**, 65–71.
24. S. A. Buterin and A. E. Choque Rivero, “On inverse problem for a convolution integro-differential operator with Robin boundary conditions,” *Appl. Math. Lett.*, 2015, **48**, 150–155.
25. S. A. Buterin and M. Sat, “On the half inverse spectral problem for an integro-differential operator,” *Inverse Probl. Sci. Eng.*, 2017, **25**, No. 10, 1508–1518.
26. S. A. Buterin and S. V. Vasiliev, “On uniqueness of recovering the convolution integro-differential operator from the spectrum of its non-smooth one-dimensional perturbation,” *Bound. Value Probl.*, 2018, **2018**, No. 55, `https://doi.org/10.1186/s13661-018-0974-2`.
27. G. Freiling and V. A. Yurko, *Inverse Sturm—Liouville Problems and Their Applications*, NOVA Science Publ., New York, 2001.
28. G. Freiling and V. A. Yurko, “Inverse spectral problems for singular non-selfadjoint differential operators with discontinuities in an interior point,” *Inverse Problems*, 2002, **18**, 757–773.

29. O. H. Hald, “Discontinuous inverse eigenvalue problems,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1984, **37**, 539–577.
30. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
31. M. Ignatiev, “On an inverse spectral problem for one integro-differential operator of fractional order,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2018, DOI: 10.1515/jiip-2017-0121.
32. M. Ignatyev, “On an inverse spectral problem for the convolution integro-differential operator of fractional order,” *Results Math.*, 2018, DOI: 10.1007/s00025-018-0800-2.
33. R. J. Krueger, “Inverse problems for nonabsorbing media with discontinuous material properties,” *J. Math. Phys.*, 1982, **23**, No. 3, 396–404.
34. Yu. V. Kuryshova and C.-T. Shieh, “An inverse nodal problem for integro-differential operators,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2010, **18**, No. 4, 357–369.
35. V. Lakshmikantham and M. Rama Mohana Rao, *Theory of Integro-Differential Equations*, Gordon & Breach Sci. Publ., Singapore, 1995.
36. M. Dzh. Manafov, “An inverse spectral problem for Sturm—Liouville operator with integral delay,” *Electron. J. Differ. Equ.*, 2017, **2017**, No. 12, 1–8.
37. D. G. Shepelsky, “The inverse problem of reconstruction of the medium’s conductivity in a class of discontinuous and increasing functions,” In: *Spectral Operator Theory and Related Topics*, Am. Math. Soc., Providence, 1994, pp. 209–232.
38. C.-T. Shieh and V. A. Yurko, “Inverse nodal and inverse spectral problems for discontinuous boundary value problems,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, **347**, 266–272.
39. Y.-P. Wang, “Inverse problems for Sturm—Liouville operators with interior discontinuities and boundary conditions dependent on the spectral parameter,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2013, **36**, No. 7, 857–868.
40. Y. P. Wang, “Inverse problems for discontinuous Sturm—Liouville operators with mixed spectral data,” *Inverse Probl. Sci. Eng.*, 2015, **23**, No. 7, 1180–1198.
41. Y.-P. Wang and G. Wei, “The uniqueness for Sturm—Liouville problems with aftereffect,” *Acta Math. Sci.*, 2012, **32A**, No. 6, 1171–1178.
42. Y. P. Wang and V. A. Yurko, “On the inverse nodal problems for discontinuous Sturm—Liouville operators,” *J. Differ. Equ.*, 2016, **260**, No. 5, 4086–4109.
43. C. F. Yang, “Inverse nodal problems of discontinuous Sturm—Liouville operator,” *J. Differ. Equ.*, 2013, **254**, No. 4, 1992–2014.
44. C.-F. Yang and X.-P. Yang, “An interior inverse problem for the Sturm—Liouville operator with discontinuous conditions,” *Appl. Math. Lett.*, 2009, **22**, No. 9, 1315–1319.
45. V. A. Yurko, “Integral transforms connected with discontinuous boundary value problems,” *Integral Transforms Spec. Funct.*, 2000, 10, No. 2, 141–164.
46. V. A. Yurko, *Inverse Spectral Problems for Differential Operators and Their Applications*, Gordon & Breach Sci. Publ., Amsterdam, 2000.
47. V. A. Yurko, *Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory*, VSP, Utrecht, 2002.
48. V. A. Yurko, “An inverse spectral problems for integro-differential operators,” *Far East J. Math. Sci.*, 2014, **92**, No. 2, 247–261.
49. V. A. Yurko, “Inverse problems for second order integro-differential operators,” *Appl. Math. Lett.*, 2017, **74**, 1–6.
50. V. A. Yurko, “Inverse spectral problems for first order integro-differential operators,” *Bound. Value Probl.*, 2017, **2017**, No. 98, `https://doi.org/10.1186/s13661-017-0831-8`.

S. A. Buterin
Saratov State University, Saratov, Russia
E-mail: `buterinsa@info.sgu.ru`