Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 1 (2018). С. 148–163

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-148-163 УДК 517.957

ОГРАНИЧЕННОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ НА КОНЕЧНЫХ ИНТЕРВАЛАХ ДЛЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ДВАЖДЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ, ПОРОЖДЕННЫХ ЗАДАЧЕЙ МИКРОВОЛНОВОГО НАГРЕВА

© 2018 г. **С. ПОПОВ, Ф. РАЙТМАНН, С. СКОПИНОВ**

Аннотация. Рассматриваются дважды нелинейные эволюционные системы. Получены достаточные условия ограниченности их решений. Аналогичные результаты получены для одномерной задачи микроволнового нагрева. Вводятся понятия глобального процесса и локального многозначного процесса. Для глобального процесса и локального многозначного процесса представлены достаточные условия устойчивости на конечном интервале времени. Для локальных многозначных процессов найдены достаточные условия неустойчивости на конечном интервале времени. Для одномерной задачи микроволнового нагрева представлены условия устойчивости на конечном интервале времени.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Задача микроволнового нагрева без изменения фазы изучалась в [12,22] и других работах. Для случая, когда изменение фазы имеет место, пространственно-одномерный микроволновой процесс изучался в [6, 16, 23]. Существование глобального решения (но не единственность) установлено в [16]. Асимптотическое поведение решений задачи микроволнового нагрева исследовалось в [6, 13]. В работе [2] получен ряд результатов, касающихся теории коциклов, порождаемых задачей микроволнового нагрева. Для исследования ограниченности и устойчивости решений общих нелинейных операторных уравнений хорошо разработаны методы частотной области (см. [3,4,20]). В рамках этого подхода нелинейности описываются квадратичными формами в гильбертовых пространствах. Используя эти формы и оператор переноса линейной части системы, можно сформулировать достаточные условия существования функционалов Ляпунова, гарантирующих ограниченность или устойчивость решений.

Чтобы описать задачу микроволнового нагрева с изменением фазы и граничным контролем, можно использовать оператор энтальпии параболической части системы. Это означает, что, кроме нелинейных членов из правой части уравнения, возникающих в силу закона Джоуля, у нас есть и второй нелинейный член. Полученную в результате задачу можно рассматривать как неавтономное дважды нелинейное уравнение (см. [10, 17, 18]). Особые свойства оператора энтальпии (равенство нулю площади стыка) позволяют использовать результаты [11] о существовании слабых решений; эти результаты основаны не на многозначных операторных уравнениях, а на интегральных тождествах. Единственность решений остается открытым вопросом. Таким образом, из решений системы невозможно построить коциклы процессов (подобно тому, как это сделано в [2, 13]). Вместо этого можно использовать понятия локального или глобального многозначного процессов (см. [8,14,23]). В случае локального процесса устойчивость или неустойчивость движений невозможно рассматривать на бесконечных интервалах времени. Поэтому приходится использовать некоторые элементы теории устойчивости на конечных интервалах времени (см. [7,21]).

Настоящая работа состоит из двух частей. В первой рассматриваются дважды нелинейные эволюционные уравнения с нелинейностями в правой и левой части. Для таких уравнений находятся достаточные условия ограниченности решений. Кроме того, эти результаты проверяются на одномерной задаче микроволнового нагрева. Во второй части работы вводятся элементы теории глобальных процессов и локальных многозначных процессов. Кроме того, для таких процессов вводится понятие устойчивости на конечном интервале времени, а для локальных многозначных процессов — еще и понятие неустойчивости на конечном интервале времени; для последнего свойства находятся достаточные условия наличия. Для одномерной задачи микроволнового нагрева рассматриваются функционалы, используемые для исследования устойчивости на конечном интервале времени.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Программы поддержки ведущих научных школ РФ на 2018-2019 гг. (грант № НШ-2858.2018.1) и DAAD.

2. Дважды нелинейные эволюционные системы

В этом разделе рассматриваются эволюционные уравнения системы из [10] с нелинейностями в левой и правой частях. Пусть $Y_{1,j}$ и $Y_{2,j}$, $j = 1, 0, -1,$ — вещественные гильбертовы пространства, а $(\cdot,\cdot)_{i,j}$ и $\|\cdot\|_{i,j}$ — скалярные произведения и нормы в $Y_{i,j}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 0, -1$, соответственно.

Плотные непрерывные вложения $Y_{1,1} \subset Y_{1,0} \subset Y_{1,-1}$ и $Y_{2,1} \subset Y_{2,0} \subset Y_{2,-1}$ называются *оснащенными структурами* гильбертовых пространств.

Рассмотрим систему

$$\frac{d}{dt}y_1 = A_1y_1 + B_1(g_1(z_1) + g_2(z_1, z_2)),\ z_1 = C_1y_1, \tag{2.1}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbb{B}_2(y_2) = A_2y_2 + B_2\phi_2(z_1, z_2),\ z_2 = C_2y_2, \tag{2.2}$$

$$y_1(0) = y_{01}, y_2(0) = y_{02}, \tag{2.3}$$

где y_i из $Y_{i,1}$ — переменные фазового пространства, $A_i : Y_{i,1} \to Y_{i,-1}$, $B_i : \Xi_i \to Y_{i,-1}$, $C_i : Y_{i,1} \to Z_i$ — линейные ограниченные операторы, $\mathbb{B}_2 : Y_{2,1} \to Y_{2,1}$ — нелинейный оператор, $g_1 : Z_1 \to \Xi_1$, $g_2 : Z_1 \times Z_2 \to \Xi_1$, $\phi_2 : Z_1 \times Z_2 \to \Xi_2$ — нелинейные функции, Ξ_i и Z_i, $i = 1, 2,$ — гильбертовы пространства, отличные от исходного, y_{01} из $Y_{1,1}, y_{02}$ из $Y_{2,1}$ — начальные состояния. Такая система называется *дважды нелинейной эволюционной системой*.

Определим гильбертовы пространства $Y_1 = Y_{1,1} \times Y_{2,1}$, $Y_0 = Y_{1,0} \times Y_{2,0}, Y_{-1} = Y_{1,-1} \times Y_{2,-1}$ со скалярными произведениями $((y_1, w_1), (y_2, w_2))_j = (y_1, y_2)_{1,j} + (w_1, w_2)_{2,j}$, $j = 1, 0, -1$, где $y_1, y_2 \in Y_{1,j}$, $w_1, w_2 \in Y_{2,j}$, и соответствующими нормами. Пусть $(\cdot,\cdot)_{-1,1}$ — билинейная форма (образование двойственных пар) на $Y_{-1} \times Y_1$, совпадающая с $(\cdot,\cdot)_0$ на $Y_0 \times Y_1$ и удовлетворяющая неравенству $|(\eta, y)_{-1,1}| \leqslant \|\eta\|_{-1}\|y\|_1$ для всех η из Y_{-1} и всех y из Y_1.

Пусть $A := (A_1, A_2) : Y_1 \to Y_{-1}$, $B := (B_1, B_2) : \Xi_1 \times \Xi_2 \to Y_{-1}$ и $C := (C_1, C_2) : Y_1 \to Z_1 \times Z_2$ — линейные ограниченные операторы, $\mathbf{B} := (I, \mathbb{B}_2) : Y_1 \to Y_2$ — нелинейный оператор, а $\phi(\cdot,\cdot) := (g_1(\cdot) + g_2(\cdot,\cdot), \phi_2(\cdot,\cdot)) : Z_1 \times Z_2 \to \Xi_1 \times \Xi_2$ — нелинейная функция.

Тогда систему (2.1)–(2.3) можно преобразовать к виду

$$\frac{d}{dt}B(y) = Ay + B\phi(z),\ z = Cy, \tag{2.4}$$

$$y(0) = y_0, \tag{2.5}$$

где $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2)$, $y_0 = (y_{01}, y_{02})$.

Пусть T_1 и T_2 — произвольные элементы расширенной числовой оси, для которых $T_1 < T_2$. В пространстве $L^2(T_1, T_2; Y_j)$, $j = 1, 0, -1$, определим норму $\|y\|_{2,j} := \Big(\int\limits_{T_1}^{T_2} \|y(t)\|_j^2\, dt\Big)^{1/2}$.

Обозначим через $\mathcal{W}(T_1,T_2;Y_1,Y_{-1})$ такое пространство функций y, что $y \in L^2(T_1,T_2;Y_1)$ и $\dot{y} \in L^2(T_1,T_2;Y_{-1})$, а норма в этом пространстве определена следующим образом: $\|y\|_{\mathcal{W}(T_1,T_2;Y_1,Y_{-1})} := \left(\|y\|^2_{2,1} + \|\dot{y}\|^2_{2,-1}\right)^{1/2}$.

Определение 2.1. *Решением* задачи (2.4)-(2.5) называется функция y из $\mathcal{W}(T_1,T_2,Y_1,Y_{-1}) \cap C(T_1,T_2;Y_0)$, удовлетворяющая системе (2.4)-(2.5) в вариационном смысле, т. е., функция, для которой следующие соотношения выполняются для почти всех t из $[T_1,T_2]$:

$$\left(\frac{d}{dt}B(y(t)) - Ay(t) - B\phi(z(t)), \eta - y(t)\right)_{-1,1} = 0 \quad \forall \eta \in Y_1,$$
$$z(t) = Cy(t), y(0) = y_0.$$

Наложим следующие требования.

(A1) $Z_1 = \Xi_1 = \Xi_2 = \mathbb{R}$.

(A2) Существуют такие $\varkappa_1, \varkappa_2$, что $\varkappa_1 < \varkappa_2$ и функция $\tilde{\phi}_1(z_1,t) := g_1(z_1) + g_2(z_1, z_2(t))$, где $z_2(t) = C_2 y_2(t)$ и $y_2(t)$ — произвольные решения задачи (2.1)–(2.3), удовлетворяет следующему условию: $\varkappa_1 z_1^2 \leqslant \tilde{\phi}_1(z_1,t) z_1 \leqslant \varkappa_2 z_1^2 \; \forall z_1 \in \mathbb{R}, \, t \geqslant 0$.

(A3) Существует такое положительное $\varkappa_3$, что $(\mathbb{B}_2(y_2), A_2 y_2)_{2,1} \leqslant -\varkappa_3 \|y_2\|^2_{2,1}, \; \forall y_2 \in Y_{2,1}$.

(A4) Существует такое положительное $\varkappa_4$, что $(\mathbb{B}_2(y_2), B_2\tilde{\phi}_2(t,y_2))_{2,1} \leqslant \varkappa_4 \|y_2\|^2_{2,1} \; \forall y_2 \in Y_{2,1}, t \geqslant 0$, если $\tilde{\phi}_2(t,z_2) = \phi_2(z_1(t), z_2)$.

(A5) Система (2.1)–(2.3) имеет слабое глобальное решение при любом y_0 из $Y_{1,1} \times Y_{2,1}$ (для некоторых случаев условия существования таких решений можно найти в [15, 19]).

Следующие три требования связаны с теоремой Лихтарникова—Якубовича о частотных областях эволюционных уравнений (см. [4]). Здесь и далее оператор из $\mathcal{L}(Y_{-1}, Y_0)$, обратный к A, обозначается через A^*, т. е. $(Ay,\eta)_{-1,1} = (y, A^*\eta)_{-1,1} \; \forall y, \eta \in Y_1$.

(A6) Оператор A_1 системы (2.1) регулярен (см. [4]), т. е., для любого положительного T, любого y_{10} из $Y_{1,1}$, любого $\tilde{y}_{1T}$ из $Y_{1,1}$ и любого f_1 из $L^2(0,T;Y_{1,0})$ решения прямой задачи

$$\frac{d}{dt}y_1 = A_1 y_1 + f_1(t), \quad y_1(0) = y_{10}$$

и решения обратной задачи

$$\frac{d}{dt}\tilde{y}_1 = -A_1^*\tilde{y}_1 + f_1(t), \quad \tilde{y}_1(T) = \tilde{y}_{1T}$$

сильно непрерывны в норме пространства $Y_{1,1}$.

(A7) Пара (A_1, B_1) системы (2.1) L^2-управляема (см. [4]), т. е. для любого y_{10} из $Y_{1,0}$ существует такое управление ξ_1 из $L^2(0,T;Z_1)$, что задача

$$\frac{d}{dt}y_1 = A_1 y_1 + B_1\xi_1, \quad y_1(0) = y_{10}$$

имеет решение y_1 при любом положительном T.

(A8) *Передаточная функция* $\chi(s) = C_1(A_1 - sI_{Y_{1,1}})^{-1}B_1, \; s \in \rho(A_1)$, и эрмитова форма $\mathcal{F}(\xi_1, z_1) := \mathrm{Re}(\xi_1 - \varkappa_1 z_1)^*(\varkappa_2 z_1 - \xi_1), \; \xi_1 \in \mathbb{C}, z_1 \in \mathbb{C}$, удовлетворяют следующему условию частотной области: $\mathrm{Re}(\varkappa_1\chi(i\omega) + I_{\Xi_1})^*(\varkappa_2\chi(i\omega) + I_{\Xi_1}) \geqslant 0 \; \forall \omega \in \mathbb{R}$.

При выполнении указанных требований справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Если условия* (A1)–(A5) *и* (A6)–(A8) *выполняются при* $T_1 = 0$ *и при* $T_2 = +\infty$, *то решения системы* (2.1)–(2.3) *ограничены на полуоси* $(0,\infty)$.

Доказательство. Если условия (A2) и (A5) выполнены, то первая часть системы (2.1)–(2.3) принимает вид

$$\frac{d}{dt}y_1 = A_1 y_1 + B_1\tilde{\phi}_1(z_1,t), \quad z_1 = C_1 y_1, \tag{2.6}$$
$$y_1(0) = y_{01}. \tag{2.7}$$

Квадратичная форма $\mathcal{F}(\xi_1, z_1)$ из условия (A8) описывает нелинейность системы (2.6)-(2.7). В пространствах, описанных в условии (A1), эта форма является эрмитовой.

Из условий (A6)–(A8) следует, что в силу теоремы Лихтарникова—Якубовича (см. [4]) существуют такой оператор P из $\mathcal{L}(Y_{1,-1}, Y_{1,0}) \cap \mathcal{L}(Y_{1,0}, Y_{1,1})$ и такое положительное число δ, что $P = P^*$ и

$$2((A_1 + \lambda I)y_1 + B_1\xi_1, Py_1)_{1,1} + (\varkappa_2^{-1}\xi_1 - C_1 y_1)(\varkappa_1^{-1}\xi_1 - C_1 y_1) \leqslant \\ \leqslant -\delta(\|y_1\|_{1,1}^2 + |\xi_1|^2) \quad \forall y_1 \in Y_{1,1}, \xi_1 \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Подставляя $\xi_1 = 0$ в (2.8), получим следующее неравенство: $2((A_1 + \lambda I)y_1, Py_1)_{1,1} + (C_1 y_1)^2 \leqslant -\delta\|y_1\|_{1,1}^2 \ \ \forall y_1 \in Y_{1,1}$. Используя общую лемму Ляпунова (см. [9]), получаем, что существует такое разбиение $Y_{1,0} = Y_{1,0}^+ \oplus Y_{1,0}^-$, что $\dim Y_{1,0}^- = 1$ и выполняются неравенства $P_{|Y_{1,0}^+} \geqslant 0$, $P_{|Y_{1,0}^-} \leqslant 0$. Рассмотрим функцию Ляпунова $\Phi(y_1) = (y_1, Py_1)_{1,1}$. Ее производная в силу системы (2.1)-(2.3) равна $\dot{\Phi}(y_1(t)) = 2(Py_1(t), A_1 y_1(t) + B_1\tilde{\phi}_1(y_1(t), t))_{1,1}$. Тогда из (2.8) и условия (A2) выводим, что, если y_1 — решение системы (2.6)-(2.7), то $\Phi(y_1(t))$ удовлетворяет неравенству $\dfrac{d}{dt}\Phi(y_1(t)) \leqslant 0$ для п. в. $t \geqslant t_0$. Отсюда следует, что для п. в. t из полуинтервала $[t_0, +\infty)$ справедливо двойное неравенство

$$\|y_1(t)\|_{1,1} \leqslant c_1\|y_{01}(t)\|_{1,1} + c_2 \leqslant c_3,$$

где коэффициенты c_1, c_2 зависят только от A_1, B_1, C_1, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$.

Теперь рассмотрим вторую часть системы (2.1)-(2.3), имеющую вид

$$\frac{d}{dt}(\mathbb{B}_2 y_2) = A_2 y_2 + B_2\tilde{\phi}_2(t, z_2), \quad z_2 = C_2 y_2, \\ y_2(0) = y_{02}.$$

Рассмотрим функционал Ляпунова $\Phi(y_2) = (\mathbb{B}_2 y_2, \mathbb{B}_2 y_2)_{2,1}$. Вычислим производную в силу системы от функции $y_2 = y_2(t)$:

$$\frac{d}{dt}\Phi(y_2) = (\mathbb{B}_2 y_2, \frac{d}{dt}\mathbb{B}_2 y_2)_{2,1} = (\mathbb{B}_2 y_2, A_2 y_2 + B_2\tilde{\phi}_2(t, z_2))_{2,1} = \\ = (\mathbb{B}_2 y_2, A_2 y_2)_{2,1} + (\mathbb{B}_2 y_2, B_2\tilde{\phi}_2(t, z_2))_{2,1} \text{ для п. в. } t \geqslant t_0.$$

Из условий (A3)-(A4) следует, что $\dfrac{d}{dt}\Phi(y_2(t)) < 0$ для п. в. t из полуинтервала $[t_0, +\infty)$, что дает ограниченность $\|y_2(t)\|_{2,1}$. □

Замечание 2.1. При некоторых дополнительных условиях на эволюционное уравнение (2.4)-(2.5) оно генерирует полудинамическую систему $\{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ в фазовом пространстве Y_0, т. е. семейство отображений $\{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, обладающее следующими свойствами:

- $\varphi^0 = \mathrm{Id}_{Y_0}$ есть тождественный оператор на Y_0;
- $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$ для всех s и t из $\mathbb{R}_+$.

Используя ограниченность траекторий этой полудинамической системы, можно показать, что ω-предельное множество непусто. Этот факт можно использовать для построения аттрактора системы (2.4)-(2.5).

3. Двухфазная задача микроволнового нагрева

В настоящем разделе рассматривается задача микроволнового нагрева с изменением фазы. Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^3$, граница которой $\partial\Omega$ принадлежит классу C^1.

Рассмотрим задачу микроволнового нагрева

$$\begin{cases} \varepsilon(x)E_t(x,t) + \sigma(\theta)E(x,t) = \operatorname{curl} H(x,t), & (x,t) \in Q_T, \\ \mu(x)H_t(x,t) + \operatorname{curl} E(x,t) = 0, & (x,t) \in Q_T, \\ b(\theta(x,t))_t = \nabla[k(x)\nabla\theta(x,t)] + \sigma(\theta)|E(x,t)|^2, & (x,t) \in Q_T, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $T \in \mathbb{R}_+$, $Q_T = \Omega \times [0, T)$, $E(x,t)$ и $H(x,t)$ — электрическое и магнитное поля соответственно, $\varepsilon(x)$, $\mu(x)$ и $\sigma(\theta)$ — диэлектрическая постоянная, магнитная проницаемость и электрическая проводимость, соответственно, $k(x)$ — теплопроводность, $\sigma(\theta)\|E(x,t)\|^2$ — джоулева теплота, $\widehat{\theta}$ — температура плавления,

$$b(s) = \begin{cases} s-1, & s < \widehat{\theta}, \\ [\widehat{\theta}-1,\, \widehat{\theta}], & s = \widehat{\theta}, \\ s, & s > \widehat{\theta}, \end{cases}$$

— оператор энтальпии. Положим $S_T = \partial\Omega \times [0,T)$. Начальные и краевые условия имеют вид

$$\begin{array}{ll} \nu(x) \times E(x,t) = \nu(x) \times G(x,t), & (x,t) \in S_T, \\ \theta(x,t) = 0, & (x,t) \in S_T, \\ E(x,0) = E_0(x), H(x,0) = H_0(x), \theta(x,0) = \theta_0(x), & x \in \Omega, \end{array} \tag{3.2}$$

где $\nu(x)$ — единичная внешняя нормаль на $\partial\Omega$, $G(x,t)$ — заданная внешняя вектор-функция на S_T, $E_0(x), H_0(x)$ и $\theta_0(x)$ — заданные функции. Пусть теперь $\Omega = (0,1)$, $E(x,t) = (0, e(x,t), 0)$, $H(x,t) = (0,0,h(x,t))$. Получим систему

$$\begin{cases} \varepsilon(x)e_t(x,t) + \sigma(\theta)e(x,t) = -h_x(x,t), & (x,t) \in (0,1) \times (0,T), \\ \mu(x)h_t(x,t) + e_x(x,t) = 0, & (x,t) \in (0,1) \times (0,T), \\ b(\theta(x,t))_t = k(x)\theta_{xx}(x,t) + \sigma(\theta)e^2(x,t), & (x,t) \in (0,1) \times (0,T). \end{cases} \tag{3.3}$$

Введем $w(x,t) = \int\limits_0^t e(x,\tau)d\tau$ и положим $\varepsilon(x) \equiv \mu(x) \equiv k(x) \equiv 1$. Тогда (3.3) принимает вид системы

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} + \sigma(\theta)w_t = 0, & (x,t) \in (0,1) \times (0,T), \\ b(\theta)_t - \theta_{xx} = \sigma(\theta)w_t^2, & (x,t) \in (0,1) \times (0,T), \end{cases} \tag{3.4}$$

с краевыми условиями $w(0,t) = 0$, $w(1,t) = 0$, $\theta_x(0,t) = \theta_x(1,t) = 0$, $t \in (0,T)$, и начальными условиями $w(x,0) = 0$, $w_t(x,0) = w_1(x)$, $\theta(x,0) = \theta_0(x)$, $x \in (0,1)$. Теперь введем понятие решения системы (3.3), основанное на интегральных тождествах.

Определение 3.1. Пара функций $(w(x,t), \theta(x,t))$ называется *слабым решением* системы (3.3) на интервале $[0,T]$, $T > 0$, если $w \in C^1(0,T;H_0^1(\Omega))$, $\theta \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C(0,T;L^2(\Omega))$ и уравнения

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^1 [-\varepsilon(x)w_t\psi_t + \frac{1}{\mu(x)}w_x\psi_x + \sigma(\theta)w_t]dxdt = \int\limits_0^1 \varepsilon(x)w_1(x)\psi(x,0)dx,$$

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^1 [-b(\theta)\eta_t + \theta_x\eta_x - \sigma(\theta)w_t^2\eta]dxdt = \int\limits_0^1 b(\theta_0)\eta(x,0),$$

обращаются в равенства на любых пробных функциях $\psi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C(0,T;L^2(\Omega))$ и $\eta \in H^1(0,T;H^1(\Omega))$, для которых $\psi(x,T) = \eta(x,T) = 0$ при любом x из Ω.

Чтобы обеспечить существование решений системы (3.3), сделаем следующие предположения.

(A9) Функция w_1 принадлежит $L^2(0,1)$, θ_0 неотрицательна и $\theta_0 \in L^2(0,1)$.

(A10) Существуют такие положительные постоянные σ_0, σ_1, что $\sigma_0 \leqslant \sigma(z) \leqslant \sigma_1$, $z \in [0,\infty)$.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1 (см. [16]). *Предположим, что условия* (A9)-(A10) *выполнены. Тогда при любом положительном* T *система* (3.4) *имеет слабое решение, для которого* $w \in C^1(0,T;H_0^1(0,1))$, $\theta \in L^2(0,T;H_0^1(0,1)) \cap C([0,T];L^2(0,1))$.

4. Ограниченность решений двухфазной задачи микроволнового нагрева

В этом разделе мы покажем, что решения системы (3.4) ограничены. Для этого наложим следующие требования.

(A11) Решения системы (3.4) $w \in \mathcal{W}(0,T,H_0^1(0,1),H_0^1(0,1))$, $\theta \in \mathcal{W}(0,T,H_0^2(0,1),H_0^2(0,1))$.

(A12) Существует такое положительное a_1, что $|b(z)| \leqslant a_1|z|$ $\forall z \in \mathbb{R}$, $z \neq \hat{\theta}$.

(A13) Существует такое положительное a_2, что $|\sigma(z)| \leqslant a_2|z|$ $\forall z \in \mathbb{R}$.

Покажем, что в этом случае все условия теоремы 2.1 выполнены, а значит, все решения системы (3.4) ограничены.

Рассмотрим первую подсистему нашей системы:

$$w_{tt} - w_{xx} + \sigma(\theta) w_t = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{4.1}$$

$$w(0,t) = w(1,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{4.2}$$

Будем использовать обозначения

$$y_1(x,t) = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(x,t) \\ w_t(x,t) \end{pmatrix}, \quad y_0(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_1(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar\sigma(\theta(x)) w_t(x,t) \end{pmatrix},$$

где положительная на положительной полуоси функция $\bar\sigma$ находится из разбиения $\sigma(\theta) = \sigma_0 + \bar\sigma(\theta)$, а σ_0 — положительная постоянная.

Пусть Λ — самосопряженный положительный оператор, порождаемый на $L^2(0,1)$ дифференциальным оператором $\Lambda v = -v_{xx}$ с однородными краевыми условиями Дирихле.

Рассмотрим пространства $Y_{1,0} = L^2(0,1) \times H_0^1(0,1)$ и $\Xi_1 = L^2(0,1) \times L^2(0,1)$. Предположим, что норма в $Y_{1,0}$ определена равенством $\|(v_1,v_2)\|_{1,0} = \max\limits_{i=1,2} \|v_i\|_{L^2(\Omega)}$, а $(\cdot,\cdot)_0$ — соответствующее скалярное произведение. Норму и скалярное произведение в Ξ_1 введем аналогично. Используя оператор Λ, можно определить оснащенную структуру гильбертова пространства $Y_{1,1} \subset Y_{1,0} \subset Y_{1,-1}$ следующим образом: $Y_{1,1} = \mathcal{D}(\Lambda) = H_0^1(0,1) \times H_0^2(0,1)$; при этом используется норма $\|\cdot\|_{1,1}$, порожденная скалярным произведением $(\eta_1,\eta_2)_{1,1} = (\Lambda^{-1}\eta_1, \Lambda^{-1}\eta_2)_{1,0}$ для произвольных η_1, η_2 из $\mathcal{D}(\Lambda)$.

Спаривание $(\cdot,\cdot)_{-1,1}$ вводится на $Y_{-1} \times Y_1$ как непрерывное сюръективное продолжение функционала $(\cdot,\eta)_0$ на Y_{-1}.

Теперь определим линейные операторы $A_1 : Y_{1,1} \to Y_{1,-1}$ и $B_1 : \Xi_1 \to Y_{1,-1}$ следующим образом:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\Lambda & -\sigma_0 I \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

Докажем, что пара (A_1, B_1) L^2-управляема. Для этого покажем, что спектр A_1 лежит в левой половине комплексной плоскости.

Рассмотрим следующую задачу на собственные значения:

$$A_1 v = \alpha v, \tag{4.3}$$

где $v = (v_1, v_2)^T$ — собственный вектор, а α — соответствующее собственное значение.

Уравнение (4.3) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} v_2 = \alpha v_1, \\ -\Lambda v_1 - \sigma_0 v_2 = \alpha v_2. \end{cases} \tag{4.4}$$

Рассмотрим представление $v_i = \sum\limits_k c_i^k e_k$, $i = 1,2$, где α_k — собственные значения оператора Λ, e_k — соответствующие собственные векторы, а c_i^k — некоторые коэффициенты. Тогда уравнение (4.4) эквивалентно системе

$$\sum_k c_2^k e_k = \alpha \sum_k c_1^k e_k, \tag{4.5}$$

$$-\sum_k \alpha_k c_1^k e_k - \sigma_0 \alpha \sum_k c_2^k e_k = \alpha \sum_k c_2^k e_k. \tag{4.6}$$

Из (4.5)-(4.6) следует, что при любом k справедливо равенство

$$\alpha^2 + \sigma_0 \alpha + \alpha_k = 0. \tag{4.7}$$

Очевидно, что любое α, удовлетворяющее уравнению (4.7), имеет отрицательную вещественную часть. Следовательно, пара (A_1, B_1) L^2-управляема.

Рассмотрим квадратичную форму $\mathcal{F}(y_1, \xi_1) = (y_1, \xi_1)_{\Xi_1} = \int\limits_\Omega y_1 \xi_1 dx = \int\limits_0^1 \bar\sigma(\theta) w_t^2 dx$. Теперь, согласно частотной теореме Лихтарникова—Якубовича для сингулярного случая (см. [4]), нужно проверить выполнение условия частотных областей. Предположим, что $\{\alpha_k\}$ — собственные значения оператора Λ, а $\{e_k\}$ — соответственные собственные функции, образующие базис в $L^2(0,1)$. Тогда $w_1(x,t)=\sum\limits_k w_1^k(t)e_k, \xi_1(x,t)=\sum\limits_k \xi_1^k(t)e_k$, где $w_1^k(t)$ и $\xi_1^k(t)$ — соответствующие коэффициенты Фурье.

Пусть $\mathcal{F}^c$ — эрмитово сюръективное расширение квадратичной формы $\mathcal{F}$ на $Y_{1,1}^c\times\Xi_1^c$. Рассмотрим $\mathcal{F}^c(y_1,\xi_1)$ при $i\omega y_1=A_1^c y_1+B_1^c\xi_1$, $\omega\in\mathbb{R}$, $\xi_1\in\Xi_1^c$, т. е. рассмотрим форму

$$\mathcal{F}^c(y_1,\xi_1)=(\Pi_0(i\omega)\xi_1,\xi_1). \tag{4.8}$$

Пусть $\tilde{w}_1^k$ и $\tilde{\xi}_1^k$ — преобразования Фурье от w_1^k и ξ_1^k, соответственно. Тогда из (4.8) следует, что

$$(\Pi_0(i\omega)\tilde{\xi}_1,\tilde{\xi}_1)=\sum_k(\Pi_0^k(i\omega)\tilde{\xi}_1^k,\tilde{\xi}_1^k). \tag{4.9}$$

Чтобы вычислить $\Pi_0(i\omega)$ при $\omega\in\mathbb{R}$, формально применим преобразование Фурье к (4.1). Получим уравнения

$$-\omega^2\tilde{w}_1^k(i\omega)+i\omega\sigma_0\tilde{w}_1^k(i\omega)-\alpha_k\tilde{w}_1^k(i\omega)+\tilde{\xi}_1^k(i\omega)=0,\quad k=1,2,\dots \tag{4.10}$$

Из (4.10), выводим, что $\tilde{w}_1^k(i\omega)=\chi(i\omega,\alpha_k)\tilde{\xi}_1^k(i\omega)$, где $\chi(i\omega,\alpha_k)=(\omega^2-i\omega\sigma_0+\alpha_k)^{-1}$. Из этой формулы и из (4.9) следует, что $(\Pi_0^k(i\omega)\tilde{\xi}_1^k,\tilde{\xi}_1^k)=\mathrm{Re}(\tilde{w}_1^k\tilde{\xi}_1^k)=\mathrm{Re}(i\omega\chi)|\tilde{\xi}_1^k(i\omega)|^2$. Таким образом, имеем представление $\Pi_0^k(i\omega)=\mathrm{Re}(i\omega\chi)$ и нам надо показать, что

$$\mathrm{Re}(i\omega\chi)\leqslant 0,\quad \omega\in\mathbb{R}. \tag{4.11}$$

Неравенство (4.11) означает, что $\mathrm{Re}\left(\dfrac{i\omega}{\omega^2-i\omega\sigma_0+\alpha_k}\right)=\mathrm{Re}\left(\dfrac{(\alpha_k\omega+\omega^3)i-\omega^2\sigma_0}{(\alpha_k+\omega^2)^2+\omega^2\sigma_0^2}\right)\leqslant 0$, т. е. $-\omega^2\sigma_0\leqslant 0$ для любого вещественного ω. Последнее неравенство выполнено, поскольку $\sigma_0>0$.

Теперь проверим выполнение условия (А3). В нашем случае оно принимает вид $\int\limits_0^1 b(\theta)\theta_{xx}dx\leqslant -\varkappa_3(\int\limits_0^1\theta^2dx+\int\limits_0^1\theta_x^2dx)$. В силу (А12) имеем соотношение $\int\limits_0^1 b(\theta)\theta_{xx}dx\leqslant a_1\int\limits_0^1\theta\theta_{xx}dx=-a_1\int\limits_0^1\theta_x^2dx$. Отсюда очевидным образом следует, что условие (А3) выполнено.

Аналогично, условие (А4) для нашей системы принимает вид $\int\limits_0^1 b(\theta)\sigma(\theta)dx\leqslant\varkappa_4(\int\limits_0^1\theta^2dx+\int\limits_0^1\theta_x^2dx)$. В силу (А12) и (А13) имеем неравенство $\int\limits_0^1 b(\theta)\sigma(\theta)dx\leqslant a_1a_2\int\limits_0^1\theta^2dx$. Значит, условие (А4) выполнено.

Итак, мы показали, что предположения (А11)–(А13) выполнены и все условия теоремы 2.1 выполнены. Значит, можно сделать вывод, что решения нашей системы ограничены.

5. Устойчивость на конечном промежутке времени для глобальных процессов

Введем семейство отображений следующим образом: $\psi^{(\cdot)}(\cdot,\cdot):\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\times\mathcal{N}\to\mathcal{N}$, $\psi^t(t_0,p)=y(t+t_0,t_0,p)$, где $t\in\mathbb{R}_+,t_0\in\mathbb{R}_+,p\in\mathcal{N}$, а $\mathcal{N}$ — полное метрическое пространство.

Определение 5.1. Отображение $\psi:\mathbb{D}\to\mathcal{N}$ называется *процессом* (*глобальным процессом*) на $\mathcal{N}$, где $\mathbb{D}=\{(t,s,u)|(t,s,u)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\times\mathcal{N}\}$, если выполняются следующие условия:

(i) для любого вещественного s отображение $\psi^0(s,\cdot)=I_{\mathcal{N}}$ есть тождественное отображение на $\mathcal{N}$;

(ii) для любых (s,u) из $\mathbb{R}\times\mathcal{N}$ и любых t,t',s из $\mathbb{R}_+$ справедливо соотношение $\psi^{t+t'}(s,u)=\psi^t(t'+s,\psi^{t'}(s,u))$.

Определение 5.1 основано на определении процесса, данном в [8]. Например, процессами являются динамические системы, для которых $\psi^t(s,\cdot)=\varphi^t(\cdot)$ при положительных s и вещественных t.

Определение 5.2. Пусть $(\psi,(\mathcal{N},\rho_{\mathcal{N}}))$ — процесс, а (s,u_s) — фиксированная точка в $\mathbb{R}\times\mathcal{N}$. Отображение $\mathcal{D}(s,u_s):=\{t\in\mathbb{R}_+\to u(t)\in\mathcal{N}\}$ называется *движением* процесса ψ через точку (s,u_s), если $u(t)=\psi^t(s,u(s))$ для любой (t,s) из $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ и $u(s)=u_s$.

Введем понятие устойчивости процесса на конечном промежутке времени, основанное на определении из [21].

Определение 5.3. Процесс $(\psi,(\mathcal{N},\rho_{\mathcal{N}}))$ называется $(\alpha,\beta,t_0,T',\rho_{\mathcal{N}},v)$-*устойчивым*, где $0<\alpha\leqslant\beta$, $t_0>0$, $T'\geqslant 0$, а $v\in\mathcal{N}$, если из неравенства $\rho_{\mathcal{N}}(v,\psi^0(r,u_r))<\alpha$ следует справедливость неравенства $\rho_{\mathcal{N}}(v,\psi^t(r,u_r))<\beta$ для всех t из $[t_0,t_0+T')$ и любой (s,u_s) из $\mathbb{R}\times\mathcal{N}$.

Пусть $(\{\psi^t(s,\cdot)\}_{\substack{t\in\mathbb{R}\\ s\in\mathbb{R}_+}},(\mathcal{N},\rho_{\mathcal{N}}))$ — процесс. Отображение $\Phi:\mathbb{R}\times\mathcal{N}\to\mathbb{R}$ называется *функционалом Ляпунова* для этого процесса, если выполнены следующие условия:

(i) семейство отображений $\Phi(t,\cdot):\mathcal{N}\to\mathbb{R}$ непрерывно;

(ii) для каждого вещественного t и каждой u из $\mathcal{N}$ существует предел

$$\dot\Phi(t,u):=\lim_{s\to 0+}\sup\frac{1}{s}[\Phi(t+s,\psi^s(t,u))-\Phi(t,u)]. \tag{5.1}$$

Теорема 5.1. *Пусть* $(\{\psi^t(s,\cdot)\}_{\substack{t\in\mathbb{R}\\ s\in\mathbb{R}_+}}$ *— процесс,* $I:=[t_0,t_0+T']$ *— промежуток времени,* $0<\alpha\leqslant\beta$, $s>0$, $u_\tau\in\mathcal{N},p\in\mathcal{N}$ *и существуют функционал Ляпунова* $\Phi:I\times\mathcal{N}\to\mathbb{R}$ *для этого процесса и интегрируемая функция* $g:I\to\mathbb{R}$, *удовлетворяющие следующим условиям*:

(i) $\dot\Phi(t,u(t))<g(t)$ *для произвольного* t *из* I *и произвольной функции* $u(\cdot)$ *из* $C(t_0,t_0+T',\mathcal{N})$, *удовлетворяющей двойному неравенству* $\alpha\leqslant\rho_{\mathcal{N}}(u(t),p)\leqslant\beta$ *при всех* t *из* I;

(ii) $\int\limits_s^t g(\tau)d\tau\leqslant\min\limits_{u\in\mathcal{N}:\rho_{\mathcal{N}}(u,p)=\beta}\Phi(t,u)-\max\limits_{u\in\mathcal{N}:\rho_{\mathcal{N}}(u,p)=\alpha}\Phi(s,u)$ *если* $s,t\in I,s<t$.

Тогда процесс $(\{\psi^t(s,\cdot)\}_{\substack{t\in\mathbb{R}\\ s\in\mathbb{R}_+}},(\mathcal{N},\rho_{\mathcal{N}}))$ *является* $(\alpha,\beta,t_0,T',\rho_{\mathcal{N}},p)$-*устойчивым.*

Доказательство. Пусть $u(\cdot):=\mathcal{D}(s,u_s)=\{t\in\mathcal{J}(s,u_s)\to u(t)\in\mathcal{N}\}$, $s\in\mathbb{R},u_s\in\mathcal{N}$, есть произвольное движение процесса $(\psi,(\mathcal{N},\rho_{\mathcal{N}}))$. Предположим, что существует минимальное значение t_2 из J, для которого справедливо равенство $\rho_{\mathcal{N}}(p,u(t_2))=\beta$. Тогда существует такое t_1, что $t_0<t_1<t_2$, $\rho_{\mathcal{N}}(p,u(t_1))=\alpha$ и $\rho_{\mathcal{N}}(p,u(s))>\alpha$ для любого s, удовлетворяющего двойному неравенству $t_1<s\leqslant t_2$. Используя определение производной (5.1), получаем следующие соотношения:

$$\Phi(t_2,u(t_2))-\Phi(t_1,u(t_1))=\int\limits_{t_1}^{t_2}\dot\Phi(t,u(t))d\tau<\int\limits_{t_1}^{t_2}g(\tau)d\tau. \tag{5.2}$$

Из (5.2) выводим неравенство

$$\Phi(t_2,u(t_2))<\max_{u\in\mathcal{N}:\rho_{\mathcal{N}}(p,u)=\alpha}\Phi(t_1,u)+\int\limits_{t_1}^{t_2}g(\tau)d\tau. \tag{5.3}$$

Соотношения (5.2)-(5.3) показывают, что

$$\begin{aligned}\Phi(t_2,u(t_2))<\max_{u\in\mathcal{N}:\rho_{\mathcal{N}}(p,u)=\alpha}\Phi(t_1,u)+\min_{u\in\mathcal{N}:\rho_{\mathcal{N}}(p,u)=\beta}\Phi(t_2,u)-{}\\ -\max_{u\in\mathcal{N}:\rho_{\mathcal{N}}(p,u)=\alpha}\Phi(t_1,u)=\min_{u\in\mathcal{N}:\rho_{\mathcal{N}}(p,u)=\beta}\Phi(t_2,u).\end{aligned} \tag{5.4}$$

Полученное противоречие (5.4) доказывает теорему. □

Рассмотрим следующую систему, состоящую из параболического и гиперболического уравнений, представляющих собой уравнения Максвелла и уравнение теплопроводности для одномерного случая (см. [16]):

$$w_{tt}-w_{xx}+\sigma(\theta)w_t=0,\qquad x\in(0,1),t\in(0,T), \tag{5.5}$$

$$\theta_t-\theta_{xx}=\sigma(\theta){w_t}^2,\qquad x\in(0,1),t\in(0,T), \tag{5.6}$$

$$w(0,t)=0,w(1,t)=0,\qquad t\in(0,T), \tag{5.7}$$

$$\theta(0,t)=\theta(1,t)=0,\qquad t\in(0,T), \tag{5.8}$$

$$\theta(x,0)=\theta_0(x),\qquad x\in(0,1), \tag{5.9}$$

$$w(x,0)=w_0(x),\ w_t(x,0)=w_1(x),\qquad x\in(0,1), \tag{5.10}$$

где, так же, как и в системе (3.3), θ — температура, w — интеграл по времени от ненулевой компоненты электрического поля, σ — электропроводность, зависящая от температуры, а положительное T — время.

Введем следующие условия:

(A14) Скалярная функция σ удовлетворяет локальному условию Липшица на интервале $(0, +\infty)$ и существуют такие постоянные σ_0 и σ_1, что $0 < \sigma_0 \leqslant \sigma(\theta) \leqslant \sigma_1$ на $(0, +\infty)$.

(A15) Почти всюду на интервале $(0, 1)$ имеем $w_0, w_1 \in L^2(0, 1), \theta_0 \in L^\infty(0, 1), \theta_0 \geqslant 0$.

Если (A14) и (A15) выполняются, то для любого фиксированного положительного T существует слабое решение системы (5.5)–(5.10) в смысле интегральных тождеств. Введем обозначение $v(x, t) := w_t(x, t)$. Тогда задача (5.5)–(5.10) имеет слабое решение $(w(x, t), v(x, t), \theta(x, t))$ в пространстве $Z := (C([0, T]; L^2(0, 1)))^2 \times (L^2(0, T; H^1(0, 1)) \cap C([0, T]; L^2(0, 1)))$ (см. [16]).

Теперь определим нормированное пространство $Y := H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ с нормой

$$\|(w, v, \theta)\|_Y^2 = \|w_x\|_{L^2(0,1)}^2 + \|v\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\theta\|_{L^2(0,1)}^2, \tag{5.11}$$

где $(w, v, \theta) \in Y$. Рассмотрим функцию $y(t) = y(t, t_0, y_0) = (w(\cdot, t), v(\cdot, t), \theta(\cdot, t))$, представляющую решение задачи (5.5)–(5.10) в пространстве Y с нормой (5.11), для которого вместо начального момента 0 взято произвольное t_0 такое, что $0 \leqslant t_0 < T$ и $y(t_0, t_0, y_0) = (w_0, w_1, \theta_0)$, где вектор-функция $(w(\cdot, t), v(\cdot, t), \theta(\cdot, t))$ принадлежит Y и удовлетворяет системе (5.5)–(5.10) в слабом смысле.

Для задачи (5.5)–(5.10) введем процесс следующим образом. Предположим, что $\mathcal{N} = Y$ и определим

$$\psi^t(s, u_0) = \{y(t + s, s, y_0) | y(t + s, s, y_0) \in \mathbb{D}(s, y_0)\}, \tag{5.12}$$

где $y(t, s, y_0) = (w(\cdot, t), v(\cdot, t), \theta(\cdot, t))$ — решение задачи (5.5)–(5.10), для которого $y(s, s, y_0) = y_0 = (0, 0, \theta_0)$. Тем самым система (5.5)–(5.10) порождает процесс $(\psi, (\mathcal{M}, \rho_{\mathcal{M}}))$.

Теперь понятие устойчивости процесса (5.3) на конечном промежутке времени можно использовать для исследования системы (5.5)–(5.10).

Для процесса (5.12) сформулируем следующую теорему об устойчивости на конечном промежутке времени.

Теорема 5.2. *Пусть* $J := [t_0, t_0 + T') \subset (0, T)$, $0 < \alpha \leqslant \beta$, *и существуют такой дифференцируемый по Фреше функционал* $\Phi : Y \to \mathbb{R}$ *и такая интегрируемая функция* $g : J \to \mathbb{R}$, *что выполнены следующие условия*:

$$\frac{d}{dt}\Phi(y(t)) < g(t) \tag{5.13}$$

для п. в. t *из* J *и для любой функции* $y(\cdot)$ *из* Z, *удовлетворяющей оценке* $\alpha \leqslant \|y(t)\|_Y \leqslant \beta$ *для указанных* t;

$$\int_s^t g(\tau) d\tau \leqslant \min_{y \in Y : \|y\|_Y = \beta} \Phi(y) - \max_{y \in Y : \|y\|_Y = \alpha} \Phi(y) \tag{5.14}$$

для всех s, t *из* J, *для которых* $s < t$.

Тогда процесс (5.12) *является* $(\alpha, \beta, t_0, T', \|\cdot\|_Y)$-*устойчивым.*

Ниже для задачи теплопроводности мы определим функционал Φ и функцию g конкретного вида, удовлетворяющие всем условиям теоремы 5.2. Здесь мы используем следующий результат, вытекающий из доказательства [16, Th. 4.1] и называемый далее *свойством* (S):

(S) для любого положительного α и любого T' из $(0, T)$ существует такое конечное положительное $\varkappa = \varkappa(\alpha, T')$, что для любого решения $(w(x, t), v(x, t), \theta(x, t))$ системы (5.5)–(5.10) с начальными данными (w_0, w_1, θ_0) при $t_0 = 0$ оценка $\|w_0\|_{L^2(0,1)}^2 + \|w_1\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\theta_0\|_{L^2(0,1)}^2 \leqslant \alpha^2$ влечет за собой оценку $\sup\limits_{t \in [0, T']} \|\theta(\cdot, t)\|_{L^\infty(0,1)} \leqslant \varkappa$.

Теорема 5.3. *Предположим, что существуют такие положительные значения параметров* λ, ϵ, a *и такое* α, *что* $0 < \alpha \leqslant \beta$ *и выполнены условия*

$$\begin{gathered} 0<\lambda<1, \quad \frac{1}{2}\sigma_1\epsilon-1<0, \quad \lambda^2<\epsilon<1, \\ \lambda(\frac{1}{2\epsilon}\sigma_1+1)-\sigma_0+a\sigma_1\varkappa<0, \\ 0\leqslant \min[1-\epsilon, 1-\frac{\lambda^2}{\epsilon}, a]\beta^2-\max[2, 1+\lambda^2, a]\alpha^2, \end{gathered} \tag{5.15}$$

где параметры σ_0 *и* σ_1 *взяты из* (A14), *а* $\varkappa = \varkappa(\alpha, T')$ — *параметр, введенный в условии* (S). *Рассмотрим функционал Ляпунова вида*

$$\Phi(y) = \Phi(w, v, \theta) = \int\limits_0^1 (w_x^2 + 2\lambda wv + v^2 + a\theta^2)dx, \quad y = (w, v, \theta) \in Y, \tag{5.16}$$

а также функцию

$$g(t) \equiv -c\min[1, a]\alpha, \ \ t \in [0, T'), \tag{5.17}$$

где

$$c := \frac{2\min[a, -\lambda(\frac{1}{2}\sigma_1\epsilon-1), -(\lambda(\frac{1}{2\epsilon}\sigma_1+1)-\sigma_0+a\sigma_1\varkappa)]}{\max[2, 1+\lambda^2, a]}. \tag{5.18}$$

Тогда функционал Φ *и функция* $g(t)$, *определенные формулами* (5.16) *и* (5.17) *соответственно, удовлетворяют неравенствам* (5.13) *и* (5.14) *относительно функций из* Z *для* $t_0 = 0$ *и тех* α, β, $0 < \alpha < \beta$, *для которых выполнено* (5.15). *Следовательно, процесс* (5.3) *является* $(\alpha, \beta, 0, T', \|\cdot\|_Y)$-*устойчивым.*

Доказательство. Рассмотрим функционал Ляпунова (5.16). Применяя (5.15) к произвольным функциям (w, v, θ) из Y, получаем неравенства

$$\begin{aligned} \Phi(w, v, \theta) = \int\limits_0^1 (w_x^2 + 2\lambda wv + v^2 + a\theta^2)dx \leqslant \\ \leqslant \int\limits_0^1 (w_x^2 + w^2 + \lambda^2 v^2 + v^2 + a\theta^2)dx \leqslant \int\limits_0^1 (2w_x^2 + (1+\lambda^2)v^2 + a\theta^2)dx \leqslant \\ \leqslant \max[2, 1+\lambda^2, a](\|w_x\|^2_{L^2(0,1)} + \|v\|^2_{L^2(0,1)} + \|\theta\|^2_{L^2(0,1)}); \end{aligned} \tag{5.19}$$

здесь использовано неравенство Фридрихса $\|w\|^2_{L^2(0,1)} \leqslant \|w_x\|^2_{L^2(0,1)}$ для функции w из $H^1_0(0, 1)$ и неравенство Коши—Буняковского.

С другой стороны, для тех же самых функций (w, v, θ) из Y справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \int\limits_0^1 (w_x^2 + 2\lambda wv + v^2 + a\theta^2)dx \geqslant \\ \geqslant \int\limits_0^1 (w_x^2 - \epsilon w^2 - \frac{\lambda^2}{\epsilon}v^2 + v^2 + a\theta^2)dx \geqslant \int\limits_0^1 ((1-\epsilon)w_x^2 + (1-\frac{\lambda^2}{\epsilon})v^2 + a\theta^2)dx \geqslant \\ \geqslant \min[1-\epsilon, 1-\frac{\lambda^2}{\epsilon}, a](\|w_x\|^2_{L^2(0,1)} + \|v\|^2_{L^2(0,1)} + \|\theta\|^2_{L^2(0,1)}). \end{aligned} \tag{5.20}$$

Теперь рассмотрим функционал Ляпунова на пространстве функций (w, v, θ) из Z. Для п. в. t из $(0, T')$ продифференцируем этот функционал по t. Получим

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^1 (w_x^2 + 2\lambda wv + v^2 + a\theta^2)dx = 2\int\limits_0^1 (-w_{xx}v + \lambda v^2 + (\lambda w + v)v_t + a\theta\theta_t)dx; \tag{5.21}$$

здесь использовано равенство $\int\limits_0^1 w_x w_{xt} dx = \int\limits_0^1 -w_{xx} w_t dx = \int\limits_0^1 -w_{xx} v dx$, справедливое для любой функции $w(x,t)$, удовлетворяющей однородным (нулевым) краевым условиям.

Теперь вычислим v_t и θ_t из (5.5) и (5.6), используем полученный результат в (5.21) и оценим следующий интеграл для п. в. t из $(0,T')$:

$$\frac{d}{dt}\Phi(y(t)) = 2\int\limits_0^1 (-w_{xx}v + \lambda v^2 + (\lambda w + v)(w_{xx} - \sigma(\theta)v) + a\theta(\theta_{xx} + \sigma(\theta)v^2))dx =$$

$$= 2\int\limits_0^1 (-\lambda w_x^2 - \lambda\sigma(\theta)wv + (\lambda - \sigma(\theta) + a\sigma(\theta)\theta)v^2 - a\theta_x^2))dx \leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_0^1 (-\lambda(\frac{1}{2}\sigma(\theta)\epsilon - 1)w_x^2 + (\frac{1}{2\epsilon}\lambda\sigma(\theta) + \lambda - \sigma(\theta) + a\sigma(\theta)\theta)v^2 - a\theta^2))dx. \tag{5.22}$$

Используя условие (A15), свойство (S) и соотношения (5.15), получаем, что неравенство

$$\frac{d}{dt}\Phi(y(t)) \leqslant -c_1(\|w_x\|^2_{L^2(0,1)} + \|v\|^2_{L^2(0,1)} + \|\theta\|^2_{L^2(0,1)}) \tag{5.23}$$

справедливо для п. в. t из $(0,T')$, где $c_1 = 2\min\Big[a, -\lambda\Big(\frac{1}{2}\sigma_1\epsilon - 1\Big), -\Big(\lambda\Big(\frac{1}{2\epsilon}\sigma_1 + 1\Big) - \sigma_0 + a\sigma_1\varkappa\Big)\Big]$.

Теперь, учитывая (5.19), можно показать, что $\frac{d}{dt}\Phi(y(t)) \leqslant -c\Phi(y(t))$ для п. в. t из $(0,T')$, где c определено формулой (5.18).

Теперь, учитывая неравенство (5.20), введем на $[0,T')$ функцию

$$g(t) := -c\min[1,a]\inf(\|w_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)} + \|v(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)} + \|\theta(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)}), \tag{5.24}$$

где точная нижняя грань берется по всем $(w(\cdot,\cdot), v(\cdot,\cdot), \theta(\cdot,\cdot))$ из Z, удовлетворяющим (двусторонней) оценке $\alpha \leqslant \|w(\cdot,t), v(\cdot,t), \theta(\cdot,t)\|_Y \leqslant \beta$. Тогда условие (5.13) выполнено.

Понятно, что $g(t) = -c\min[1,a]\alpha$ есть искомая функция на $[0,T')$.

Используя (5.19) и (5.20), оценим слагаемые из правой части неравенства (5.14):

$$\min_{y\in Y:\|y\|_Y=\beta}\Phi(y) \geqslant \min[1-\epsilon, 1-\frac{\lambda^2}{\epsilon}, a]\beta^2, \qquad \max_{y\in Y:\|y\|_Y=\alpha}\Phi(y) \leqslant \max[2, 1+\lambda^2, a]\alpha^2. \tag{5.25}$$

Следовательно, для выполнения соотношения (5.14) достаточно выполнения неравенств

$$-c\min[1,a]\alpha T' \leqslant \min[1-\epsilon, 1-\frac{\lambda^2}{\epsilon}, a]\beta^2 - \max[2, 1+\lambda^2, a]\alpha^2, \tag{5.26}$$

$$0 \leqslant \min[1-\epsilon, 1-\frac{\lambda^2}{\epsilon}, a]\beta^2 - \max[2, 1+\lambda^2, a]\alpha^2. \tag{5.27}$$

Из условий (5.15) следует, что неравенства (5.26)-(5.27) выполнены. □

6. Устойчивость и неустойчивость на конечном интервале времени для локальных многозначных процессов

Пусть $(\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}})$ — полное метрическое пространство, а $2^{\mathcal{N}}$ — множество всех непустых подмножеств $\mathcal{N}$. Введем понятие локального многозначного процесса на $\mathcal{N}$ (аналогичное определение можно найти в [14]):

Определение 6.1. Отображение $\psi : \mathbb{D} \to 2^{\mathcal{N}}$ называется *локальным многозначным процессом* на $\mathcal{N}$, где $\mathbb{D} = \{(t,s,u)|(s,u) \in \mathbb{R}\times\mathcal{N}, t \in [0, b(s,u))\}$, а $[0, b(s,u))$ — максимальный полуинтервал существования отображения ψ^t, если выполнены следующие условия:

(i) для любого вещественного s отображение $\psi^0(s,\cdot) = I_{\mathcal{N}}$ является тождественным отображением на $\mathcal{N}$;

(ii) для любого (s,u) из $\mathbb{R}\times\mathcal{N}$, любого t' из $[0, b(s,u))$ и любого t из $[0, b(t', \psi^{t'}(s,u)))$ неравенство $t + t' < b(s,u)$ влечет за собой вложение $\psi^{t+t'}(s,u) \subset \psi^t(t'+s, \psi^{t'}(s,u))$.

Введем обозначение $\mathcal{J}(s, u_s) = \{t \in \mathbb{R} | t \in [0, b(s, u_s))\}$.

Определение 6.2. Пусть $(\psi, (\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}}))$ — локальный многозначный процесс, а (s, u_s) — фиксированная точка в $\mathbb{R} \times \mathcal{N}$. Семейство однозначных отображений $\mathcal{D}(s, u_s) := \{t \in \mathcal{J}(s, u_s) \to u(t) \in \mathcal{N}\}$ называется *движением* процесса ψ из точки (s, u_s), если $u(t) \in \psi^t(s, u(s))$ для любого t из $\mathcal{J}(s, u_s)$ и $u(s) = u_s$. Каждое такое одномерное отображение называется *реализацией движения* $\mathcal{D}(s, u_s)$.

Определение 6.3. Пусть $(\psi, (\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}}))$ — локальный многозначный процесс. Отображение $\Phi : \mathbb{R} \times \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ называется *функционалом Ляпунова* для этого локального многозначного процесса, если выполняются следующие условия:

(i) однопараметрическое семейство отображений $\Phi(t, \cdot) : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ непрерывно;

(ii) для любых фиксированных t из $\mathbb{R}$ и u из $\mathcal{N}$ имеем

$$\dot{\Phi}(t, u) := \lim_{s \to 0+} \sup \frac{1}{s}[\Phi(t + s, \psi^s(t, u)) - \Phi(t, u)].$$

Теперь для локальных многозначных процессов введем понятие устойчивости на конечном интервале времени.

Определение 6.4. Локальный многозначный процесс $(\psi, (\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}}))$ называют $(\alpha, \beta, t_0, T', \rho_{\mathcal{N}}, p)$-*устойчивым*, где $0 < \alpha \leqslant \beta$, $t_0 > 0$, $T' \geqslant 0$, а $p \in \mathcal{N}$, если для любой реализации $u(\cdot)$ любого движения $\mathcal{D}(s, u_s) = \{t \in \mathcal{J}(s, u_s) \to u(t) \in \mathcal{N}\}$, $s \leqslant t_0$, $t_0 + T' \leqslant b(s, u_s)$, $u_s \in \mathcal{N}$, $u(\cdot) \in \mathcal{D}(s, u_s)$, этого процесса из неравенства $\rho_{\mathcal{N}}(p, u_{t_0}) < \alpha$, $u_{t_0} = u(t_0)$, следует, что $\rho_{\mathcal{N}}(p, u(t)) < \beta$ для любого t из $[t_0, t_0 + T')$.

Теорема 6.1. *Пусть* $(\psi, (\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}}))$ — *локальный многозначный процесс,* $J := [t_0, t_0 + T') \subset \mathcal{J}(s, u_s)$, $0 < \alpha \leqslant \beta$, $s > 0$, $u_s \in \mathcal{N}$, $p \in \mathcal{N}$ *и существуют такой функционал Ляпунова* $\Phi : J \times \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ *в смысле* (6.3) *и такая интегрируемая функция* $g : J \to \mathbb{R}$, *что выполнены следующие условия*:

(i) $\dot{\Phi}(t, u(t)) < g(t)$, *если* $t \in J$, *а* $u(t)$ — *произвольные отображения из* $C(t_0, t_0 + T'; \mathcal{N})$, *для которых неравенство* $\alpha \leqslant \rho_{\mathcal{N}}(p, u(t)) \leqslant \beta$ *выполняется при любом* t *из* J;

(ii) *неравенство* $\int\limits_s^t g(s)ds \leqslant \min\limits_{u \in \mathcal{N} : \rho_{\mathcal{N}}(p,u) = \beta} \Phi(t, u(t)) - \max\limits_{u \in \mathcal{N} : \rho_{\mathcal{N}}(p,u) = \alpha} \Phi(s, u(s))$ *справедливо, если* $s, t \in J, s < t$.

Тогда локальный многозначный процесс $(\psi, (\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}}))$ *является* $(\alpha, \beta, t_0, T', \rho_{\mathcal{N}}, p)$-*устойчивым.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}(s, u_s) = \{t \in \mathcal{J}(s, u_s) \to u(t) \in \mathcal{N}\}$, $s \in \mathbb{R}, u_s \in \mathcal{N}$, есть произвольное движение локального многозначного процесса $(\psi, (\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}}))$, а $u(\cdot)$ из $\mathcal{D}(s, u_s)$ есть произвольная реализация этого движения. Оставшаяся часть доказательства аналогична доказательству теоремы 5.1, использующему произвольную реализацию движения $u(\cdot)$ и определение производной (6.3). $\square$

Введем понятие неустойчивости на конечном интервале времени для локальных многозначных процессов.

Определение 6.5. Локальный многозначный процесс $(\psi, (\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}}))$ называют $(\alpha, \beta, t_0, T', \rho_{\mathcal{N}}, p)$-*неустойчивым*, где $0 < \alpha \leqslant \beta$, $t_0 > 0, T' \geqslant 0$ и $p \in \mathcal{N}$, если существуют такое движение $\mathcal{D}(s, u_s)$, $s \leqslant t_0, t_0 + T' \leqslant b(s, u_s), u_s \in \mathcal{N}$, этого процесса, такая реализация $u(\cdot)$ из $\mathcal{D}(s, u_s)$, $\rho_{\mathcal{N}}(p, u_{t_0}) < \alpha$, $u_{t_0} = u(t_0)$, этого движения и такое t_1 из $(t_0, t_0 + T')$, что $\rho_{\mathcal{N}}(p, u(t_1)) = \beta$.

Теорема 6.2. *Пусть* $(\psi, (\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}}))$ — *локальный многозначный процесс,* $J := [t_0, t_0 + T') \subset \mathcal{J}(s, u_s)$, $0 < \alpha \leqslant \beta$, $s > 0$, $u_s \in \mathcal{N}$, $p \in \mathcal{N}$. *Предположим, что существуют такой непрерывный функционал* $\Phi : J \times \mathcal{N} \to \mathbb{R}$, *такая функция* $g : J \to \mathbb{R}$, *интегрируемая на* J, *такие постоянные* $\alpha, \delta, T, T_1, \delta < \alpha, 0 < T_1 < T$, *и такие множества* $\Omega, \Upsilon(t), \mathcal{U}(t)$, *что* $\Omega = \overline{\mathcal{B}}(\beta) - \mathcal{B}(\delta)$, $\Upsilon(t) = \{u | \Phi(u) > \max\limits_{u \in \mathcal{N} : \rho_{\mathcal{N}}(p,u) = \delta} \Phi(u)\}$, $\mathcal{U}(t) \subset \Omega \cap \Upsilon(t)$, $\mathcal{U}(t)$ — *связное непустое множество,* $\mathcal{U}(t_0 + T_1) \cap \partial\mathcal{B}(\beta) \neq \varnothing$ *и выполнены следующие условия*:

(i) $\Phi(t, u(t)) - \Phi(s, u(s)) > \int\limits_s^t g(s)ds$ *для всех* t, s *из* J *и для произвольных отображений* $u(\cdot)$ *из* $C(t_0, t_0 + T'; \mathcal{N})$, *удовлетворяющих оценке* $\alpha \leqslant \rho_{\mathcal{N}}(p, u(t)) \leqslant \beta$ *для любого* t *из* J;

(ii) *существует такое* u_0 *из* $\mathcal{U}(t_0)$, *что для любого* t_1 *из* $[t_0, t_0+T_1]$ *имеем* $\delta < \|u_0\|_{\mathcal{N}} < \alpha$,

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+T_1} g(s)ds \geqslant \max_{u\in\mathcal{N}:\|u\|_{\mathcal{N}}=\beta} \Phi(t_0+T_1, u) - \Phi(t_0, u_0),$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} g(s)ds \geqslant \max_{u\in\mathcal{N}:\|u\|_{\mathcal{N}}=\delta} \Phi(t_1, u) - \Phi(t_0, u_0);$$

(iii) $\Phi(t_0+T_1, u') \leqslant \max\limits_{u\in\mathcal{N}:\|u\|_{\mathcal{N}}=\beta} \Phi(t_0+T_1, u)$ *для любого* u' *из* $\mathcal{U}(t_0+T_1)$.

Тогда локальный многозначный процесс $(\psi, (\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}}))$ *является* $(\alpha, \beta, t_0, T', \rho_M, p)$*-неустойчивым.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}(s, u_s) = \{t \in J(s, u_s) \to u(t) \in \mathcal{N}\}$, $s \in \mathbb{R}, u_s \in \mathcal{N}$, есть произвольное движение локального многозначного процесса $(\psi, (\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}}))$, а $u(\cdot)$ из $\mathcal{D}(s, u_s)$ есть произвольная реализация этого движения, для которой $u(t_0) = u_0 \in \mathcal{U}(t_0)$. Справедливо неравенство

$$\Phi(t, u(t)) - \Phi(t_0, u(t_0)) > \int\limits_{t_0}^{t} g(s)ds. \tag{6.1}$$

Пусть существует значение t_2 из J, для которого справедливо равенство $\rho_{\mathcal{N}}(p, u(t_2)) = \delta$. Пусть $\rho_{\mathcal{N}}(p, u(t)) < \beta$ для всех t из $[t_0, t_2]$. Тогда

$$\Phi(t_2, u(t_2)) - \Phi(t_0, u(t_0)) > \int\limits_{t_0}^{t_2} g(s)ds > \max_{u\in\mathcal{N}:\rho_{\mathcal{N}}(p,u)=\delta} \Phi(t_2, u). \tag{6.2}$$

Это противоречит условию, из которого выбрано t_2. Следовательно, такого t_2 не существует. Значит, $\Phi(t, u(t)) > \max\limits_{u\in\mathcal{N}:\rho_{\mathcal{N}}(p,u)=\delta} \Phi(t, u)$ для всех t из $[t_0, t_0+T_1]$. Отсюда следует, что $\rho_{\mathcal{N}}(p, u(t)) < \beta$ для всех t из $[t_0, t_0+T_1]$. Поэтому $u(t) \in \mathcal{U}(t)$ для всех t из $[t_0, t_0+T_1]$.

Теперь предположим, что $\rho_{\mathcal{N}}(p, u(t)) < \beta$ для всех t из $[t_0, t_0+T_1]$. Тогда

$$\Phi(t_0+T_1, u(t_0+T_1)) - \Phi(t_0, u(t_0)) > \int\limits_{t_0}^{t_0+T_1} g(s)ds > \max_{u\in\mathcal{N}:\rho_{\mathcal{N}}(p,u)=\beta} \Phi(t_0+T_1, u). \tag{6.3}$$

Это противоречит условию (iii). Отсюда следует, что предположение относительно $\rho_{\mathcal{N}}(p, u(t))$ неверно. Значит, существует такой момент времени $t_3 \in [t_0, t_0+T_1]$, для которого $\rho_{\mathcal{N}}(p, u(t)) = \beta$. □

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу (см. [16]):

$$\begin{array}{ll} w_{tt} - w_{xx} + \sigma(\theta)w_t = 0, & x \in (0,1), t \in (0,T), \\ b(\theta)_t - \theta_{xx} = \sigma(\theta){w_t}^2, & x \in (0,1), t \in (0,T), \\ w(0,t) = \xi_1(t), w(1,t) = \xi_2(t), & t \in (0,T), \\ \theta(0,t) = \theta(1,t) = 0, & t \in (0,T), \\ \theta(x,0) = \theta_0(x), & x \in (0,1), \\ w(x,0) = w_0(x),\ w_t(x,0) = w_1(x), & x \in (0,1), \end{array} \tag{6.4}$$

$$b(s) = \begin{cases} s-1, & s < \widehat{\theta}, \\ [\widehat{\theta}-1, \widehat{\theta}], & s = \widehat{\theta}, \\ s, & s > \widehat{\theta}; \end{cases}$$

здесь $\widehat{\theta}$ — параметр.

Предположим, что выполнены следующие условия:

(A16) функция σ локально липшицева на интервале $(0, +\infty)$;

(A17) функции ξ_1, ξ_2 принадлежат пространству $H^1(0,1)$, $\xi_1(0) = 0$, $\xi_2(0) = 0$, функции $w_t(x,0)$, $\theta_0(x)$ принадлежат пространству $L^2(0,1)$.

Предположим, что условия (A16)-(A17) выполнены. Тогда задача (6.4) имеет слабое решение $(w(x,t),\theta(x,t))$ из $H^1(0,T;H^1(0,1))\times L^2(0,T;H^1(0,1))$ (см. [16]).

Для задачи (6.4) введем локальный многозначный процесс. Введем обозначение $v:=w_t$ и рассмотрим пространство $\mathcal{N}=H_0^1(0,1)\times L^2(0,1)\times L^1(0,1)$ с нормой $\|(w,v,\theta)\|^2_{\mathcal{N}}=\max[\|w_x\|^2_{L^2(0,1)}+\|v\|^2_{L^2(0,1)},\|\theta\|^2_{L^1(0,1)}]$.

Определим
$$\psi^t(s,u_0)=\{y(t+s,s,y_0)|y(t+s,s,y_0)\in\mathbb{D}(s,y_0)\},\tag{6.5}$$
где $y(t,s,y_0)=(w(\cdot,t),v(\cdot,t),\theta(\cdot,t))$ — такое решение задачи (6.4), для которого $y(s,s,y_0)=y_0=(w_0,w_1,\theta_0)$. Ясно, что в этом случае задача (6.4) порождает процесс $(\psi,(\mathcal{N},\rho_{\mathcal{N}}))$, заданный соотношением (6.5).

Как и для однофазной системы (см. выше), при определенных условиях можно показать (используя теорему 6.1), что порожденный многозначный процесс устойчив на некотором конечном интервале времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — Киев: Наукова думка, 1965.
2. *Ермаков И. В., Калинин Ю. Н., Райтманн В.* Определяющие моды и почти периодические интегралы для коциклов// Дифф. уравн. — 2011. — *47*, № 13. — С. 1–16.
3. *Лихтарников А. Л.* Критерии абсолютной устойчивости нелинейных операторных уравнений// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1977. — *41*, № 5. — С. 1064–1083.
4. *Лихтарников А. Л., Якубович В.* Частотная теорема для уравнений эволюционного типа// Сиб. мат. ж. — 1976. — *17*, №5. — С. 790–803.
5. *Райтманн Ф., Скопинов С. Н.* Устойчивость на конечном промежутке времени в одномерной задаче микроволнового нагрева// Вестн. СПб. ун-та. Сер. 1. — 2015. — *2(60)*, № 1. — С. 54–59.
6. *Райтманн Ф., Юмагузин Н. Ю.* Ассимптотическое поведение решений двухфазовой проблемы микроволнового нагрева в одномерном случае// Вестн. СПб. ун-та. Сер. 1. — 2012. — № 3. — С. 59–62.
7. *Четаев Н. Г.* О некоторых вопросах, относящихся к задаче об устойчивости неустановившихся движений// Прикл. мат. мех. — 1960. — *34*. — С. 6–18.
8. *Dafermos C. M.* An invariance principle for compact process// J. Differ. Equ. — 1971. — *9*. — С. 239–252.
9. *Datko R.* Extending a theorem of A. M. Liapunov to Hilbert spaces// Rend. Mat. Acc. Lincei. — 1994. — *5*. — С. 297–302.
10. *DiBenedetto E., Vespri V.* Exponential attractors for a doubly nonlinear equation// J. Math. Anal. Appl. — 1994. — *185*. — С. 321–339.
11. *Eden A., Rakotoson J. M.* Continuity for bounded solutions of multiphase Stefan problem// J. Math. Anal. Appl. — 1974. — *32*. — С. 610–616.
12. *Glassey K., Yin H.-M.* On Maxwell's equations with a temperature effect. II// Commun. Math. Phys. — 1998. — *194*. — С. 343–358.
13. *Kalinichenko D. Yu., Reitmann V., Skopinov S. N.* Asymptotic behavior of solutions to a coupled system of Maxwell's equations and a controlled differential inclusion// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2013. — *Supplement*. — С. 407–414.
14. *Kapustyan A. V., Melnik V. S., Valero J.* Attractors of multivalued dynamical processes generated by phase-field equations// Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. — 2003. — *13*, № 7. — С. 1969–1983.
15. *Lions J. L., Magenes E.* Non-homogeneous boundary value problems and applications. — Berlin—Heidelberg—N.-Y.: Springer-Verlag, 1972.
16. *Manoranjan V. S., Showalter R., Yin H.-M.* On two-phase Stefan problem arising from a microwave heating process// Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A. — 2006. — *15*, № 4. — С. 1155–1168.
17. *Matas A., Merker J.* Strong solutions of doubly nonlinear parabolic equations// Z. Anal. Anwend. — 2012. — *31*, № 2. — С. 217–235.
18. *Merker J.* Strong solutions of doubly nonlinear Navier—Stokes equations// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2011. — *Supplement*. — С. 1052–1060.
19. *Pankov A.* Bounded and almost periodic solutions of nonlinear operator differential equations. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990.
20. *Popov S. A., Reitmann V.* Frequency domain conditions for finite dimensional projectors and determining observations for the set of amenable solutions// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2014. — *34*, № 1. — С. 249–267.

21. *Weiss L., Infante E. F.* On the stability of systems defined over a finite time interval// Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 1965. — *54*. — С. 44–48.
22. *Yin H.-M.* On Maxwell's equations in an electromagnetic field with the temperature effect// SIAM J. Math. Anal. — 1998. — *29*, № 3. — С. 637–651.
23. *Zyryanov D. A., Reitmann V.* Attractors in multivalued dynamical systems for the two-phase heating problem// Electron. J. Differ. Equ. Control Processes. — 2017. — *4*. — С. 118–138.

С. Попов
Санкт-Петербургский государственный университет, мат.-мех. ф-т, 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр-т, д. 28
E-mail: psa.87@mail.ru

Ф. Райтманн
Санкт-Петербургский государственный университет, мат.-мех. ф-т, 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр-т, д. 28
E-mail: vreitmann@aol.com

С. Скопинов
Санкт-Петербургский государственный университет, мат.-мех. ф-т, 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр-т, д. 28
E-mail: serg_vologda@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-148-163 UDC 517.957

Boundedness and Finite-Time Stability for Multivalued Doubly-Nonlinear Evolution Systems Generated by a Microwave Heating Problem

© 2018 **S. Popov, V. Reitmann, S. Skopinov**

Abstract. Doubly-nonlinear evolutionary systems are considered. Sufficient conditions of the boundedness of solutions of such systems are derived. Analogical results for a one-dimensional microwave heating problem are proved. The notions of global process and of a local multivalued process are introduced. Sufficient conditions for the finite-time stability of a global process and of a local multivalued process are shown. For local multivalued processes sufficient conditions for the finite-time instability are derived. For the one-dimensional microwave heating problem conditions of the finite-time stability are shown.

REFERENCES

1. Yu. M. Berezanskiy, *Razlozhenie po sobstvennym funktsiyam samosopryazhennykh operatorov* [Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators], Naukova dumka, Kiev, 1965 (in Russian).
2. I. V. Ermakov, Yu. N. Kalinin, and V. Reitmann, "Opredelyayushchie mody i pochti periodicheskie integraly dlya kotsiklov" [Determining modes and almost periodic integrals for cocycles], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2011, **47**, No. 13, 1–16 (in Russian).
3. A. L. Likhtarnikov, "Kriterii absolyutnoy ustoychivosti nelineynykh operatornykh uravneniy" [Absolute stability criteria for nonlinear operator equations], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1977, **41**, No. 5, 1064–1083 (in Russian).
4. A. L. Likhtarnikov and V. Yakubovich, "Chastotnaya teorema dlya uravneniy evolyutsionnogo tipa" [The frequency theorem for equations of evolutionary type], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1976, **17**, No. 5, 790–803 (in Russian).
5. V. Reitmann and S. N. Skopinov, "Ustoychivost' na konechnom promezhutke vremeni v odnomernoy zadache mikrovolnovogo nagreva" [On a finite time interval stability for the one-dimensional microwave heating problem], *Vestn. SPb. un-ta. Ser. 1* [Bull. St. Peterburg Univ. Ser. 1], 2015, **2(60)**, No. 1, 54–59 (in Russian).

6. V. Reitmann and N. Yu. Yumaguzin, “Assimptoticheskoe povedenie resheniy dvukhfazovoy problemy mikrovolnovogo nagreva v odnomernom sluchae” [Asymptotic behavior of solutions of a two-phase problem of microwave heating in the one-dimension case], *Vestn. SPb. un-ta. Ser. 1* [Bull. St. Peterburg Univ. Ser. 1], 2012, No. 3, 59–62 (in Russian).
7. N. G. Chetaev, “O nekotorykh voprosakh, otnosyashchikhsya k zadache ob ustoychivosti neustanovivshikhsya dvizheniy” [About some questions related to the problem of the stability of unsteady motions], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1960, **34**, 6–18 (in Russian).
8. C. M. Dafermos, “An invariance principle for compact process,” *J. Differ. Equ.*, 1971, **9**, 239–252.
9. R. Datko, “Extending a theorem of A. M. Liapunov to Hilbert spaces,” *Rend. Mat. Acc. Lincei.*, 1994, **5**, 297–302.
10. E. DiBenedetto and V. Vespri, “Exponential attractors for a doubly nonlinear equation,” *J. Math. Anal. Appl.*, 1994, **185**, 321–339.
11. A. Eden and J. M. Rakotoson, “Continuity for bounded solutions of multiphase Stefan problem,” *J. Math. Anal. Appl.*, 1974, **32**, 610–616.
12. K. Glassey and H.-M. Yin, “On Maxwell’s equations with a temperature effect. II,” *Commun. Math. Phys.*, 1998, **194**, 343–358.
13. D. Yu. Kalinichenko, V. Reitmann, and S. N. Skopinov, “Asymptotic behavior of solutions to a coupled system of Maxwell’s equations and a controlled differential inclusion,” *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2013, **Supplement**, 407–414.
14. A. V. Kapustyan, V. S. Melnik, and J. Valero, “Attractors of multivalued dynamical processes generated by phase-field equations,” *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2003, **13**, No. 7, 1969–1983.
15. J. L. Lions and E. Magenes, *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–N.-Y., 1972 .
16. V. S. Manoranjan, R. Showalter, and H.-M. Yin, “On two-phase Stefan problem arising from a microwave heating process,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A*, 2006, **15**, No. 4, 1155–1168.
17. A. Matas and J. Merker, “Strong solutions of doubly nonlinear parabolic equations,” *Z. Anal. Anwend.*, 2012, **31**, No. 2, 217–235.
18. J. Merker, “Strong solutions of doubly nonlinear Navier—Stokes equations,” *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2011, **Supplement**, 1052–1060.
19. A. Pankov, *Bounded and Almost Periodic Solutions of Nonlinear Operator Differential Equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.
20. S. A. Popov and V. Reitmann, “Frequency domain conditions for finite dimensional projectors and determining observations for the set of amenable solutions,” *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2014, **34**, No. 1, 249–267.
21. L. Weiss and E. F. Infante, “On the stability of systems defined over a finite time interval,” *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1965, **54**, 44–48.
22. H.-M. Yin, “On Maxwell’s equations in an electromagnetic field with the temperature effect,” *SIAM J. Math. Anal.*, 1998, **29**, No. 3, 637–651.
23. D. A. Zyryanov and V. Reitmann, “Attractors in multivalued dynamical systems for the two-phase heating problem,” *Electron. J. Differ. Equ. Control Processes*, 2017, **4**, 118–138.

S. Popov
St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia
E-mail: psa.87@mail.ru

V. Reitmann
St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia
E-mail: vreitmann@aol.com

S. Skopinov
St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia
E-mail: serg_vologda@mail.ru