Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 1 (2018). С. 180–193

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-180-193 УДК 517.984.52

РАВНОМЕРНАЯ БАЗИСНОСТЬ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ ОПЕРАТОРА ДИРАКА

© 2018 г. **А. М. САВЧУК, И. В. САДОВНИЧАЯ**

Аннотация. Изучается одномерный оператор Дирака $\mathcal{L}$ на отрезке $[0,\pi]$ с регулярными по Биркгофу краевыми условиями U и комплекснозначным суммируемым потенциалом $P=(p_{ij}(x))$, $i,\,j=1,\,2$. Доказаны равномерные оценки для констант Рисса систем корневых функций сильно регулярного оператора $\mathcal{L}$ при условии, что краевые условия U и число $\int\limits_0^\pi(p_1(x)-p_4(x))\,dx$ фиксированы, а потенциал P пробегает шар $B(0,R)$ радиуса R пространства $L_\varkappa$ при $\varkappa>1$. При этом систему корневых функций удается выбрать так, чтобы она состояла из собственных функций оператора $\mathcal{L}$, за исключением конечного набора корневых векторов, количество которых оценивается также равномерно по шару $\|P\|_\varkappa\leqslant R$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Рассмотрим оператор Дирака, порожденный в пространстве $\mathbb{H}=L_2[0,\pi]\oplus L_2[0,\pi]\ni\mathbf{y}$ дифференциальным выражением

$$\ell_P(\mathbf{y})=B\mathbf{y}'+P\mathbf{y},\quad\text{где}\tag{1.1}$$

$$B=\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix},\qquad P(x)=\begin{pmatrix}p_1(x)&p_2(x)\\p_3(x)&p_4(x)\end{pmatrix},\qquad \mathbf{y}(x)=\begin{pmatrix}y_1(x)\\y_2(x)\end{pmatrix}.$$

Функции p_j, $j=1,2,3,4$, предполагаются суммируемыми на отрезке $[0,\pi]$ и комплекснозначными. Следуя классическому пути, можно определить минимальный оператор $\mathcal{L}_{P,m}$ на области $\mathcal{D}(\mathcal{L}_{P,m})=\{\mathbf{y}\in W_1^1[0,\pi]:\ell_P(\mathbf{y})\in\mathbb{H},\ \mathbf{y}(0)=\mathbf{y}(\pi)=0\}$. Здесь $W_1^1[0,\pi]$ — пространство Соболева функций с суммируемой по Лебегу первой производной (в данном случае оно совпадает с пространством абсолютно непрерывных функций). Легко показать (см., например, [16]), что оператор $\mathcal{L}_{P,m}$ является фредгольмовым с индексами $(0,2)$, а сопряженный оператор $\mathcal{L}^*_{P,m}$ порождается сопряженным дифференциальным выражением $\ell_{P^*}(\mathbf{y})=B\mathbf{y}'+P^*\mathbf{y}$, где $P^*(x)=\begin{pmatrix}\overline{p}_1(x)&\overline{p}_3(x)\\\overline{p_2}(x)&\overline{p}_4(x)\end{pmatrix}$, и имеет область определения $\mathcal{D}(\mathcal{L}^*_{P,m})=\{\mathbf{y}\in W_1^1[0,\pi]:\ell_{P^*}(\mathbf{y})\in\mathbb{H}\}$. Таким образом, корректно определенный оператор Дирака является двумерным расширением оператора $\mathcal{L}_{P,m}$, т. е. имеет область определения $\{\mathbf{y}\in W_1^1[0,\pi]:\ell_P(\mathbf{y})\in\mathbb{H},\ U(\mathbf{y})=0\}$, где

$$U(\mathbf{y})=C\mathbf{y}(0)+D\mathbf{y}(\pi)=\begin{pmatrix}u_{11}&u_{12}\\u_{21}&u_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1(0)\\y_2(0)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_{13}&u_{14}\\u_{23}&u_{24}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1(\pi)\\y_2(\pi)\end{pmatrix},\tag{1.2}$$

Исследования поддержаны грантом РФФИ 16-01-00706.

причем строки матрицы $\mathcal{U} := (C, D) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \end{pmatrix}$ линейно независимы. В дальнейшем мы будем рассматривать случай регулярных по Биркгофу краевых условий. Обозначим через $J_{\alpha\beta}$ определитель, составленный из α-го и β-го столбца матрицы $\mathcal{U}$.

Определение 1.1. Краевые условия, определенные формой U, называются *регулярными* (по Биркгофу), если $J_{14} \cdot J_{23} \neq 0$. Оператор Дирака, порожденный регулярными краевыми условиями U, т. е. оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{L}_{P,U}) = \left\{\mathbf{y} \in W_1^1[0,\pi] : \ell_P(\mathbf{y}) \in \mathbb{H},\, U(\mathbf{y}) = 0\right\}$, будем называть *регулярным*.

Любой регулярный оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ замкнут и имеет плотную в $\mathbb{H}$ область определения (см., например, [16]). Спектр этого оператора состоит из собственных значений $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, расположенных в некоторой горизонтальной полосе $\{\lambda : |\operatorname{Im}\lambda| < \alpha\}$, причем $\lambda_n \to \pm\infty$ при $n \to \pm\infty$.

Через $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x))^t$ будем обозначать вектор-функции на отрезке $[0,\pi]$. Чтобы не усложнять запись, мы будем писать $\mathbf{f} \in L_\alpha$, имея в виду, что $f_1 \in L_\alpha[0,\pi]$ и $f_2 \in L_\alpha[0,\pi]$, или $P \in L_\alpha$, имея в виду, что все компоненты матрицы лежат в $L_\alpha[0,\pi]$. При этом мы положим

$$\|\mathbf{f}\|_{(L_\alpha[0,\pi])^2} = \|\mathbf{f}\|_\alpha = \left(\int_0^\pi |f_1(x)|^\alpha\,dx + \int_0^\pi |f_2(x)|^\alpha\,dx\right)^{\alpha'}$$

при $\alpha \in [1,\infty)$ и

$$\|\mathbf{f}\|_{(L_\infty[0,\pi])^2} = \|\mathbf{f}\|_\infty = \|\mathbf{f}\|_{C[0,\pi]} = \max\left\{\sup_{x\in[0,\pi]}|f_1(x)|,\ \sup_{x\in[0,\pi]}|f_2(x)|\right\}.$$

Рассматривая оператор T, действующий в пространстве $\mathbb{H}$, мы будем обозначать его норму $\|T\|$.

Регулярный оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ называется *сильно регулярным*, если $[J_{12} + \epsilon^2 J_{34}]^2 + 4\epsilon^2 J_{23}J_{14} \neq 0$, где $\epsilon = \exp\{\frac{i}{2}\int_0^\pi (p_4(t) - p_1(t))\,dt\}$. В сильно регулярном случае все собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ асимптотически просты. Через $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ обозначим систему собственных и присоединенных функций такого оператора (присоединенных функций может быть лишь конечное число). Собственные функции мы нормируем условием $\|\mathbf{y}_n\| = 1$. Выбор присоединенных функций проводим стандартным образом с помощью канонических по Келдышу цепочек.

Отправной точкой для наших рассуждений является теорема о базисности Рисса системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ собственных и присоединенных функций любого сильно регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Эта теорема была доказана в [16] и независимо в [15]. Обозначим через $\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ произвольный ортонормированный базис пространства $\mathbb{H}$ и определим оператор $T_0 : \mathbf{e}_n \mapsto \mathbf{y}_n$. Поскольку система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является базисом Рисса, то этот оператор однозначно продолжается до непрерывного и ограниченного оператора в $\mathbb{H}$. При этом величину $\|T_0\| \cdot \|T_0^{-1}\|$ будем называть *константой Рисса* базиса $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (она, очевидно, не зависит от выбора базиса $\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$). Сам оператор T_0 и константа Рисса определяются потенциалом P и краевыми условиями U.

Важно отметить, что свойство сильной регулярности оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ определяется не только краевыми условиями, но и потенциалом. Зависимость свойства сильной регулярности от потенциала пропадает, если величина $\int_0^\pi (p_4(t) - p_1(t))\,dt$ не меняется. В частности, это так, если потенциал P является внедиагональным, т. е. $p_1 = p_4 = 0$.

Далее в работе мы будем изучать зависимость константы Рисса от потенциала P, считая краевые условия U и величину $\int_0^\pi (p_4(t) - p_1(t))\,dt$ фиксированными и такими, что $[J_{12} + \epsilon^2 J_{34}]^2 + 4\epsilon^2 J_{23}J_{14} \neq 0$. В частности, оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ всегда будет сильно регулярен.

Даже если число $[J_{12} + \epsilon^2 J_{34}]^2 + 4\epsilon^2 J_{23}J_{14} \neq 0$ фиксировано, а $\mathbf{K}$ — компакт в $L_1[0,\pi]$, величина $\sup\limits_{P\in\mathbf{K}} \|T_0\| \cdot \|T_0^{-1}\|$ не обязана быть конечной (этот эффект возникает, если при изменении потенциала несколько собственных значений сталкиваются и образуют жорданову клетку). Несложно доказать, что сильная регулярность гарантирует асимптотическую простоту спектра оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Это означает, что изменение оператора T_0 на подходящем конечномерном подпространстве ведет к ограниченности констант Рисса. А именно, для произвольного фиксированного множества индексов $J_N \subset \mathbb{Z}$ (здесь N — мощность множества J_N) положим $\mathcal{H}_J := \mathrm{Lin}\{\mathbf{y}_n\}_{n\in J_N}$ и заменим базис $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in J_N}$ собственных и присоединенных функций на ортонормированный базис $\{\varphi_n\}_{n\in J_N}$ корневых функций пространства $\mathcal{H}_J$. Теперь определим оператор

$$T\mathbf{e}_n = \begin{cases} \mathbf{y}_n, & \text{если } n \notin J_N, \\ \varphi_n, & \text{если } n \in J_N, \end{cases}$$

на базисе $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и продолжим его по непрерывности на все $\mathbb{H}$ (непрерывность оператора T следует из непрерывности оператора T_0, поскольку эти два оператора отличаются лишь на конечномерном пространстве). Заметим, что оператор T зависит от выбора множества J_N и базиса $\{\varphi_n\}_{n\in J_N}$, но его норма $\|T\|$ (так же, как и константа Рисса $\|T\| \cdot \|T^{-1}\|$) от выбора базиса $\{\varphi_n\}_{n\in J_N}$ уже не зависит. В работе [7] было показано, что *если* $\mathbf{K}$ — *компакт в* $L_1[0,\pi]$, *а число число* $[J_{12}+\epsilon^2 J_{34}]^2 + 4\epsilon^2 J_{23}J_{14} \neq 0$ *фиксировано, то найдется такой номер* N (*он зависит от выбора компакта* $\mathbf{K}$), *что, положив* $J_N = \{n : |n| \leqslant N\}$, *получим* $\sup\limits_{P\in\mathbf{K}} \|T\| \cdot \|T^{-1}\| \leqslant C$, *где* C *также зависит только от* $\mathbf{K}$.

В этой работе мы изучим случай, когда потенциал P пробегает шар радиуса R пространства $L_\varkappa[0,\pi]$, $\varkappa > 1$ (при этом число $[J_{12}+\epsilon^2 J_{34}]^2 + 4\epsilon^2 J_{23}J_{14}$ по-прежнему считается фиксированным и ненулевым). Теперь уже нельзя ограничиться изменением оператора T_0 на подпространствах, отвечающих множествам J_N вида $\{n : |n| \leqslant N\}$: варьируя потенциал в шаре большого радиуса, можно добиться столкновения пары собственных значений со сколь угодно большими номерами. Тем не менее, оказывается, что и в этой ситуации можно дать ограничения на мощность множества J_N. Сформулируем основной результат работы (он был анонсирован авторами в [5]).

Теорема 1.1. *Пусть* $\mathcal{L}_{P,U}$ — *сильно регулярный оператор Дирака с потенциалом* $P \in L_\varkappa[0,\pi]$, $\varkappa \in (1,2]$, $\|P\|_{L_\varkappa} \leqslant R$. *Пусть краевые условия* U *и величина* $\int\limits_0^\pi (p_4(t) - p_1(t))\,dt$ *фиксированы. Тогда для каждого* P, $\|P\|_{L_\varkappa} \leqslant R$, *существует такое множество индексов* $J_N \subset \mathbb{Z}$, *что* $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \leqslant C$, *где величины* C *и* N *зависят только от радиуса шара* R *и краевых условий* U.

Насколько нам известно, для случая системы корневых функций оператора Дирака это утверждение является новым. Тематика равномерных оценок для констант Рисса является классической для систем экспонент. Такие оценки также естественным образом возникают в теории фреймов и теории интерполяции целых функций (см., например, [11, 12], [17, гл. 4], [2] и ссылки там).

Отметим еще, что в процессе доказательство получено одно утверждение, представляющее самостоятельный интерес: *число иррегулярных*[1] *собственных значений оператора* $L_{P,U}$ *ограничено величиной* $C = C(R,U)$ (*при условии, что число* ϵ *фиксировано*). Дело в том, что действуя так же, как при доказательстве теоремы 4.3 в работе [16], для регулярных собственных значений можно получить оценки вида

$$\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\mathcal{R}}} |\lambda_n - \lambda_n^0|^{\varkappa'}\Big)^{1/\varkappa'} \leqslant C(R,U)\|P\|_{L_\varkappa[0,\pi]}.$$

Таким образом, утверждение об оценке числа иррегулярных собственных значений влечет ограниченность нелинейного отображения $F : P \mapsto \{\lambda_n - n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $F : L_2[0,\pi] \to l_2(\mathbb{Z})$, что является важным моментом при получении теорем устойчивости для прямых и обратных спектральных задач. Подобные утверждения для случая оператора Штурма—Лиувилля можно найти, например, в работах [8, 14].

[1]Определение регулярных и иррегулярных собственных значений см. ниже после леммы 3.2

2. Предварительные сведения

Через $\mathcal{L}_{0,U}$ мы будем обозначать оператор Дирака с краевыми условиями U и нулевым потенциалом $P \equiv 0$.

Утверждение 2.1 (см. [13, раздел 2]). *Характеристический определитель оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ равен $\Delta_0(\lambda) = J_{23}e^{i\pi\lambda} - J_{14}e^{-i\pi\lambda} - [J_{12} + J_{34}]$. Спектр оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ имеет вид*

$$\lambda_n^0 = \begin{cases} \zeta_0 + n, & \text{если } n \text{ четно,} \\ \zeta_1 + n, & \text{если } n \text{ нечетно,} \end{cases} \qquad \text{где } \zeta_0 = -\frac{i}{\pi}\ln z_0, \quad \zeta_1 = -\frac{i}{\pi}\ln z_1 - 1.$$

Здесь z_0 и z_1 — корни квадратного уравнения $J_{23}z^2 - [J_{12} + J_{34}]z - J_{14} = 0$, а значения логарифма фиксируются в полосе $\operatorname{Im}\ln z \in (-\pi, \pi]$. Корни z_0 и z_1 различны в точности тогда, когда краевые условия сильно регулярны. В этом случае величина $d = \inf\limits_{n \neq m} |\lambda_n^0 - \lambda_m^0|$ строго положительна. Для определенности будем считать, что $\operatorname{Re}\lambda_0^0 \leqslant \operatorname{Re}\lambda_1^0$, а в случае равенства вещественных частей, что $\operatorname{Im}\lambda_0^0 < \operatorname{Im}\lambda_1^0$. Резольвента $\mathcal{R}_0(\lambda) := (\mathcal{L}_{0,U} - \lambda I)^{-1}$ определена везде, кроме точек λ_n^0, и является интегральным оператором $\mathcal{R}_0(\lambda) : \mathbf{f} \mapsto \int\limits_0^\pi G_0(\xi, x, \lambda)\mathbf{f}(\xi)\,d\xi$. Собственные функции $\mathbf{y}_n^0$ любого сильно регулярного оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ образуют базис Рисса в пространстве $\mathbb{H}$.

Рассмотрим теперь оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ с ненулевым потенциалом. Функцию P мы будем считать суммируемой, а краевые условия регулярными. Заметим, что случай потенциала общего вида можно свести к случаю внедиагональной матрицы $P(x)$, перейдя к подобному оператору.

Утверждение 2.2 (см. [6, утверждение 1.3]). *Пусть $P(x)$ — произвольная матрица размера 2×2 с элементами $p_j \in L_1[0, \pi]$, $j = 1, 2, 3, 4$, а матрица $\mathcal{U}$ задает регулярные краевые условия. Тогда оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ подобен оператору $\mathcal{L}_{\widetilde{P},\widetilde{U}} + \gamma I$, где $\widetilde{P}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{p}_2(x) \\ \widetilde{p}_3(x) & 0 \end{pmatrix}$, $\widetilde{p}_2(x) = p_2(x)e^{i(\psi(x) - \varphi(x))}$, $\widetilde{p}_3(x) = p_3(x)e^{i(\varphi(x) - \psi(x))}$, $\varphi(x) = \gamma x - \int\limits_0^x p_1(t)dt$, $\psi(x) = \int\limits_0^x p_4(t)dt - \gamma x$, $\gamma = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi (p_1(t) + p_4(t))dt$, $\widetilde{\mathcal{U}} = (\widetilde{C}, \widetilde{D})$, $\widetilde{C} = C$, $\widetilde{D} = \exp\left(\dfrac{i}{2}\int\limits_0^\pi (p_1(t) - p_4(t))dt\right)D$. А именно, $\mathcal{L}_{\widetilde{P},\widetilde{U}} = W^{-1}\mathcal{L}_{P,U}W$, где W — оператор умножения на матрицу $W(x) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi(x)} & 0 \\ 0 & e^{i\psi(x)} \end{pmatrix}$.*

Замечание 2.1. Отметим, что если краевые условия U были регулярны, то и условия $\widetilde{U}$ остаются регулярными. В случае сильной регулярности условий U новые краевые условия сильно регулярны. Для нас также важно то, что $\widetilde{P} \in L_\varkappa[0, \pi]$ в том случае, если $P \in L_\varkappa[0, \pi]$. Кроме того, если $\|P\|_{L_\varkappa} \leqslant R$, то $\|W\|_{\mathbb{H}} \leqslant e^{2R}$, $\|W^{-1}\|_{\mathbb{H}} \leqslant e^{2R}$ и $\|\widetilde{P}\|_{L_\varkappa} \leqslant Re^{4R}$. Это означает, что равномерные оценки, полученные для оператора $\widetilde{T}$, автоматически влекут равномерные оценки нормы оператора $T = W\widetilde{T}$. То же верно и для оператора T^{-1}, так что теорему 1.1 достаточно доказать для случая внедиагональной матрицы P.

Итак, начиная с этого момента будем считать, что

$$P(x) = \begin{pmatrix} 0 & p_2(x) \\ p_3(x) & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Через $E(x, \lambda) = \begin{pmatrix} e_{11}(x, \lambda) & e_{12}(x, \lambda) \\ e_{21}(x, \lambda) & e_{22}(x, \lambda) \end{pmatrix}$ мы обозначим фундаментальную матрицу решений уравнения $\ell_P(\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{y}$ с начальным условием $E(0, \lambda) = I$. При $P \equiv 0$ будем пользоваться обозначением $E_0(x, \lambda)$. Очевидно, что $E_0(x, \lambda) = \begin{pmatrix} e^{ix\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-ix\lambda} \end{pmatrix}$.

Введем также матрицу $E(x,\lambda)E^{-1}(a,\lambda)$, которую обозначим через $\mathcal{E}(a,x,\lambda)$, где $0 \leqslant a,\ x \leqslant \pi$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Прямым подсчетом получаем

$$\mathcal{E}(a,x,\lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{11}(a,x,\lambda) & \mathcal{E}_{12}(a,x,\lambda) \\ \mathcal{E}_{21}(a,x,\lambda) & \mathcal{E}_{22}(a,x,\lambda) \end{pmatrix},$$

$$\text{где}\quad \mathcal{E}_{j1}(a,x,\lambda) = e_{j1}(x,\lambda)e_{22}(a,\lambda) - e_{j2}(x,\lambda)e_{21}(a,\lambda), \tag{2.2}$$

$$\mathcal{E}_{j2}(a,x,\lambda) = e_{j2}(x,\lambda)e_{11}(a,\lambda) - e_{j1}(x,\lambda)e_{12}(a,\lambda), \quad j = 1,\,2.$$

Легко видеть, что спектр оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ состоит из собственных значений $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — нулей характеристического определителя $\Delta(\lambda) = J_{12}+J_{34}+J_{13}e_{12}(\pi,\lambda)+J_{14}e_{22}(\pi,\lambda)+J_{32}e_{11}(\pi,\lambda)+J_{42}e_{21}(\pi,\lambda)$.

Утверждение 2.3 (см. [16, теорема 4.3], [6, утверждение 3.1], [10, утверждение 6])**.** *Для любого регулярного оператора Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$ с потенциалом $P \in L_{\varkappa}[0,\pi]$, $\varkappa > 1$, найдется такое число $\alpha_0 = \alpha_0(R,U)$, что спектр оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ (и оператора $\mathcal{L}_{0,U}$) лежит в горизонтальной полосе $\Pi_{\alpha_0} = \{\lambda : |\operatorname{Im}\lambda| < \alpha_0\}$, а вне этой полосы резольвента $\mathcal{R}(\lambda) = (\mathcal{L}_{P,U} - \lambda I)^{-1}$ представляется абсолютно сходящимся операторным рядом*

$$\mathcal{R}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}(-\mathcal{R}_0(\lambda)P)^k\mathcal{R}_0(\lambda), \tag{2.3}$$

слагаемые которого допускают оценку $\|(-\mathcal{R}_0P)^k\mathcal{R}_0\|_{\mathbb{H}} \leqslant C^{k+1}(U)\|P\|_{\varkappa}^k|\operatorname{Im}\lambda|^{-1-k/\varkappa'}$ (число α_0 здесь выбирается так, что $C(U)\|P\|_{\varkappa}|\operatorname{Im}\lambda|^{-1/\varkappa'} < 1/2$, а сама резольвента допускает оценку $\|\mathcal{R}(\lambda)\| \leqslant 2C(U)|\operatorname{Im}\lambda|^{-1}$). Резольвента определена везде вне точек $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и является интегральным оператором с интегральным ядром

$$G(\xi,x,\lambda) = i\left(\frac{J_{12}}{\Delta(\lambda)} - \chi_{\xi>x}(t,x)\right)\begin{pmatrix} \mathcal{E}_{11}(\xi,x,\lambda) & -\mathcal{E}_{12}(\xi,x,\lambda) \\ \mathcal{E}_{21}(\xi,x,\lambda) & -\mathcal{E}_{22}(\xi,x,\lambda) \end{pmatrix} +$$
$$+\frac{i}{\Delta(\lambda)}\begin{pmatrix} \mathcal{E}_{11}(\pi,x,\lambda) & -\mathcal{E}_{12}(\pi,x,\lambda) \\ \mathcal{E}_{21}(\pi,x,\lambda) & -\mathcal{E}_{22}(\pi,x,\lambda) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} J_{14} & J_{24} \\ J_{13} & J_{23} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e_{22}(\xi,\lambda) & e_{12}(\xi,\lambda) & -e_{21}(\xi,\lambda) & -e_{11}(\xi,\lambda) \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

где $\chi_{\xi>x}$ — характеристическая функция треугольника $\xi > x$.

Начиная с этого момента, мы зафиксируем число α_0 так, чтобы оно удовлетворяло условиям утверждения. Более того, увеличивая при необходимости число α_0, можно считать, что полоса Π_{α_0} содержит все точки $\{\lambda_n^0\}_{n\in\mathbb{Z}}$ с их $d/4$-окрестностями (напомним, что $d = \inf\limits_{n\neq m}|\lambda_n^0 - \lambda_m^0|$). Положим еще $\alpha = \alpha_0 + d/4$. Важно отметить, что величины α и α_0 зависят только от R и U.

Сформулируем теперь результаты об асимптотическом поведении матрицы $E(x,\lambda)$ при $\Pi_\alpha \ni \lambda \to \infty$. Для оценки остатков мы введем функции $\upsilon_{j,\varepsilon}(x,\lambda) = \int\limits_0^x p_j(t)e^{2i\varepsilon\lambda t}\,dt$, $j = 2,3$, $\varepsilon = \pm 1$; $\Upsilon(\lambda) = \max\limits_{j,\varepsilon,x}|\upsilon_{j,\varepsilon}(\lambda,x)|$.

Утверждение 2.4 (см. [4, теорема 1], [4, теорема 2])**.** *Пусть $P \in L_1[0,\pi]$, $\|P\|_{L_1} \leqslant R$, а число α фиксировано выше. Тогда для любой точки*

$$\lambda \in \mathcal{D} = \{\lambda \in \Pi_\alpha : \Upsilon(\lambda) \leqslant \kappa\}, \qquad \text{где}\ \ \kappa = \kappa(R,U), \tag{2.5}$$

справедливо представление $e_{jk}(x,\lambda) = e_{jk}^0(x,\lambda) + \eta_{jk}(x,\lambda)$, $j,\,k = 1,\,2$, где остатки η_{jk} допускают равномерные оценки

$$\max_{j,k,x}|\eta_{jk}(x,\lambda)| \leqslant M\Upsilon(\lambda) \tag{2.6}$$

с константой $M = M(R,U)$.

3. Доказательство основного результата

Асимптотическое представление для матрицы $E(x,\lambda)$, таким образом, доказано лишь при достаточно малых значениях функции $\Upsilon(\lambda)$. В виду этого важно отметить, что $\Upsilon(\lambda) \to 0$ при $\Pi_\alpha \ni \lambda \to \infty$ (см. [4, лемма 1]). Покажем, как можно усилить это утверждение при $P \in L_{\varkappa}$, $\varkappa > 1$.

Напомним, что *пространством Харди* H^p в полосе Π_α называется банахово пространство голоморфных в Π_α функций с конечной нормой $\|f\|_{H^p} = \sup\limits_{|y|<\alpha}\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^p\,dx\Big)^{1/p}$.

Мерой Карлесона в полосе Π_α называется любая мера μ, для которой конечна величина $N_\mu := \sup\limits_{\sigma\in\mathbb{R}}\mu(Q_\sigma)$, где Q_σ — квадрат с вершинами $\sigma\pm\alpha\pm i\alpha$. Известно (см., например, [1, теорема 5.6, гл. 1]), что для любой функции $f\in H^p(\Pi_\alpha)$ и любой меры Карлесона μ в полосе Π_α выполнено $f\in L_p(d\mu)$ и $\|f\|_{L_p(d\mu)}\leqslant C\|f\|_{H^p}$ с константой C, зависящей только от α и N_μ.

Для дальнейших рассуждений нам потребуется зафиксировать меру Карлесона следующим образом. Построим семейство контуров γ_n, $n\in\mathbb{Z}$. Вначале определим контур γ_n как объединение окружности $C_n=\{|\lambda-\lambda_n^0|=d/4\}$ и двух отрезков $I_n^+=[\lambda_n^0+id/4, \operatorname{Re}\lambda_n^0+i\alpha_0]$ и $I_n^-=[\operatorname{Re}\lambda_n^0-i\alpha_0, \lambda_n^0-id/4]$. Может случится так, что отрезок I_n^+ пересекает окружность C_{n+1}. В этом случае мы заменим часть отрезка I_n^+, лежащую внутри C_{n+1}, на *левую* дугу окружности C_{n+1}. Аналогично, если отрезок I_n^- пересекает окружность C_{n-1}, то заменим его часть, попавшую внутрь окружности, на *правую* дугу. Отметим, что в силу построения (и распределения собственных значений λ_n^0) отрезок I_n^+ не может пересечься ни с какой окружностью, кроме C_{n+1} и, аналогично, может I_n^- пересечь только C_{n-1}.

Заметим, что для любой точки $\lambda\in\gamma_n$ выполнены ограничения $\operatorname{Re}\lambda_n^0-d/4\leqslant\operatorname{Re}\lambda\leqslant\operatorname{Re}\lambda_n^0+d/4$. Поскольку $\operatorname{Re}(\lambda_{n+2}^0-\lambda_n^0)=2$, а $d\leqslant 1$, то расстояние между контурами γ_n и γ_{n+2} не меньше, чем $3/2$. Введем также обозначение $\check{\gamma}_n=\gamma_n\cup\operatorname{int}\gamma_n$, где $\operatorname{int}\gamma_n=\{\lambda : |\lambda-\lambda_n^0|<d/4\}$.

Теперь определим множества K_n как замкнутые $d/4$ окрестности контуров γ_n. Отметим, что $\lambda_n^0\in K_n$, а площадь множества K_n не превосходит $\alpha_0 d+\pi d^2/2$. Обозначим далее $K=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}K_n$ и определим меру μ как обычную плоскую меру с носителем K.

Лемма 3.1. *Мера μ является карлесоновой, причем число N_μ зависит только от R и U. При этом для любой функции $f\in L_\nu(K)$ имеет место оценка*

$$\|f\|^\nu_{L_\nu(K)}\leqslant\sum_{n\in\mathbb{Z}}\|f\|^\nu_{L_\nu(K_n)}\leqslant 2\|f\|^\nu_{L_\nu(K)} \tag{3.1}$$

для любого $\nu\in[1,\infty)$.

Доказательство. Первое утверждение леммы следует непосредственно из определения и построения множества K. Заметим теперь, что возможны три ситуации: множества K_n попарно не пересекаются; каждое множество K_{2n} имеет непустое пересечение с множеством K_{2n+1}, но других попарных пересечений нет; каждое множество K_{2n} имеет непустое пересечение с множеством K_{2n-1}, а других попарных пересечений нет. В любом случае расстояние между K_n и K_{n+2} равно, по меньшей мере, $2-d\geqslant 1$, откуда вытекает неравенство (3.1). □

Лемма 3.2. *Пусть $P\in L_\varkappa[0,\pi]$, $\varkappa\in(1,2]$, $\|P\|_{L_\varkappa}\leqslant R$, а число $h>0$ произвольно. Тогда неравенство $\sup\limits_{\lambda\in\check{\gamma}_n}\Upsilon(\lambda)\leqslant h$ выполнено для всех множеств $\check{\gamma}_n$, за исключением конечного числа N, причем $N\leqslant C(R,U)h^{-\varkappa'}(h^{-\varkappa'}+1)$.*

Доказательство. Зафиксируем индексы j, ε и точку $x\in[0,\pi]$. Функция $\upsilon_{j,\varepsilon}(x,\lambda)$ переменной λ есть преобразование Фурье (или обратное преобразование Фурье, это зависит от знака ε) функции $p_j(t)\cdot\chi_{[0,x]}(t)$, где $\chi_{[0,x]}(t)$ — характеристическая функция отрезка $[0,x]$. Тогда, согласно теореме Пэли—Винера, функция $\upsilon_{j,\varepsilon}(x,\lambda)$ принадлежит пространству Харди $H^{\varkappa'}$ и $\|\upsilon_{j,\varepsilon}(x,\lambda)\|_{H^{\varkappa'}}\leqslant C_{abs}\|P\|_{L_\varkappa}$. Положим $v_n=\|\upsilon_{j,\varepsilon}(x,\lambda)\|_{L_{\varkappa'}(K_n)}$. В силу (3.1), $\{v_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\in l_{\varkappa'}$ и $\|\{v_n\}\|_{l_{\varkappa'}}\leqslant C(R,U)$. Зафиксируем произвольное положительное число $b>0$ и заметим, что $\operatorname{mes}\{n : v_n>b\}\leqslant\dfrac{C(R,U)}{b^{\varkappa'}}$ (здесь и далее символом mes обозначаем мощность подмножества целых индексов).

Рассмотрим индекс n, для которого $v_n\leqslant b$. По теореме о среднем значении голоморфной функции $\upsilon(\lambda)$ имеем $\upsilon_{j,\varepsilon}(x,\lambda)=\dfrac{16}{\pi d^2}\iint\limits_{|\xi-\lambda|\leqslant d/4}|\upsilon_{j,\varepsilon}(x,\xi)|\,d(\operatorname{Re}\xi)\,d(\operatorname{Im}\xi)$. Выбирая произвольную точку

$\lambda \in \check{\gamma}_n$, приходим к оценке $|v_{j,\varepsilon}(x,\lambda)| \leqslant \left(\dfrac{\pi d^2}{4}\right)^{1/\varkappa-1} v_n$. Теперь «разморозим» точку $x \in [0,\pi]$ и заметим, что $|v_{j,\varepsilon}(x,\lambda) - v_{j,\varepsilon}(y,\lambda)| \leqslant \operatorname{ch}(2\alpha)\left|\int\limits_x^y |p_j(t)|dt\right| \leqslant \operatorname{ch}(2\alpha)R|y-x|^{1/\varkappa'}$.

Это означает, что для всех точек y из окрестности точки x радиуса a справедлива оценка $\sup\limits_{\lambda\in\check{\gamma}_n} |v_{j,\varepsilon}(y,\lambda)| \leqslant \left(\dfrac{\pi d^2}{4}\right)^{1/\varkappa-1} b + \operatorname{ch}(2\alpha)Ra^{1/\varkappa'} \leqslant 2\left(\dfrac{\pi d^2}{4}\right)^{1/\varkappa-1} b$ при выборе $a = (b/(2\operatorname{ch}(2\alpha)R))^{\varkappa'}$.

Рассмотрим теперь разбиение отрезка $[0,\pi]$ диаметром a (это разбиение содержит не более $\pi/a+1$ точек). Легко видеть, что $\operatorname{mes}\{n : v_n(x) > b$ хотя бы для одной точки x разбиения$\} \leqslant \left(\dfrac{\pi}{a}+1\right)\dfrac{C(R,U)}{b^{\varkappa'}}$. Для всех остальных целых n выполнено неравенство $\sup\limits_{x\in[0,\pi],\ \lambda\in\check{\gamma}_n} |v_{j,\varepsilon}(x,\lambda)| \leqslant 2\left(\dfrac{\pi d^2}{4}\right)^{1/\varkappa-1} b = h$ при соответствующем выборе числа b. Количество «исключенных» индексов n не превосходит $\left(\dfrac{\pi}{a}+1\right)\dfrac{C(R,U)}{b^{\varkappa'}} = C(R,U)h^{-\varkappa'}(h^{-\varkappa'}+1)$. $\square$

Согласно [16, теорема 4.5], нумерация точек спектра оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ проводится так, что

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + o(1) \quad \text{при } |n| \to \infty. \tag{3.2}$$

Ясно, что последнее условие задает индексацию точек спектра не однозначно, а лишь с точностью до перестановки конечного числа номеров. Здесь нам потребуется эту нумерацию уточнить. Для этого обозначим $m = m(U) := \inf\limits_{\lambda\in\gamma_0\cup\gamma_1} |\Delta_0(\lambda)| > 0$, где $\Delta_0(\lambda)$ — характеристический определитель задачи с нулевым потенциалом. В силу 2-периодичности функции $\Delta_0(\lambda)$ неравенство $|\Delta_0(\lambda)| \geqslant m$ выполнено для всех точек $\lambda \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n$. Строки матрицы $\mathcal{U}$ всегда можно домножить на ненулевые коэффициенты так, чтобы неравенство $|J_{\alpha\beta}| \leqslant 1$ выполнялось для всех индексов α и β.

Пусть далее $\kappa = \kappa(R,U)$ и $M = M(R,U)$ — константы, введенные в (2.5), (2.6) соответственно. Назовем контур γ_n *регулярным*, если $\sup\limits_{\lambda\in\check{\gamma}_n} \Upsilon(\lambda) \leqslant \kappa$ и $\sup\limits_{\lambda\in\gamma_n} \Upsilon(\lambda) \leqslant m/(8M)$. В противном случае γ_n назовем *иррегулярным*. В силу леммы 3.2, количество иррегулярных контуров оценивается величиной $N = N(R,U)$. Для регулярных контуров

$$|\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda)| \leqslant |J_{13}\eta_{12}(\pi,\lambda)| + |J_{14}\eta_{22}(\pi,\lambda)| + |J_{32}\eta_{11}(\pi,\lambda)| + |J_{42}\eta_{21}(\pi,\lambda)| \leqslant 4M\Upsilon(\lambda) \leqslant \frac{m}{2}$$

для всех $\lambda \in \gamma_n$, откуда $|\Delta(\lambda)| \geqslant m/2$.

Из теоремы Руше для голоморфных функций $\Delta_0(\lambda)$, $\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda)$ и контура $C_n = \{|\lambda - \lambda_n^0| = d/4\}$ следует, что внутри окружности C_n, отвечающей регулярному контуру γ_n, лежит ровно одно собственное значение оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Это собственное значение мы индексируем номером n и назовем *регулярным* собственным значением.

Далее, существует такое натуральное число n_0, что все контуры γ_n при $|n| \geqslant n_0$ регулярны, так что введенная здесь нумерация согласована с соотношением (3.2), т. е. является уточнением предыдущей нумерации. Оставшиеся собственные значения занумеруем оставшимися в нашем распоряжении целыми индексами произвольным образом и назовем *иррегулярными* собственными значениями. Дефекта нумерации при этом не возникает (множество иррегулярных собственных значений конечно и равномощно множеству оставшихся индексов), поскольку он отсутствовал в предыдущей нумерации. Множество целых индексов, отвечающих регулярным и иррегулярным собственным значениям, обозначим через $\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$ и $\mathbb{Z}_{\mathfrak{I}}$ соответственно. Из леммы 3.2 вытекает следующее важное утверждение.

Следствие 3.1. *Число иррегулярных собственных значений* $\operatorname{mes}\mathbb{Z}_{\mathfrak{I}}$ *не только конечно для каждого фиксированного потенциала* P, *но и равномерно ограничено по любому шару* $\|P\|_{L_\varkappa} \leqslant R$, *если* $\varkappa > 1$.

Подчеркнем, что число $n_0 = n_0(P,U) := \max\{|n| : n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{J}}\}$ также конечно, но величина $\sup\limits_{\|P\|_{L_\varkappa}\leqslant R} n_0(P,U)$ может быть бесконечной (более того, это действительно так для достаточно больших R).

Лемма 3.3. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — сильно регулярный оператор Дирака с потенциалом $P \in L_\varkappa$ вида* (2.1)*, причем $\|P\|_{L_\varkappa} \leqslant R$, а $\varkappa > 1$. Тогда на любом регулярном контуре γ_n резольвента $\mathcal{R}(\lambda) = (\mathcal{L}_{P,U} - \lambda I)^{-1}$ допускает оценку*

$$\sup_{\lambda\in\gamma_n} \|\mathcal{R}(\lambda)\| \leqslant C(R,U). \tag{3.3}$$

Доказательство. Согласно утверждению 2.4, для любого $\lambda \in \gamma_n$ справедливо представление $e_{jk}(x,\lambda) = e^0_{jk}(x,\lambda) + \eta_{jk}(x,\lambda)$. Учитывая оценку (2.6) и явный вид функций $e^0_{jk}(x,\lambda)$, приходим к неравенству $\sup\limits_{x\in[0,\pi],\,\lambda\in\gamma_n} |e_{jk}(x,\lambda)| \leqslant C(R,U)$, j, $k = 1$, 2. Тогда, с учетом равенств (2.2) и оценки $\inf\limits_{\lambda\in\gamma_n} |\Delta(\lambda)| \geqslant m/2$, где $m = m(U)$, из (2.4) получаем $\sup\limits_{\lambda\in\gamma_n,\,0\leqslant\xi,\,x\leqslant\pi} |g_{jk}(\xi,x,\lambda)| \leqslant C(R,U)$, $j,k = 1$, 2, где мы обозначили $G(\xi,x,\lambda) = (g_{jk}(\xi,x,\lambda))_{j,\,k=1,\,2}$. Доказанная оценка влечет утверждение леммы. □

Обозначим через γ_n^+ контур, полученный из γ_n удалением левой половины окружности C_n и добавлением двух вертикальных лучей $(\operatorname{Re}\lambda^0_n - i\infty, \operatorname{Re}\lambda^0_n - i\alpha_0]$ и $[\operatorname{Re}\lambda^0_n + i\alpha_0, \operatorname{Re}\lambda^0_n + i\infty)$. Ориентируем γ_n^+ по убыванию $\operatorname{Im}\lambda$. Аналогично, через γ_n^- будем обозначать контур, полученный из γ_n добавлением тех же лучей, удалением правой половины окружности C_n и ориентированный по возрастанию $\operatorname{Im}\lambda$.

Лемма 3.4. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — сильно регулярный оператор Дирака с потенциалом $P \in L_\varkappa$ вида* (2.1)*, причем $\|P\|_{L_\varkappa} \leqslant R$, а $\varkappa > 1$. Тогда $\Bigl\|\int\limits_{\gamma_n^\pm} \mathcal{R}(\lambda)\,d\lambda\Bigr\| \leqslant C(R,U)$ для любого $n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$.*

Доказательство. Воспользуемся представлением (2.3) для резольвенты в виде операторного ряда. Все слагаемые этого ряда, кроме первого, оцениваются одинаково. По определению, длина контура γ_n не превосходит $\pi d + 2\alpha_0$. Тогда, в силу неравенства (3.3), остается провести оценку только двух несобственных интегралов по лучам $(\operatorname{Re}\lambda^0_n - i\infty, \operatorname{Re}\lambda^0_n - i\alpha_0]$ и $[\operatorname{Re}\lambda^0_n + i\alpha_0, \operatorname{Re}\lambda^0_n + i\infty)$. Оценим интеграл по верхнему лучу (рассуждения для другого интеграла полностью аналогичны):

$$\Biggl\|\int\limits_{\sigma+i\alpha_0}^{\sigma+i\infty} (-\mathcal{R}_0(\lambda)P)^k \mathcal{R}_0(\lambda)\,d\lambda\Biggr\| \leqslant \int\limits_{\alpha_0}^{\infty} C^{k+1}(U) R^k \tau^{-k/\varkappa'}\,\frac{d\tau}{\tau} \leqslant \frac{\varkappa' C^{k+1}(U) R^k}{k\alpha_0^{k/\varkappa'}},$$

где $k \geqslant 1$, а $\lambda = \sigma + i\tau$. Полученный ряд сходится в силу выбора числа α_0, и его сумма не превосходит $2\varkappa' C(U)$.

Таким образом, остается оценить слагаемое ряда (2.3) с номером $k = 0$, т. е. доказать, что величина $\Bigl\|\int\limits_{\gamma_n^\pm} \mathcal{R}_0(\lambda)\,d\lambda\Bigr\|$ конечна. Воспользуемся представлением резольвенты невозмущенного оператора в виде ряда $\mathcal{R}_0(\lambda) = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} \dfrac{(\cdot,\mathbf{z}^0_j)\mathbf{y}^0_j}{\lambda - \lambda^0_j}$. Здесь $\{\mathbf{y}^0_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — система собственных функций оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ с нулевым потенциалом (напомним, что краевые условия сильно регулярны, а значит все собственные значения λ^0_j однократны), $\{\mathbf{z}^0_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — биортогональная к ней. Каждая из этих систем образует базис Рисса в пространстве $\mathbb{H}$, следовательно, для любой функции $\mathbf{f} \in \mathbb{H}$ справедлива оценка

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |(\mathbf{f},\mathbf{z}^0_j)|^2 \leqslant C\|f\|^2. \tag{3.4}$$

Непосредственным интегрированием получаем, что $\int\limits_{\gamma_n^-} \mathcal{R}_0(\lambda)\,d\lambda = \sum\limits_{j\leqslant n} i\pi(\cdot, \mathbf{z}_j^0)\mathbf{y}_j^0 - \sum\limits_{j>n} i\pi(\cdot, \mathbf{z}_j^0)\mathbf{y}_j^0$. Отсюда и из (3.4) вытекает ограниченность величины $\left\| \int\limits_{\gamma_n^-} \mathcal{R}_0(\lambda)\,d\lambda \right\|$. Оценка для интеграла по γ_n^+ получается аналогично. □

Для любого $n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$ собственное значение λ_n однократно. Обозначим через $\mathbf{y}_n$ соответствующую собственную функцию, нормированную условием $\|\mathbf{y}_n\| = 1$, и пусть $\mathcal{H}_{\mathfrak{R}} := \overline{\operatorname{Lin}\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}}}$. Наша ближайшая цель — построить спектральный проектор на подпространство $\mathcal{H}_{\mathfrak{R}}$. Для этого необходимо построить контур, охватывающий все регулярные собственные значения и не содержащий ни одного иррегулярного собственного значения. Мы построим такой контур следующим образом. Будем говорить, что два регулярных индекса $n < n'$ лежат в одной компоненте, если все целые числа $k \in (n, n')$ также регулярны. Легко видеть, что множество $\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$ состоит из $\nu \leqslant N+1$ компонент, где $N := \operatorname{mes}\mathbb{Z}_{\mathfrak{J}} = N(R, U)$. Занумеруем эти компоненты по возрастанию и обозначим через $n_1 < n_2 < \dots < n_{2\nu}$ их крайние точки. Таким образом, множество $\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$ теперь записано в виде $\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}} = (-\infty, n_1] \sqcup [n_2, n_3] \sqcup \dots \sqcup [n_{2\nu}, +\infty)$. Выберем произвольное число $b > \alpha_0$ и для каждого $n \in \mathbb{Z}$ обозначим через $\gamma_{n,b}^{\pm}$ часть контура $\gamma_n^{\pm}$, расположенную в полосе $\{|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant b\}$. Теперь рассмотрим контур $\Gamma_b = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\nu} \Gamma_{j,b}$, где $\Gamma_{j,b} = \gamma_{n_{2j-1},b}^{+} \cup [\operatorname{Re}\lambda_{n_{2j-1}}^0 - ib, \operatorname{Re}\lambda_{n_{2j}}^0 - ib] \cup \gamma_{n_{2j},b}^{-} \cup [\operatorname{Re}\lambda_{n_{2j}}^0 + ib, \operatorname{Re}\lambda_{n_{2j-1}}^0 + ib]$.

Лемма 3.5. *Контур Γ_b охватывает все иррегулярные собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ и не содержит ни одного регулярного собственного значения. Таким образом, оператор $\mathcal{P}_{\mathfrak{R}} := I - \mathcal{P}_{\mathfrak{J}}$, где $\mathcal{P}_{\mathfrak{J}} := \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_b} \mathcal{R}(\lambda)\,d\lambda$, является спектральным проектором на подпространство $\mathcal{H}_{\mathfrak{R}}$.*

Доказательство. По построению, контур Γ_b действительно не содержит ни одного регулярного собственного значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$, так что нам остается проследить за иррегулярными λ_n. Для этого мы рассмотрим семейство потенциалов $P_t(x) = tP(x)$, $t \in [0,1]$, и обозначим $\mathcal{L}_t = \mathcal{L}_{P_t,U}$, $\mathcal{R}_t(\lambda) = (\mathcal{L}_t - \lambda I)^{-1}$ и $\mathcal{P}_{\mathfrak{J},t} = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_b} \mathcal{R}_t(\lambda)\,d\lambda$. Непосредственно из определения имеем $\Upsilon(tP;\lambda) = t\Upsilon(P;\lambda)$, а значит, любой регулярный для потенциала P контур γ_n остается регулярным и для потенциала tP. Таким образом, проектор $\mathcal{P}_{\mathfrak{J},t}$ корректно определен для любого $t \in [0,1]$. Теперь воспользуемся утверждением о непрерывной зависимости резольвенты от потенциала (см. [16, теорема 4.6]). А именно, для любой фиксированной точки $t \in [0,1]$, для любого $\varepsilon > 0$, найдется такая δ-окрестность точки t, что для любого s из этой окрестности выполнено $\sup\limits_{\lambda\in\Gamma_b} \|\mathcal{R}_t(\lambda) - \mathcal{R}_s(\lambda)\| < \varepsilon$. Тогда семейство операторов $\mathcal{P}_{\mathfrak{J},t}$ непрерывно по $t \in [0,1]$ в операторной норме. Остается заметить, что контур Γ_b содержит все точки λ_n^0 спектра оператора $\mathcal{L}_0$ с номерами $n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{J}}$ и не содержит ни одной точки с номером $n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$. Таким образом, $\dim \mathcal{P}_{\mathfrak{J},0} = \operatorname{mes}\mathbb{Z}_{\mathfrak{J}}$. В силу непрерывной зависимости (см. [3, лемма 4.10, гл. 1]), ту же размерность имеет и проектор $\mathcal{P}_{\mathfrak{J}}$. □

Оценка $\|\mathcal{R}(\lambda)\| \leqslant 2C(U)|\operatorname{Im}\lambda|^{-1}$ на норму резольвенты, приведенная в утверждении 2.3, позволяет осуществить предельный переход $\mathcal{P}_{\mathfrak{J}} = \lim\limits_{b\to+\infty} \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_b} \mathcal{R}(\lambda)\,d\lambda = \int\limits_{\Gamma} \mathcal{R}(\lambda)\,d\lambda$, где $\Gamma = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\nu} \Gamma_j$, а $\Gamma_j = \gamma_{n_{2j-1}}^{+} \cup \gamma_{n_{2j}}^{-}$. Следующее утверждение о равномерной ограниченности нормы проекторов $\mathcal{P}_{\mathfrak{J}}$ и $\mathcal{P}_{\mathfrak{R}}$ является ключевым для доказательства теоремы 1.1.

Утверждение 3.1. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — сильно регулярный оператор Дирака с внедиагональным потенциалом $P \in L_{\varkappa}[0,\pi]$, $\varkappa > 1$, $\|P\|_{L_{\varkappa}} \leqslant R$. Тогда $\|\mathcal{P}_{\mathfrak{J}}\| + \|\mathcal{P}_{\mathfrak{R}}\| \leqslant C(R, U)$.*

Доказательство. В силу леммы 3.4 имеет место $\|\mathcal{P}_{\mathfrak{J}}\| \leqslant \dfrac{1}{2\pi}\sum\limits_{j=1}^{2\nu} \left\| \int\limits_{\gamma_{n_j}^{\pm}} \mathcal{R}(\lambda)\,d\lambda \right\| \leqslant \dfrac{\nu}{\pi} C(R,U)$. Остается заметить, что $\nu \leqslant N+1$, где $N = \operatorname{mes}\mathbb{Z}_{\mathfrak{J}} = N(R,U)$, согласно следствию 3.1. □

Мы определили функции $\mathbf{y}_n$ только для $n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$. Действуя классическим методом выбора максимальных цепочек присоединенных функций, можно определить функции $\mathbf{y}_n$ для всех собственных значений λ_n, $n \in \mathbb{Z}$. Как доказано в [16, теорема 4.9], эта система является базисом Рисса для любого сильно регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ с потенциалом $P \in L_1$. Однако утверждение о равномерной базисности такой системы неверно. Поэтому в подпространстве $\mathcal{H}_{\mathfrak{J}} := \mathrm{Rn}\,\mathcal{P}_{\mathfrak{J}}$ мы (произвольным образом) выберем ортонормированный базис $\{\widetilde{\mathbf{y}}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\mathfrak{J}}}$. Полученную систему $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}} \cup \{\widetilde{\mathbf{y}}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\mathfrak{J}}}$ будем называть системой корневых функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Конечно, замена линейного базиса на конечномерном подпространстве $\mathcal{H}_{\mathfrak{J}}$ не нарушает свойства базисности Рисса системы. Наша цель сейчас — описать биортогональную к $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}} \cup \{\widetilde{\mathbf{y}}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\mathfrak{J}}}$ систему. Для этого напомним (см. [6, утв. 3.2]), что сопряженный оператор $(\mathcal{L}_{P,U})^*$ совпадает с оператором $\mathcal{L}_{P^*,U^*}$, где $P^*(x) = \begin{pmatrix} 0 & \overline{p_3}(x) \\ \overline{p_2}(x) & 0 \end{pmatrix}$, а сопряженные краевые условия U^* задаются матрицей $\mathcal{U}^* = \begin{pmatrix} \overline{J_{23}} & \overline{J_{13}} & -\overline{J_{12}} & 0 \\ 0 & -\overline{J_{34}} & \overline{J_{24}} & \overline{J_{23}} \end{pmatrix}$ (выбор матрицы, задающей сопряженные краевые условия, неоднозначен, но для определенности мы фиксируем здесь выбор $\mathcal{U}^*$).

Замечание 3.1. Заметим, что множества $\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$, построенные по операторам $\mathcal{L}_{P,U}$ и $(\mathcal{L}_{P,U})^*$ совпадают. Действительно, для любого регулярного (сильно регулярного) оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ сопряженный оператор $(\mathcal{L}_{P,U})^* = \mathcal{L}_{P^*,U^*}$ также является регулярным (сильно регулярным). Собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P^*,U^*}$ совпадают (с учетом кратности) с числами $\overline{\lambda}_n$. Поскольку $\upsilon_{2,\pm}(P^*;x,\lambda) = \overline{\upsilon_{3,\mp}(P;x,\overline{\lambda})}$ и $\upsilon_{3,\pm}(P^*;x,\lambda) = \overline{\upsilon_{2,\mp}(P;x,\overline{\lambda})}$, то $\Upsilon(P^*;\lambda) = \Upsilon(P;\overline{\lambda})$. Поскольку резольвента сопряженного оператора равна $\mathcal{R}^*(\overline{\lambda})$, то проектор Рисса, построенный по множеству регулярных (иррегулярных) собственных значений оператора $(\mathcal{L}_{P,U})^*$ равен $\mathcal{P}_{\mathfrak{R}}{}^*$ (соответственно, $\mathcal{P}_{\mathfrak{J}}{}^*$). Таким образом регулярное и иррегулярное подпространства, построенные по оператору $(\mathcal{L}_{P,U})^*$ совпадают с $\mathcal{H}_{\mathfrak{J}}{}^{\perp}$ и $\mathcal{H}_{\mathfrak{R}}{}^{\perp}$, соответственно.

Зафиксируем теперь произвольный индекс $n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$ и рассмотрим спектральный проектор $\mathcal{P}_n := \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n} \mathcal{R}(\lambda)\,d\lambda$ (окружность $C_n = \{\lambda : |\lambda - \lambda_n^0| = d/4\}$ мы ориентируем против часовой стрелки). Поскольку внутри контура лежит ровно одно собственное значение λ_n оператора $\mathcal{L}_{P,U}$, то $\mathcal{P}_n$ — одномерный проектор вида $\mathcal{P}_n = (\cdot, \mathbf{z}_n)\mathbf{y}_n$. Очевидно, что $(\mathcal{L}_{P,U})^*\,\mathbf{z}_n = \overline{\lambda_n}\mathbf{z}_n$. При этом норма $\|\mathbf{z}_n\|$ может не равняться 1, хотя $1 \leqslant \|\mathbf{z}_n\| = \|\mathcal{P}_n\| \leqslant \dfrac{d}{4}\sup\limits_{\lambda\in C_n}\|\mathcal{R}(\lambda)\| \leqslant C(R,U)$.

Известно, что $(\mathbf{z}_n, \mathbf{y}_m) = \delta_{nm}$ (здесь $n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$, а $m \in \mathbb{Z}$), так что мы в результате предъявили часть биортогональной системы к $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}} \cup \{\widetilde{\mathbf{y}}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\mathfrak{J}}}$.

Мы готовы определить оператор T смены базиса, оценка на норму которого вместе с оценкой норму $\|T^{-1}\|$ составляет утверждение основной теоремы. Выберем произвольный ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в пространстве $\mathbb{H}$ и положим $\mathrm{E}_{\mathfrak{J}} = \mathrm{Lin}\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\mathfrak{J}}}$ и $\mathrm{E}_{\mathfrak{R}} = \overline{\mathrm{Lin}\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}}}$. Операторы ортогонального проектирования на $\mathrm{E}_{\mathfrak{J}}$ и $\mathrm{E}_{\mathfrak{R}}$ обозначим $Q_{\mathfrak{J}}$ и $Q_{\mathfrak{R}}$ соответственно. Выберем в пространстве $\mathcal{H}_{\mathfrak{J}}$ произвольный ортонормированный базис $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\mathfrak{J}}}$ и определим операторы $T_{\mathfrak{R}} : \mathbf{e}_n \mapsto \mathbf{y}_n$ для всех $n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$ и $T_{\mathfrak{J}} : \mathbf{e}_n \mapsto \varphi_n$ для $n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{J}}$. Система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}}$ составляет базис Рисса в замыкании своей линейной оболочки, а система $\{\widetilde{\mathbf{y}}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\mathfrak{J}}}$ конечна, так что оба оператора $T_{\mathfrak{R}}$ и $T_{\mathfrak{J}}$ по непрерывности продолжаются на подпространства $\mathrm{E}_{\mathfrak{R}}$ и $\mathrm{E}_{\mathfrak{J}}$ соответственно. Положим $T := T_{\mathfrak{R}}Q_{\mathfrak{R}} + T_{\mathfrak{J}}Q_{\mathfrak{J}}$. Легко видеть, что $T^{-1} = T_{\mathfrak{R}}^{-1}\mathcal{P}_{\mathfrak{R}} + T_{\mathfrak{J}}^{-1}\mathcal{P}_{\mathfrak{J}}$. Важно отметить, что в силу утверждения 3.1 выполнено $\|T\| \leqslant \|T_{\mathfrak{R}}\| + 1$, $\|T^{-1}\| \leqslant \|T_{\mathfrak{R}}^{-1}\|\|\mathcal{P}_{\mathfrak{R}}\| + \|\mathcal{P}_{\mathfrak{J}}\| \leqslant C(R,U)\|T_{\mathfrak{R}}^{-1}\|$. Итак, для доказательства теоремы 1.1 нам достаточно получить оценку $\|T_{\mathfrak{R}}\| + \|T_{\mathfrak{R}}^{-1}\| \leqslant C(R,U)$.

По определению, $T_{\mathfrak{R}}^* : \mathcal{H}_{\mathfrak{J}}{}^{\perp} \to \mathrm{E}_{\mathfrak{R}}$, $T_{\mathfrak{R}}^*\mathbf{z}_n = \mathbf{e}_n$, $n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$, и $\|(T_{\mathfrak{R}}^*)x\|^2 = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}} |(x, \mathbf{y}_n)\|^2$, так что оценка нормы $\|T_{\mathfrak{R}}\|$ сводится к оценке константы Бесселя системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}}$. Аналогично, $T_{\mathfrak{R}}^{-1} : \mathcal{H}_{\mathfrak{R}} \to \mathrm{E}_{\mathfrak{R}}$, $T_{\mathfrak{R}}\mathbf{y}_n = \mathbf{e}_n$, $n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$, и $\|T_{\mathfrak{R}}^{-1}x\|^2 = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}} |(x, \mathbf{z}_n)\|^2$. Перейдем к нормированным векторам $\mathbf{z}_n/\|\mathbf{z}_n\|$ и учтем, что $\|\mathbf{z}_n\| \leqslant C(R,U)$. Теперь заметим, что векторы $\mathbf{z}_n/\|\mathbf{z}_n\|$ суть нормированные собственные векторы оператора $\mathcal{L}_{P^*,U^*}$, отвечающие регулярным его собственным значениям, а значит, оценка для этой системы повторяет оценку для системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}}$.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы 1.1 нам остается получить оценку вида

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\mathcal{R}}} |(x,\mathbf{y}_n)\|^2 \leqslant \beta(R,U)\|x\|^2 \tag{3.5}$$

для произвольного вектора $x\in\mathbb{H}$. Мы начнем с двух вспомогательных утверждений.

Утверждение 3.2. *Пусть $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\mathcal{R}}}$ — последовательность регулярных собственных значений оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ с внедиагональным потенциалом $P\in L_\varkappa$, $\varkappa>1$, $\|P\|_{L_\varkappa}\leqslant R$, и сильно регулярными краевыми условиями U. Тогда найдется константа $\beta=\beta(R,U)$ такая, что $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}_{\mathcal{R}}}\left\|\int\limits_0^\pi f(x)e^{i\lambda_n x}dx\right\|^2\leqslant\beta\|f\|^2_{L_2}$ для произвольной функции $f\in L_2$.*

Доказательство. Рассмотрим преобразование Фурье $\hat{f}(\lambda)=\int\limits_0^\pi f(x)e^{i\lambda x}dx$. Согласно теореме Пэли—Винера, $\hat{f}\in H^2(\Pi_\alpha)$ и $\|\hat{f}\|_{H^2}\leqslant C_{abs}\|f\|_{L_2}$. Рассмотрим точечную меру $d\mu=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}_{\mathcal{R}}}\delta_{\lambda_n}$. Поскольку для любых двух регулярных собственных значений

$$|\lambda_n-\lambda_m|\geqslant|\lambda_n^0-\lambda_m^0|-|\lambda_n-\lambda_n^0|-|\lambda_m-\lambda_m^0|\geqslant d-\frac{d}{4}-\frac{d}{4}=\frac{d}{2},$$

то последовательность $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\mathcal{R}}}$ — несгущающаяся. Тогда $d\mu$ является карлесоновой мерой (более того, легко видеть, что $\gamma_\mu\leqslant(16\alpha_0^2)/(\pi d^2)$, т. е. зависит только от R и U). Отсюда

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\mathcal{R}}}\left\|\int_0^\pi f(x)e^{i\lambda_n x}dx\right\|^2=\|\hat{f}\|^2_{L_2(d\mu)}\leqslant\beta(R,U)\|f\|^2_{L_2}.$$

□

Лемма 3.6. *Пусть система $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ является бесселевой в пространстве $L_2[a,b]$ и $\sum\limits_{n=1}^\infty|(f,\varphi_n)|^2\leqslant\beta\|f\|^2_{L_2}$. Пусть $\{\tau_n(x)\}_1^\infty$ — абсолютно непрерывные на $[a,b]$ функции, причем $|\tau_n(a)|\leqslant T$, $|\tau_n'(x)|\leqslant\tau(x)\in L_1[a,b]$, $n=1,2,\dots$, где число T и функция τ не зависят от n.*

Тогда система $\{\varphi_n(x)\tau_n(x)\}_1^\infty$ также является бесселевой в пространстве $L_2[a,b]$, причем $\sum\limits_{n=1}^\infty|(f,\varphi_n\tau_n)|^2\leqslant 2\beta(T^2+\|\tau\|^2_{L_1})\|f\|^2_{L_2}$.

Доказательство. Для каждого конечного N имеем

$$\sum_{n=1}^N|(f,\varphi_n\tau_n)|^2\leqslant 2\sum_{n=1}^N|(f,\varphi_n(x)\tau_n(a))|^2+2\sum_{n=1}^N|(f,\varphi_n(x)(\tau_n(x)-\tau_n(a)))|^2\leqslant$$

$$\leqslant 2\beta T^2\|f\|^2_{L_2}+2\sum_{n=1}^N\left|\int_a^b f(x)\overline{\varphi}_n(x)\int_a^x\overline{\tau}_n'(\xi)\,d\xi\,dx\cdot\int_a^b\overline{f}(y)\varphi_n(y)\int_a^y\tau_n'(\zeta)\,d\zeta\,dy\right|.$$

Распишем последнюю сумму подробнее.

$$\sum_{n=1}^N\left|\int_a^b\int_a^b\overline{\tau}_n'(\xi)\tau_n'(\zeta)\left(\int_\xi^b f(x)\overline{\varphi}_n(x)\,dx\int_\zeta^b\overline{f}(y)\varphi_n(y)\,dy\right)d\xi\,d\zeta\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_a^b\int_a^b\tau(\xi)\tau(\zeta)\sum_{n=1}^N\left|(f\chi_{[\xi,b]},\varphi_n)\right|\left|(\varphi_n,f\chi_{[\zeta,b]})\right|\,d\xi\,d\zeta\leqslant$$

$$\leqslant\beta\int_a^b\int_a^b\tau(\xi)\tau(\zeta)\cdot\|f\chi_{[\xi,b]}\|\cdot\|f\chi_{[\zeta,b]}\|\,d\xi\,d\zeta\leqslant\beta\int_a^b\int_a^b\tau(\xi)\tau(\zeta)\,d\xi\,d\zeta\cdot\|f\|^2.$$

Устремив $N\to\infty$, получаем утверждение леммы. □

Сформулируем теперь утверждение о функциях $\mathbf{y}_n$.

Утверждение 3.3 (см. [9, теорема 4]). *Пусть* $\mathcal{L}_{P,U}$ — *сильно регулярный оператор Дирака, причем потенциал* $P \in \mathcal{L}_1$ *имеет вид* (2.1), $\|P\|_{L_1} < R$.

Тогда для всех собственных значений $\lambda_n \in \mathcal{D}$, *где* $\mathcal{D} = \{\lambda \in \Pi_\alpha : \Upsilon(\lambda) \leqslant \kappa\}$, $\kappa = \kappa(R, U)$, *для нормированных собственных функций* $\mathbf{y}_n$ *справедливо представление*: $y_{1,n}(x) = e^{i\lambda_n x}\tau_{1,n}(x)$, $y_{2,n}(x) = e^{-i\lambda_n x}\tau_{2,n}(x)$, *причем* $|\tau_{j,n}(0)| \leqslant C = C(R, U)$, $j = 1, 2$, *а производные функций* $\tau_{j,n}(x)$ *подчинены оценке* $|\tau'_{j,n}(x)| \leqslant C(R, U)(|p_2(x)| + |p_3(x)|)$ *почти всюду на* $[0, \pi] \ni x$.

Вспомним, что для любого $n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$ неравенство $\Upsilon(\lambda) \leqslant \kappa$ выполнено не только на γ_n, но и для всех точек круга $|\lambda - \lambda_n^0| \leqslant d/4$, в частности, для точек λ_n. Соединяя вместе утверждения 3.2, 3.3 и лемму 3.6, выводим оценку (3.5). Теорема 1.1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. — М.: Мир, 1984.
2. *Гринив Р. О.* Равномерно ограниченные семейства базисов Рисса из экспонент, синусов и косинусов// Мат. заметки. — 2010. — *87*, № 4. — С. 542–553.
3. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
4. *Савчук А. М., Садовничая И. В.* Асимптотические формулы для фундаментальных решений системы Дирака с комплекснозначным суммируемым потенциалом// Дифф. уравн. — 2013. — *49*, № 1. — С. 573–584.
5. *Савчук А. М., Садовничая И. В.* Базисность Рисса из подпространств для системы Дирака с суммируемым потенциалом// Докл. РАН. — 2015. — *462*, № 3. — С. 274–277.
6. *Савчук А. М., Садовничая И. В.* Базисность Рисса со скобками для системы Дирака с суммируемым потенциалом// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *58*. — С. 128–152.
7. *Савчук А. М., Садовничая И. В.* Оценки констант Рисса для системы с суммируемым потенциалом// Дифф. уравн. — 2018. — принято к печати.
8. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Равномерная устойчивость обратной задачи Штурма—Лиувилля по спектральной функции в шкале соболевских пространств// Тр. МИАН. — 2013. — *283*. — С. 188–203.
9. *Садовничая И. В.* Равномерные асимптотики собственных значений и собственных функций системы Дирака с суммируемым потенциалом// Дифф. уравн. — 2016. — *52*, № 8. — С. 1039–1049.
10. *Садовничая И. В.* Равносходимость спектральных разложений для системы Дирака с потенциалом из пространств Лебега// Тр. МИАН. — 2016. — *293*. — С. 296–324.
11. *Седлецкий А. М.* Негармонический анализ// Итоги науки и техн. Сер. мат. и ее прилож. — 2006. — *96*. — С. 106–211.
12. *Avdonin S. A., Ivanov S. A.* Families of exponentials. The method of moments in controllability problems for distributed parameter systems. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
13. *Djakov P., Mityagin B.* Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions// Indiana Univ. Math. J. — 2012. — *61*, № 1. — С. 359–398.
14. *Hryniv R. O.* Analyticity and uniform stability of the inverse singular Sturm—Liouville spectral problem// Inverse Problems. — 2011. — *27*. — С. 1–25.
15. *Lunyov A. A., Malamud M. M.* On the Riesz basis property of root vectors system for 2×2 Dirac type operators// J. Math. Anal. Appl. — 2016. — *441*. — С. 57–103.
16. *Savchuk A. M., Shkalikov A. A.* The Dirac operator with complex-valued summable potential// Math. Notes. — 2014. — *96*, № 5. — С. 3–36.
17. *Young R. M.* An introduction to nonharmonic Fourier series. — San Diego: Acad. Press, 2001.

А. М. Савчук
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1
E-mail: artem_savchuk@mail.ru

И. В. Садовничая
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1
E-mail: ivsad@yandex.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-180-193 UDC 517.984.52

Uniform Basis Property of the System of Root Vectors of the Dirac Operator

© 2018 **A. M. Savchuk, I. V. Sadovnichaya**

Abstract. We study one-dimensional Dirac operator $\mathcal{L}$ on the segment $[0,\pi]$ with regular in the sense of Birkhoff boundary conditions U and complex-valued summable potential $P=(p_{ij}(x))$, $i, j=1, 2$. We prove uniform estimates for the Riesz constants of systems of root functions of a strongly regular operator $\mathcal{L}$ assuming that boundary-value conditions U and the number $\int\limits_0^\pi (p_1(x)-p_4(x))\,dx$ are fixed and the potential P takes values from the ball $B(0,R)$ of radius R in the space $L_\varkappa$ for $\varkappa>1$. Moreover, we can choose the system of root functions so that it consists of eigenfunctions of the operator $\mathcal{L}$ except for a finite number of root vectors that can be uniformly estimated over the ball $\|P\|_\varkappa \leqslant R$.

REFERENCES

1. J. Garnett, *Ogranichennye analiticheskie funktsii* [Bounded Analytic Functions], Mir, Moscow, 1984 (Russian translation).
2. R. O. Griniv, “Ravnomerno ogranichennye semeystva bazisov Rissa iz eksponent, sinusov i kosinusov” [Uniformly bounded families of Riesz bases consisting of exponents, sinuses, and cosines], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2010, **87**, No. 4, 542–553 (in Russian).
3. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
4. A. M. Savchuk and I. V. Sadovnichaya, “Asimptoticheskie formuly dlya fundamental'nykh resheniy sistemy Diraka s kompleksnoznachnym summiruemym potentsialom” [Asymptotical formulas for fundamental solutions of the Dirac system with complex-valued summable potential], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2013, **49**, No. 1, 573–584 (in Russian).
5. A. M. Savchuk and I. V. Sadovnichaya, “Bazisnost' Rissa iz podprostranstv dlya sistemy Diraka s summiruemym potentsialom” [Riesz basis property from subspaces for the Dirac system with summable potential], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2015, **462**, No. 3, 274–277 (in Russian).
6. A. M. Savchuk and I. V. Sadovnichaya, “Bazisnost' Rissa so skobkami dlya sistemy Diraka s summiruemym potentsialom” [The Riesz basis property with brackets for Dirac systems with summable potentials], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **58**, 128–152 (in Russian).
7. A. M. Savchuk and I. V. Sadovnichaya, “Otsenki konstant Rissa dlya sistemy s summiruemym potentsialom” [Estimates of the Riesz constants for a system with summable potential], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2018, to be published (in Russian).
8. A. M. Savchuk and A. A. Shkalikov, “Ravnomernaya ustoychivost' obratnoy zadachi Shturma—Liuvillya po spektral'noy funktsii v shkale sobolevskikh prostranstv” [Uniform stability of the inverse Sturm–Liouville problem with respect to a spectral functions in the scale of Sobolev spaces], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2013, **283**, 188–203 (in Russian).
9. I. V. Sadovnichaya, “Ravnomernye asimptotiki sobstvennykh znacheniy i sobstvennykh funktsiy sistemy Diraka s summiruemym potentsialom” [Uniform asymptotics of eigenvalues and eigenfunctions of a Dirac system with summable potential], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2016, **52**, No. 8, 1039–1049 (in Russian).
10. I. V. Sadovnichaya, “Ravnoskhodimost' spektral'nykh razlozheniy dlya sistemy Diraka s potentsialom iz prostranstv Lebega” [Equiconvergence of spectral expansions for a Dirac system with potential from Lebesgue spaces], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2016, **293**, 296–324 (in Russian).
11. A. M. Sedletskiy, “Negarmonicheskiy analiz” [Nonharmonic analysis], *Itogi nauki i tekhn. Ser. mat. i ee prilozh.* [Totals Sci. Tech. Ser. Math. Appl.], 2006, **96**, 106–211 (in Russian).
12. S. A. Avdonin and S. A. Ivanov, *Families of Exponentials. The Method of Moments in Controllability Problems for Distributed Parameter Systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
13. P. Djakov and B. Mityagin, “Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions,” *Indiana Univ. Math. J.*, 2012, **61**, No. 1, 359–398.
14. R. O. Hryniv, “Analyticity and uniform stability of the inverse singular Sturm—Liouville spectral problem,” *Inverse Problems.*, 2011, **27**, 1–25.

15. A. A. Lunyov and M. M. Malamud, "On the Riesz basis property of root vectors system for 2×2 Dirac type operators," *J. Math. Anal. Appl.*, 2016, **441**, 57–103.
16. A. M. Savchuk and A. A. Shkalikov, "The Dirac operator with complex-valued summable potential," *Math. Notes.* , 2014, **96**, No. 5, 3–36.
17. R. M. Young, *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*, Acad. Press, San Diego, 2001.

A. M. Savchuk
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: artem_savchuk@mail.ru

I. V. Sadovnichaya
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: ivsad@yandex.ru