Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 1 (2018). С. 194–210

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-194-210 УДК 517.956.3 + 517.983

ИДЕНТИФИКАЦИЯ В ОБЩИХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЗАДАЧАХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2018 г. **А. ФАВИНИ, Г. МАРИНОЧИ, Х. ТАНАБЕ, Я. ЯКУБОВ**

Аннотация. В гильбертовом пространстве X рассматривается абстрактная задача

$$M^*\frac{d}{dt}(My(t)) = Ly(t) + f(t)z, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,$$
$$My(0) = My_0,$$

где L — замкнутый линейный оператор в X, M — оператор (не обязательно обратимый) из $\mathcal{L}(X)$, $z \in X$. При дополнительном условии, заключающемся в том, что $\Phi[My(t)] = g(t)$, где $\Phi \in X^*$, а $g \in C^1([0,\tau];\mathbb{C})$, ищутся условия, при которых можно найти такую функцию f из $C([0,\tau];\mathbb{C})$, для которой y есть сильное решение указанной абстрактной задачи, т. е., $My \in C^1([0,\tau];X)$ и $Ly \in C([0,\tau];X)$. Аналогичная задача рассматривается и для уравнения второго порядка по времени. Приводятся различные примеры указанных общих задач.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение и основные обозначения 194
2. Уравнения первого порядка. Метод многозначных операторов 195
3. Общий случай 199
4. Уравнения второго порядка по времени 203
5. Примеры и приложения 206
Список литературы 209

1. Введение и основные обозначения

В математической литературе рассматривались некоторые частные случаи следующей общей задачи: найти пару функций (y, f) из $C([0,\tau];D(L)) \times C([0,\tau];\mathbb{C})$, удовлетворяющую задаче

$$M^*\frac{d}{dt}(My(t)) = Ly(t) + f(t)z, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \tag{1.1}$$

$$My(0) = My_0, \tag{1.2}$$

$$\Phi[My(t)] = g(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \tag{1.3}$$

при условии $g(0) = \Phi[My_0]$, где L — замкнутый линейный оператор в X, $M \in \mathcal{L}(X)$, т. е., M — линейный ограниченный (не обязательно обратимый) оператор в X, $y_0 \in X$, $g \in C([0,\tau];\mathbb{C})$, $\Phi \in X^*$, $z \in X$.

В [2] рассмотрен случай, в котором z заменено но M^*z для некоторого z из X; в [3] задача (1.1)–(1.3) решена при некоторых конкретных условиях на My_0 и $ML^{-1}z$.

В настоящей работе при предположении о том, что существует ограниченный оператор L^{-1}, указанная задача изучается в очень общей ситуации. В разделе 2 задача (1.1)–(1.3) изучается при помощи многозначных линейных операторов (подобно [4]). В разделе 3 предлагается более прямой подход, учитывающий представление объемлющего пространства $X = N(T) \oplus \overline{R(T)}$, где

Первый автор является членом G.N.A.M.P.A., и данная работа на 60% согласована с исследовательской программой G.N.A.M.P.A.-I.N.D.A.M. Последний автор поддержан средствами RFO Болонского университета и министерством абсорбции Израиля.

$T = ML^{-1}M^*$, в виде прямой суммы. В разделе 4 изучается эволюционное уравнение второго порядка

$$C^{1/2}\frac{d}{dt}(C^{1/2}y'(t)) + By'(t) + Ay(t) = f(t)z, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,$$

где $C = C^* \in \mathcal{L}(X)$, A и B — подходящие замкнутые линейные операторы в X, $z \in X$. Раздел 5 содержит ряд конкретных приложений указанных абстрактных результатов к обыкновенным дифференциальным уравнениям и дифференциальным уравнениям в частных производных.

2. Уравнения первого порядка. Метод многозначных операторов

Прежде всего напомним некоторые результаты работы [4], касающиеся дифференциальных задач в гильбертовом пространстве H. Начнем с задачи

$$\begin{cases} M^*\dfrac{d}{dt}(My(t)) = Ly(t) + M^*f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ My(0) = w_0, \end{cases} \tag{DE}$$

где M — линейный ограниченный оператор в H, L — замкнутый линейный однозначный оператор в H, w_0 — заданный элемент пространства H и $f \in C([0,\tau]; H)$. Мы полагаем, что

$$\operatorname{Re}\langle Lu, u\rangle_H \leqslant \beta\|Mu\|_H^2, \quad \exists\beta \in \mathbb{R}, \forall u \in D(L), \tag{2.1}$$

$$R(\lambda_0 M^*M - L) \supseteq R(M^*) \tag{2.2}$$

и для некоторого λ_0, превосходящего β, оператор $(\lambda_0 M^*M - L)^{-1}$ однозначен на $R(M^*)$.

Следующая лемма — это фактически [4, теорема 2.10, с. 38].

Лемма 2.1. *Если условия* (2.1)-(2.2) *выполнены, то для любой f из $C^1([0,\tau]; H)$ и любого w_0, удовлетворяющего соотношению*

$$w_0 = My_0, \quad Ly_0 \in R(M^*), \tag{2.3}$$

существует такое y_0 из $D(L)$, что задача (DE) *имеет единственное решение y, для которого*

$$My \in C^1([0,\tau], H), \ Ly \in C([0,\tau]; H). \tag{2.4}$$

Ключевой шаг доказательства заключается в том, что при наложенных условиях $A - \beta I = (M^*)^{-1}LM^{-1} - \beta I$ является максимальным диссипативным оператором в H. Отсюда также следует, что $H = N(T) \oplus \overline{R(T)}$, где $T = A^{-1} = ML^{-1}M^*$.

Чтобы решить общую задачу

$$\begin{cases} M^*\dfrac{d}{dt}(My(t)) = Ly(t) + f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ My(0) = w_0, \end{cases} \tag{DE1}$$

надо наложить следующее условие, более сильное, чем (2.2): существует такое λ_0, превосходящее β, что

$$R(\lambda_0 M^*M - L) = H, \text{ а оператор } (\lambda_0 M^*M - L)^{-1} \text{ однозначен и ограничен.} \tag{2.5}$$

Тогда замена $y(t) = x(t) - L^{-1}f(t)$ преобразует задачу (DE1) к виду

$$M^*\frac{d}{dt}(Mx(t)) - M^*ML^{-1}f'(t) = Lx(t) - f(t) + f(t) = Lx(t),$$

т. е., к виду

$$\begin{aligned} &M^*\frac{d}{dt}(Mx(t)) = Lx(t) + M^*ML^{-1}f'(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ &Mx(0) = My_0 + ML^{-1}f(0). \end{aligned}$$

Отсюда получаем следующее утверждение.

Лемма 2.2 (см. [4, следствие 2.11, с. 39])**.** *Если выполняются условия* (2.1) *и* (2.5)*, то для любой f из $C^2([0,\tau]; H)$ и для любого w_0, удовлетворяющего соотношению $w_0 = My_0$, где $Ly_0 + f(0) \in R(M^*)$, существует такое y_0 из $D(L)$, что задача* (DE1) *имеет единственное решение y, для которого $My \in C^1([0,\tau]; H)$ и $Ly \in C([0,\tau]; H)$.*

Отметим, что, если $\mathcal{A} = (M^*)^{-1} L M^{-1}$, то замена $Mx(t) = \xi(t)$ преобразует последнюю начальную задачу в начальную задачу

$$\begin{aligned}&\frac{d\xi(t)}{dt} - ML^{-1} f'(t) \in \mathcal{A}\xi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,\\ &\xi(0) = ML^{-1}[Ly_0 + f(0)].\end{aligned}$$

Напомним некоторые обозначения, определения и результаты, которые нужны, чтобы рассмотреть дифференциальные уравнения второго порядка по времени.

Пусть H — (комплексное) гильбертово пространство с внутренним произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ и нормой $\|\cdot\|_H$. Пусть V — гильбертово пространство, непрерывно и плотно вложенное H, и пусть имеет место непрерывное вложение $V \subset H \subset V'$, где V' обозначает пространство, двойственное к V. Скалярное произведение, в котором один сомножитель принадлежит V, а второй принадлежит V', обозначается через $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Введем линейные операторы A, B, C следующим образом. Оператор A принадлежит $\mathcal{L}(V, V')$ и обладает свойствами

(i) $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$ для любых u, v из V;
(ii) $\langle Au, u\rangle \geqslant \omega_0 \|u\|_V^2$ для любых $u \in V$,

где ω_0 — положительная постоянная. Введем оператор A_H с областью определения $D(A_H) = \{v \in V; Av \in H\}$ такой, что $A_H v = Av$ для любого v из $D(A_H)$. Хорошо известно, что такой оператор A_H самосопряжен в H. Пусть $A^{1/2}$ обозначает квадратный корень из A_H. Тогда $D(A^{1/2}) = V$, а соотношение $\langle Au, v\rangle = \langle A^{1/2}u, A^{1/2}v\rangle_H$ выполняется для всех u, v из V. Наложим на B и C следующие условия:

(iii) B — замкнутый линейный оператор в H, для которого $D(B) \supseteq D(A^{1/2}) = V$;
(iv) $\mathrm{Re}\langle Bu, u\rangle_H \geqslant 0$ для любого u из V;
(v) $C = C^* \in \mathcal{L}(H)$, $C \geqslant 0$.

В [4, лемма 6.10, с. 211] получен следующий результат.

Лемма 2.3. *Если условия* (i)–(v) *выполняются, то задача*

$$\begin{cases} C^{1/2}\dfrac{d}{dt}(C^{1/2}u'(t)) + Bu'(t) + A_H u(t) = C^{1/2} f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,\\ u(0) = u_0, \quad C^{1/2}u'(0) = C^{1/2}u_1\end{cases} \tag{P'}$$

допускает единственное решение при условии, что $f \in C^1([0,\tau]; H)$, $u_0 \in D(A_H)$, $u_1 \in D(A^{1/2})$ *и существует такое* w *из* H, *что* $A_H u_0 + Bu_1 = C^{1/2}w$.

Чтобы доказать лемму 2.3, заметим, что задача (P') эквивалентна следующей задаче:

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & C^{1/2}\end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & C^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u\\ u'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -I\\ A_H & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u\\ u'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & C^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0\\ f(t)\end{pmatrix},\\ &\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & C^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(0)\\ u'(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & C^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0\\ u_1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Вводя пространство $X = D(A^{1/2}) \times H$ со скалярным произведением, заданным соотношением $\langle (x,y), (x_1,y_1)\rangle_X = \langle A^{1/2}x, A^{1/2}x_1\rangle_H + \langle y, y_1\rangle_H$, где $(x,y), (x_1,y_1) \in X$, и, определяя операторы M и L соотношениями

$$\begin{aligned}&D(M) = X,\ M(x,y) = (x, C^{1/2}y),\ (x,y) \in X,\\ &D(L) = D(A_H) \times D(A^{1/2}),\ L(x,y) = (y, -A_H x - By),\end{aligned}$$

мы видим, что условия (i)–(v) позволяют применить лемму 2.1.

Используя многозначные операторы, преобразуем задачу (1.1)–(1.3) в дифференциальное включение (здесь z заменено на M^*z):

$$\frac{d}{dt}(My(t)) - f(t)z \in (M^*)^{-1} Ly(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau.$$

Далее, с помощью замены $My(t) = x(t)$ получаем, что

$$\begin{aligned}&\frac{dx(t)}{dt} - f(t)z \in (M^*)^{-1}LM^{-1}x(t),\\ &x(0) = My_0,\\ &\Phi[x(t)] = g(t).\end{aligned}$$

Если $(M^*)^{-1}LM^{-1} = A$, то имеем

$$\begin{aligned}&\frac{dx(t)}{dt} - f(t)z \in Ax(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,\\ &x(0) = My_0 = w_0,\\ &\Phi[x(t)] = g(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,\end{aligned}$$

где $g(0) = \Phi[My_0]$. Тогда, как известно из [4], имеем $x(t) = e^{tA}w_0 + \int\limits_0^t e^{(t-s)A}zf(s)ds$. Следовательно, условие $\Phi[x(t)] = g(t)$ переходит в интегральное уравнение

$$\Phi[e^{tA}w_0] + \int\limits_0^t \Phi[e^{(t-s)A}z]f(s)ds = g(t). \tag{2.6}$$

Такое интегральное уравнение второго рода однозначно разрешимо и его решение f принадлежит $C^1([0,\tau];\mathbb{C})$. Имеем следующий результат об однозначной разрешимости.

Теорема 2.1. *Пусть операторы M, M^*, L удовлетворяют условиям* (2.1)-(2.2). *Тогда задача* (1.1)–(1.3)*, в которой $f(t)z$ заменено на $M^*f(t)z$, допускает единственное решение (y, f), принадлежащее $C([0,\tau];H) \times C^1([0,\tau];\mathbb{C})$, если $g \in C^2([0,\tau];\mathbb{C})$, $\Phi[z] \neq 0$, $My_0 = w_0 = A^{-1}w_1$ и существуют такие z_1, w_2 из H, для которых $w_1 = A^{-1}w_2$ и $z = A^{-1}z_1$.*

Доказательство. Можно продифференцировать обе части уравнения (2.6). Получим уравнение

$$\Phi[e^{tA}w_1] + \Phi[z]f(t) + \int\limits_0^t \Phi[e^{(t-s)A}z_1]f(s)ds = g'(t).$$

Это интегральное уравнение допускает единственное решение f из $C([0,\tau];\mathbb{C})$ (см. [5]). Продифференцировав обе части полученного уравнения и применив представление

$$\int\limits_0^t \Phi[e^{(t-s)A}z_1]f(s)ds = \int\limits_0^t \Phi[e^{sA}z_1]f(t-s)ds,$$

мы получаем, что

$$\Phi[e^{tA}w_2] + \Phi[z]f'(t) + \Phi[e^{tA}z_1]f(0) + \int\limits_0^t \Phi[e^{sA}z_1]f'(t-s)ds = g''(t) = \Phi[e^{tA}w_2]+$$
$$+ \Phi[z]f'(t) + \Phi[e^{tA}z_1]f(0) + \int\limits_0^t \Phi[e^{(t-s)A}z_1]f'(s)ds.$$

Из [5] известно, что это интегральное уравнение допускает единственное непрерывное решение, а именно, $f'(t)$, что и завершает доказательство. □

Можно предположить, что с помощью леммы 2.2 аналогичным образом решается и общая задача (1.1)–(1.3). Однако замена $y(t) = x(t) - f(t)L^{-1}z$ преобразует уравнение (1.1) в уравнение

$$M^*\frac{d}{dt}(Mx(t)) - f'(t)M^*ML^{-1}z = Lx(t),$$

а значит, функция $Mx(t) = \xi(t)$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned}
&\frac{d\xi(t)}{dt} - f'(t)ML^{-1}z \in A\xi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,\\
&\xi(0) = w_0 + f(0)ML^{-1}z,\\
&\Phi[\xi(t)] = g(t) + f(t)\Phi[ML^{-1}z], \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,
\end{aligned}$$

где $A = (M^*)^{-1}LM^{-1}$, $w_0 = My_0$. Следовательно, чтобы получить строгое решение

$$\xi(t) = e^{tA}[w_0 + f(0)ML^{-1}z] + \int\limits_0^t e^{(t-s)A}ML^{-1}zf'(s)ds,$$

мы должны предположить, что $f \in C^2([0,\tau];\mathbb{C})$. Наконец, интегрирование по частям дает соотношение

$$\xi(t) = e^{tA}w_0 + f(0)e^{tA}ML^{-1}z - f(0)e^{tA}ML^{-1}z + ML^{-1}zf(t) + \int\limits_0^t e^{(t-s)A}(M^*)^{-1}zf(s)ds =$$
$$= e^{tA}w_0 + ML^{-1}zf(t) + \int\limits_0^t e^{(t-s)A}(M^*)^{-1}zf(s)ds.$$

Им можно воспользоваться только при условии, что $z = M^*z_1$ для некоторого z_1 из X, а именно этого условия мы должны избегать.

Рассмотрим теперь задачу

$$\begin{aligned}
&M^*\frac{d}{dt}(My(t)) = Ly(t) + f(t)M^*z, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,\\
&My(0) = w_0,\\
&\Phi[My(t)] = g(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,
\end{aligned}$$

где $g(0) = \Phi[w_0]$, при условиях (2.1)-(2.2), наложенных на M, M^*, L. Как и ранее, запишем первое уравнение в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}(My(t)) - f(t)z \in (M^*)^{-1}Ly(t).$$

Замена $(M^*)^{-1}Ly(t) \ni x(t)$, т. е., $y(t) = L^{-1}M^*x(t)$, дает соотношения

$$\frac{d}{dt}(Tx(t)) = x(t) + f(t)z, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \tag{2.7}$$
$$Tx(0) = w_0, \tag{2.8}$$
$$\Phi[Tx(t)] = g(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \tag{2.9}$$

где $T = ML^{-1}M^* \in \mathcal{L}(H)$.

Из [2] известно, что пространство H представимо в виде прямой суммы $H = N(T) \oplus \overline{R(T)}$, где $N(T)$ — ядро оператора T, а $R(T)$ — его образ (и то, и другое — в топологии, индуцированной H). Кроме того, если $\widetilde{T}$ обозначает сужение T на $\overline{R(T)}$, то оператор $\widetilde{T}$ обратим, и оператор $\widetilde{T}^{-1}$: $\overline{R(T)} \to \overline{R(T)}$ генерирует в $\overline{R(T)}$ C_0-полугруппу. Обозначим через P оператор проектирования на $N(T)$ вдоль $\overline{R(T)}$. Отметим, что включение $w_0 \in \overline{R(T)}$ является необходимым. Тогда задача (2.7)–(2.9) эквивалентна задаче

$$\frac{d}{dt}(\widetilde{T}(I-P)x(t)) = (I-P)x(t) + f(t)(I-P)z, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \tag{2.10}$$
$$\widetilde{T}(I-P)x(0) = w_0 = (I-P)w_0, \tag{2.11}$$
$$\Phi[\widetilde{T}(I-P)x(t)] = g(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \tag{2.12}$$
$$0 = Px(t) + f(t)Pz, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau. \tag{2.13}$$

Хорошо известно (см., например, [6]), что, если f непрерывно дифференцируема на $[0,\tau]$ и $w_0 \in R(\widetilde{T}) = R(T)$, то задача (2.10)-(2.11) допускает единственное сильное решение и

$$\widetilde{T}(I-P)x(t) = e^{t\widetilde{T}^{-1}}w_0 + \int\limits_0^t e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}(I-P)zf(s)ds.$$

Из (2.12) вытекает соотношение

$$\Phi[e^{t\widetilde{T}^{-1}}w_0] + \int\limits_0^t \Phi[e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}(I-P)z]f(s)ds = g(t). \tag{2.14}$$

Следовательно, если $(I-P)z \in R(T)$, то можно продифференцировать левую и правую части (2.14); выполнив это дифференцирование, получаем, что

$$\Phi[e^{t\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-1}w_0] + \Phi[(I-P)z]f(t) + \int\limits_0^t \Phi[e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-1}(I-P)z]f(s)ds = g'(t). \tag{2.15}$$

Если $\Phi[(I-P)z] \neq 0$, то у (2.15) есть единственное решение f из $C([0,\tau];\mathbb{C})$. Если $g \in C^2([0,\tau];\mathbb{C})$ и $w_0 \in D((\widetilde{T}^{-1})^2) = R(\widetilde{T}^2) = R(T^2)$, то, учитывая, что

$$\int\limits_0^t \Phi[e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-1}(I-P)z]f(s)ds = \int\limits_0^t \Phi[e^{s\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-1}(I-P)z]f(t-s)ds,$$

получаем уравнение

$$\Phi[e^{t\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-2}w_0] + \Phi[(I-P)z]f'(t) + \Phi[e^{t\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-1}(I-P)z]f(0) + \\ + \int\limits_0^t \Phi[e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-1}(I-P)z]f'(s)ds = g''(t),$$

допускающее единственное решение f' из $C([0,\tau];\mathbb{C})$. Функция $Px(t)$ определяется из (2.13) соответственно. Итак, получаем следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Если операторы M, M^*, L удовлетворяют условиям* (2.1) *и* (2.5)*, $w_0 \in R(T^2)$, $g \in C^2([0,\tau];\mathbb{C})$, $g(0) = \Phi[w_0]$, $(I-P)z \in R(T)$ и $\Phi[(I-P)z] \neq 0$, то задача*

$$\begin{aligned} &M^*\frac{d}{dt}(My(t)) = Ly(t) + f(t)M^*z, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ &My(0) = w_0, \\ &\Phi[My(t)] = g(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \end{aligned}$$

допускает единственное строгое решение (y,f), для которого $y \in C([0,\tau];D(L))$ и $f \in C^1([0,\tau];\mathbb{C})$.

Теорема 2.2 улучшает результаты [2, 3] и является своего рода альтернативной версией теоремы 2.1.

3. Общий случай

Рассмотрим задачу (1.1)–(1.3) в предположении, что операторы M, M^*, L удовлетворяют условиям теоремы 2.2. Замена $y(t) = x(t) - f(t)L^{-1}z$ преобразует задачу (1.1)–(1.3) к виду

$$M^*\frac{d}{dt}(Mx(t)) = Lx(t) + f'(t)M^*ML^{-1}z, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau \tag{3.1}$$

$$Mx(0) = w_0 + f(0)ML^{-1}z, \tag{3.2}$$

$$\Phi[Mx(t)] = g(t) + f(t)\Phi[ML^{-1}z], \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \tag{3.3}$$

где $\Phi[w_0] = g(0)$, $w_0 = My_0$. Другими словами, из (3.1) получаем включение

$$\frac{d}{dt}(Mx(t)) - f'(t)ML^{-1}z \in (M^*)^{-1}Lx(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau.$$

Введем новую переменную $\xi(t)$ соотношением $x(t) = L^{-1}M^*\xi(t)$. Тогда задача (3.1)–(3.3) принимает вид

$$\frac{d}{dt}(T\xi(t)) = \xi(t) + f'(t)ML^{-1}z, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \tag{3.4}$$

$$T\xi(0) = w_0 + f(0)ML^{-1}z, \tag{3.5}$$

$$\Phi[T\xi(t)] = g(t) + f(t)\Phi[ML^{-1}z], \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \tag{3.6}$$

где $T = ML^{-1}M^* \in \mathcal{L}(X)$.

Как отмечалось выше, из [2] следует, что $N(T) = \overline{R(T)}^{\perp}$, если $L = L^*$. Вообще говоря, имеем равенство $X = N(T) \oplus \overline{R(T)}$. Напомним, что P обозначает оператор проектирования на $N(T)$ вдоль $\overline{R(T)}$, а $\widetilde{T}$ есть сужение T на $\overline{R(T)}$, причем $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(\overline{R(T)})$, и $\widetilde{T}^{-1}$ генерирует сильно непрерывную полугруппу в $\overline{R(T)}$ (см., например, [2, 3]).

Тогда задача (3.4)–(3.6) принимает вид

$$\frac{d}{dt}(\widetilde{T}(I-P)\xi(t)) = (I-P)\xi(t) + f'(t)(I-P)ML^{-1}z, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \tag{3.7}$$

$$\widetilde{T}(I-P)\xi(0) = (I-P)w_0 + f(0)(I-P)ML^{-1}z, \tag{3.8}$$

$$Pw_0 + f(0)PML^{-1}z = 0, \tag{3.9}$$

$$0 = P\xi(t) + f'(t)PML^{-1}z, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \tag{3.10}$$

$$\Phi[\widetilde{T}(I-P)\xi(t)] = g(t) + f(t)\Phi[ML^{-1}z], \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau. \tag{3.11}$$

Перейдем к формальному доказательству основной теоремы. Мы уже имеем соотношение

$$\widetilde{T}(I-P)\xi(t) = e^{t\widetilde{T}^{-1}}[(I-P)w_0 + f(0)(I-P)ML^{-1}z] + \int\limits_0^t e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}zf'(s)ds.$$

Выполнив интегрирование по частям, получаем, что

$$\widetilde{T}(I-P)\xi(t) = e^{t\widetilde{T}^{-1}}[(I-P)w_0 + f(0)(I-P)ML^{-1}z] + f(t)(I-P)ML^{-1}z -$$
$$- f(0)e^{t\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}z + \int\limits_0^t \widetilde{T}^{-1}e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}zf(s)ds =$$
$$= e^{t\widetilde{T}^{-1}}(I-P)w_0 + f(t)(I-P)ML^{-1}z + \int\limits_0^t \widetilde{T}^{-1}e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}zf(s)ds, \tag{3.12}$$

что приводит нас к выводу о том, что $\sup\limits_{t>0} \|\widetilde{T}^{-1}e^{t\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}z\| < \infty$, т. е., если $\widetilde{T}^{-1}$ генерирует аналитическую полугруппу в $\overline{R(T)}$, то согласно [1] $(I-P)ML^{-1}z$ принадлежит пространству Фавара F_1 для оператора $\widetilde{T}^{-1}$.

Применяя Φ к обеим частям равенства (3.12) и используя соотношение (3.11), получаем соотношение

$$\Phi[e^{t\widetilde{T}^{-1}}(I-P)w_0] + f(t)\Phi[(I-P)ML^{-1}z] + \int\limits_0^t \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}z]f(s)ds =$$
$$= g(t) + f(t)\Phi[ML^{-1}z],$$

т. е.,

$$f(t)\Phi[PML^{-1}z] = \int\limits_0^t \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}z]f(s)ds + \Phi[e^{t\widetilde{T}^{-1}}(I-P)w_0] - g(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau. \tag{3.13}$$

Если $\Phi[PML^{-1}z] \neq 0$, то получаем классическое интегральное уравнение первого рода. Учитывая [5], приходим к выводу, что (3.13) допускает единственное глобальное непрерывное решение f на отрезке $[0,\tau]$. Однако от $f(t)$ нам требуется бо́льшая регулярность, а именно, принадлежность пространству $C^2([0,\tau];\mathbb{C})$. В интеграле из (3.13) применим замену $t-s=r$. Получим, что

$$\int\limits_0^t \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}z]f(s)ds = \int\limits_0^t \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{r\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}z]f(t-r)dr,$$

а значит,

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}z]f(s)ds = \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{t\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}z]f(0) + \\ + \int\limits_0^t \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}z]f'(s)ds.$$

Следовательно, продифференцировав обе части равенства (3.13), мы получаем соотношение

$$f'(t)\Phi[PML^{-1}z] = \int\limits_0^t \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}z]f'(s)ds + \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{t\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}z]f(0) + \\ + \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{t\widetilde{T}^{-1}}(I-P)w_0] - g'(t).$$

Действуя таким же образом, мы получаем соотношение

$$f''(t)\Phi[PML^{-1}z] = \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{t\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}z]f'(0) + \int\limits_0^t \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}z]f''(s)ds + \\ + \Phi[\widetilde{T}^{-2}e^{t\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}z]f(0) + \Phi[\widetilde{T}^{-2}e^{t\widetilde{T}^{-1}}(I-P)w_0] - g''(t).$$

Отсюда следует, что, если

$$\sup_{t>0}\|\widetilde{T}^{-2}e^{t\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}z\|_X < \infty, \quad \sup_{t>0}\|\widetilde{T}^{-2}e^{t\widetilde{T}^{-1}}(I-P)w_0\|_X < \infty,$$

то функция f'' удовлетворяет классическому интегральному уравнению, а значит, непрерывна на $[0,\tau]$. Остается проверить выполнение соотношения (3.9). Поскольку $g(0) = \Phi[w_0]$, а из (3.8) и (3.11) следует, что $f(0) = \dfrac{\Phi[(I-P)w_0] - g(0)}{\Phi[PML^{-1}z]} = -\dfrac{\Phi[Pw_0]}{\Phi[PML^{-1}z]}$, соотношение (3.9) выполняется тогда и только тогда, когда $Pw_0 = \dfrac{\Phi[Pw_0]}{\Phi[PML^{-1}z]}PML^{-1}z$, т. е. тогда и только тогда, когда

$$\Phi[PML^{-1}z]Pw_0 = \Phi[Pw_0]PML^{-1}z. \tag{3.14}$$

Отметим, что задача (3.7), (3.8), (3.11), в которой $\eta(t) = \widetilde{T}(I-P)\xi(t)$, может быть записана в форме

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = \widetilde{T}^{-1}\eta(t) + f'(t)(I-P)ML^{-1}z, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \tag{3.15}$$

$$\eta(0) = (I-P)w_0 - \frac{\Phi[Pw_0]}{\Phi[PML^{-1}z]}(I-P)ML^{-1}z, \tag{3.16}$$

$$\Phi[\eta(t)] = g(t) + f(t)\Phi[ML^{-1}z], \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau. \tag{3.17}$$

Значит, чтобы строгое решение задачи (3.15)-(3.16) существовало, нужно потребовать, чтобы $(I-P)w_0$ и $(I-P)ML^{-1}z$ принадлежали $R(T)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть* $X = N(T) \oplus \overline{R(T)}$, $T = ML^{-1}M^*$, *а* P — *оператор проектирования на* $N(T)$ *вдоль* $\overline{R(T)}$. *Пусть* $z \in X$, $\Phi[PML^{-1}z] \neq 0$, $\Phi \in X^*$, $(I-P)w_0 \in R(T)$, $(I-P)ML^{-1}z \in R(T)$, $g \in C^2([0,\tau];\mathbb{C})$, $g(0) = \Phi[w_0]$, $0 \in \rho(L)$, *где* $\rho(L)$ *обозначает резольвентное множество оператора* L. *Пусть выполняются соотношение* (3.14) *и неравенства*

$$\sup_{t>0} \|\widetilde{T}^{-1}e^{t\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-1}(I-P)ML^{-1}z\|_X < \infty, \quad \sup_{t>0} \|\widetilde{T}^{-1}e^{t\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-1}(I-P)w_0\|_X < \infty.$$

Тогда обратная задача (1.1)–(1.3), *в которой* My_0 *заменено на* w_0, *допускает единственное решение* (y,f) *из* $C([0,\tau];D(L)) \times C^2([0,\tau];\mathbb{C})$.

Случай, в котором $\Phi[PML^{-1}z] = 0$, рассмотрен в [3, теорема 1]. Тогда уравнение (3.13) сводится к следующему интегральному уравнению второго рода:

$$\int_0^t \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}z]f(s)ds + \Phi[e^{t\widetilde{T}^{-1}}(I-P)w_0] - g(t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau. \tag{3.18}$$

Повторяя те же рассуждения, что и выше, мы видим, что необходимо еще раз продифференцировать по времени. Действительно, дифференцируя (3.18), получаем соотношение

$$\Phi[\widetilde{T}^{-1}(I-P)ML^{-1}z]f(t) + \int_0^t \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-1}(I-P)ML^{-1}z]f(s)ds +$$
$$+ \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{t\widetilde{T}^{-1}}(I-P)w_0] - g'(t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau.$$

Предположим, что $\Phi[\widetilde{T}^{-1}(I-P)ML^{-1}z] \neq 0$. Тогда такое интегральное уравнение допускает единственное глобальное решение f из $C([0,\tau];\mathbb{C})$. Однако нам требуется, чтобы f принадлежала $C^2([0,\tau];\mathbb{C})$. Рассуждая так же, как и выше, мы получаем, что

$$\Phi[\widetilde{T}^{-1}(I-P)ML^{-1}z]f'(t) + \frac{d}{dt}\int_0^t \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{s\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-1}(I-P)ML^{-1}z]f(t-s)ds +$$
$$+ \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{t\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-1}(I-P)w_0] - g''(t) = 0 = \Phi[\widetilde{T}^{-1}(I-P)ML^{-1}z]f'(t) +$$
$$+ \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{t\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-1}(I-P)ML^{-1}z]f(0) + \int_0^t \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-1}(I-P)ML^{-1}z]f'(s)ds +$$
$$+ \Phi[\widetilde{T}e^{t\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-1}(I-P)w_0] - g''(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,$$

и

$$\Phi[\widetilde{T}^{-1}(I-P)ML^{-1}z]f''(t) + \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{t\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-2}(I-P)ML^{-1}z]f(0) +$$
$$+ \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{t\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-1}(I-P)ML^{-1}z]f'(0) + \int_0^t \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-1}(I-P)ML^{-1}z]f''(s)ds +$$
$$+ \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{t\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-2}(I-P)w_0] - g'''(t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau.$$

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 3.2. *Пусть* $X = N(T) \oplus \overline{R(T)}$, $T = ML^{-1}M^*$, *а* P — *оператор проектирования на* $N(T)$ *вдоль* $\overline{R(T)}$. *Предположим, что* $z \in X$, $w_0, ML^{-1}z \in R(T)$, $\Phi \in X^*$, $\Phi[PML^{-1}z] = 0$, $\Phi[\widetilde{T}^{-1}ML^{-1}z] \neq 0$, $0 \in \rho(L)$, $g \in C^3([0,\tau];\mathbb{C})$, $g(0) = \Phi[w_0]$,

$$\sup_{t>0} \|\widetilde{T}^{-1}e^{t\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-2}ML^{-1}z\|_X < \infty, \quad \sup_{t>0} \|\widetilde{T}^{-1}e^{t\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-2}w_0\|_X < \infty.$$

Тогда обратная задача (1.1)–(1.3)*, в которой* My_0 *заменено на* w_0*, допускает единственное решение* (y, f) *из* $C([0,\tau]; D(L)) \times C^2([0,\tau]; \mathbb{C})$.

Замечание 3.1. Можно предположить, что общую задачу

$$\begin{aligned}
&M^* \frac{d}{dt}(My(t)) = Ly(t) + f(t)z, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,\\
&My(0) = w_0,\\
&\Phi[My(t)] = g(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,
\end{aligned}$$

можно исследовать с помощью многозначных линейных операторов, используя введенную выше замену $y(t) = x(t) - f(t)L^{-1}z$. Очевидно, что после замены $Mx(t) = \xi(t)$ задача примет вид

$$\begin{aligned}
&\frac{d\xi(t)}{dt} - f'(t)ML^{-1}z \in (M^*)^{-1}LM^{-1}\xi(t) := \mathcal{A}\xi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,\\
&\xi(0) = w_0 + f(0)ML^{-1}z,\\
&\Phi[\xi(t)] = g(t) + f(t)\Phi[ML^{-1}z], \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau.
\end{aligned}$$

Ее решение есть

$$\begin{aligned}
\xi(t) &= e^{t\mathcal{A}}[w_0 + f(0)ML^{-1}z] + \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{A}}ML^{-1}zf'(s)ds =\\
&= e^{t\mathcal{A}}[w_0 + f(0)ML^{-1}z] + f(t)ML^{-1}z - e^{t\mathcal{A}}f(0)ML^{-1}z +\\
&+ \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{A}}\mathcal{A}ML^{-1}zf(s)ds = e^{t\mathcal{A}}w_0 + f(t)ML^{-1}z + \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{A}}\mathcal{A}ML^{-1}zf(s)ds,
\end{aligned}$$

однако последний интегральный член имеет смысл только в том случае, когда $z = M^*\overline{z}$ для некоторого $\overline{z}$ из X, а в этом случае мы получаем уравнение, ранее рассмотренное в теореме 2.1.

Замечание 3.2. Понятно, что $N(M^*) \subseteq N(ML^{-1}M^*)$. С другой стороны, если $ML^{-1}M^*z = 0$, то $0 = \langle ML^{-1}M^*z, z\rangle_X = \langle L^{-1}M^*z, M^*z\rangle_X$ и, следовательно, $\mathrm{Re}\langle L^{-1}M^*z, M^*z\rangle_X = 0$. Предположим, что $\mathrm{Re}\langle Ly, y\rangle_X \neq 0$ для любого ненулевого y. Тогда $\mathrm{Re}\langle L^{-1}y, y\rangle_X \neq 0$ для любого ненулевого y. Следовательно, $\mathrm{Re}\langle L^{-1}M^*z, M^*z\rangle_X = 0$ тогда и только тогда, когда $M^*z = 0$. Отсюда следует, что в этом случае справедливо равенство $N(ML^{-1}M^*) = N(M^*)$.

Замечание 3.3. Предположим, что L самосопряжен и справедливо соотношение $\mathrm{Re}\langle Lx, x\rangle_X = \langle Lx, x\rangle_X \leqslant 0$. Если $ML^{-1}M^*x = 0$, то $0 = \langle ML^{-1}M^*x, x\rangle_X = -\langle M(-L)^{1/2}(-L)^{1/2}M^*x, x\rangle_X = -\langle (-L)^{1/2}M^*x, (-L)^{1/2}M^*x\rangle_X$. Следовательно, $N(ML^{-1}M^*)$ совпадает с $N(M^*)$.

Замечание 3.4. Предположим, что $N(ML^{-1}M^*) = N(M^*)$. Рассмотрим $PML^{-1}z$, где P — оператор проектирования на $N(ML^{-1}M^*) = N(M^*)$ вдоль $\overline{R(ML^{-1}M^*)}$. Тогда $M^*PML^{-1}z = 0$, а значит,

$$0 = \langle M^*PML^{-1}z, L^{-1}z\rangle_X = \langle PML^{-1}z, ML^{-1}z\rangle_X = \|PML^{-1}z\|_X^2 + \langle PML^{-1}z, (I-P)ML^{-1}z\rangle_X.$$

С другой стороны, если L самосопряжен и $\langle Lx, x\rangle_X \leqslant 0$ для любого x из $D(L)$, то, как известно, оператор проектирования P тоже самосопряжен, а значит, $\langle Px, (I-P)x\rangle_X = \langle Px, x\rangle_X - \langle Px, Px\rangle_X = \langle Px, x\rangle_X - \langle P^2x, x\rangle_X = \langle Px, x\rangle_X - \langle Px, x\rangle_X = 0$. Следовательно, $0 = \|PML^{-1}z\|_X^2$, а значит, $ML^{-1}z \in \overline{R(ML^{-1}M^*)}$.

4. Уравнения второго порядка по времени

В гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_H$ рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned}
&C^{1/2}\frac{d}{dt}(C^{1/2}y'(t)) + By'(t) + A_H y(t) = f(t)z, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,\\
&y(0) = y_0, \quad C^{1/2}y'(0) = C^{1/2}y_1,
\end{aligned}$$

где C — ограниченный самосопряженный оператор в H, $C \geqslant 0$, B — замкнутый линейный оператор в H, A — линейный ограниченный оператор в другом гильбертовом пространстве V, ограниченно и плотно вложенном в H, а оператор A_H определен в разделе 2 (см. условия (i)–(v)). Потребуем также, чтобы $\Phi[C^{1/2}y(t)] = g(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau$, где g имеет гладкость, по крайней мере, $C^1([0,\tau];\mathbb{C})$. Разумеется, H отождествляется со своим двойственным пространством, а значит, имеют место вложения $V \subset H \subset V'$. Понятно, что условия согласования $\Phi[C^{1/2}y_0] = g(0)$, $\Phi[C^{1/2}y_1] = g'(0)$ тоже должны выполняться.

Тогда сформулированную выше задачу можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C^{1/2} \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -I \\ A_H & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = f(t) \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\
&\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \\
&\widetilde{\Phi}[\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}] := \Phi[C^{1/2}y'(t)] = g'(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau.
\end{aligned}$$

Эта задача поставлена в объемлющем пространстве $X = D(A^{1/2}) \times H$ со скалярным произведением

$$\langle (x,y), (x_1,y_1) \rangle_X = (A^{1/2}x, A^{1/2}x_1)_H + (y,y_1)_H, \quad (x,y),(x_1,y_1) \in X.$$

Легко видеть, что действующие из X в X операторы M и L, определенные соотношениями

$$\begin{aligned}
&D(M) = X,\ M(y,x) = (y, C^{1/2}x), \quad (y,x) \in X, \\
&D(L) = D(A_H) \times D(A^{1/2}),\ L(y,x) = (x, -A_H y - Bx), \quad (y,x) \in D(L),
\end{aligned}$$

удовлетворяют всем условиям предыдущих разделов, если A_H имеет ограниченный обратный.

Если уравнение имеет вид

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C^{1/2} \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_H & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} + f(t) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,$$

где A_H имеет ограниченный обратный, то, вводя обозначения

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}, \\
&\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} - f(t) \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C^{1/2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_H & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C^{1/2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} := \mathcal{A} \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}, \\
&\begin{pmatrix} \xi(0) \\ \eta(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ C^{1/2}y_1 \end{pmatrix}, \\
&\widetilde{\Phi}[\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}] = \Phi[\eta(t)] = g'(t),
\end{aligned}$$

мы снова получаем обратную задачу на отрезке $[0,\tau]$.

Поскольку $\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = e^{t\mathcal{A}} \begin{pmatrix} y_0 \\ C^{1/2}y_1 \end{pmatrix} + \int\limits_0^t e^{(t-s)\mathcal{A}} \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix} f(s)ds$, то справедливо соотношение

$$\widetilde{\Phi}[e^{t\mathcal{A}} \begin{pmatrix} y_0 \\ C^{1/2}y_1 \end{pmatrix}] + \int\limits_0^t \widetilde{\Phi}[e^{(t-s)\mathcal{A}} \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}] f(s)ds = g'(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau. \tag{4.1}$$

Дифференцируя его левую и правую части, получаем, что

$$\widetilde{\Phi}[e^{t\mathcal{A}} \mathcal{A} \begin{pmatrix} y_0 \\ C^{1/2}y_1 \end{pmatrix}] + \Phi[z]f(t) + \int\limits_0^t \widetilde{\Phi}[e^{(t-s)\mathcal{A}} \mathcal{A} \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}] f(s)ds = g''(t),$$

где $\mathcal{A} \begin{pmatrix} y_0 \\ C^{1/2}y_1 \end{pmatrix}$ и $\mathcal{A} \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}$ легко вычисляются. Если $\Phi[z] \neq 0$, то такое решение f принадлежит $C([0,\tau];\mathbb{C})$.

В (4.1) используем соотношение $\int\limits_0^t \widetilde{\Phi}[e^{(t-s)\mathcal{A}}\begin{pmatrix}0\\ z\end{pmatrix}]f(s)ds = \int\limits_0^t \widetilde{\Phi}[e^{s\mathcal{A}}\begin{pmatrix}0\\ z\end{pmatrix}]f(t-s)ds$. Тогда, продифференцировав (4.1), получим интегральное уравнение для $f'(t)$, откуда следует, что $f \in C^1([0,\tau];\mathbb{C})$.

Возвращаясь к общему случаю, преобразуем пару $\begin{pmatrix}y(t)\\ y'(t)\end{pmatrix}$ в виде

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x(t)\\ x_1(t)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & I\\ -A_H & -B\end{pmatrix}^{-1} f(t)\begin{pmatrix}0\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x(t)\\ x_1(t)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-A_H^{-1}B & -A_H^{-1}\\ I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ z\end{pmatrix} f(t) =\\ = \begin{pmatrix}x(t)\\ x_1(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}A_H^{-1}z\\ 0\end{pmatrix} f(t).\end{aligned}$$

Тогда наша система принимает вид

$$\begin{pmatrix}I0\\ 0C^{1/2}\end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}I0\\ 0C^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ x_1(t)\end{pmatrix} + f'(t)\begin{pmatrix}I0\\ 0C^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I0\\ 0C^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_H^{-1}z\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0I\\ -A_H - B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ x_1(t)\end{pmatrix},$$

т. е.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & C^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ x_1(t)\end{pmatrix} + f'(t)\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & C^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_H^{-1}z\\ 0\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & C^{1/2}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & I\\ -A_H & -B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ x_1(t)\end{pmatrix}.$$

Таким образом, все предшествующие рассуждения разделов 2-3 можно повторить снова (оставим это заинтересованному читателю).

После применения указанной выше замены переменных $\begin{pmatrix}y(t)\\ y'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x(t)\\ x_1(t)\end{pmatrix} + f(t)\begin{pmatrix}A_H^{-1}z\\ 0\end{pmatrix}$ (мы предполагаем, что $A_H^{-1} \in \mathcal{L}(H)$) рассматривая система принимает вид

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & C^{1/2}\end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & C^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ x_1(t)\end{pmatrix} + f'(t)\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & C^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & C^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_H^{-1}z\\ 0\end{pmatrix} =\\ &\qquad = \begin{pmatrix}0 & I\\ -A_H & -B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ x_1(t)\end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,\\ &x(0) = y_0 - f(0)A_H^{-1}z,\\ &C^{1/2}x_1(0) = C^{1/2}y_1.\end{aligned}$$

Следовательно, если $0 \leqslant t \leqslant \tau$, то

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & C^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ x_1(t)\end{pmatrix} + f'(t)\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & C^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_H^{-1}z\\ 0\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & C^{1/2}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & I\\ -A_H & -B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ x_1(t)\end{pmatrix},$$

а значит, пара $(\xi(t),\eta(t)) = (x(t), C^{1/2}x_1(t))$ удовлетворяет включению

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\xi(t)\\ \eta(t)\end{pmatrix} + f'(t)\begin{pmatrix}A_H^{-1}z\\ 0\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & C^{1/2}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & I\\ -A_H & -B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & C^{1/2}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\xi(t)\\ \eta(t)\end{pmatrix} := \mathcal{A}\begin{pmatrix}\xi(t)\\ \eta(t)\end{pmatrix},\\ &\xi(0) = y_0 - f(0)A_H^{-1}z,\\ &\eta(0) = C^{1/2}y_1.\end{aligned}$$

Если $f \in C^2([0,\tau];\mathbb{C})$, то такая задача допускает единственное решение

$$\begin{pmatrix}\xi(t)\\ \eta(t)\end{pmatrix} = e^{t\mathcal{A}}\begin{pmatrix}y_0 - f(0)A_H^{-1}z\\ C^{1/2}y_1\end{pmatrix} - \int\limits_0^t e^{(t-s)\mathcal{A}}\begin{pmatrix}A_H^{-1}z\\ 0\end{pmatrix} f'(s)ds$$

и

$$\Phi[\begin{pmatrix}\xi(t)\\ \eta(t)\end{pmatrix}] = \Phi_1[\xi(t)] + \Phi_2[\eta(t)] = \Phi[e^{t\mathcal{A}}\begin{pmatrix}y_0 - f(0)A_H^{-1}z\\ C^{1/2}y_1\end{pmatrix}] - \int\limits_0^t \Phi[e^{(t-s)\mathcal{A}}\begin{pmatrix}A_H^{-1}z\\ 0\end{pmatrix}]f'(s)ds =$$

$$= \Phi[e^{t\mathcal{A}}\begin{pmatrix}y_0 - f(0)A_H^{-1}z\\ C^{1/2}y_1\end{pmatrix}] - \Phi[\begin{pmatrix}A_H^{-1}z\\ 0\end{pmatrix}]f(t) + \Phi[e^{t\mathcal{A}}\begin{pmatrix}A_H^{-1}z\\ 0\end{pmatrix}f(0)] -$$

$$- \int\limits_0^t \Phi[e^{(t-s)\mathcal{A}}\mathcal{A}\begin{pmatrix}A_H^{-1}z\\ 0\end{pmatrix}]f(s)ds = \Phi[e^{t\mathcal{A}}\begin{pmatrix}y_0\\ C^{1/2}y_1\end{pmatrix}] -$$

$$- \Phi[\begin{pmatrix}A_H^{-1}z\\ 0\end{pmatrix}]f(t) - \int\limits_0^t \Phi[e^{(t-s)\mathcal{A}}\mathcal{A}\begin{pmatrix}A_H^{-1}z\\ 0\end{pmatrix}]f(s)ds = g(t).$$

Чтобы получить интегральное уравнение первого рода для $f(t)$, нужно наложить условие $\Phi_1[A_H^{-1}z] \neq 0$. Значит, нужно потребовать, чтобы $f(t)$ была дважды дифференцируемой, а это вынуждает нас накладывать на z условия, которых мы хотим избежать (см. замечание 3.1).

5. Примеры и приложения

Пример 5.1. Рассмотрим задачу (относительно неизвестной функции $v = v(x,t)$)

$$\begin{cases}\dfrac{\partial(m(x)v)}{\partial t} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} + f(t)z(x), \quad -\infty < x < \infty, 0 \leqslant t \leqslant \tau,\\ m(x)v(x,0) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty.\end{cases} \tag{P}$$

Здесь $m(x)$ — характеристическая функция некоторого измеримого множества J на вещественной оси, $z(x)$ — заданная функция, u_0 — начальные данные. Эта задача рассматривается в пространстве $X = L^2(\mathbb{R})$. Если M — это действующий в пространстве X оператор умножения на функцию $m(x)$, то M ограничен в X и $M^* = M$. Следовательно, задача (P) формулируется в виде

$$M^*\frac{\partial(Mv(t))}{\partial t} = Lv(t) + f(t)z, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,$$
$$Mv(0) = u_0,$$

где $L = -\dfrac{d}{dx}$ и $D(L) = H^1(\mathbb{R})$, а значит, L — замкнутый линейный оператор в X. Понятно, что лемма 2.1 или 2.2 выполняется.

Исследуем некоторые частные случаи этой задачи (см. подробности в [4, с. 41]).

(1) $J = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$, $a < b$.
В этом случае существует такое λ_0, что $\lambda_0 > \beta$, $R(\lambda_0 M^*M - L) = X$ и оператор $(\lambda_0 M^*M - L)^{-1}$ однозначен. Таким образом, выполняется лемма 2.2.

(2) $J = (a, \infty)$.
Легко видеть, что в этом случае рассуждения, приведенные выше, неприменимы, однако существует такое λ_0, что $\lambda_0 > \beta$, $R(\lambda_0 M^*M - L) \supset R(M^*)$ и оператор $(\lambda_0 M^*M - L)^{-1}$ однозначен в $R(M^*)$. Следовательно, лемма 2.1 применима при условии, что $z = M^*z_1$, $z_1 \in H$.

Следовательно, используя теорему 2.1, получаем, что обратная задача, заключающаяся в восстановлении пары (v, f) из $C([0,\tau]; D(L)) \times C^1([0,\tau]; \mathbb{C})$, одновременно удовлетворяющей задаче (P) и уравнению $\Phi[Mv(t)] = \int\limits_{\mathbb{R}} \eta(x)m(x)v(x,t)dx = g(t)$, $t \in [0,\tau]$, $\eta \in L^2(\mathbb{R})$, допускает единственное решение при некоторых условиях регулярности, наложенных на коэффициенты. С другой стороны, хорошо известно (см. [2,3]), что $X = N(T) \oplus \overline{R(T)}$, где $T = ML^{-1}M^* = ML^{-1}M$. Значит, можно применить и теорему 3.1, и теорему 3.2.

Пример 5.2 (уравнения Максвелла). Предположим, что среда, заполняющая пространство $\mathbb{R}^3$, линейна, но может быть анизотропной и неоднородной. Тогда уравнения Максвелла могут быть

записаны в виде
$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\varepsilon(x) & 0\\ 0 & \mu(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E\\ H\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \mathrm{rot}\\ -\mathrm{rot} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E\\ H\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}G(x) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E\\ H\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}J'(x,t)\\ 0\end{pmatrix},$$
где $\varepsilon(x)$, $\mu(x)$ и $G(x)$, $x\in\mathbb{R}^3$, есть матрицы размерности 3×3, а J' есть заданная плотность принужденного тока. Наложим следующие условия:

(i) функция $\varepsilon(x)$ симметрична и неотрицательна для всех x из $\mathbb{R}^3$;

(ii) функция $\mu(x)$ симметрична и существует такое положительное δ, что $\mu(x)\geqslant\delta$ для всех x из $\mathbb{R}^3$;

(iii) существуют такое положительное δ и неотрицательное γ, что неравенство $((\gamma\varepsilon(x)+G(x))\xi,\xi)_{\mathbb{R}^3}\geqslant\delta|\xi|^2$, $\xi\in\mathbb{R}^3$, выполняется для всех x из $\mathbb{R}^3$.

Если $J'(x,t)=f(t)z(x), z(x)\in\mathbb{R}^3$, $f:[0,\tau]\to\mathbb{C}$, то указанная задача записывается в виде
$$M^*\frac{d(Mv(t))}{dt}=Lv(t)+f(t)\begin{pmatrix}z\\ 0\end{pmatrix},$$
$$Mv(0)=u_0$$
и ставится в пространстве $X=(L^2(\mathbb{R}^3))^6$, где M — оператор умножения на $\sqrt{C(x)}$, $C(x)=\begin{pmatrix}\varepsilon(x) & 0\\ 0 & \mu(x)\end{pmatrix}$, действующий в пространстве X ($M=M^*$), а замкнутый линейный оператор L определяется соотношениями
$$D(L)=\{v\in X;\sum_{i=1}^{3}a_i\frac{\partial v}{\partial x_i}\in X\},\qquad Lv=\sum_{i=1}^{3}a_i\frac{\partial v}{\partial x_i}+b(x)v,$$
где a_i, $i=1,2,3$, $b(x)=-\begin{pmatrix}G(x) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ — симметричные матрицы размерности 6×6. Тогда исходное уравнение принимает вид $\dfrac{\partial(C(x)v)}{\partial t}=\sum\limits_{i=1}^{3}a_i\dfrac{\partial v}{\partial x_i}+b(x)v+f(t)\begin{pmatrix}z\\ 0\end{pmatrix}$. Мы видим, что лемма 2.2 полностью применима (см. [4, с. 43]). Следовательно, можно рассмотреть соответствующую обратную задачу отыскания такой пары (v,f), для которой $\Phi[Mv(t)]=g(t)$, $\Phi\in[(L^2(\mathbb{R}^3))^6]^*$, $g\in C^3([0,\tau];\mathbb{C})$. Для этого можно использовать либо теорему 3.1, либо теорему 3.2, поскольку $X=N(T)\oplus\overline{R(T)}$, где $T=ML^{-1}M^*=ML^{-1}M$.

Пример 5.3. Рассмотрим следующую задачу относительно неизвестной пары (v,f):
$$(m(x)\frac{\partial}{\partial t})^2v(x,t)=\Delta v(x,t)+f(t)z(x),\quad (x,t)\in\Omega\times[0,\tau],$$
$$v(x,t)=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times[0,\tau],$$
$$v(x,0)=v_0(x),\ m(x)\frac{\partial v}{\partial t}(x,0)=v_1(x),\quad x\in\Omega,$$
$$\int\limits_{\Omega}\nu_1(x)v(x,t)dx+\int\limits_{\Omega}\nu_2(x)\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)m(x)dx=g(t),$$
где $z(x),\nu_1(x),\nu_2(x)\in L^2(\Omega)$, $g\in C([0,\tau];\mathbb{C})$.

Наши предыдущие результаты (см. [4, с. 44]) применимы к этому волновому уравнению Пуассона, если (ограниченная или неограниченная) область Ω пространства $\mathbb{R}^n$ имеет гладкую границу $\partial\Omega$, $m\in L^\infty(\Omega), m(x)\geqslant 0$ и m может обращаться в ноль в ограниченном подмножестве области Ω. Перепишем это уравнение в виде системы
$$\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & m(x)\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & m(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v\\ v_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & I\\ \Delta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v\\ v_t\end{pmatrix}+f(t)\begin{pmatrix}0\\ z\end{pmatrix},$$
т. е. в виде
$$M^*\frac{d(Mv(t))}{dt}=Lv(t)+f(t)z^*,$$
$$Mv(0)=u_0,$$

где $z^* = \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}$. Тогда применима лемма 2.2 (см. [4, с. 45]), а к соответствующей обратной задаче применимы теоремы 3.1-3.2.

Пример 5.4. Пусть Ω — ограниченное открытое множество пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей Γ. Если $T > 0$, то обозначим $\Omega \times (0,T)$ через Q, а $\Gamma \times (0,T)$ — через Σ. Гиперболическо-параболическая задача

$$\begin{aligned}
&m_1(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + m_2(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(t)z(x), \quad (x,t) \in Q,\\
&u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Sigma,\\
&u(x,0) = u_0(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega,\\
&\Phi[m_1(x)^{1/2}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)] = g'(t)
\end{aligned}$$

имеет решение (u,f) из $C([0,T]; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times C^3([0,\tau]; \mathbb{C})$ (см. [4, с. 214] и теоремы 3.1-3.2), если существуют такие неотрицательные непрерывные в $\overline{\Omega}$ функции $m_1(x), m_2(x)$, что для любых функций u_0, u_1 из $D(A_H)$ существуют такие функции u_2 из $V = H_0^1(\Omega)$ и u_3 из H, что выполняются соотношения

$$\begin{aligned}
&f(0)z + \Delta u_0 - m_2(x)u_1 = m_1(x)u_2,\\
&f'(0)z + \Delta u_1 - m_2(x)u_2 = m_1(x)^{1/2}u_3.
\end{aligned}$$

Отметим, что в данном случае равенство $A = -\Delta$ выполняется в вариационном смысле, а значит, $D(A_H) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Пример 5.5. Положим $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $M^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, а значит, $MM^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M^*M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned}
&M^*\frac{d(M\xi(t))}{dt} = L\xi(t) + f(t)z, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,\\
&M\xi(0) = \xi_0,\\
&\Phi[M\xi(t)] = g(t),
\end{aligned}$$

где $\xi_0 = (y_0 + w_0, x_0, 0)$, $\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Поскольку $T = ML^{-1}M^* = MM^*$, справедливы равенства $N(T) = \{(0,0,w), \ w \in \mathbb{C}\}$, $R(T) = \overline{R(T)} = \{(y,x,0), \ y,x \in \mathbb{C}\}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I - P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Непосредственно решая систему уравнений, получаем:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(t) \\ x(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ x(t) \\ w(t) \end{pmatrix} + f(t)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},\\
&y(t) + x(t) + w(t) = g(t)
\end{aligned}$$

и $y(0) + w(0) = y_0 + w_0$, $x(0) = x_0$. Значит,

$$\begin{aligned}
&(y(t) + w(t))' = y(t) + f(t)z_1,\\
&x'(t) = x(t) + f(t)z_2,\\
&(y(t) + w(t))' = w(t) + f(t)z_3,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

т. е.

$$2(y(t)+w(t))' = y(t)+w(t)+f(t)(z_1+z_3),$$
$$x'(t) = x(t)+f(t)z_2.$$

Следовательно, $x(t) = e^t x_0 + z_2 \int\limits_0^t e^{t-s} f(s)ds$ и

$$y(t)+w(t) = e^{t/2}(y_0+w_0) + \frac{1}{2}\int\limits_0^t e^{(t-s)/2} f(s)(z_1+z_3)ds. \tag{5.2}$$

Получаем, что

$$y(t)+x(t)+w(t) = e^t x_0 + e^{t/2}(y_0+w_0) + \frac{1}{2}\int\limits_0^t e^{(t-s)/2} f(s)(z_1+z_3)ds + z_2 \int\limits_0^t e^{t-s} f(s)ds = g(t).$$

Тогда

$$g'(t) = e^t x_0 + e^{t/2}\frac{y_0+w_0}{2} + \frac{1}{2}(z_1+z_3)f(t) + z_2 f(t) + \frac{1}{4}\int\limits_0^t e^{(t-s)/2}(z_1+z_3)f(s)ds + z_2\int\limits_0^t e^{t-s} f(s)ds.$$

Если $\dfrac{z_1+z_3}{2} + z_2 \neq 0$, то такое уравнение имеет единственное решение $f(t)$.

Из (5.1) получаем, что $0 = y(t) - w(t) + f(t)(z_1 - z_3)$. Тогда из (5.2), получаем соотношения

$$y(t) = \frac{1}{2}f(t)(z_3 - z_1) + \frac{1}{2}e^{t/2}(y_0+w_0) + \frac{1}{4}\int\limits_0^t e^{(t-s)/2}(z_1+z_3)f(s)ds,$$

$$w(t) = \frac{1}{2}f(t)(z_1 - z_3) + \frac{1}{2}e^{t/2}(y_0+w_0) + \frac{1}{4}\int\limits_0^t e^{(t-s)/2}(z_1+z_3)f(s)ds.$$

Если применить теорему 3.2, то получим, что

$$\widetilde{T}^{-1}M\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1+z_3 \\ z_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{z_1+z_3}{2} \\ z_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а значит,

$$\Phi[\widetilde{T}^{-1}M\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}] = \frac{z_1+z_3}{2} + z_2$$

и, как и ранее, условие $z_1 + 2z_2 + z_3 \neq 0$ выполняется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Engel K.-J., Nagel R.* One-parameter semigroups for linear evolution equations. — Berlin: Springer, 2000.
2. *Favini A., Marinoschi G.* Identification for degenerate problems of hyperbolic type// Appl. Anal. — 2012. — *91*, № 8. — C. 1511–1527.
3. *Favini A., Marinoschi G.* Identification for general degenerate problems of hyperbolic type// Bruno Pini Math. Anal. Semin. Univ. Bologna — 2016. — *7*. — C. 175–188.
4. *Favini A., Yagi A.* Degenerate differential equations in Banach spaces. — New York: Marcel Dekker, 1999.
5. *Lorenzi A.* An introduction to identification problems via functional analysis. — Berlin: De Gruyter, 2001.
6. *Pazy A.* Semigroup of linear operators and applications to partial differential equations. — New York: Springer-Verlag, 1983.

Angelo Favini
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Bologna, Italy
E-mail: angelo.favini@unibo.it

Gabriela Marinoschi
Institute of Statistical Mathematics and Applied Mathematics, Bucharest, Romania
E-mail: gabimarinoschi@yahoo.com

Hiroki Tanabe
Hirai Sanso 12-13, Takarazuka, 665-0817, Japan
E-mail: h7tanabe@jttk.zaq.ne.jp

Yakov Yakubov
Raymond and Beverly Sackler School of Mathematical Sciences, Tel-Aviv University, Tel-Aviv, Israel
E-mail: yakubov@post.tau.ac.il

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-194-210 UDC 517.956.3 + 517.983

Identifications for General Degenerate Problems of Hyperbolic Type in Hilbert Spaces

 A. Favini, G. Marinoschi, H. Tanabe, Ya. Yakubov

Abstract. In a Hilbert space X, we consider the abstract problem

$$M^* \frac{d}{dt}(My(t)) = Ly(t) + f(t)z, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,$$
$$My(0) = My_0,$$

where L is a closed linear operator in X and $M \in \mathcal{L}(X)$ is not necessarily invertible, $z \in X$. Given the additional information $\Phi[My(t)] = g(t)$ with $\Phi \in X^*$, $g \in C^1([0,\tau];\mathbb{C})$. We are concerned with the determination of the conditions under which we can identify $f \in C([0,\tau];\mathbb{C})$ such that y be a strict solution to the abstract problem, i.e., $My \in C^1([0,\tau];X)$, $Ly \in C([0,\tau];X)$. A similar problem is considered for general second order equations in time. Various examples of these general problems are given.

REFERENCES

1. K. -J. Engel and R. Nagel, *One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer, Berlin, 2000.
2. A. Favini and G. Marinoschi, "Identification for degenerate problems of hyperbolic type," *Appl. Anal.*, 2012, **91**, No. 8, 1511–1527.
3. A. Favini and G. Marinoschi, "Identification for general degenerate problems of hyperbolic type," *Bruno Pini Math. Anal. Semin. Univ. Bologna*, 2016, 175–188.
4. A. Favini and A. Yagi, *Degenerate Differential Equations in Banach Spaces*, Marcel Dekker, New York, 1999.
5. A. Lorenzi, *An Introduction to Identification Problems via Functional Analysis*, De Gruyter, Berlin, 2001.
6. A. Pazy, *Semigroup of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer Verlag, New York, 1983.

Angelo Favini
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Bologna, Italy
E-mail: angelo.favini@unibo.it

Gabriela Marinoschi
Institute of Statistical Mathematics and Applied Mathematics, Bucharest, Romania
E-mail: gabimarinoschi@yahoo.com

Hiroki Tanabe
Hirai Sanso 12-13, Takarazuka, 665-0817, Japan
E-mail: h7tanabe@jttk.zaq.ne.jp

Yakov Yakubov
Raymond and Beverly Sackler School of Mathematical Sciences, Tel-Aviv University, Tel-Aviv, Israel
E-mail: yakubov@post.tau.ac.il