

## НЕСКОЛЬКО ЗАДАЧ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В МЕХАНИКЕ ГОРНЫХ ПОРОД

© 2018 г. А. М. МЕЙРМАНОВ, О. В. ГАЛЬЦЕВ, О. А. ГАЛЬЦЕВА

Аннотация. В этой статье мы рассматриваем несколько физических процессов в механике горных пород, которые описываются задачами со свободной границей. Некоторые из них известны (задачи Муската), другие совершенно новые (подземное выщелачивание и динамика трещин в подземных горных породах).

### ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение . . . . .	98
2. Задача Муската . . . . .	99
3. Подземное выщелачивание . . . . .	104
4. Динамика трещин в подземных горных породах . . . . .	120
Список литературы . . . . .	128

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи со свободной границей являются подмножеством тех дифференциальных уравнений в частных производных, которые посвящены начально-краевым задачам в неизвестных областях для разных видов дифференциальных уравнений. Термин «неизвестная область» подразумевает, что требуется определить как область, в которой необходимо найти решение, так и некоторое решение задачи. Для определения этой свободной границы нам необходимо еще одно граничное условие для тех же дифференциальных уравнений, что и в обычной краевой задаче. Это условие обычно называется *условием свободной границы*. Систематическое изучение подобных задач для эллиптических уравнений было начато В. Н. Монаховым в [28], и Л. И. Рубинштейном [3] для уравнения теплопроводности (задача Стефана). Позже появились несколько книг и статей, в большинстве своем посвященные задаче Стефана [14, 22].

Задачи со свободной границей для уравнений Навье—Стокса интенсивно изучались В. А. Солонниковым [35, 36].

Наиболее часто изучаемыми задачами со свободными границами являются задача Стефана, задача Хеле—Шоу и задача Муската. Причина заключается в том, что эти задачи возникают в физических процессах, которые очень важны с практической точки зрения. Например, задача Стефана описывает фазовые переходы в чистых материалах (плавление и кристаллизация) и имеет множество приложений в металлургии, а задача Хеле—Шоу и задача Муската описывают движение подземных жидкостей и играют важную роль в гидрологии и нефтяной промышленности. Среди этих трех задач задача Стефана наиболее изучена. Это подтверждается тем, что из всех задач со свободной границей задаче Стефана посвящено наибольшее количество публикаций.

С другой стороны, с практической точки зрения существуют несколько очень важных физических процессов в механике горных пород, которые связаны со свободными границами и которые были изучены только инженерами, например, подземное выщелачивание и динамика трещин в подземных горных породах. Подземное выщелачивание предполагает высверливание отверстий в залежи руды, после которого взрывной или гидравлический разрыв пласта может быть использован для создания открытых путей в залежи для проникновения туда выщелачивающего агента. Выщелачивающий агент закачивается в залежь, где он взаимодействует с рудой и частично ее

растворяет. Далее, раствор с рудой выкачивается на поверхность и обрабатывается. Данный метод позволяет извлекать металлы и соли из руды, не применяя традиционных методов горной промышленности, включающих буровзрывные работы, открытую или подземную добычи. Но существующие математические описания данного процесса очень примитивны и используют несколько постулатов о растворении горных пород, которые не имеют прочной основы в классической механике сплошных сред.

Последняя задача, которую мы здесь рассмотрим, возникает в моделировании трещин в подземных горных породах. До сих пор математической модели динамики трещин в подземных горных породах не было. В металлах, например, этот процесс хорошо изучен [5]. Разумеется, все еще открытый вопрос — существует ли вообще движение трещин или нет? Если оно есть, то это может объяснить причины возникновения землетрясений [18]. В состоянии покоя одна трещина может быть представлена связной областью заполненных жидкостями пор. Под воздействием регулярных тепловых импульсов, идущих от ядра Земли, механическое напряжение на границе между жидкостью и твердым скелетом растет до некоторого предела. За этим пределом граница трещины начинает смещаться (движущаяся свободная граница) и создает мощные сейсмические волны.

Для задачи Муската мы сначала рассматриваем две разные жидкости в поровом пространстве твердого тела и доказываем существование и единственность классического решения. Далее, при ограничительном условии, что твердое тело имеет периодическую структуру, мы выявляем гомогенизованную модель, которая также является задачей со свободной границей.

Ту же схему мы применяем для подземного выщелачивания и для динамики трещин. Мы сначала выводим математические модели, описывающие процессы на уровне пор (на микроскопическом уровне), и далее находим соответствующие гомогенизированные модели.

## 2. ЗАДАЧА МУСКАТА

Широко известно [33], что система фильтрации Дарси, описывающая макроскопическое течение несжимаемой вязкой жидкости — результат точной гомогенизации системы Стокса для несжимаемой вязкой жидкости, находящейся в периодическом поровом пространстве абсолютно жесткого твердого тела.

Более сложное макроскопическое движение двух несмешивающихся несжимаемых вязких жидкостей описывается задачей Муската. В данной модели требуется найти свободную границу  $\Gamma(t) \subset Q$ , которая разделяет две области  $Q^+(t) \subset Q$  и  $Q^-(t) \subset Q$ ,  $Q^+(t) \cup \Gamma(t) \cup Q^-(t) = Q$ , занятых разными жидкостями. В каждой области  $Q^\pm(t)$  движение жидкости описывается собственной системой фильтрации Дарси, а у свободной границы нормальные скорости жидкостей совпадают с нормальной скоростью свободной границы.

Следовательно, как и в случае фильтрации одной жидкости, мы можем ожидать, что задача Муската будет гомогенизацией начально-краевой задачи для системы Стокса с неоднородной жидкостью

$$\mu \Delta \mathbf{u}^\varepsilon + g \rho_\varepsilon \mathbf{e} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}^\varepsilon = 0, \quad \frac{d\rho_\varepsilon}{dt} = 0,$$

в периодическом поровом пространстве  $Q_\varepsilon$  абсолютно жесткого твердого тела  $Q$  со следующими граничным и начальным условиями

$$\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial Q_\varepsilon, \tag{2.1}$$

$$\rho_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \rho_\varepsilon^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in Q_\varepsilon, \tag{2.2}$$

где  $\rho_\varepsilon^0(\mathbf{x}) = \rho^+ = \text{const}$ ,  $\mathbf{x} \in Q_\varepsilon^+(0)$ ,  $\rho_\varepsilon^0(\mathbf{x}) = \rho^- = \text{const}$ ,  $\mathbf{x} \in Q_\varepsilon^-(0)$ ,  $\overline{Q_\varepsilon^+(0)} \cup \overline{Q_\varepsilon^-(0)} = \overline{Q_\varepsilon}$ ,  $\mu$  — это вязкость и  $g\mathbf{e}$  — ускорение свободного падения.

Из-за граничного условия (2.1) точки соприкосновения свободной границы и твердого скелета будут неизменно фиксированы в начальном положении. Численные расчеты предсказывают появление водяного следа («язычка»), который будет расти со временем (см. рис. 2.1). Постепенный рост количества капилляров (рис. 2.2) приводит к гомогенизации движения жидкости. Область, занятая водяным «язычком» в фиксированный момент времени, размягчается при гомогенизации, где концентрация  $s$  воды варьируется от 1 до 0 (рис. 2.3 и рис. 2.4).

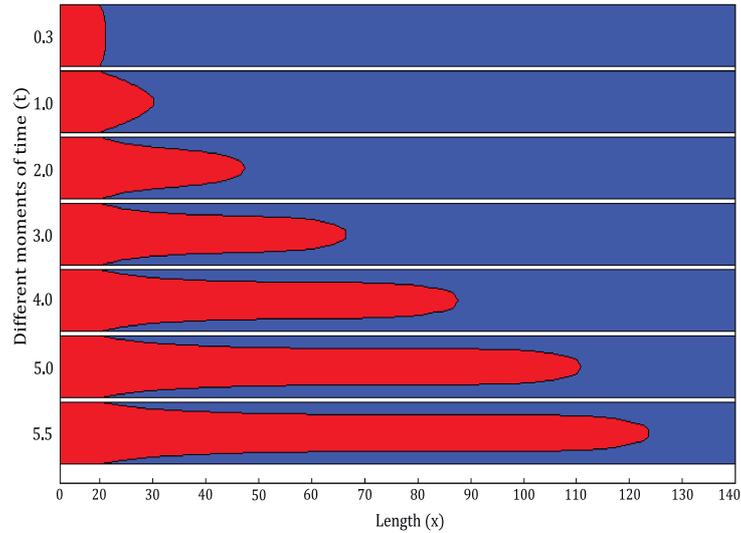


Рис. 2.1. Численная симуляция: последовательные положения свободной границы в одном капилляре.

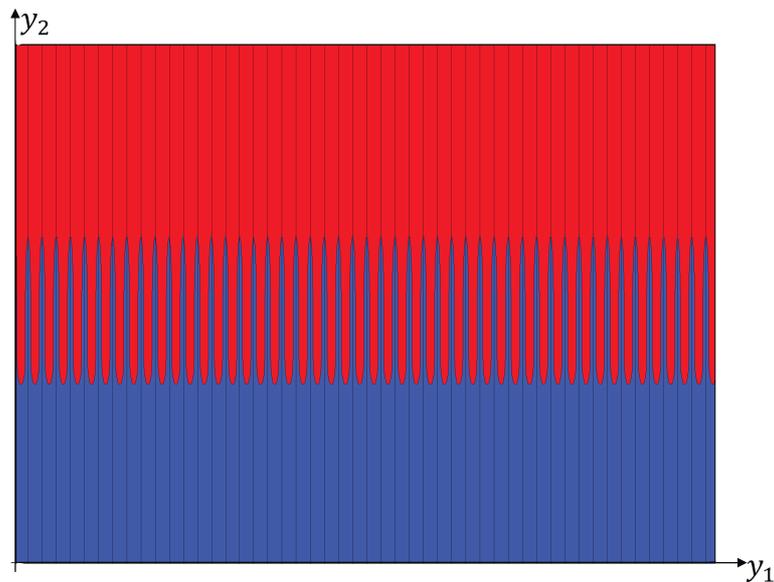


Рис. 2.2. Численная гомогенизация при  $t = 5.5$ .

Возвращаясь к задаче Муската, мы можем заметить, что решение такой задачи, соответствующей совместному движению двух разных жидкостей, имеет очень простую структуру. Свободная граница разделяет две жидкости и перемещается с постоянной скоростью (рис. 2.5).

Следовательно, мы не можем получить задачу Муската для движения жидкости в поровом пространстве абсолютно жесткого тела как гомогенизацию соответствующей начально-краевой задачи для системы Стокса с неоднородной жидкостью.

Но, если мы будем искать движение неоднородной жидкости в упругом твердом теле, то ситуация меняется. Точки соприкосновения свободной границы и твердого тела начинают смещаться, и гомогенизация сохраняет свободную границу, которая разделяет две жидкости [25].

Наш подход не зависит от размерности пространства  $\mathbb{R}^n$  и геометрии областей в нем. Поэтому мы ограничимся рассмотрением пространства  $\mathbb{R}^2$  с прямоугольными областями. В простейшем случае задача имеет следующую формулировку.

Пусть  $Q_f \subset Q \subset \mathbb{R}^2$ , где  $Q$  — единичный куб  $Q = \{\mathbf{x} : -1 < x_i < 1, i = 1, 2\}$ ,  $Q_f = \{\mathbf{x} : -1 < x_1 < 1, -1/2 < x_2 < 1/2\}$ . В безразмерных переменных эволюция потока определяется входным

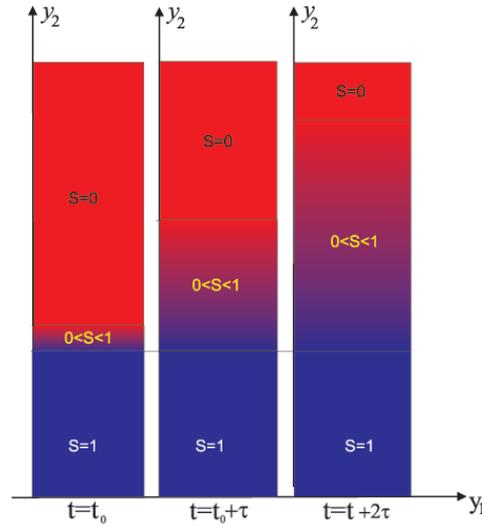


Рис. 2.3. Гомогенизация посредством увеличения количества капилляров. Концентрация воды  $s$  в течении времени (слева направо).

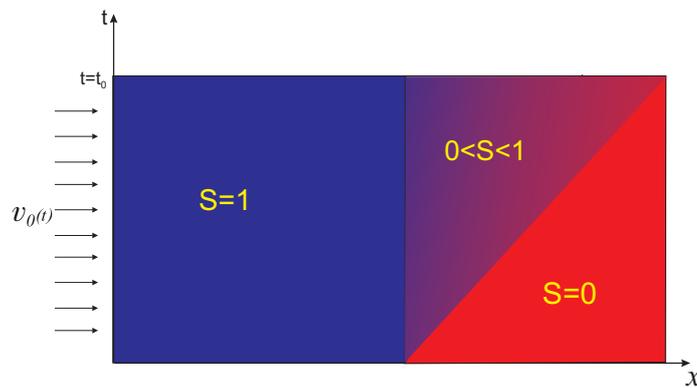


Рис. 2.4. Предел строгого численного масштабирования.

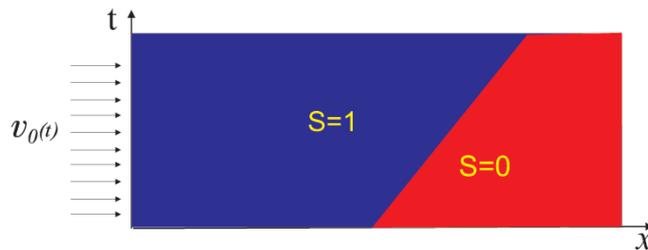


Рис. 2.5. Задача Муската

давлением и силой притяжения. Точнее, в этой задаче требуется найти скорость  $\mathbf{u}^f(\mathbf{x}, t)$ , давление  $p_f(\mathbf{x}, t)$ , и плотность  $\rho_f(\mathbf{x}, t)$  неоднородной жидкости в  $Q_f$ , смещение  $\mathbf{u}^s(\mathbf{x}, t)$  и давление  $p_s(\mathbf{x}, t)$  упругого скелета в  $Q_s = Q \setminus \overline{Q_f}$  из следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbb{P}_f + \rho_f \mathbf{e} = 0, \nabla \cdot \mathbf{u}^f = 0, \mathbf{x} \in Q_f, 0 < t < T, \\ \nabla \cdot \mathbb{P}_s + \rho_s \mathbf{e} = 0, \nabla \cdot \mathbf{u}^s = 0, \mathbf{x} \in Q_s, 0 < t < T, \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\frac{d\rho_f}{dt} \equiv \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{u}^f) = \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \mathbf{u}^f \cdot \nabla \rho_f = 0, \mathbf{x} \in Q_f, 0 < t < T, \quad (2.4)$$

где  $\mathbb{P}_f = 2\mu \mathbb{D}(\mathbf{u}^f) - p_f \mathbb{I}$ ,  $\mathbb{D}(\mathbf{u}^f) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}^f + (\nabla \mathbf{u}^f)^*)$ ,  $\mathbb{P}_s = 2\lambda \mathbb{D}(\mathbf{u}^s) - p_s \mathbb{I}$ ,  $\mu = \text{const}$  это вязкость жидкостей,  $\lambda = \text{const}$  — коэффициент Ламе,  $\mathbf{e}$  — данный вектор,  $\rho_s$  — плотность твердого тела и  $\mathbb{I}$  — единичный тензор.

Законы сохранения массы и момента диктуют совпадение скоростей и нормальных напряжений жидких и твердых компонентов

$$\mathbf{u}^f = \frac{\partial \mathbf{u}^s}{\partial t}, \quad \mathbb{P}_f \cdot \mathbf{n} = \mathbb{P}_s \cdot \mathbf{n} \quad (2.5)$$

на общей границе  $S = \partial Q_f \cap \partial Q_s$  с единичным нормальным вектором  $\mathbf{n}$ .

Граничное условие на боковой стороне  $S^0 = \{x_2 = \pm 1\}$  границы  $\partial Q$  для  $0 < t < T$  имеет форму

$$\mathbf{u}^s(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (2.6)$$

У «входных» и «выходных» границ  $S^\pm = \{\mathbf{x} \in \partial Q : x_1 = \mp 1\}$

$$\begin{cases} \mathbb{P}_s \cdot \mathbf{e}_1 = -p^+(\mathbf{x})\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{x} \in S_s^+, \quad \mathbb{P}_f \cdot \mathbf{e}_1 = -p^+(\mathbf{x})\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{x} \in S_f^+, \quad 0 < t < T, \\ \mathbb{P}_s \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \quad \mathbf{x} \in S_s^-, \quad \mathbb{P}_f \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \quad \mathbf{x} \in S_f^-, \quad 0 < t < T, \end{cases} \quad (2.7)$$

где  $p^+(\mathbf{x})$  — заданная функция,  $S_f^\pm = S^\pm \cap \partial Q_f$ ,  $S_s^\pm = S^\pm \cap \partial Q_s$ , и  $\mathbf{e}_i$  — единичный вектор оси  $x_i$  при  $i = 1, 2$ .

Для упрощения наших предположений мы переходим к однородным граничным условиям в  $S^\pm$

$$\mathbb{P}_i \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \quad \mathbf{x} \in S_i^\pm, \quad i = f, s, \quad 0 < t < T, \quad (2.8)$$

введя новое давление

$$p_f \rightarrow p_f - p^0(\mathbf{x}), \quad p^0(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} p^+(\mathbf{x})(1 - x_1). \quad (2.9)$$

С этим новым давлением динамические уравнения примут форму

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbb{P}_f + \mathbf{f} + \rho_f \mathbf{e} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}^f = 0, \quad \mathbf{x} \in Q_f, \quad 0 < t < T; \\ \nabla \cdot \mathbb{P}_s + \mathbf{f} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}^s = 0, \quad \mathbf{x} \in Q_s, \quad 0 < t < T, \end{cases} \quad (2.10)$$

где

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (1 - \chi(\mathbf{x}))\rho_s \mathbf{e} + \nabla p^0(\mathbf{x}), \quad (2.11)$$

$\chi(\mathbf{x}) = 1$ , для  $\mathbf{x} \in Q_f$ , и  $\chi(\mathbf{x}) = 0$ , для  $\mathbf{x} \in Q_s$ . Наконец,

$$\mathbf{u}^s(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in S^0. \quad (2.12)$$

Начальные и граничные условия для плотности тождественны заданию поверхности  $\Gamma_0$ , которая разделяет две подобласти  $Q_f^\pm(0)$ , изначально занятые жидкостями. Для простоты предположим, что

$$\Gamma^{(0)} = \{\mathbf{x} \in Q_f : x_1 = h(x_2), -\frac{1}{2} < x_2 < \frac{1}{2}\}, \quad (2.13)$$

$$-\frac{1}{2} + \delta < h(x_2) < \frac{1}{2} - \delta, \quad \text{для } -\frac{1}{2} < x_2 < \frac{1}{2} \quad (2.14)$$

с некоторым  $0 < \delta < 1$ .

Таким образом, мы можем ожидать, что свободная граница  $\Gamma(t)$  не соприкоснется с заданными границами  $S^\pm$  хотя бы в течении некоторого времени  $0 < t < T$ .

На границах  $S^\pm$  для  $0 < t < T$  и в начальный момент времени  $t = 0$ , плотность  $\rho_f$  является кусочно-постоянной и принимает два положительных значения, характеризующие различные фазы потока

$$\rho_f(\mathbf{x}, t) = \rho^\pm = \text{const} > 0, \quad \mathbf{x} \in S_f^\pm, \quad 0 < t < T, \quad (2.15)$$

$$\rho_f(\mathbf{x}, 0) = \rho_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in Q_f, \quad (2.16)$$

где  $\rho_0(\mathbf{x}) = \rho^\pm$  для  $\mathbf{x} \in Q_f^\pm(0)$ .

Для простоты предположим, что  $\rho^- \leq \rho_0(\mathbf{x}) \leq \rho^+$ . Если скорость  $\mathbf{u}^f(\mathbf{x}, t)$  достаточно гладка, тогда задача Коши

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}^f(\mathbf{x}, t), \quad t > t_0, \quad \mathbf{x}|_{t=t_0} = \xi$$

определяет отношение  $\mathbf{x} = \gamma(\xi, t; \mathbf{u}^f; t_0)$ ,  $\gamma : Q_f \rightarrow Q_f$ . А именно, свободная граница  $\Gamma(t)$  определяется как множество  $\Gamma(t) = \{\mathbf{x} \in Q_f : \mathbf{x} = \gamma(\xi, t; \mathbf{u}^f; 0), \xi \in \Gamma(0)\}$ , а подобласти  $Q_f^\pm(t) = \{\mathbf{x} \in Q_f : \rho_f(\mathbf{x}, t) = \rho^\pm\}$  — как множества

$$Q_f^\pm(t) = \{\mathbf{x} \in Q_f : \mathbf{x} = \gamma(\xi, t; \mathbf{u}^f; 0), \xi \in Q_f^\pm(0)\} \cap \{\mathbf{x} \in Q_f : \mathbf{x} = \gamma(\xi, t; \mathbf{u}^f; t_0), \xi \in S_f^\pm, t_0 > 0\}.$$

Мы показали, что преобразование, описанное уравнениями выше, сохраняет существование и единственность двух подобластей  $Q_f^\pm(t)$ , каждая из которых занята одной из жидкостей, разделенных в момент времени  $t > 0$  регулярной свободной границей  $\Gamma(t)$ . Следовательно, изучаемая задача равносильна нахождению  $\{\mathbf{u}, p_f, \mathbf{w}, p_s\}$  и движущейся границы  $\Gamma(t)$ .

В этом разделе мы используем принятую запись функциональных пространств и норм (см. [2]). Следовательно, для  $1 < q < \infty$

$$u \in L_q(\Omega) \Rightarrow \|u\|_{q,\Omega} = \left( \int_{\Omega} |u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty, \quad u \in L_\infty(\Omega) \Rightarrow \|u\|_{\infty,\Omega} = \lim_{q \rightarrow \infty} \|u\|_{q,\Omega} < \infty,$$

$$u \in W_q^1(\Omega) \Rightarrow \|u\|_{q,\Omega}^{(1)} = \left( \int_{\Omega} |u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} + \sum_{i=1}^2 \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

$$u \in \dot{W}_q^1(\Omega) \Rightarrow u \in W_q^1(\Omega), \text{ и } u(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$

$$u \in W_q^l(\Omega) \Rightarrow \|u\|_{q,\Omega}^{(l)} = \left( \int_{\Omega} |u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} + \sum_{|m|=l} \left( \int_{\Omega} |D^m u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

$$D^m u = \frac{\partial^{|m|} u}{\partial^{m_1} x_1 \dots \partial^{m_n} x_n}, \quad m = (m_1, \dots, m_n), \quad m_i \geq 0, \quad |m| = m_1 + \dots + m_n.$$

Далее мы введем пространство функций с производными, не являющимися целыми числами. Для простоты мы рассмотрим полупространства  $\mathbb{R}_f^2 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < \infty, x_2 > 1/2\}$ ,  $\mathbb{R}_s^2 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < \infty, x_2 < 1/2\}$ , с границей  $\mathbb{R} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < \infty, x_2 = 1/2\}$ . Пространство  $W_2^{l-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$  — это пространство всех функций  $v(x_1)$  с конечной нормой  $\|v\|_{2,\mathbb{R}}^{(l-\frac{1}{2})} = \left( \int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^{2l-1} |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$ , где  $\hat{v}$  — это преобразование Фурье  $v$ :  $\hat{v}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(x_1) e^{-i\xi x_1} dx_1$ . В силу [2, гл. 2, теорема 2.3] получим  $\|v\|_{2,\mathbb{R}}^{(l-\frac{1}{2})} \leq C_1 \|v\|_{2,\mathbb{R}^2}^{(l)} \leq C_2 \|v\|_{2,\mathbb{R}}^{(l-\frac{1}{2})}$ ,  $j = f, s$ .

Для гладких функций мы определяем нормы  $|u|_{\Omega}^{(0)} = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |u(\mathbf{x})|$ ,  $\langle u \rangle_{\Omega}^{(\alpha)} = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|}{|x - y|^\alpha}$ . Мы говорим, что функция  $u(\mathbf{x})$  принадлежит пространству  $C^\alpha(\bar{\Omega})$ , если  $|u|_{\Omega}^{(\alpha)} = |u|_{\Omega}^{(0)} + \langle u \rangle_{\Omega}^{(\alpha)} < \infty$ , функция  $u(\mathbf{x})$  принадлежит пространству  $C^k(\bar{\Omega})$ , если  $|u|_{\Omega}^{(k)} = \sum_{|m|=0}^k |D^m u|_{\Omega}^{(0)} < \infty$ , и функция  $u$  принадлежит пространству  $C^{k+\alpha}(\bar{\Omega})$ , если  $|u|_{\Omega}^{(k+\alpha)} = |u|_{\Omega}^{(k)} + \sum_{|m|=0}^k |D^m u|_{\Omega}^{(\alpha)} < \infty$ . Мы говорим, что поверхность  $\Gamma \in \Omega$  является  $C^{k+\alpha}$ -регулярной, если в локальных координатах она представляется через  $C^{k+\alpha}$ -регулярные функции.

Если  $u = u(\mathbf{x}, t)$  и  $u(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{B}$  для всех  $0 < t < T$ , тогда  $u \in L_q((0, T); \mathbb{B}) \iff \int_0^T \|u(\cdot, t)\|_{\mathbb{B}}^q dt < \infty$ , и для  $q = \infty$   $u \in L_\infty((0, T); \mathbb{B}) \iff \sup_{0 < t < T} \|u(\cdot, t)\|_{\mathbb{B}} < \infty$ .

Наконец,  $u \in C^{2,1}(\bar{\Omega}_T)$ ,  $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ , если  $\max_{0 < t < T} (|u(\cdot, t)|_{\Omega}^{(2)} + |\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t)|_{\Omega}^{(0)}) < \infty$ .

Для любой  $0 < \delta < 1$  мы полагаем  $Q^{(\delta)} = \{\mathbf{x} \in Q : -1 + \delta < x_1 < 1 - \delta\}$ ,  $Q_f^{(\delta)} = Q^{(\delta)} \cap Q_f$ ,  $G^{(\delta)} = Q^{(\delta)} \times (0, T)$ ,  $G_f = Q_f \times (0, T)$ ,  $G_f^{(\delta)} = Q_f^{(\delta)} \times (0, T)$ .

Наш основной результат — следующий:

**Теорема 2.1.** При условиях

$$\|\mathbf{f}\|_{\infty, Q} = C_0 < \infty, \quad \Gamma(0) \in C^{1+\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

задача (2.4)–(2.6), (2.8), (2.10), (2.12), (2.15), (2.16) имеет единственное решение на отрезке  $[0, T)$  для некоторого  $T > 0$ . Компоненты этого решения имеют следующие свойства:

- (i) Для любого  $0 < \delta < 1$ , и  $0 < \alpha < 1$ , скорость  $\mathbf{u}$  и давление  $p$  удовлетворяют условиям регулярности  $\mathbf{u} \in L_{\infty}(0, T; W_2^3(Q^{(\delta)})) \cap L_{\infty}(0, T; C^{1+\alpha}(Q^{(\delta)}))$ ,  $p \in L_{\infty}(0, T; W_2^2(Q^{(\delta)}))$ , уравнения (2.10) почти всюду в  $Q \times (0, T)$ , граничные условия (2.6), (2.15), начальные условия (2.12) и (2.16) в обычном смысле, граничные условия (2.5) и (2.8) в смысле распределений, в качестве интегрального тождества  $\int_{\Omega} (\mathbb{P}(\mathbf{u}(t), p(t)) : \mathbb{D}(\varphi) + \mathbf{f} \cdot \varphi) dx = 0$  почти для всех  $0 < t < T$  и для любых гладких соленоидальных функций  $\varphi$ , обращающихся в нуль в  $\mathbf{x} \in S^0$ .
- (ii) Свободная граница  $\Gamma(t)$  является поверхностью класса  $C^{1,\alpha}$  в каждый момент времени  $t \in [0, T)$ , а нормальная скорость  $V_n(\mathbf{x}, t)$  свободной границы по направлению своей нормали  $\mathbf{n}$  в позиции  $\mathbf{x}$  равномерна ограничена,  $\sup_{\substack{t \in (0, T) \\ \mathbf{x} \in \Gamma(t)}} |V_n(\mathbf{x}, t)| < \infty$ .
- (iii) Плотность  $\rho$  имеет ограниченный вид,  $\rho \in L_{\infty}(0, T; BV(Q^{(\delta)})) \cap BV(Q^{(\delta)} \times (0, T))$ , и удовлетворяет уравнению переноса (2.4) в смысле распределений  $\int_{\Omega_T} \rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \psi \right) dx dt = - \int_{\Omega} \rho_0(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}, 0) dx$  для любой гладкой функции  $\psi$ , обращающейся в нуль при  $t = T$  и  $\mathbf{x} \in S^{\pm}$ .

Время  $T$  существования классического решения зависит от поведения свободной границы  $\Gamma(t)$ . А именно, пусть  $\delta^{\pm}(t)$  будет расстоянием от  $\Gamma(t)$  до границы  $S^{\pm}$  и  $\delta(t) = \min(\delta^-(t), \delta^+(t))$ . Тогда  $\delta(t) > 0$  для всех  $0 < t < T$  и  $\delta(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow T$ .

Теоремы о существовании обобщенных решений системы Навье—Стокса для неоднородных несжимаемых жидкостей были получены, например, в [1, 2, 6, 8, 13, 15, 23, 31, 33, 34] (без детального анализа множества, в котором плотность разрывна). Существование и единственность классического решения уравнений Стокса для неоднородной жидкости с граничными условиями Дирихле были доказаны в [7], а с граничными условиями Неймана — в [27]. Слабые решения задачи (2.3)–(2.16) на микроскопическом уровне для произвольного гладкого периодического порового пространства с последующей гомогенизацией были рассмотрены в [23]. Назовем полученную гомогенизованную задачу со свободной границей, описывающую движение двух несмешиваемых несжимаемых, вязких жидкостей на макроскопическом уровне, *обобщенной задачей Муската*.

### 3. ПОДЗЕМНОЕ ВЫЩЕЛАЧИВАНИЕ

#### 3.1. Микроскопическое описание.

3.1.1. *Математическая модель в дифференциальных уравнениях.* В безразмерных переменных  $\mathbf{x} \rightarrow \frac{\mathbf{x}}{L}$ ,  $t \rightarrow \frac{t}{T}$ ,  $\mathbf{v} \rightarrow \frac{T}{L} \mathbf{v}$ ,  $p \rightarrow p^* p$ , где  $L$  — это характеристический размер рассматриваемой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ,  $T$  — характеристическое время процесса, поведение жидкости в поровом пространстве  $\Omega^f(t) \subset \Omega$  описывается динамическим уравнением Стокса

$$\alpha_{\mu} \Delta \mathbf{v} - \nabla p = 0, \quad (3.1)$$

для давления  $p$  и скорости  $\mathbf{v}$  жидкости.

Возьмем уравнение неразрывности в обобщенной форме [37] как уравнение неразрывности обобщенного движения сплошной среды, содержащей твердый скелет  $\Omega^s(t) \subset \Omega$ , где  $\mathbf{v} \equiv 0$ , и поровую жидкость:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \chi \mathbf{v}) = 0, \quad (3.2)$$

где  $\chi$  является характеристической функцией порового пространства:  $\chi(\mathbf{x}, t) = 1$  в  $\Omega^f(t)$  и  $\chi(\mathbf{x}, t) = 0$  в  $\Omega^s(t)$ ,  $\Omega = \Omega^f(t) \cup \Gamma(t) \cup \Omega^s(t)$ ,  $\Gamma(t) = \Omega^f(t) \cap \Omega^s(t)$ .

Уравнение (3.2) интерпретируется в смысле распределений. Например, как интегральное тождество  $\int_{\Omega_T} \varrho \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \chi \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi \right) dx dt = 0$  для плотности  $\varrho(\mathbf{x}, t) = \chi(\mathbf{x}, t)\varrho_f + (1 - \chi(\mathbf{x}, t))\varrho_s$ , которое

соблюдается для любого гладкого  $\varphi(\mathbf{x}, t)$ , обращающегося в нуль в  $S^+$ ,  $S^-$ ,  $t = 0$  и  $t = T$ .

В частности [37],  $(v_n - d_n)\varrho_f = -d_n\varrho_s$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma(t)$ ,  $t > 0$ , или

$$v_n = -d_n \delta, \quad \mathbf{x} \in \Gamma(t), \quad t > 0, \quad (3.3)$$

где  $d_n$  — нормальная скорость  $\Gamma(t)$  по направлению к внешней нормали  $\Omega_f(t)$   $\mathbf{n}$ , и  $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  — это нормальная скорость жидкости.

Наконец, уравнение неразрывности в дифференциальной форме в поровом пространстве  $\Omega_f(t)$  для  $t > 0$  принимает вид

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (3.4)$$

Концентрация  $c$  реагента определяется уравнением переноса

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \alpha_c \Delta c, \quad (3.5)$$

и концентрации  $c_1, c_2, \dots, c_n$  продуктов химических реакций определяются уравнениями переноса

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c_i = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.6)$$

в  $\Omega_f(t)$  для  $t > 0$ .

В (3.1)–(3.6)  $\alpha_\mu = \frac{\mu}{T L g \rho^0}$ ,  $\alpha_c = \frac{D T}{L^2}$ ,  $p^* = L g \rho^0$ ,  $\delta = \frac{(\varrho_s - \varrho_f)}{\varrho_f}$ ,  $\mu$  — это вязкость жидкости,  $\chi(\mathbf{x}, t)$  — характеристическая функция порового пространства ( $\chi = 1$  в  $\Omega_f(t)$  и  $\chi = 0$  в  $\Omega_s(t)$ ),  $\varrho_s$  и  $\varrho_f$  являются безразмерными плотностями твердого скелета и поровой жидкости соответственно, коррелирующие со средней плотностью воды  $\rho^0$ ,  $L$  — характеристический размер рассматриваемой области,  $T$  — характеристическое время процесса,  $g$  — значение ускорения свободного падения,  $\rho_c$  — плотность активного компонента и  $D$  — коэффициент диффузии.

Теперь мы попробуем сформулировать основные граничные условия для концентраций  $c$ ,  $c_1, c_2, \dots, c_n$  на свободной границе. Для начала выведем эти условия для одной пространственной переменной.

А именно, пусть поровое пространство задано как  $\Omega_f(t) = \{x : 0 < x < X(t)\}$  и  $\Gamma(t) = \{x : x = X(t)\}$  будет свободной границей (see Fig. 3.1).

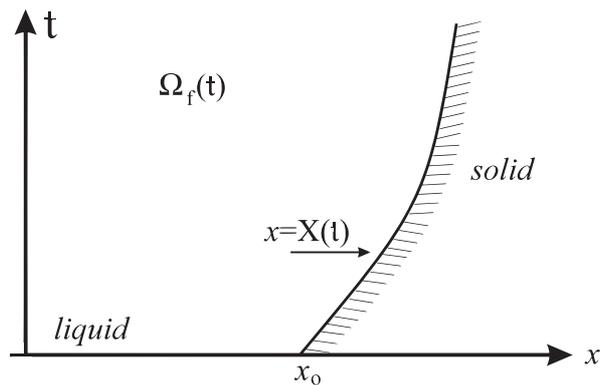


Рис. 3.1. Одномерная структура

Дано

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < X(t), \\ \frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} = \alpha_c \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad 0 < x < X(t), \\ \alpha_c \frac{\partial c}{\partial x} - v(t) c = 0 \text{ при } x = 0, \\ \frac{\partial c_i}{\partial t} + v \frac{\partial c_i}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < X(t), \quad c_i = 0 \text{ при } x = 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Выражением  $M(t) = \int_0^{X(t)} c(x,t)dx$ ,  $M_i(t) = \int_0^{X(t)} c_i(x,t)dx$ ,  $i = 1, \dots, n$  мы обозначаем суммарные количества концентрации реагента  $c$  и концентраций  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , продуктов химических реакций в  $\Omega_f(t)$ .

Сначала мы рассчитываем скорость изменения этих значений во времени:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \frac{dX}{dt} c(X(t), t) + \int_0^{X(t)} \frac{\partial c}{\partial t}(x, t) dx = \frac{dX}{dt} c(X(t), t) + \int_0^{X(t)} \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_c \frac{\partial c}{\partial x}(x, t) - v(t) c(x, t)) dx = \\ &= \left( \frac{dX}{dt}(t) - v(t) \right) c(X(t), t) + \alpha_c \frac{\partial c}{\partial x}(X(t), t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dM_i}{dt} &= \frac{dX}{dt} c_i(X(t), t) + \int_0^{X(t)} \frac{\partial c_i}{\partial t}(x, t) dx = \frac{dX}{dt} c_i(X(t), t) - \int_0^{X(t)} v(t) \frac{\partial c_i}{\partial x}(x, t) dx = \\ &= \left( \frac{dX}{dt}(t) - v(t) \right) c_i(X(t), t) = \frac{\varrho_s}{\varrho_f} \frac{dX}{dt} c_i(X(t), t), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Для вычисления интегралов мы использовали интегрирование по частям, отношение (3.3) и граничные условия (3.7) при  $x = 0$ .

Следовательно,

$$\frac{dM}{dt} = \left( \frac{dX}{dt} - v \right) c + \alpha_c \frac{\partial c}{\partial x}, \quad \frac{dM_i}{dt} = \frac{\varrho_s}{\varrho_f} \frac{dX}{dt} c_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{в } x = X(t). \quad (3.8)$$

Последние отношения означают, что изменения в концентрациях продуктов химических реакций происходят только в  $\Gamma(t)$ . Величины  $\frac{dM}{dt}$ ,  $\frac{dM_i}{dt}$ ,  $i = 1, \dots, n$  называются *скоростями химических реакций* и также определяются по законам химической кинетики как:

$$\frac{dM}{dt} = -\beta c, \quad \frac{dM_i}{dt} = \beta \beta_i c, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.9)$$

где  $\beta$ ,  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  — заданные константы.

С другой стороны, закон сохранения массы подразумевает

$$\varrho_s \frac{dX}{dt} - \varrho_c \frac{dM}{dt} = \sum_{i=1}^n \varrho_i \frac{dM_i}{dt}, \quad (3.10)$$

где  $\varrho_c$ ,  $\varrho_1, \dots, \varrho_n$  — это безразмерные плотности реагента и продуктов химических реакций.

Отношения (3.8)–(3.10) приводят к

$$\frac{dX}{dt}(t) = \beta \gamma c(X(t), t), \quad c(X(t), t) \left( c_i(X(t), t) - c_i^0 \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.11)$$

$$\left( \frac{dX}{dt}(t) + \beta - v(t) \right) c(X(t), t) + \alpha_c \frac{\partial c}{\partial x}(X(t), t) = 0, \quad (3.12)$$

где  $\varrho_s \gamma = \sum_{i=1}^n \varrho_i \beta_i - \varrho_c$ ,  $c_i^0 = \frac{\varrho_f \beta_i}{\gamma \varrho_s}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Возвращаясь к (3.4)–(3.6), мы заключаем, что в общем случае законы сохранения массы для концентраций на свободной границе имеют форму

$$(d_n + \beta - v_n) c + \alpha_c \frac{\partial c}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma(t), \quad (3.13)$$

$$c(c_i - c_i^0) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \mathbf{x} \in \Gamma(t), \quad (3.14)$$

$$d_n = \beta \gamma c, \quad \mathbf{x} \in \Gamma(t), \quad (3.15)$$

где  $d_n$  — это нормальная скорость  $\Gamma(t)$  по направлению к внешней нормали  $\Omega_f(t)$   $\mathbf{n}$ ,  $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  — вязкость жидкости, а  $\frac{\partial c}{\partial n} = \nabla c \cdot \mathbf{n}$  — нормальная производная  $c$  в  $\Gamma(t)$ .

Остается дополнить эти дифференциальные уравнения отсутствующими граничными условиями на известных границах  $S^\pm$ ,  $S^0$ ,  $\partial\Omega = S^+ \cup S^- \cup S^0$  и на свободной границе  $\Gamma(t)$ , а также начальными условиями.

На свободной границе  $\Gamma(t)$ , касательная скорость поровых жидкостей обращается в нуль:

$$\mathbf{v} - v_n \mathbf{n} = 0. \quad (3.16)$$

На границах  $S^\pm$ , которые моделируют закачные скважины ( $S^+$ ) и откачные скважины ( $S^-$ ), мы предполагаем, что нормальное напряжение в жидкости пропорционально заданному давлению

$$(2\alpha_\mu \mathbb{D}(\mathbf{v}) - p\mathbb{I}) \cdot \mathbf{n} = -p^\pm(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}, \quad (3.17)$$

где  $\mathbb{I}$  — единичная матрица,  $p^\pm(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}$  — нормальное давление и

$$\mathbb{D}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^*).$$

В закачных скважинах  $S^+$  концентрации реагента и продуктов химических реакций заданы величинами:

$$c = c^+(\mathbf{x}, t), \quad c_i = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.18)$$

В откачных скважинах  $S^-$

$$\nabla c \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3.19)$$

а на границе проницаемости жидкости  $S^0$

$$\mathbf{v} = 0, \quad \nabla c \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (3.20)$$

Задача дополняется начальными условиями

$$\Gamma(0) = \Gamma_0, \quad c(\mathbf{x}, 0) = c_0(\mathbf{x}), \quad c_i(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \mathbf{x} \in \Omega_0. \quad (3.21)$$

Система дифференциальных уравнений (3.1), (3.4), (3.5), (3.6), дополненная граничными и начальными условиями (3.3), (3.13)–(3.21), дает желаемую математическую модель, описывающую выщелачивание на уровне пор.

Заметим, что задача (3.1), (3.3)–(3.5), (3.13), (3.15)–(3.18), (3.19)–(3.21) для скорости и давления жидкости, концентрации активной примеси и свободной границы независима от задачи (3.6), (3.14), (3.18), (3.21) для концентраций продуктов химических реакций.

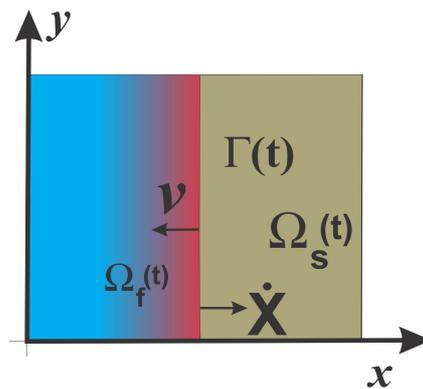


Рис. 3.2. Одномерное движение

**3.1.2. Численные расчеты.** В случае с одной пространственной переменной (см. рис. 3.2), дифференциальные уравнения задачи (3.1)–(3.3), (3.21) для несжимаемой жидкости в области  $0 < x < X(t)$  для  $t > 0$  принимают форму

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} &= \alpha_c \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

Граничные и начальные условия (3.13)–(3.21) преобразуются в

$$\begin{aligned} p(0, t) &= p^+(t), \quad c(0, t) = c^+(t), \quad t > 0, \\ \frac{dX}{dt} &= \beta \gamma c, \quad x = X(t), \quad t > 0, \\ \left(\frac{dX}{dt} + \beta - v\right) c + \alpha_c \frac{\partial c}{\partial x} &= 0, \quad x = X(t), \quad t > 0, \\ v(t) &= -\frac{dX}{dt}(t) \frac{(\rho_s - \rho_f)}{\rho_f}, \quad t > 0, \\ X(0) &= X_0, \quad c(x, 0) = c_0(x), \quad 0 < x < X_0. \end{aligned}$$

Для  $\gamma = 1$ ,  $D = 2822$  мкм<sup>2</sup>/с,  $L = 50$  мкм,  $T = 1$  с, и разных значений  $\beta$  и  $c^+$  можно рассчитать концентрацию  $c$  реагента на свободной границе и положение этой границы (см. рис. 3.3–3.6).

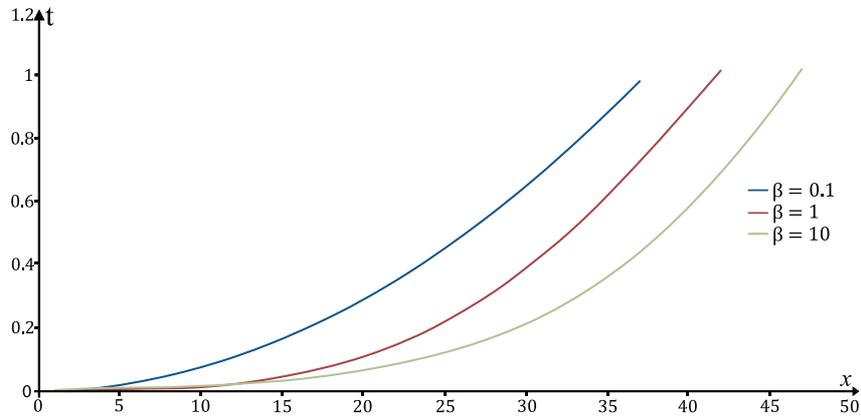


Рис. 3.3. Расположение свободной границы для разных  $\beta$

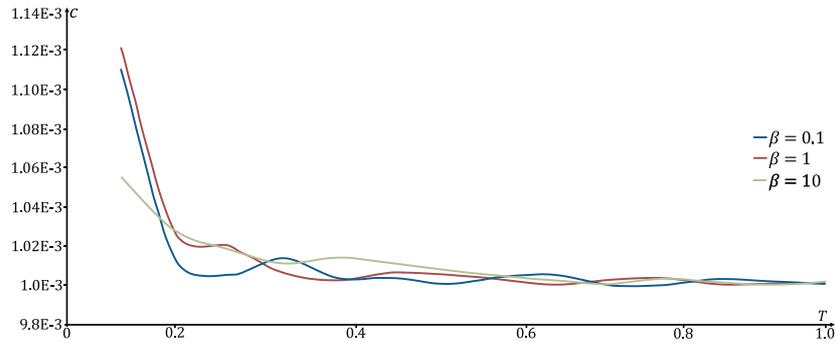


Рис. 3.4. Концентрация реагента на свободной границе для разных  $\beta$

Для случая двух пространственных переменных система дифференциальных уравнений в области  $\Omega = \{0 < x_1 < L, 0 < x_2 < H\}$  (см. рис. 3.7) для скорости жидкости  $\mathbf{v}$ , давления жидкости  $p$  и концентрации  $c$  реагента имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha_\mu \Delta \mathbf{v} - \nabla p &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c &= \alpha_c \Delta c \end{aligned}$$

Она дополняется граничными условиями на свободной границе  $\Gamma(t)$  для  $t > 0$ :

$$(d_n + \beta - v_n) c + \alpha_c \frac{\partial c}{\partial n} = 0, \quad v_n = -d_n \delta, \quad \mathbf{v} - v_n \cdot \mathbf{n} = 0, \quad d_n = \beta \gamma c,$$

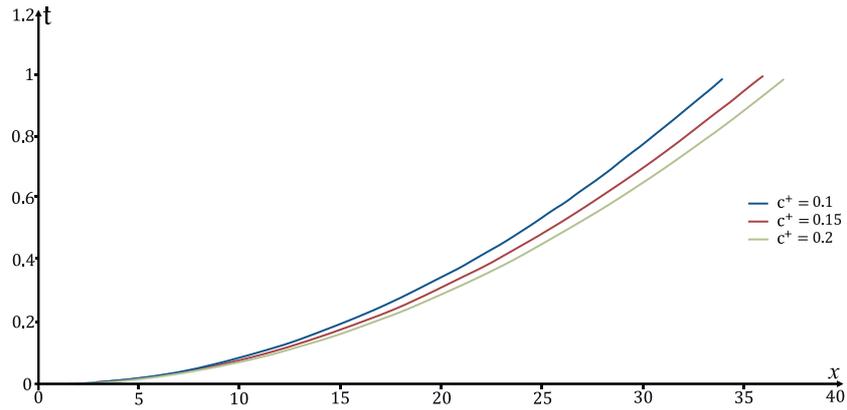


Рис. 3.5. Расположение свободной границы для разных  $c^+$

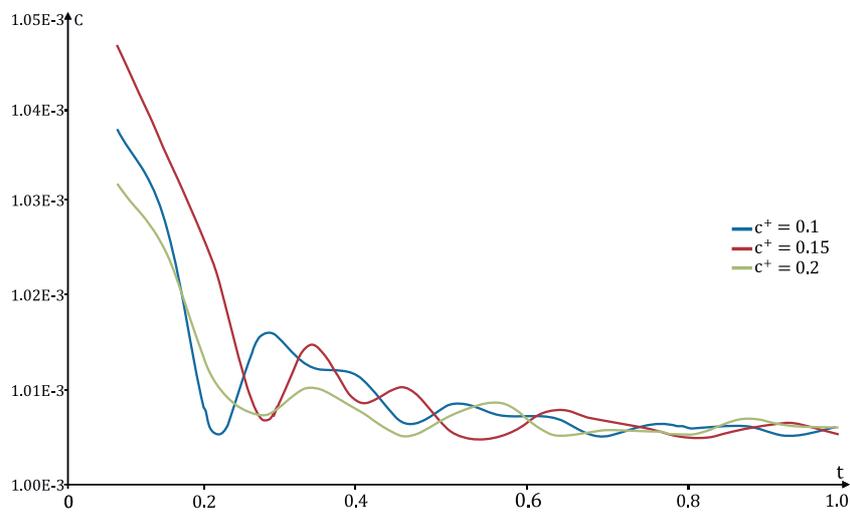


Рис. 3.6. Концентрация реагента на свободной границе для разных  $c^+$

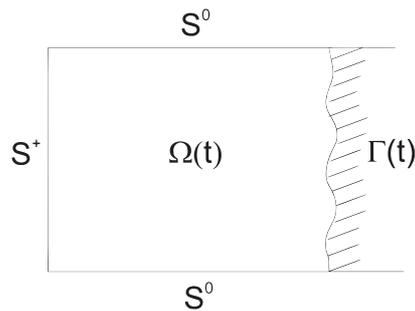


Рис. 3.7. Двумерная область

На границе  $S^+$ , которая моделирует скважину:

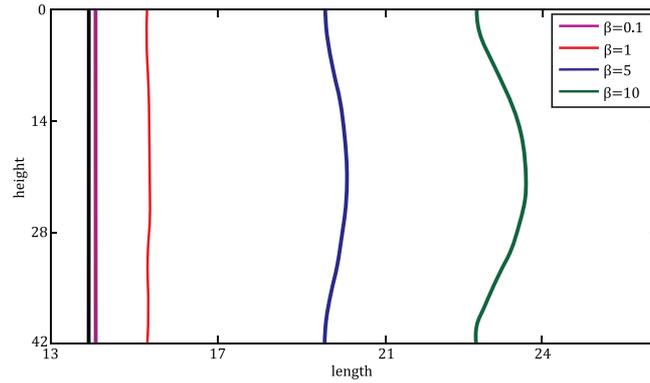
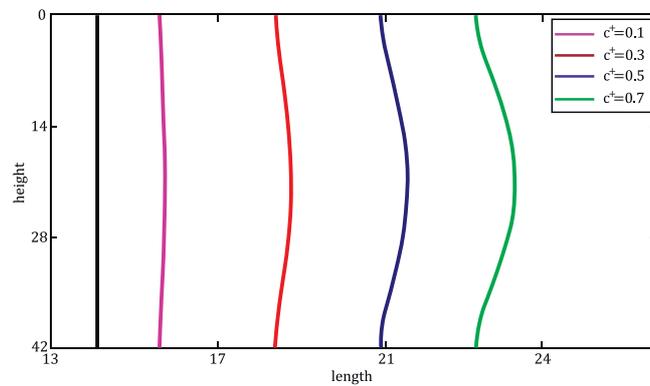
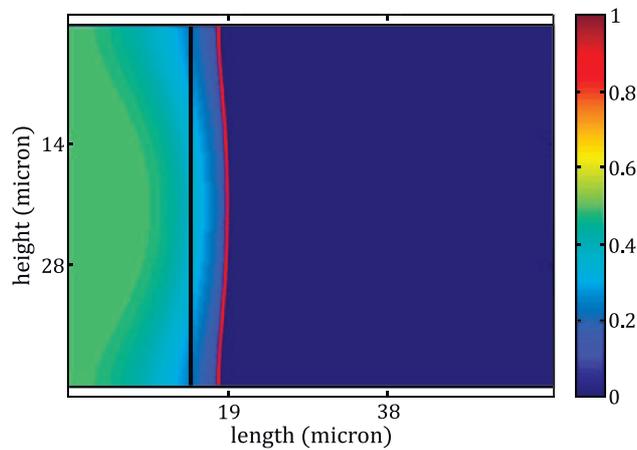
$$(2\alpha_\mu \mathbb{D}(\mathbf{v}) - p\mathbb{I}) \cdot \mathbf{n} = -p^+ \mathbf{n}, \quad c = c^+.$$

На границе непроницаемости жидкости  $S^0$

$$\mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial n} = 0.$$

Задача дополняется начальными условиями

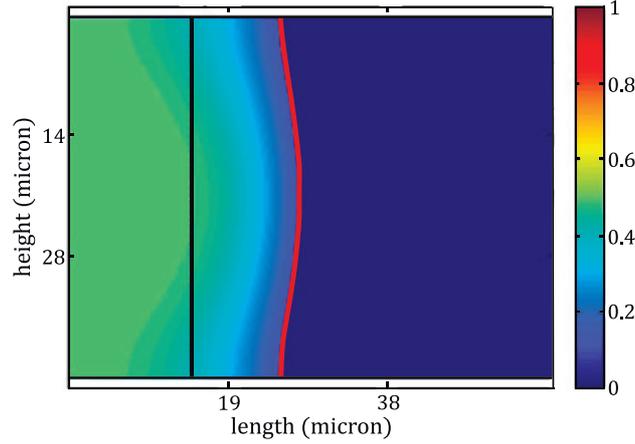
$$\Gamma(0) = \Gamma_0, \quad c(x, y, 0) = c_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_0.$$

Рис. 3.8. Расположение свободной границы для разных  $\beta$ Рис. 3.9. Расположение свободной границы для разных  $c^+$ Рис. 3.10. Концентрация реагента в момент  $t = 0,002$  с

Мы рассчитали положение свободной границы и концентрацию реагента (см. рис. 3.10-3.11) при  $D = 2822$  мкм<sup>2</sup>/с,  $L = 56$  мкм,  $H = 42$  мкм,  $T = 0,01$  с,  $\Gamma_0 = 14$  мкм,  $c_0 = 0$ ,  $p^+ = 1000$ ,  $\gamma = 1$ , и разных значений  $\beta$  и  $c^+$  (см. рис. 3.8-3.9).

На рис. 3.8, черная полоса показывает начальное положение свободной границы, а цветные полосы показывают положение свободной границы в момент времени  $t = 0,01$  с для разных  $\beta = [0,1; 1; 5; 10]$ .

На рис. 3.9 черная полоса показывает начальное положение свободной границы, а цветные полосы показывают положение свободной границы в момент времени  $t = 0,01$  с для разных  $c^+ = [0,1; 0,3; 0,5; 0,7]$ .


 Рис. 3.11. Концентрация реагента в момент  $t = 0,0052$  с

### 3.2. Макроскопическое описание.

3.2.1. *Математическая модель как система интегральных тождеств.* Пусть  $\chi(\mathbf{x}, t)$  будет характеристической функцией порового пространства:  $\chi = 1$  в  $\Omega^f(t)$  и  $\chi = 0$  в  $\Omega^s(t)$ .

Сначала введем новое давление  $q = p - p^0(\mathbf{x}, t)$ , где  $p^0(\mathbf{x}, t) = p^\pm(\mathbf{x}, t)$  при  $\mathbf{x} \in S^\pm$ . При этом новом давлении динамическое уравнение (3.1) и граничное условие (3.9) принимают форму

$$\nabla \cdot (\alpha_\mu \mathbb{D}(\mathbf{v}, x)) - \nabla q = \mathbf{f} \equiv \nabla p^0, \quad \mathbf{x} \in \Omega^f(t), \quad 0 < t < t_0, \quad (3.22)$$

$$(\alpha_\mu \mathbb{D}(\mathbf{v}, x) - q \mathbb{I}) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in S^\pm, \quad 0 < t < t_0. \quad (3.23)$$

Чтобы получить интегральное тождество для скорости, мы умножаем уравнение Стокса (3.22) на произвольную гладкую функцию  $\varphi(\mathbf{x}, t)$ , обращающуюся в нуль в  $\Gamma(t)$ , и интегрируем в области  $\Omega^f(t)$ :

$$\int_{\Omega^f(t)} (\alpha_\mu \mathbb{D}(\mathbf{v}, x) : \mathbb{D}(\varphi, x) - q \nabla \cdot \varphi + \mathbf{f} \cdot \varphi) dx = 0. \quad (3.24)$$

Здесь  $\mathbb{D}(\mathbf{v}, x) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^*)$ ,  $D_{ij}(\mathbf{v}, x) = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$ , и  $\mathbb{D}(\mathbf{v}, x) : \mathbb{D}(\varphi, x) = \sum_{i,j=1}^3 D_{ij}(\mathbf{v}, x) D_{ji}(\varphi, x)$ .

Уравнение неразрывности (3.2) и граничное условие (3.3) равносильны интегральному тождеству

$$\int_{\Omega_{t_0}} \left( (\chi \rho_f + (1 - \chi) \rho_s) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho_f \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi \right) dx dt = 0, \quad (3.25)$$

которое верно для произвольной гладкой функции  $\varphi$ , обращающейся в нуль на границах  $S^+$  и  $S^-$  в моменты  $t = 0$  и  $t = t_0$ . В (3.23)  $\Omega_{t_0} = \Omega \times (0, T) \subset \mathbb{R}^4$ .

Уравнение диффузии (3.5) вместе с граничными условиями (3.13), (3.19) и начальным условием (3.21) равносильно интегральному тождеству

$$\int_{\Omega_{t_0}} \chi \left( (c + \frac{1}{\gamma}) \frac{\partial \xi}{\partial t} - (\alpha_c \nabla c - \mathbf{v} c) \cdot \nabla \xi \right) dx dt = - \int_{\Omega} \chi_0(\mathbf{x}) \left( c_0(\mathbf{x}) + \frac{1}{\gamma} \right) \xi(\mathbf{x}, 0) dx, \quad (3.26)$$

которое верно для всех гладких функций  $\xi$ , равных нулю при  $t = t_0$  и на границах  $S^\pm$ .

Наконец, уравнения переноса (3.6) вместе с граничными и начальными условиями (3.14), (3.21) равносильны интегральным тождествам

$$\int_{\Omega_{t_0}} \chi \left( c_i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \left( c_i - \frac{\rho_s c_i^0}{\rho_s - \rho_f} \right) \mathbf{v} \cdot \nabla \psi \right) dx dt = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.27)$$

для произвольных гладких функций  $\psi$ , обращающихся в нуль на границе  $S^-$  и в момент  $t = t_0$ .

Для проверки этих тождеств стоит просто снова проинтегрировать (3.26) и (3.27), используя теорему Стокса в виде

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{t_0}} \chi \left( A \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{B} \cdot \nabla \psi \right) dx dt &= \int_0^{t_0} \int_{\Omega^f(t)} \left( A \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{B} \cdot \nabla \psi \right) dx dt = \\ &= - \int_0^{t_0} \int_{\Omega^f(t)} \psi \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{B} \right) dx dt + \int_0^{t_0} \int_{\Gamma(t)} \psi \left( \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} - A d_n \right) \sin \omega \, d\sigma dt. \end{aligned}$$

Здесь  $A(\mathbf{x}, 0) = 0$ ,  $\mathbf{n}$  — внешняя единичная нормаль  $\Omega^f(t)$  к  $\Gamma(t)$  в  $\mathbb{R}^3$ ,  $\omega$  — угол между внешней единичной нормалью  $\nu$  к  $\Gamma_{t_0} = \bigcup_{0 < t < t_0} \Gamma(t)$  в  $\mathbb{R}^4$  и осью времени  $t$ .

Например, чтобы вывести (3.27), мы умножаем дифференциальное уравнение (3.6) на произвольные гладкие функции  $\psi$ , обращающиеся в нуль на границе  $S^-$  и в момент  $t = t_0$ , интегрируем в области  $\Omega_{t_0}$ , и используем теорему Стокса и граничные условия (3.3), (3.14)  $\frac{\rho_s}{(\rho_s - \rho_f)} v_n = v_n - d_n$ , и  $c_i = c_i^0$ , когда мы получаем интеграл в области  $\Gamma(t)$ .

Действительно,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_{t_0}} \chi \psi \left( \frac{\partial c_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c_i \right) dx dt = \int_0^{t_0} \int_{\Omega^f(t)} \psi \left( \frac{\partial c_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c_i \right) dx dt = \\ &= - \int_0^{t_0} \int_{\Omega^f(t)} c_i \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \psi \right) dx dt + \int_0^{t_0} \int_{\Gamma(t)} \psi c_i (v_n - d_n) \sin \omega \, d\sigma dt = \\ &= - \int_0^{t_0} \int_{\Omega^f(t)} c_i \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \psi \right) dx dt + \int_0^{t_0} \int_{\Gamma(t)} \psi \frac{c_i^0 \rho_s}{(\rho_s - \rho_f)} v_n \sin \omega \, d\sigma dt = \\ &= - \int_0^{t_0} \int_{\Omega^f(t)} c_i \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \psi \right) dx dt + \int_0^{t_0} \int_{\Omega^f(t)} \frac{c_i^0 \rho_s}{(\rho_s - \rho_f)} \mathbf{v} \cdot \nabla \psi dx dt - \\ &- \int_0^{t_0} \int_{\Omega^f(t)} \left( c_i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \left( c_i - \frac{c_i^0 \rho_s}{(\rho_s - \rho_f)} \right) \mathbf{v} \cdot \nabla \psi \right) dx dt = \int_{\Omega_{t_0}} \chi \left( c_i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \left( c_i - \frac{c_i^0 \rho_s}{(\rho_s - \rho_f)} \right) \mathbf{v} \cdot \nabla \psi \right) dx dt. \end{aligned}$$

Система интегральных тождеств (3.24)–(3.27), дополненная граничными и начальными условиями (3.15), (3.16), (3.18), (3.20) и (3.21), равносильна начальной постановке (3.1), (3.3)–(3.6), (3.13)–(3.21) задачи в виде системы дифференциальных уравнений с соответствующими граничными и начальными условиями.

**3.2.2. Гомогенизация.** Широко известно [33], что некоторые из пределов в интегральном тождестве (3.24) следуют из закона Дарси

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{\mu_1} \mathbb{B}(\nabla q + \mathbf{f}), \quad (3.28)$$

где  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{V} \rangle_Y \equiv \int_Y \mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) dy$  и  $\mathbb{B}$  — это симметричная положительно определенная матрица.

В случае фильтрации жидкости закон Дарси обычно дополняется стандартным уравнением неразрывности  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ . Для нашего физического процесса подземного выщелачивания закон Дарси может быть взят в том же виде, в то время как уравнение неразрывности должно также рассматривать растворение горных пород через выщелачивание. Поэтому мы выбрали более точный путь от точного описания на поровом уровне к макроскопическому описанию через гомогенизацию.

Все методы гомогенизации подразумевают присутствие малого параметра  $\varepsilon > 0$ . Грубо говоря, сама гомогенизация состоит из двух частей: изучение семейства решений математической задачи в зависимости от параметра  $\varepsilon$  и предельный переход при параметре  $\varepsilon$ , стремящемся к нулю.

Любая физическая задача включает в себя безразмерные параметры (критерии), которые как-то характеризуют задачу. Некоторые из них могут быть малы, некоторые — велики, но все они фиксированы и мы не можем их сделать переменными. С другой стороны, когда физическая задача уже сформулирована в виде математической задачи, мы можем рассмотреть семейство математических задач с малым переменным параметром и искать приближительные математические модели (гомогенизация), когда этот параметр стремится к нулю.

Для всех физических задач в горных породах существует натуральный малый параметр, которым является отношением  $\varepsilon_0 = \frac{l}{L}$ , где  $l$  — средний размер поры. Следовательно, в нашей физической задаче, описывающей подземное выщелачивание, в качестве малого параметра мы рассматриваем именно этот критерий.

Далее, мы формулируем несколько предположений, которые позволяют нам получить математическое описание подземного выщелачивания с малым параметром, и находим некоторую гомогенизованную модель, описывающую эту процедуру на макроскопическом уровне.

Главное предположение — поведение безразмерных критериев

$$\alpha_\mu = \mu_1 \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2), \quad \alpha_c = D_0 + o(\varepsilon), \quad (3.29)$$

где  $\mu_1$  и  $D_0$  — некоторые положительные константы.

Далее мы рассматриваем краевую задачу (3.24)–(3.27), (3.10)–(3.12) с данной функцией  $\chi = \chi^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \chi(\mathbf{x}, t, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \equiv \chi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ , которая имеет период, равный 1, в  $\mathbf{y} \in Y = (0, 1)^3$ , характеризующую сплошное поровое пространство  $\Omega^f(t)$ , и пусть  $\mathbf{v}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ ,  $q^\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ ,  $c^\varepsilon(\mathbf{x}, t)$  и  $c_i^\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , будут решением данной задачи.

Для заданной функции  $\chi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$  задача (3.24)–(3.27), (3.10)–(3.12) имеет единственное решение  $\mathbf{v}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ ,  $q^\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ ,  $c^\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ , и  $c_i^\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Теперь, используя общеизвестную формулу (см. [4]) для функции  $\Phi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$  с периодом 1 в  $\mathbf{y}$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{t_0}} \Phi(\mathbf{x}, t, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) dx dt = \int_{\Omega_{t_0}} \left( \int_Y \Phi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) dy \right) dx dt,$$

которая выражает представление двумасштабной сходимости (см. [24, 29, 30]), мы переходим к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в интегральных тождествах (3.24)–(3.27).

Для этого мы выбираем некоторые подпоследовательности  $\{\mathbf{v}^{\varepsilon_k}(\mathbf{x}, t)\}$ ,  $\{q^{\varepsilon_k}\}$ ,  $\{c^{\varepsilon_k}(\mathbf{x}, t)\}$  и  $\{c_i^{\varepsilon_k}(\mathbf{x}, t)\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , двумасштабно сходящиеся при  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  в следующем смысле:

$$\begin{cases} \mathbf{v}^{\varepsilon_k}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_k}) + o(\varepsilon_k), & q^{\varepsilon_k}(\mathbf{x}, t) = q(\mathbf{x}, t) + o(\varepsilon_k), \\ c^{\varepsilon_k}(\mathbf{x}, t) = c(\mathbf{x}, t) + o(\varepsilon_k), & c_i^{\varepsilon_k}(\mathbf{x}, t) = c_i(\mathbf{x}, t) + o(\varepsilon_k), \\ \nabla c^{\varepsilon_k}(\mathbf{x}, t) = \nabla c(\mathbf{x}, t) + \nabla_y C(\mathbf{x}, t, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_k}) + o(\varepsilon_k). \end{cases} \quad (3.30)$$

Здесь  $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ ,  $C(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$  — функции с периодом 1 в  $\mathbf{y}$ .

**3.2.3. Математическая модель в виде дифференциальных уравнений.** Для простоты, в последующих записях мы опустим индекс  $k$ .

Чтобы получить (3.28) мы в (3.24) выбираем пробные функции в виде  $\varphi = \zeta(\mathbf{x}, t) \varphi_0(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$ , где  $\varphi_0(\mathbf{y})$  — это соленоидальная гладкая функция, обращающаяся в нуль в  $\gamma(t)$ .

Здесь  $\gamma(t)$  — это граница между «жидкими» и «твердыми» частями,  $Y_f = \{\mathbf{y} \in Y : \chi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = 1\}$  и  $Y_s = \{\mathbf{y} \in Y : \chi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = 0\}$ .

Далее, используя представления (3.29) и (3.30), получаем интегральное тождество

$$0 = \int_{\Omega_{t_0}} \zeta(\mathbf{x}, t) \chi^\varepsilon \left( \alpha_\mu \mathbb{D}(\mathbf{v}^\varepsilon, x) : \mathbb{D}(\varphi_0, x) \right) + (\nabla q^\varepsilon + \mathbf{f}) \cdot \varphi_0 \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) dx dt + o(\varepsilon) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega_{t_0}} \zeta(\mathbf{x}, t) \chi^\varepsilon \left( \varepsilon^2 \mu_1 \mathbb{D}(\mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}), x) : \mathbb{D}(\zeta(\mathbf{x}, t) \varphi_0(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})) + \mathbf{f} \cdot \varphi_0(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \right) dxdt + \\
&\quad + \int_{\Omega_{t_0}} \zeta(\mathbf{x}, t) \chi^\varepsilon \nabla q \cdot \varphi_0(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) dxdt + o(\varepsilon) = I_1 + I_2 + o(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Легко заметить, что  $I_1 \rightarrow \int_{\Omega_{t_0}} \zeta(\mathbf{x}, t) \left( \int_{Y_f} (\mu_1 \mathbb{D}(\varphi_0(\mathbf{y}), y) : \mathbb{D}(\mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}), y) + \mathbf{f} \cdot \varphi_0(\mathbf{y})) dy \right) dxdt$  и

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{Q_{t_0}} \zeta \chi^\varepsilon \nabla q \cdot \varphi_0(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) dxdt = \int_0^{t_0} \int_{\Omega_f(t)} \zeta \nabla q \cdot \varphi_0(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) dxdt = \\
&= - \int_0^{t_0} \int_{\Omega_f(t)} q \nabla \zeta \cdot \varphi_0(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) dxdt = - \int_{Q_{t_0}} \chi^\varepsilon q \nabla \zeta \cdot \varphi_0(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) dxdt \rightarrow - \int_{\Omega_{t_0}} q \nabla \zeta \cdot \left( \int_Y \chi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) \varphi_0(\mathbf{y}) dy \right) dxdt = \\
&\quad = \int_{\Omega_{t_0}} \zeta \nabla q \cdot \left( \int_Y \chi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) \varphi_0(\mathbf{y}) dy \right) dxdt = \int_{\Omega_{t_0}} \zeta \left( \int_Y \chi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) \nabla q \cdot \varphi_0(\mathbf{y}) dy \right) dxdt
\end{aligned}$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Следовательно,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega_{t_0}} \zeta(\mathbf{x}, t) \left( \int_Y \chi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) \left( \mu_1 \mathbb{D}(\varphi_0(\mathbf{y}), y) : \mathbb{D}(\mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}), y) + (\nabla q + \mathbf{f}) \cdot \varphi_0(\mathbf{y}) \right) dy \right) dxdt = \\
&= \int_{\Omega_{t_0}} \zeta(\mathbf{x}, t) \left( \int_{Y_f} \varphi_0(\mathbf{y}) \left( -\mu_1 \nabla_y \cdot \mathbb{D}(\mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}), y) + \nabla q + \mathbf{f} \right) dy \right) dxdt = \\
&= \int_{\Omega_{t_0}} \zeta(\mathbf{x}, t) \left( \int_{Y_f} \varphi_0(\mathbf{y}) \left( -\frac{\mu_1}{2} \Delta_y \mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) + \nabla q + \mathbf{f} \right) dy \right) dxdt = \\
&= \int_{\Omega_{t_0}} \zeta(\mathbf{x}, t) \left( \int_{Y_f} \varphi_0(\mathbf{y}) \left( -\frac{\mu_1}{2} \Delta_y \mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) + \nabla q + \mathbf{f} \right) dy \right) dxdt = 0.
\end{aligned}$$

Из-за произвольного выбора  $\zeta(\mathbf{x}, t)$  и  $\varphi_0(\mathbf{y})$  последнее тождество приводит к следующему дифференциальному уравнению:

$$-\frac{\mu_1}{2} \Delta_y \mathbf{V} + \nabla_y Q + \nabla q + \mathbf{f} = 0 \quad (3.31)$$

в области  $\Pi_f$ . Член  $\nabla_y Q(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$  в (3.31) появляется из-за ортогональности соленоидальных векторов к градиентам скалярных функций.

Для решения этого уравнения нам нужны граничные условия для  $\mathbf{V}$  на границе  $\gamma$ , разделяющей  $Y_f$  и его открытое дополнение  $Y_s$  в  $\Pi$ :  $\gamma = \partial\Pi_f \cap \partial\Pi_s$ . Нам не нужно граничное условие для  $\mathbf{V}$  в другой части  $\partial\Pi_f$  из-за периодичности  $\mathbf{V}$  в  $\mathbf{y}$ .

Требуемое граничное условие

$$\mathbf{V} = 0, \mathbf{y} \in \gamma \quad (3.32)$$

следует из тождества  $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})(1 - \chi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})) = 0$ ,  $\mathbf{y} \in Y$ , которое, в свою очередь, является результатом двумасштабной сходимости в очевидном тождестве  $\mathbf{v}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)(1 - \chi(\mathbf{x}, t, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})) = 0$ ,  $\mathbf{x} \in Y$ .

Чтобы извлечь микроскопическое уравнение неразрывности, мы переходим к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в интегральном тождестве (3.25) с пробными функциями  $\varphi = \varepsilon \varphi_0(\mathbf{x}, t) \varphi_1(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$ , где  $\varphi_0$  является произвольной гладкой функцией переменных  $\mathbf{x}$  и  $t$ , равная нулю при  $t = 0$  и  $t = T$ , а  $\varphi_1(\mathbf{y})$  — гладкая функция с периодом 1 в  $\mathbf{y}$ , обращающаяся в нуль в  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\Omega_{t_0}} \left( (\chi^\varepsilon \rho_f + (1 - \chi^\varepsilon) \rho_s) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho_f \mathbf{v}^\varepsilon \cdot \nabla_x \varphi \right) dx dt = \\
 &= \int_{\Omega_{t_0}} \varphi_0(\mathbf{x}, t) \rho_f \mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \cdot \nabla_y \varphi_1 dx dt + o(\varepsilon) \rightarrow \int_{\Omega_{t_0}} \varphi_0(\mathbf{x}, t) \left( \int_Y \rho_f \mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) \cdot \nabla_y \varphi_1 dy \right) dx dt = 0.
 \end{aligned}$$

Произвольный выбор функций  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  приводит к микроскопическому уравнению неразрывности

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (3.33)$$

в  $Y_f$ .

**3.3. Закон Дарси.** Пусть  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{V} \rangle = \int_Y \mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, \tau) dy$ , и  $\frac{2}{\mu_1}(\nabla q + \mathbf{f}) = \sum_{i=1}^3 z_i(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_i$ , где  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  является стандартным прямоугольным декартовым базисом в  $\mathbb{R}^3$ .

Для нахождения представления (3.28) скорости жидкости  $\mathbf{v}$  с точки зрения микроструктуры мы решаем задачу (3.31), (3.32), (3.33), используя разложение  $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, \tau) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{V}^i(\mathbf{y}) z_i(\mathbf{x}, t)$ .

Функции  $\mathbf{V}^i(\mathbf{y})$  и  $Q^i(\mathbf{y})$  при  $i = 1, 2, 3$  удовлетворяют в  $Y_f$  следующим периодическим краевым задачам

$$-\Delta_y \mathbf{V}^i + \nabla_y Q^i + \mathbf{e}_i = 0, \mathbf{y} \in Y_f, \quad (3.34)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V}^i = 0, \mathbf{y} \in Y_f, \quad (3.35)$$

$$\mathbf{V}^i = 0, \mathbf{y} \in \gamma. \quad (3.36)$$

Следовательно,

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{V}^i(\mathbf{y}) z_i = -\frac{2}{\mu_1} \left( \sum_{i=1}^3 \mathbf{V}^i \otimes \mathbf{e}_i \right) (\nabla q + \mathbf{f}). \quad (3.37)$$

Здесь  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  — матрица второго порядка, которая определена как  $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ . Возвращаясь к (3.28), мы получаем

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \langle \mathbf{V}^i \rangle_Y z_i = -\frac{1}{\mu_1} \mathbb{B} \cdot (\nabla q + \mathbf{f}), \quad (3.38)$$

где

$$\mathbb{B} = 2 \sum_{i=1}^3 \langle \mathbf{V}^i \rangle_Y \otimes \mathbf{e}_i. \quad (3.39)$$

Предел при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в (3.25) с пробной функцией  $\varphi(\mathbf{x}, t)$ , обращающейся в нуль на границах  $S^+$  и  $S^-$ , а также при  $t = 0$  и  $t = t_0$ , приводит к макроскопическому уравнению неразрывности:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\Omega_{t_0}} \left( (\chi^\varepsilon \rho_f + (1 - \chi^\varepsilon) \rho_s) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho_f \mathbf{v}^\varepsilon \cdot \nabla \varphi \right) dx dt = \\
 &= \int_{\Omega_{t_0}} \left( (\chi(\mathbf{x}, t, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \rho_f + (1 - \chi(\mathbf{x}, t, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})) \rho_s) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho_f \mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \cdot \nabla \varphi \right) dx dt + o(\varepsilon) \rightarrow \\
 &\rightarrow \int_{\Omega_{t_0}} \left( m(\mathbf{x}, t) (\rho_f - \rho_s) + \rho_s \right) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho_f \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \varphi dx dt = 0,
 \end{aligned}$$

где  $m(\mathbf{x}, t) = \int_Y \chi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) dy$  — пористость порового пространства  $\Omega^f(t)$ .

В силу произвольности выбора  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  последнее тождество равносильно желаемому дифференциальному уравнению в области  $\Omega_{t_0}$ :

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\rho_f}{\rho_s - \rho_f} \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (3.40)$$

Как и прежде, мы просто переходим к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в соответствующем интегральном тождестве (3.26) для концентрации кислоты с произвольными гладкими функциями  $\xi(\mathbf{x}, t)$ , равными нулю при  $t = t_0$  и на границах  $S^\pm$ :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \chi_0(\mathbf{x}) \left( c_0(\mathbf{x}) + \frac{1}{\gamma} \right) \xi_0(\mathbf{x}, 0) dx &= \int_{\Omega_{t_0}} \chi^\varepsilon \left( \left( c^\varepsilon + \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\partial \xi}{\partial t} - (\alpha_c \nabla c^\varepsilon - \mathbf{v}^\varepsilon c^\varepsilon) \cdot \nabla \xi \right) dx dt = \\ &= \int_{\Omega_{t_0}} \chi(\mathbf{x}, t, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \left( (c + \beta) \frac{\partial \xi}{\partial t} - \alpha_c (\nabla c + \nabla_y C(\mathbf{x}, t, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})) - c \mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \cdot \nabla \xi \right) dx dt + o(\varepsilon) \rightarrow \\ &\rightarrow \int_{\Omega_{t_0}} m(\mathbf{x}, t) \left( \left( c + \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\partial \xi}{\partial t} - (\alpha_c \mathbb{A} \cdot \nabla c - c \mathbf{v}) \cdot \nabla \xi \right) dx dt. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\frac{\partial}{\partial t} \left( m \left( c + \frac{1}{\gamma} \right) \right) = \nabla \cdot (\alpha_c \mathbb{A} \cdot \nabla c - c \mathbf{v})$ , где

$$\mathbb{A}(\mathbf{x}, t) = m(\mathbf{x}, t) \mathbb{I} + \sum_{i=1}^3 \langle \nabla_y C^{(i)}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) \rangle_{Y_f} \otimes \mathbf{e}_i. \quad (3.41)$$

Функции  $C^{(i)}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$  определены как решения периодической краевой задачи (см. [24])

$$\nabla_y \cdot \left( \chi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) (\nabla_y C^{(i)}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) + \mathbf{e}_i) \right) = 0, \quad \mathbf{y} \in Y. \quad (3.42)$$

Для получения макроскопических уравнений переноса для концентраций продуктов химических реакций мы используем представления (3.30) и перейдем к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в соответствующих интегральных тождествах для концентраций продуктов химических реакций

$$I_i^\varepsilon \equiv \int_{\Omega_{t_0}} \chi^\varepsilon \left( c_i^\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} + \left( c_i^\varepsilon - \frac{\rho_s c_i^0}{\rho_s - \rho_f} \right) \mathbf{v}^\varepsilon \cdot \nabla \psi \right) dx dt = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

которые верны для произвольных гладких функций  $\psi$ , обращающихся в нуль на границе  $S^-$  и при  $t = t_0$ .

Дано

$$\begin{aligned} I_i^\varepsilon &= \int_{\Omega_{t_0}} \left( c_i \chi(\mathbf{x}, t, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \frac{\partial \psi}{\partial t} + \left( c_i - \frac{\rho_s c_i^0}{\rho_s - \rho_f} \right) \mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \cdot \nabla \psi \right) dx dt + o(\varepsilon) \rightarrow \\ &\rightarrow \int_{\Omega_{t_0}} \left( m c_i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \left( c_i - \frac{\rho_s c_i^0}{\rho_s - \rho_f} \right) \mathbf{v} \cdot \nabla \psi \right) dx dt = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_{\Omega_{t_0}} \psi \left( \frac{\partial}{\partial t} (m c_i) + \nabla \cdot \left( \left( c_i - \frac{\rho_s c_i^0}{\rho_s - \rho_f} \right) \mathbf{v} \right) \right) dx dt = 0,$$

или  $\frac{\partial}{\partial t} (m c_i) + \nabla \cdot \left( \left( c_i - \frac{\rho_s c_i^0}{\rho_s - \rho_f} \right) \mathbf{v} \right) = 0$ . Используя уравнение неразрывности (3.40), мы получаем уравнения переноса  $m \frac{\partial c_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c_i = \frac{\rho_s}{\rho_f} (c_i - c_i^0)$  для концентраций продуктов химических реакций  $c_i$  при  $i = 1, \dots, n$  в области  $\Omega_{t_0}$ .

**3.3.1. Начально-краевая задача, описывающая подземное выщелачивание на макроскопическом уровне.** Собрав все эти соображения вместе, мы получаем итоговую систему дифференциальных уравнений, описывающую рассматриваемый физический процесс на макроскопическом уровне.

Это система состоит из Закона Дарси

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{\mu_1} \mathbb{B}(\nabla q + \mathbf{f}) \quad (3.43)$$

и неоднородного уравнения неразрывности

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \delta \frac{\partial m}{\partial t}, \quad \delta = \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f}, \quad (3.44)$$

для скорости и давления жидкости, уравнения диффузии-конвекции

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( m \left( c + \frac{1}{\gamma} \right) \right) = \nabla \cdot (\alpha_c \mathbb{A} \cdot \nabla c - c \mathbf{v}) \quad (3.45)$$

для кислоты, и уравнений переноса

$$m \frac{\partial c_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c_i = \frac{\rho_s}{\rho_f} (c_i - c_i^0) \quad (3.46)$$

для концентраций продуктов химических реакций  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , в области  $\Omega_{t_0}$ .

Задача дополняется следующими граничными и начальными условиями.

В откачных скважинах  $S^+ \subset \partial\Omega$  при  $0 < t < t_0$  давление жидкости и концентрации кислоты и продуктов химических реакций являются известными функциями

$$p = p^+(\mathbf{x}, t), \quad (3.47)$$

$$c_i = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad c = c^+(\mathbf{x}, t). \quad (3.48)$$

В закачных скважинах  $S^- \subset \partial\Omega$  для  $0 < t < t_0$

$$p = p^-(\mathbf{x}, t), \quad (3.49)$$

$$c = c^+(\mathbf{x}, t). \quad (3.50)$$

На границе непроницаемости  $S^0 \subset \partial\Omega$  для  $0 < t < t_0$

$$\nabla c \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3.51)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (3.52)$$

Матрица  $\mathbb{B}$  в (3.43) определена в (3.34)–(3.39), и матрица  $\mathbb{A}$  определена в (3.41)–(3.42).

В свою очередь, определения  $m$ ,  $\mathbb{B}$  и  $\mathbb{A}$  содержат функцию  $\chi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ , и ее поведение при  $0 < t < t_0$  зависит от уравнения

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \beta \gamma c(\mathbf{x}, t) |\nabla_{\mathbf{y}} \chi| = 0 \quad (3.53)$$

в области  $Y$ .

В начальный момент времени

$$c(\mathbf{x}, 0) = c_0(\mathbf{x}), \quad c_i(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.54)$$

$$\chi(\mathbf{x}, 0, \mathbf{y}) = \chi_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{y} \in Y. \quad (3.55)$$

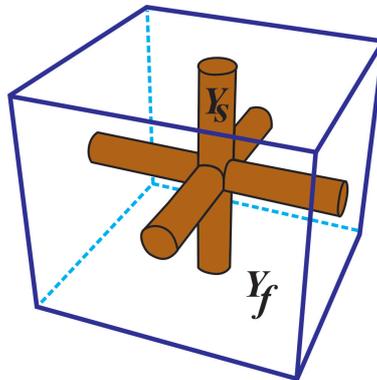


Рис. 3.12. Структура порового пространства

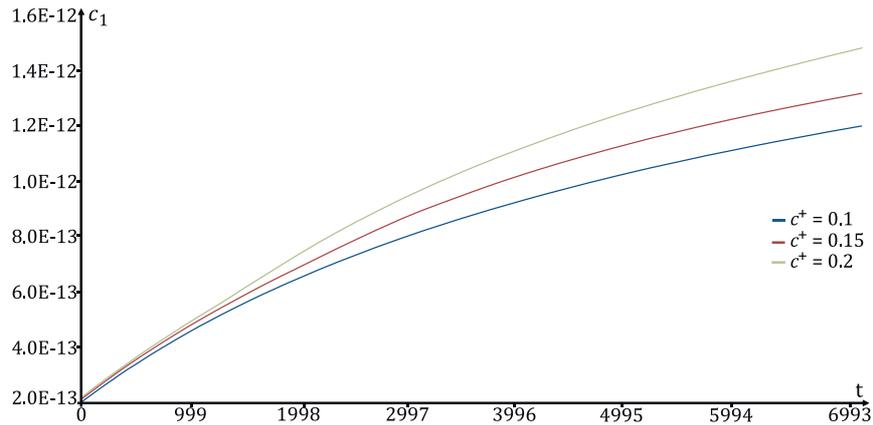


Рис. 3.13. Макроскопическая модель: концентрация продукта химической реакции в откачных скважинах для разных  $c^+$

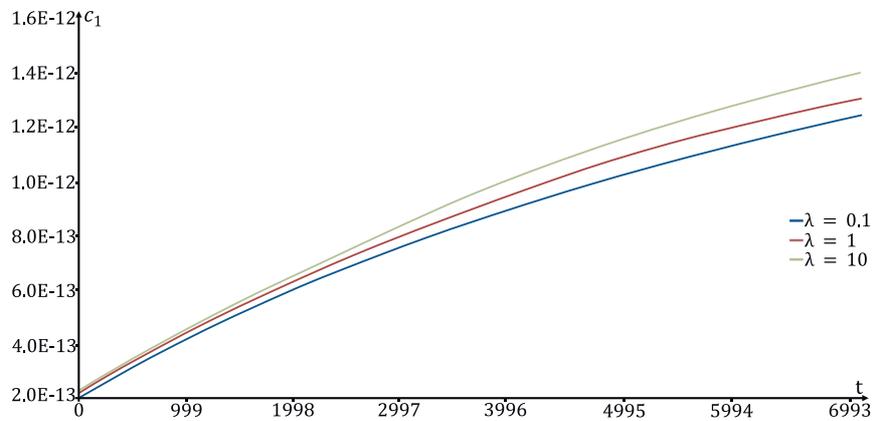


Рис. 3.14. Макроскопическая модель: концентрация продукта химической реакции в откачных скважинах для разных  $\lambda$

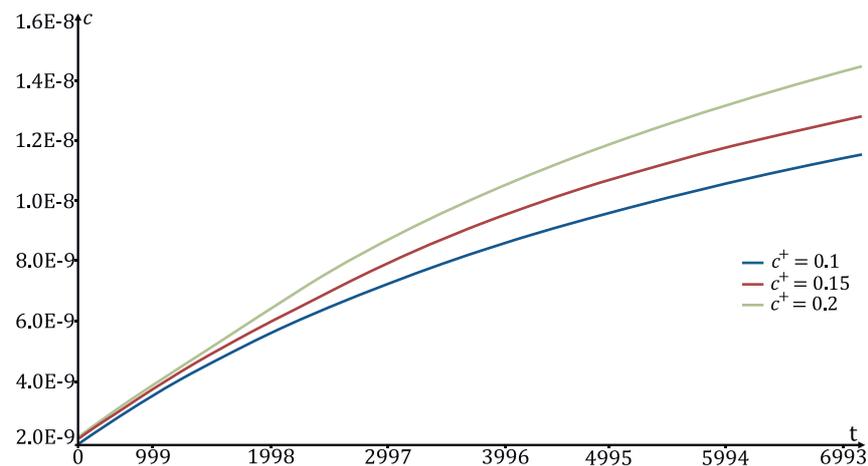


Рис. 3.15. Макроскопическая модель: концентрация кислоты в откачных скважинах для разных  $c^+$

3.3.2. *Численные расчеты.* Для случая одной пространственной переменной пусть поровое пространство будет определено симметричными цилиндрами с радиусом  $r$  (см. рис. 3.12),  $\Omega = \{0 < x < 1\}$ ,  $S^+ = \{x = 0\}$ , и  $S^- = \{x = 1\}$ . Симметрия порового пространства  $Y_f$  подразумевает диагональную форму матриц  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{D}$ :  $\mathbb{A} = \text{diag}(k)$ ,  $\mathbb{D} = \text{diag}(D_0)$ . Величины  $k$  и  $D_0$  почти не изменяются для малых вариаций  $m$ , и мы можем предположить, что они являются константами. Из

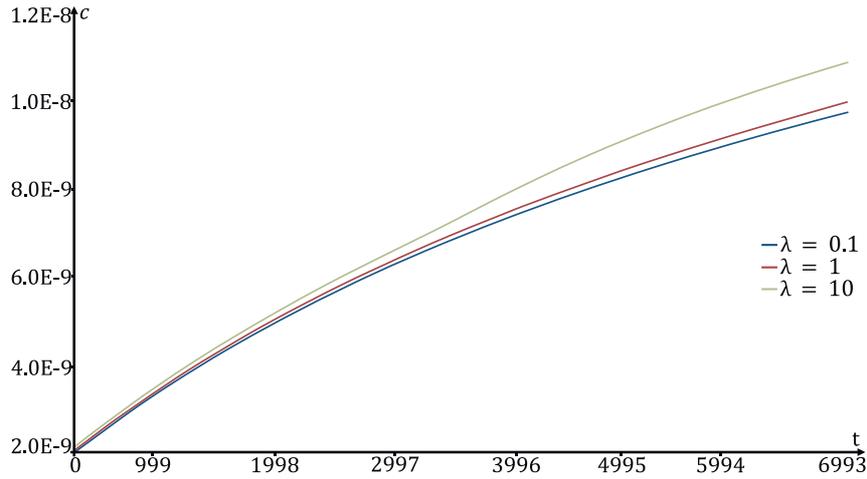


Рис. 3.16. Макроскопическая модель: концентрация кислоты в откачных скважинах для разных  $\lambda$

этих предположений следует, что пористость  $m$  порового пространства — это известная функция радиуса  $r$ :  $m = F(r) = 1 - (1 - m_0) \left(\frac{r}{r_0}\right)^2$ , где  $m_0$  и  $r_0$  — заданные начальные значения пористости  $m$  и радиуса  $r$ , а система (3.43)–(3.55) принимает форму:

$$v = -\frac{k}{\mu_1} \frac{\partial p}{\partial x},$$

для  $k$  и  $\mu_1$  в качестве констант,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \delta \frac{\partial m}{\partial t},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( m \left( c + \frac{1}{\gamma} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha_c \frac{\partial c}{\partial x} - v c \right),$$

$$m \frac{\partial c_i}{\partial t} + v \frac{\partial c_i}{\partial x} = -(\delta(c_i - c_i^0) + c_i) \frac{\partial m}{\partial t},$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \lambda c(x, t),$$

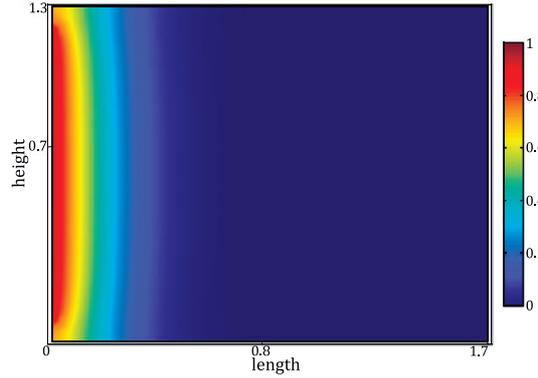
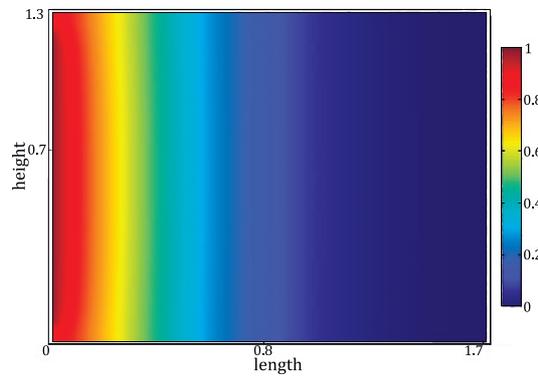
$$p(0, t) = p^+(t), \quad p(1, t) = p^-(t), \quad t > 0,$$

$$c_i(0, t) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad c(0, t) = c^+(t), \quad \frac{\partial c}{\partial x}(1, t) = 0,$$

$$\begin{cases} c(x, 0) = c_0(x), \quad c_i(x, 0) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad r(x, 0) = r_0(x), \\ m(x, 0) = m_0(x) \approx \pi r_0^2(x) + 2(r_0^2(x) - 2\pi r_0^3(x)). \end{cases}$$

При  $\delta = 1,5$ ,  $\gamma = 1$ ,  $c_1^0 = 0,001$ ,  $\alpha_c = 0,0004$ ,  $T = 6993$  с,  $p^+ = 1000$ ,  $p^- = 0$ ,  $c_0 = 0$ ,  $r_0 = 2^{-1}$  мы рассчитываем концентрацию  $c_1$  первого продукта химических реакций в скважинах откачки для разных значений  $c^+ = 0,1; 0,15; 0,2$  с фиксированной  $\lambda = 1$  и для разных значений  $\lambda = 0,1; 1; 10$  с фиксированным  $c^+ = 0,2$  (см. рис. 3.13–3.16).

Для случая двух пространственных переменных и системы дифференциальных уравнений в области  $\Omega = \{0 < x_1 < L, 0 < x_2 < H\}$  (см. рис. 3.7) мы изучили начально-краевую задачу, описывающую подземное выщелачивание на макроскопическом уровне (3.43)–(3.55), и при  $\delta = 1,5$ ,  $\gamma = 1$ ,  $c_1^0 = 0,01$ ,  $\alpha_c = 0,004$ ,  $p^+ = 1000$ ,  $p^- = 0$ ,  $c_0 = 0$  мы рассчитали концентрацию  $c_1$  первого продукта химических реакций в откачных скважинах в разные моменты времени с фиксированным  $c^+ = 1$  (см. рис. 3.17–3.18).

Рис. 3.17. Концентрация реагента при  $t = 360$  дней.Рис. 3.18. Концентрация реагента при  $t = 720$  дней.

#### 4. ДИНАМИКА ТРЕЩИН В ПОДЗЕМНЫХ ГОРНЫХ ПОРОДАХ

**4.1. Накопление энергии в трещине: микроскопический (поровый) уровень.** Пусть  $\Omega^0$  — ограниченная область с непрерывной границей в  $C^2$   $S = \partial\Omega^0$  и  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega^0$ . Предположим, что  $\Omega$  — пороупругая среда, состоящая из твердого скелета  $\Omega^s$  и порового пространства  $\Omega^f$ , а  $\Omega^0$  — трещина. Трещина  $\Omega^0$  и поровое пространство  $\Omega^f$  заполнены одной и той же жидкостью.

В безразмерных переменных  $\mathbf{x} \rightarrow \frac{\mathbf{x}}{L}$ ,  $\mathbf{w} \rightarrow \frac{\mathbf{w}}{L}$ ,  $t \rightarrow \frac{t}{\tau}$ ,  $\rho \rightarrow \frac{\rho}{\rho_0}$ , эволюция смещений  $\mathbf{w}$ , давления  $p$ , и температуры  $\vartheta$  твердого скелета определяется в  $\Omega^s$  для  $t > 0$  неизотермическими уравнениями Ламе [24]

$$\alpha_{\tau} \rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P}_s, \quad (4.1)$$

$$\alpha_{p,s} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \Delta \vartheta. \quad (4.3)$$

Скорость  $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$ , давление  $p$ , и температура  $\vartheta$  жидкости удовлетворяют системе Стокса для вязкой сжимаемой терможидкости в  $\Omega^f$  и  $\Omega^0$  при  $t > 0$

$$\alpha_{\tau} \rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P}_f, \quad (4.4)$$

$$\alpha_{p,f} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = 0, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \Delta \vartheta. \quad (4.6)$$

На границах  $S_f \subset S$  и  $\Gamma$  между  $\Omega^s$  и  $\Omega^0$ , и  $\Omega^s$  и  $\Omega^f$  соответственно, смещения (скорости), нормальные напряжения, температура, и тепловые потоки все непрерывны:

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega^s}} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega^0}} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t), \quad (4.7)$$

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega^s}} \mathbb{P}_s(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega^0}} \mathbb{P}_f(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}, \quad (4.8)$$

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega^s}} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega^f}} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t), \quad (4.9)$$

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega^s}} \mathbb{P}_s(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega^f}} \mathbb{P}_f(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}. \quad (4.10)$$

Поверхность  $S \setminus S_f$  является границей между жидкостью в  $\Omega^f$  и жидкостью в  $\Omega^0$ , на которой не требуется граничных условий, поскольку это одна и та же жидкость.

Задача дополняется начальными условиями

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad (4.11)$$

$$\vartheta(\mathbf{x}, 0) = \vartheta^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (4.12)$$

В (4.7)–(4.10)  $\mathbf{n}$  – нормальный вектор к границе  $\Gamma$ ,  $\mathbb{P}_f = \alpha_\mu \mathbb{D}(x, \mathbf{v}) - (p + \alpha \vartheta) \mathbb{I}$ ,  $\mathbb{P}_s = \alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \mathbf{w}) - (p + \alpha \vartheta) \mathbb{I}$ ,  $\mathbb{D}(x, \mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^*)$ ,  $\alpha_\tau = \frac{L}{g\tau^2}$ ,  $\alpha_\mu = \frac{2\mu}{\tau L g \rho^0}$ ,  $\alpha_\lambda = \frac{2\lambda}{L g \rho^0}$ ,  $\alpha_{p,f} = \frac{Lg}{\rho_f c_f^2}$ ,

$\alpha_{p,s} = \frac{Lg}{\rho_s c_s^2}$ ,  $L$  – характеристический размер рассматриваемой физической области,  $\tau$  – характеристическое время протекания физического процесса,  $\rho^0$  – средняя плотность воды,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\rho_f$  и  $\rho_s$  – средние безразмерные плотности жидкости в порах и твердом скелете соответственно, коррелирующие со средней плотностью воды  $\rho^0$ ,  $\mu = const$  – вязкость жидкости,  $\lambda = const$  – коэффициент Ламе для твердого скелета, а  $\mathbb{I}$  – единичный тензор. Положительные константы  $c_f$  и  $c_s$  являются скоростями распространения сжимающих звуковых волн в поровой жидкости и твердом скелете соответственно [24].

Функция  $\vartheta_0$  – бесконечно гладкая:

$$\vartheta_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \quad (4.13)$$

и имеет конечный носитель.

Безразмерные критерии  $\alpha_\tau$ ,  $\alpha_\mu$ ,  $\alpha_\lambda$  разные для разных физических процессов. Некоторые из них могут быть малы, другие могут быть велики. Накопление энергии в трещинах со временем является долгосрочным процессом. Следовательно,  $\alpha_\tau$  и  $\alpha_\mu$  достаточно малы, в то время как  $\alpha_\lambda$  близка к единице.

Очевидно, что математическая модель физического процесса должна быть как можно более проста, но в любом случае мы должны описать все его основные особенности. Вот почему мы используем гомогенизацию для упрощения точных математических моделей на уровне пор. Заметим, что любой дополнительный член математической модели на уровне пор создает дополнительные технические проблемы при гомогенизации. Следовательно, мы должны провести все упрощения до гомогенизации.

Для совместного движения упругого скелета и жидкости в порах в случае, когда скорость акустических волн настолько велика, что они не играют значительной роли, часто пренебрегают инерционным членом  $\alpha_\tau \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2}$  в динамическом уравнении (4.1) для упругого скелета:

$$\nabla \cdot \mathbb{P}_s = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega^s, \quad t > 0. \quad (4.14)$$

Вторым значительным упрощением является допущение

$$\alpha_\mu = \mu \varepsilon^2, \quad (4.15)$$

где  $\varepsilon = \frac{l}{L}$  является безразмерным размером поры и  $l$  – средний размер пор.

Это предположение для неподвижной системы Стокса приводит к известному закону Дарси для движения жидкости в порах абсолютно жесткого тела.

Но если мы рассмотрим совместное движение вязкой сжимаемой жидкости в порах и в резервуаре, определяемое неподвижной системой Стокса в этом предположении, то после гомогенизации мы получим систему дифференциальных уравнений

$$\nabla p + \mathbf{f} = 0, \quad \alpha_{p,f} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

в резервуаре, которая не определяет движение внутри трещины.

Следовательно, соединив подвижные уравнения Ламе и систему Стокса (4.1) и (4.4), мы получим наилучший метод описания совместного движения упругого скелета, жидкости в порах и жидкости в трещине.

Для оценки смещений умножим уравнение (4.1) на  $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$  и проинтегрируем результат умножения в области  $\Omega^s$ . Далее, умножим уравнение (4.4) на  $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$  и, проинтегрировав результат умножения в областях  $\Omega^f$  и  $\Omega^0$  и просуммировав все, получим следующие выражения после интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_\tau}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \left( ((1 - \chi_0)\chi + \chi_0)\varrho_f + (1 - \chi)\varrho_s \right) \left| \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right|^2 dx + \\ & + \frac{\alpha_\lambda}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} (1 - \chi_0)(1 - \chi) \mathbb{D}(x, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)) : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)) dx + \\ & + \alpha_\mu \int_{\mathbb{R}^3} \left( (1 - \chi_0)\chi^\varepsilon + \chi_0 \right) \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x}, t)) : \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x}, t)) dx - \\ & - \int_{\Omega^s} p(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dx - \int_{\Omega^f \cup \Omega^0} p(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dx = \alpha \int_{\mathbb{R}^3} \vartheta(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dx. \end{aligned}$$

Интегралы в области  $\Gamma$  обращаются в нуль из-за граничных условий (4.7)–(4.10).

Далее, мы сокращаем  $\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$  в трех последних членах с помощью уравнений (4.2) и (4.5) и интегрируем результат на отрезке  $(0, t_0)$

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_\tau}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (\chi \varrho_f + (1 - \chi)\varrho_s) \left| \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right|^2 dx + \frac{\alpha_{p,s}}{4} \int_{\Omega^s} |p(\mathbf{x}, t)|^2 dx + \frac{\alpha_{p,f}}{4} \int_{\Omega^f \cup \Omega^0} |p(\mathbf{x}, t)|^2 dx + \\ & + \frac{1}{4\alpha_{p,s}} \int_{\Omega^s} |\nabla \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)|^2 dx + \frac{1}{4\alpha_{p,f}} \int_{\Omega^f \cup \Omega^0} |\nabla \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)|^2 dx + \frac{\alpha_\lambda}{2} \int_{\Omega^s} \mathbb{D}(x, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)) : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)) dx + \\ & + \alpha_\mu \int_0^{t_0} \int_{\Omega^f \cup \Omega^0} \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x}, t)) : \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x}, t)) dx dt = \\ & = \alpha \int_{\mathbb{R}^3} \vartheta(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) dx - \alpha \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \vartheta}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) dx dt. \quad (4.16) \end{aligned}$$

Температура  $\vartheta$  и ее производная от времени  $\frac{\partial \vartheta}{\partial t}$  ограничены и стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Из соответствующих уравнений и граничных условий, а также из представления [2], следуют равенства

$$\vartheta(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{4t}\right) \vartheta_0(\mathbf{y}) dy \quad (4.17)$$

и (4.13). Следовательно,

$$\begin{aligned}
 & \max_{0 < t < \infty} \left( \alpha_\tau \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right|^2 dx + \int_{\Omega^s} \mathbb{D}(x, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)) : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)) dx \right) + \\
 & \quad + \max_{0 < t < \infty} \int_{\mathbb{R}^3} |p(\mathbf{x}, t)|^2 dx + \max_{0 < t < \infty} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)|^2 dx + \\
 & \quad + \alpha_\mu \int_0^\infty \int_{\Omega^f \cup \Omega^0} \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x}, t)) : \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x}, t)) dx dt \leq C,
 \end{aligned}$$

где  $C$  зависит только от норм на интервале  $[0, \infty)$  функций  $\vartheta$  и  $\frac{\partial \vartheta}{\partial t}$ , заданных по формуле (4.17).

Пусть  $\chi_0$  — характеристическая функция области  $\Omega^0$ , а  $\chi$  — характеристическая функция области  $\Omega^f$ :  $\chi_0(\mathbf{x}) = 1$  при  $\mathbf{x} \in \Omega^0$  и  $\chi_0(\mathbf{x}) = 0$  при  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega^0$ ,  $\chi(\mathbf{x}) = 1$  при  $\mathbf{x} \in \Omega^f$  и  $\chi(\mathbf{x}) = 0$  при  $\mathbf{x} \in \Omega^s$ .

Последние оценки показывают, что задача (4.1)–(4.5), (4.7), (4.8), (4.12)–(4.14) имеет единственное слабое решение в смысле распределений: функции  $\mathbf{w}$ ,  $p$ , и  $\vartheta$  удовлетворяют интегральному тождеству

$$\begin{aligned}
 & - \alpha_\tau \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^3} \left( \varrho_f(\chi^0 + (1 - \chi^0)\chi) + \varrho_s(1 - \chi^0)(1 - \chi) \right) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt + \\
 & \quad + \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^3} \left( (1 - \chi_0)(\chi \mathbb{P}_f + (1 - \chi)\mathbb{P}_s) + \chi_0 \mathbb{P}_f \right) : \mathbb{D}(x, \varphi) dx dt = 0 \quad (4.18)
 \end{aligned}$$

для любых гладких функций  $\varphi$  с компактным носителем и уравнению неразрывности

$$(\chi \alpha_{p,f} + (1 - \chi) \alpha_{p,s}) p + \nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \quad (4.19)$$

в обычном смысле в  $\mathbb{R}^3$  на любом отрезке  $0 < t < t_0$ .

В (4.18), (4.19)  $\chi_0$  — это характеристическая функция области  $\Omega^0$ , а  $\chi$  — характеристическая функция области  $\Omega^f$ :  $\chi_0(\mathbf{x}) = 1$  для  $\mathbf{x} \in \Omega^0$  и  $\chi_0(\mathbf{x}) = 0$  для  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega^0$ ,  $\chi(\mathbf{x}) = 1$  для  $\mathbf{x} \in \Omega^f$  и  $\chi(\mathbf{x}) = 0$  для  $\mathbf{x} \in \Omega^s$ .

Введем обозначение

$$\begin{aligned}
 \Pi(\Omega, t) = & \int_{\mathbb{R}^3} \alpha_\lambda (1 - \chi_0)(1 - \chi) \mathbb{D}(x, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)) : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)) dx + \\
 & + \int_{\mathbb{R}^3} \left( \alpha_{p,f}(\chi_0 + (1 - \chi_0)\chi) + (1 - \chi_0)(1 - \chi) \alpha_{p,s} \right) |p(\mathbf{x}, t)|^2 dx
 \end{aligned}$$

для потенциальной энергии области  $\Omega$  в момент времени  $t$ , а через  $\Pi(\Omega^0, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \alpha_{p,f} \chi_0 |p(\mathbf{x}, t)|^2 dx$

обозначим потенциальную энергию трещины  $\Omega^0$  в тот же момент  $t$ .

В состоянии покоя в момент  $t = 0$   $\Pi(\Omega, 0) = \Pi(\Omega^0, 0) = 0$ . Только отношения (4.16) характеризуют поведение потенциальных энергий  $\Pi(\Omega, t)$  и  $\Pi(\Omega^0, t)$  после теплового воздействия. Будут ли они положительными? И если да, то сохраняют ли они свои строго положительные значения при  $t_0 \rightarrow \infty$ ?

Это безусловно означает накопление энергии в трещине во время теплового воздействия, если  $\Pi(\Omega, t)$  и  $\Pi(\Omega^0, t)$  сохраняют свои строго положительные значения при  $t_0 \rightarrow \infty$ . Но мы не можем это уверенно утверждать из-за присутствия вязкой энергии  $I_\infty = \alpha_\mu \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x}, t)) :$

$\mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x}, t)) dx dt$ . Она несомненно строго положительна и другой член в правой части (4.16) может быть равен нулю на бесконечности.

Поэтому мы будем изучать случай для гомогенизированной системы, предполагая, что  $\alpha_\mu \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**4.2. Накопление энергии в трещине: макроскопическое описание.** Пусть поровое пространство  $\Omega^f$  описывается характеристической функцией  $\chi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$  с функцией с периодом 1 по  $\mathbf{y}$ ,  $\chi(\mathbf{y})$ ,  $\mathbf{y} \in Y$ ,  $Y = (0, 1)^3 \in \mathbb{R}^3$ ,  $Y_f = \{\mathbf{y} \in Y : \chi(\mathbf{y}) = 1\}$ ,  $Y_s = \{\mathbf{y} \in Y : \chi(\mathbf{y}) = 0\}$ . Граница  $\gamma$  между  $Y_f$  и  $Y_s$  должна быть непрерывной по Липшицу.

Мы ищем гомогенизированную систему при предположениях  $\alpha_\mu = \mu_3 \varepsilon^3$ ,  $\alpha_\tau = \tau_0$ ,  $\alpha_\lambda = \lambda_3 \varepsilon^3$ , где  $\mu_3$ ,  $\tau_0$ , и  $\lambda_3$  не зависят от  $\varepsilon$ .

Пусть для данного  $\varepsilon > 0$ , функции  $\mathbf{w}^\varepsilon$ ,  $p^\varepsilon$ , и  $\vartheta^\varepsilon$  будут решениями задачи (4.1)–(4.12). Мы предполагаем, что

$$\begin{cases} \chi^0(\mathbf{x})\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \chi^0(\mathbf{x})\mathbf{w}_f(\mathbf{x}, t) + o(\varepsilon), \\ (1 - \chi^0(\mathbf{x}))\chi^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = (1 - \chi^0(\mathbf{x}))\chi^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) + o(\varepsilon), \\ (1 - \chi^0(\mathbf{x}))(1 - \chi^\varepsilon(\mathbf{x}))\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = (1 - \chi^0(\mathbf{x}))(1 - \chi^\varepsilon(\mathbf{x}))\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) + o(\varepsilon), \end{cases} \quad (4.20)$$

$$p^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \chi^0 p_f(\mathbf{x}, t) + (1 - \chi^0)p(\mathbf{x}, t) + o(\varepsilon). \quad (4.21)$$

Для выведения гомогенизированных динамических уравнений мы используем представления (4.20)–(4.21) в интегральном тождестве (4.18) и отсюда перейдем к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^3} \alpha_\tau \left( \varrho_f ((1 - \chi_0)\chi^\varepsilon + \chi_0) + \varrho_s (1 - \chi^0)(1 - \chi^\varepsilon) \right) \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} dxdt + \\ &+ \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^3} (\chi^0(p_f + \alpha \vartheta) + (1 - \chi^0)(p + \alpha \vartheta)) \nabla \cdot \varphi dxdt - \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^3} \alpha_\mu ((1 - \chi_0)\chi^\varepsilon + \chi_0) \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\right) : \mathbb{D}(x, \varphi) dxdt - \\ &- \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^3} \alpha_\lambda (1 - \chi_0)(1 - \chi^\varepsilon) \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) : \mathbb{D}(x, \varphi) dxdt + o(\varepsilon) \rightarrow I, \end{aligned}$$

$$I = \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^3} \left( \tau_0 \varrho_f \frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t} + \hat{\rho} (1 - \chi_0) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\chi^0(p_f + \alpha \vartheta) + (1 - \chi^0)(p + \alpha \vartheta)) \nabla \cdot \varphi dxdt = 0,$$

где  $\hat{\rho} = m \varrho_f + (1 - m) \varrho_s$ .

Чтобы вывести макроскопическое уравнение неразрывности, мы рассмотрим соответствующий закон сохранения массы в виде интегрального тождества на микроскопическом уровне. Для этого умножим уравнения (4.2) и (4.5) на пробную функцию  $\xi$  с компактным носителем, проинтегрируем по частям в соответствующих областях и просуммируем результаты:

$$\int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^3} \left( (\alpha_{p,f} (\chi^0 p_f + (1 - \chi^0)\chi^\varepsilon p) + \alpha_{p,s} (1 - \chi^0)(1 - \chi^\varepsilon) p) \xi - (\chi^0 \mathbf{w}_f + (1 - \chi^0) \mathbf{w}) \cdot \nabla \xi \right) dxdt = o(\varepsilon).$$

После перехода к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$  мы получим интегральное тождество

$$\int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^3} \left( (\alpha_{p,f} (\chi^0 p_f + (1 - \chi^0) m p) + \alpha_{p,s} (1 - \chi^0)(1 - m) p) \xi - (\chi^0 \mathbf{w}_f + (1 - \chi^0) \mathbf{w}) \cdot \nabla \xi \right) dxdt = 0,$$

которое равносильно макроскопическому уравнению неразрывности

$$\hat{c}_p p + \nabla \cdot \mathbf{w} = 0$$

в  $\Omega$  для  $t > 0$  ( $\chi^0 = 0$ ), где  $\hat{c}_p = m \alpha_{p,f} + (1 - m) \alpha_{p,s}$ , и уравнение неразрывности

$$\alpha_{p,f} p_f + \nabla \cdot \mathbf{w}_f = 0$$

в  $\Omega^0$  для  $t > 0$  ( $\chi^0 = 1$ ).

4.2.1. *Совместное движение упругого тела и жидкости в трещине.* Совместное движение описывается системой интегральных тождеств

$$\int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^3} \left( \tau_0 (\varrho_f \chi_0 \frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t} + \hat{\varrho} (1 - \chi_0) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\chi^0 (p_f + \alpha \vartheta) + (1 - \chi^0) (p + \alpha \vartheta)) \nabla \cdot \varphi \right) dx dt = 0, \quad (4.22)$$

$$\int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^3} \left( (\alpha_{p,f} (\chi^0 p_f + (1 - \chi^0) m p) + \alpha_{p,s} (1 - \chi^0) (1 - m) p) \xi - (\chi^0 \mathbf{w}_f + (1 - \chi^0) \mathbf{w}) \cdot \nabla \xi \right) dx dt = 0, \quad (4.23)$$

которые верны для всех гладких функций  $\varphi$  и  $\xi$  с компактными носителями.

Оно содержит динамическое уравнение и уравнение неразрывности

$$\tau_0 \hat{\varrho} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla (p + \alpha \vartheta) = 0, \quad (4.24)$$

$$\hat{c}_p \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.25)$$

для скорости  $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$  и давления  $p$  пороупругой среды в области  $\Omega$  для  $t > 0$ , динамическое уравнение и уравнение неразрывности для скорости жидкости  $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t}$ , и давления  $p_f$

$$\tau_0 \varrho_f \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + \nabla (p_f + \alpha \vartheta) = 0, \quad (4.26)$$

$$\alpha_{p,f} \frac{\partial p_f}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}_f = 0, \quad (4.27)$$

в трещине  $\Omega^0$  для  $t > 0$ , и граничные условия

$$p = p_f, \quad (4.28)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n} \quad (4.29)$$

на границе  $S$ , где  $\mathbf{n}$  — единичная нормаль к  $S$ .

Задача дополняется начальными условиями

$$\mathbf{v}_f(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega^0, \quad (4.30)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4.31)$$

Заметим, что в (4.22)–(4.31), температура  $\vartheta$  задана (4.17).

4.2.2. *Накопление энергии в одной трещине.* Чтобы получить основное интегральное тождество, мы умножаем уравнение (4.26) скорости жидкости в трещине на  $\mathbf{v}_f$  и интегрируем по частям в области  $\Omega^0$ . Далее мы умножаем уравнение (4.24) на скорость  $\mathbf{v}$  пороупругой среды, интегрируем по частям в области  $\Omega$  и суммируем полученные равенства:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \left( \tau_0 (\varrho_f \chi_0 |\mathbf{v}_f(\mathbf{x}, t)|^2 + \hat{\varrho} (1 - \chi_0) |\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|^2) + (\alpha_{p,f} \chi^0 |p_f(\mathbf{x}, t)|^2 + \hat{c}_p (1 - \chi^0) |p(\mathbf{x}, t)|^2) \right) dx = \\ & = \alpha \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \vartheta (\alpha_{p,f} \chi^0 p_f(\mathbf{x}, t) + \hat{c}_p (1 - \chi^0) p(\mathbf{x}, t)) dx - \alpha \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} (\alpha_{p,f} \chi^0 p_f(\mathbf{x}, t) + \hat{c}_p (1 - \chi^0) p(\mathbf{x}, t)) dx. \end{aligned}$$

Интегрирование на отрезке  $(0, t_0)$  дает

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left( \tau_0 (\varrho_f \chi_0 |\mathbf{v}_f(\mathbf{x}, t_0)|^2 + \hat{\varrho} (1 - \chi_0) |\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0)|^2) + (\alpha_{p,f} \chi^0 |p_f(\mathbf{x}, t_0)|^2 + \hat{c}_p (1 - \chi^0) |p(\mathbf{x}, t_0)|^2) \right) dx = \\ & = \alpha \int_{\mathbb{R}^3} \vartheta(\mathbf{x}, t_0) (\alpha_{p,f} \chi^0 p_f(\mathbf{x}, t_0) + \hat{c}_p (1 - \chi^0) p(\mathbf{x}, t_0)) dx - \end{aligned}$$

$$-\alpha \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \vartheta}{\partial t}(\mathbf{x}, t) (\alpha_{p,f} \chi^0 p_f(\mathbf{x}, t) + \hat{c}_p (1 - \chi^0) p(\mathbf{x}, t)) dx dt. \quad (4.32)$$

Представление (4.17) подразумевает  $\lim_{t_0 \rightarrow \infty} \vartheta(\mathbf{x}, t_0) = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{\partial \vartheta}{\partial t}(\mathbf{x}, t_0) = 0$ ,  $\frac{\partial \vartheta}{\partial t}(\mathbf{x}, t) < 0$  для  $t > 0$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} & \alpha \int_{\mathbb{R}^3} \vartheta(\mathbf{x}, t_0) (\alpha_{p,f} \chi^0 p_f(\mathbf{x}, t_0) + \hat{c}_p (1 - \chi^0) p(\mathbf{x}, t_0)) dx \rightarrow 0, \\ & -\alpha \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \vartheta}{\partial t}(\mathbf{x}, t) (\alpha_{p,f} \chi^0 p_f(\mathbf{x}, t) + \hat{c}_p (1 - \chi^0) p(\mathbf{x}, t)) dx dt \rightarrow E^* > 0, \\ & \Pi(\Omega^0, t_0) = \int_{\mathbb{R}^3} \alpha_{p,f} \chi_0 |p_f(\mathbf{x}, t_0)|^2 dx \rightarrow \Pi^* > 0 = \Pi(\Omega^0, t_0) \end{aligned}$$

при  $t_0 \rightarrow \infty$ . Это и есть точное накопление энергии в трещине во время теплового воздействия.

**4.3. Макроскопическая модель распространения трещины.** Мы уже ранее показали, что потенциальная энергия  $\Pi(\Omega^0, t_0)$  увеличивается со временем. Логично предположить, что для каждой трещины существует некоторый предел  $P_* = P_*(\Omega^0)$  для среднего давления  $P(t_0) = P(\Omega^0; t_0) = \frac{1}{V(\Omega^0, t)} \int_{\Omega^0} |p_f(\mathbf{x}, t_0)| dx$  в этом геологическом разломе  $\Omega^0$ , такой, что в момент  $t_*$ , когда  $P(\Omega^0, t_*) = P_*$ , эта трещина начинает рушиться.

Мы опишем движение трещины после этого конкретного момента  $t_*$ , используя поток средней кривизны [12]

$$D_n = \sigma (P_* - P) k, \quad (4.33)$$

где  $D_n$  — скорость смещающейся (свободной) границы  $S = \partial\Omega^0$  по направлению к внешней нормали  $\mathbf{n}$  к  $S$ , а  $k$  — средняя кривизна  $S$ .

Точнее, этот механизм определяется правилом гистерезиса (см. рис. 4.1).

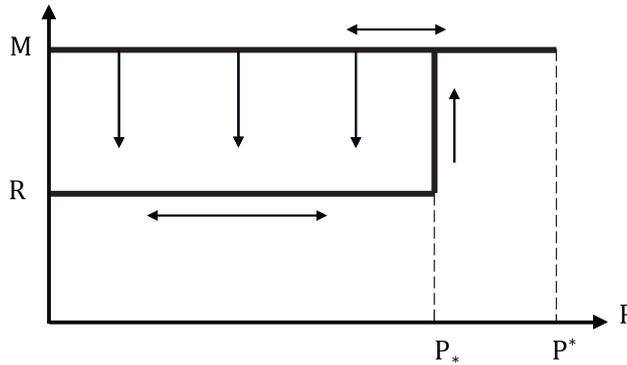


Рис. 4.1. Правило гистерезиса для распространения трещины.

Для состояния трещины существуют две позиции. Позиция **М** представляет движение трещины, а позиция **Р** представляет состояние покоя. Если в состоянии покоя среднее давление  $P$  достигает предельного значения  $P_*$ , то состояние трещины меняется с **Р** на **М** и она начинает смещаться. Мы предполагаем, что произведение среднего давления и объема трещины  $V$  неизменно во время движения:

$$P(t) \cdot V(t) = \text{const}. \quad (4.34)$$

Следовательно, когда трещина распространяется и ее объем уменьшается, давление  $P(t)$  внутри трещины увеличивается до значения  $P_*$ , после чего трещина возвращается в позицию **Р**.

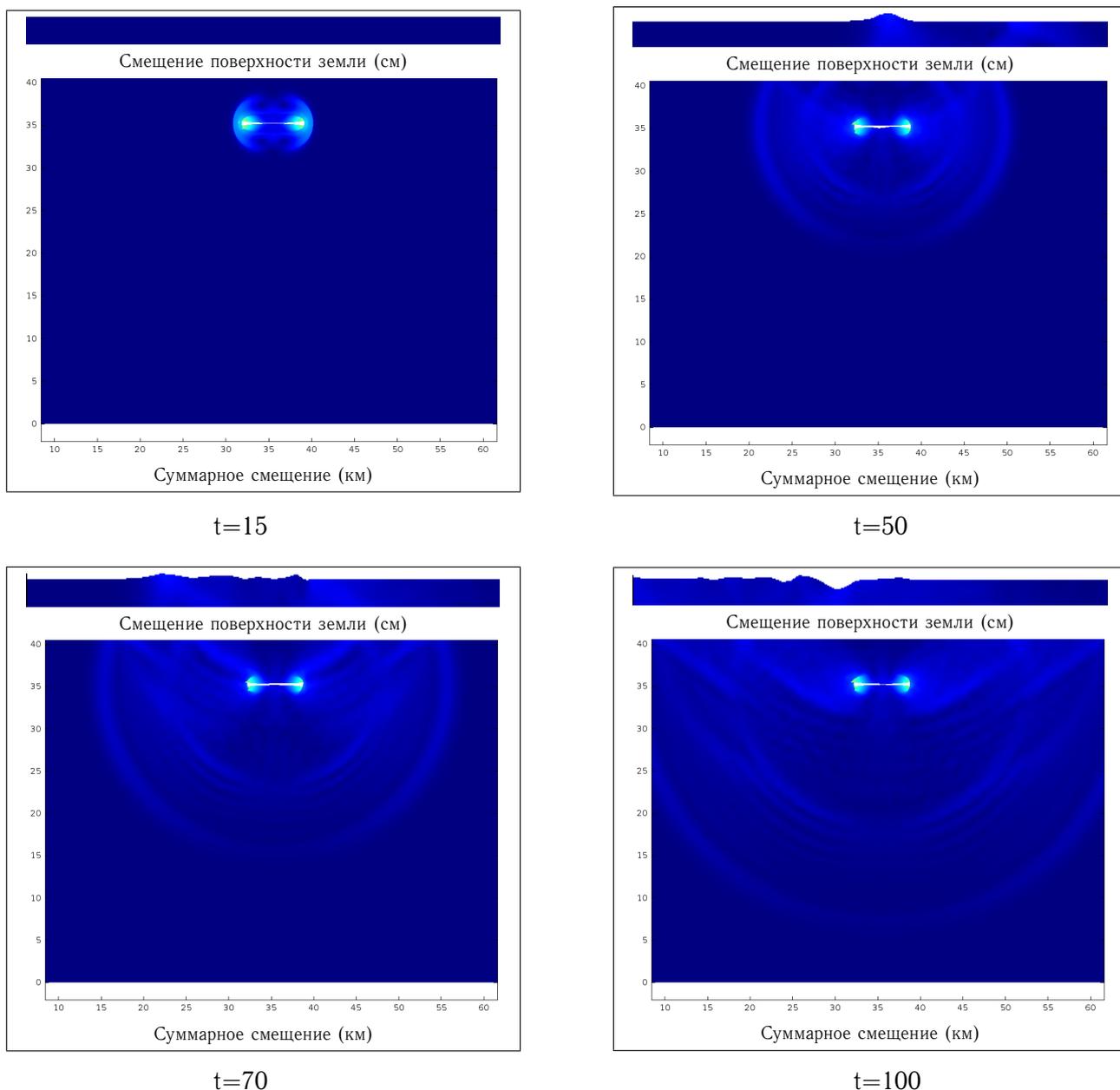


Рис. 4.2. Динамика трещины в горной породе.

Очевидно, что движение трещины создает сейсмические волны, которые могут достигать поверхности Земли.

Мы можем описать эту стадию процесса системой упругости Ламе

$$\alpha_\tau \rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot (\alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \mathbf{w}) - p \mathbb{I})$$

для смещений  $\mathbf{w}$  и давления  $p$  горных пород в области  $\Omega$ , вместе с потоком средней кривизны (4.33) для свободной границы  $S$  области  $\Omega^0$ . Задача дополняется постулатом (4.34), который дает граничные условия

$$(\alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \mathbf{w}) - p \mathbb{I}) \cdot \mathbf{n} = -P(t) \mathbf{n}$$

для уравнений Ламе на границе  $S$ . Соответствующие численные расчеты [26] подтверждают предложенную модель (см. рис. 4.2).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970.
2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
3. *Рубинштейн Л. И.* Проблема Стефана. — Рига: Звайгзне, 1967.
4. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. — М.: Физматлит, 1993.
5. *Anderson T. L.* Fracture mechanics. Fundamentals and applications. — Boca Raton: CRC Press, 1995.
6. *Antontsev S. N., Kazhikhov A. V., Monakhov V. N.* Boundary Value Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Fluids. — Amsterdam—NewYork—Oxford—Tokyo: North-Holland, 1990.
7. *Antontsev S., Meirmanov A., Yurinsky V.* A free boundary problem for Stokes equations: classical solutions// *Interfaces Free Bound.* — 2000. — 2. — С. 413–424.
8. *Böhm M.* On a nonhomogeneous Bingham fluid// *J. Differ. Equ.* — 1985. — 60. — С. 259–284.
9. *Brady P. V., House W. A.* Surface-controlled dissolution and growth of minerals// В сб.: «Physics and chemistry of mineral surfaces». — Boca Raton: CRC Press, 1996. — С. 225–306.
10. *Burridge R., Keller J. B.* Poroelasticity equations derived from microstructure// *J. Acoustic Soc. Amer.* — 1981. — 70. — С. 1140–1146.
11. *Cohen C. E., Ding D., Quintard M., Bazin B.* From pore scale to wellbore scale: Impact of geometry on wormhole growth in carbonate acidization// *Chem. Eng. Sci.* — 2008. — 63. — С. 3088–3099.
12. *Colding T. N., Minicozzi II W. P., Pedersen E. K.* Mean Curvature Flow// *Bull. Am. Math. Soc. (N.S.)*. — 2015. — 52. — С. 297–333.
13. *Fernández-Cara E., Guillén F., Ortega R. R.* Some theoretical results for visco-plastic and dilatant fluids with variable density// *Nonlinear Methods Appl.* — 1997. — 28. — С. 1079–1100.
14. *Freidman A.* Variational principles and free-boundary problems. — New York: John Wiley & Sons Inc., 1982.
15. *Giga Y., Takahashi S.* On global weak solutions of the nonstationary two-phase Stokes flow// *SIAM J. Math. Anal.* — 1994. — 25. — С. 876–893.
16. *Golfier F., Zarcone C., Bazin B., Lenormand R., Lasseux D., Quintard M.* On the ability of a Darcy-scale model to capture wormhole formation during the dissolution of a porous medium// *J. Fluid Mech.* — 2002. — 457. — С. 213–254.
17. *Kalia N., Balakotaiah V.* Effect of medium heterogeneities on reactive dissolution of carbonates// *Chem. Eng. Sci.* — 2009. — 64. — С. 376–390.
18. *Kasahara K.* Earthquake mechanics. — Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
19. *Kenneth W. W., Raymond E. D., Larry M. P., Stanley G. G.* Chemistry. — Belmont: Brooks, 2014.
20. *Lukkassen D., Nguetseng G., Wall P.* Two-scale convergence// *Int. J. Pure Appl. Math.* — 2002. — 2. — С. 35–86.
21. *Malvern L. E.* Introduction to Mechanics of a Continuum Medium. — Englewood Cliffs: Prentice-Hall Inc., 1969.
22. *Meirmanov A.* The Stefan problem. — Berlin—New York: Walter de Gruyter, 1992.
23. *Meirmanov A.* The Muskat problem for a viscoelastic filtration// *Interfaces Free Bound.* — 2011. — 13. — С. 463–484.
24. *Meirmanov A. M.* Mathematical models for poroelastic flows. — Paris: Atlantis Press, 2013.
25. *Meirmanov A., Galtsev O.* Displacement of oil by water in a single elastic capillary// *Boundary Value Problems.* — 2017. — 2017. — С. 1–26.
26. *Meirmanov A., Galtsev O.* Dynamics of cracks in rocks// *Int. J. Evol. Equ.* — 2017. — 10. — С. 214–227.
27. *Meirmanov A., Zimin R., Shiyapov K.* The Muskat problem at the microscopic level for a single capillary// *Bound. Value Probl.* — 2015. — 71. — С. 1–8.
28. *Monakhov V. N.* Boundary-value problems with free boundaries for elliptic systems of equations. — Providence: AMS, 1983.
29. *Nguetseng G.* A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization// *SIAM J. Math. Anal.* — 1989. — 20. — С. 608–623.
30. *Nguetseng G.* Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics// *SIAM J. Math. Anal.* — 1990. — 21. — С. 1394–1414.
31. *Nouri A., Poupaud F.* An existence theorem for the multifluid Navier—Stokes problem// *J. Differ. Equ.* — 1995. — 13. — С. 463–484.
32. *Panga M. K. R., Ziauddin M., Balakotaiah V.* Two-scale continuum model for simulation of wormholes in carbonate acidization// *A.I.Ch.E. Journal.* — 2005. — 51. — С. 3231–3248.

33. Sanchez-Palencia E. Non-homogeneous media and vibration theory. — Berlin: Springer, 1980.
34. Solonnikov V.A., Ladyzhenskaya O.A. On unique solvability of an initial-boundary value problem for viscous nonhomogeneous fluids// J. Soviet Math. — 1978. — 9. — С. 697–749.
35. Solonnikov V.A., Padula M. On the local solvability of free boundary problem for the Navier–Stokes equations// J. Math. Sci. — 2010. — 170. — doi: 10.1007/s10958-010-0099-3.
36. Solonnikov V.A., Tani A. Free boundary problem for the Navier–Stokes equations for a compressible fluid with a surface tension// J. Soviet Math. — 1992. — 62. — С. 2814–2818.
37. Whitham G.B. Linear and nonlinear waves. — New York: Willey, 1999.

Anvarbek M. Meirmanov

Yachay Tech University, San Miguel de Urucuqui, Hacienda San Jose s/n y Proyecto Yachay, Ecuador;

Белгородский государственный университет, 308015, Белгород, ул. Победы, д. 85

E-mail: anvarbek@list.ru

О. В. Гальцев

Белгородский государственный университет, 308015, Белгород, ул. Победы, д. 85

E-mail: galtsev\_o@bsu.edu.ru

О. А. Гальцева

Белгородский государственный университет, 308015, Белгород, ул. Победы, д. 85

E-mail: galtseva@bsu.edu.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-98-130

UDC 519.6+532.5+556.3

## Some Free Boundary Problems Arising in Rock Mechanics

© 2018 A. M. Meirmanov, O. V. Galtsev, O. A. Galtseva

### REFERENCES

1. O. A. Ladyzhenskaya, *Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti* [Mathematical Problems in Viscous Incompressible Fluid Dynamics], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
2. O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'tseva, *Lineynye i kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and Quasi-Linear Parabolic Equations], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
3. L. I. Rubinstein, *Problema Stefana* [The Stefan Problem], Zvaigne, Riga, 1967 (in Russian).
4. V. V. Zhikov, S. M. Kozlov, and O. A. Oleinik, *Usrednenie differentsial'nykh operatorov* [Averaging of Differential Operators], Moscow, Fizmatlit, 1993 (in Russian).
5. T. L. Anderson, *Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications*, CRC Press, 1995.
6. S. N. Antontsev, A. V. Kazhikhov, and V. N. Monakhov, *Boundary Value Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Fluids*, North-Holland, Amsterdam–NewYork–Oxford–Tokyo, 1990.
7. S. Antontsev, A. Meirmanov, and V. Yurinsky, “A free boundary problem for Stokes equations: classical solutions,” *Interfaces Free Bound.*, 2000, **2**, 413–424.
8. M. Böhm, “On a nonhomogeneous Bingham fluid,” *J. Differ. Equ.*, 1985, **60**, 259–284.
9. P. V. Brady and W. A. House, “Surface-controlled dissolution and growth of minerals,” In: *Physics and Chemistry of Mineral Surfaces*, CRC Press, Boca Raton, 1996, 226–298.
10. R. Burridge and J. B. Keller, “Poroelasticity equations derived from microstructure,” *J. Acoustic Soc. Amer.*, 1981, **70**, 1140–1146.
11. C. E. Cohen, D. Ding, M. Quintard, and B. Bazin, “From pore scale to wellbore scale: Impact of geometry on wormhole growth in carbonate acidization,” *Chem. Eng. Sci.*, 2008, **63**, 3088–3099.
12. T. N. Colding, Minicozzi W. P. II, and E. K. Pedersen, “Mean Curvature Flow,” *Bull. Am. Math. Soc. (N.S.)*, 2015, **52**, 297–333.
13. E. Fernández-Cara, F. Guillén, and R. R. Ortega, “Some theoretical results for visco-plastic and dilatant fluids with variable density,” *Nonlinear Methods Appl.*, 1997, **28**, 1079–1100.

14. A. Freidman, *Variational Principles and Free-Boundary Problems*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1982.
15. Y. Giga and S. Takahashi, “On global weak solutions of the nonstationary two-phase Stokes flow,” *SIAM J. Math. Anal.*, 1994, **25**, 876–893.
16. F. Golfier, C. Zarcone, B. Bazin, R. Lenormand, D. Lasseux, and M. Quintard, “On the ability of a Darcy-scale model to capture wormhole formation during the dissolution of a porous medium,” *J. Fluid Mech.*, 2002, **457**, 213–254.
17. N. Kalia and V. Balakotaiah, “Effect of medium heterogeneities on reactive dissolution of carbonates,” *Chem. Eng. Sci.*, 2009, **64**, 376–390.
18. K. Kasahara, *Earthquake Mechanics*, Cambridge University Press, 1981.
19. W. W. Kenneth, E. D. Raymond, M. P. Larry, and G. G. Stanley, *Chemistry*, Brooks, Belmont, 2014.
20. D. Lukassen, G. Nguetseng, and P. Wall, “Two-scale convergence,” *Int. J. Pure Appl. Math.*, 2002, **2**, 35–86.
21. L. E. Malvern, *Introduction to Mechanics of a Continuum Medium*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1969.
22. A. Meirmanov, *The Stefan Problem*, Walter de Gruyter, Berlin—New York, 1992.
23. A. Meirmanov, “The Muskat problem for a viscoelastic filtration,” *Interfaces Free Bound.*, 2011, **13**, 463–484.
24. A. M. Meirmanov, *Mathematical Models for Poroelastic Flows*, Atlantis Press, Paris, 2013.
25. A. Meirmanov, and O. Galtsev, “Displacement of oil by water in a single elastic capillary,” *Boundary Value Problems*, 2017, **2017**, 1–26.
26. A. Meirmanov, and O. Galtsev, “Dynamics of cracks in rocks,” *Int. J. Evol. Equ.*, 2017, **10**, 214–227.
27. A. Meirmanov, R. Zimin, and K. Shiyapov, “The Muskat problem at the microscopic level for a single capillary,” *Bound. Value Probl.*, 2015, **71**, 1–8.
28. V. N. Monakhov, *Boundary-Value Problems with Free Boundaries for Elliptic Systems of Equations*, AMS, Providence, 1983.
29. G. Nguetseng, “A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization,” *SIAM J. Math. Anal.*, 1989, **20**, 608–623.
30. G. Nguetseng, “Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics,” *SIAM J. Math. Anal.*, 1990, **21**, 1394–1414.
31. A. Nouri and F. Poupaud, “An existence theorem for the multifluid Navier–Stokes problem,” *J. Differ. Equ.*, 1995, **13**, 463–484.
32. M. K. Panga, M. Ziauddin, and V. Balakotaiah, “Two-scale continuum model for simulation of wormholes incarbonate acidization,” *A.I.Ch.E. Journal*, 2005, **51**, 3231–3248.
33. E. Sanchez-Palencia, *Non-homogeneous Media and Vibration Theory*, Springer, Berlin, 1980.
34. V. A. Solonnikov and O. A. Ladyzhenskaya, “On unique solvability of an initial-boundary value problem for viscous nonhomogeneous fluids,” *J. Soviet Math.*, 1978, **9**, 697–749.
35. V. A. Solonnikov and M. Padula, “On the local solvability of free boundary problem for the Navier–Stokes equations,” *J. Math. Sci.*, 2010, **170**, doi: 10.1007/s10958-010-0099-3.
36. V. A. Solonnikov and A. Tani, “Free boundary problem for the Navier–Stokes equations for a compressible fluid with a surface tension,” *J. Soviet Math.*, 1992, **62**, 2814–2818.
37. G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Willey, New York, 1999.

Anvarbek M. Meirmanov

Yachay Tech University, San Miguel de Urucuqui, Hacienda San Jose s/n y Proyecto Yachay, Ecuador;

Belgorod State University, Belgorod, Russia

E-mail: [anvarbek@list.ru](mailto:anvarbek@list.ru)

Oleg V. Galtsev

Belgorod State University, Belgorod, Russia

E-mail: [galtsev\\_o@bsu.edu.ru](mailto:galtsev_o@bsu.edu.ru)

Oksana A. Galtseva

Belgorod State University, Belgorod, Russia

E-mail: [galtseva@bsu.edu.ru](mailto:galtseva@bsu.edu.ru)