Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 1 (2018). С. 86–97

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-86-97 УДК 517.927

УРАВНЕНИЯ ШЛЕЗИНГЕРА ДЛЯ ВЕРХНЕТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ И ИХ РЕШЕНИЯ

© 2018 г. **В. П. ЛЕКСИН**

Аннотация. В настоящей работе рассмотрены явные интегральные выражения гипергеометрического и гиперэллиптического типа для решений уравнений Шлезингера в классах верхнетреугольных матриц с собственными числами, образующими арифметические прогрессии с одинаковой разностью. Полученные интегральные представления дополняют и обобщают ранее известные результаты.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Под уравнением Шлезингера на набор $B_1(a), B_2(a), \ldots, B_n(a)$, $a \in \mathbb{C}^n$ квадратных матриц размера $p \times p$, принято понимать нелинейную пфаффову систему уравнений

$$\mathrm{d}\, B_i(a) = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} [B_i(a),\, B_j(a)] \frac{\mathrm{d}(a_i - a_j)}{a_i - a_j} \tag{1.1}$$

на комплексном линейном пространстве $\mathbb{C}^n$. Квадратные скобки $[A, B]$ обозначают коммутатор матриц. Эти уравнения начал рассматривать Л. Шлезингер в начале XX века в связи с изучением изомонодромных деформаций мероморфных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений на сфере Римана

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{z - a_i}\right) y, \quad y(z) \in \mathbb{C}^p, \tag{1.2}$$

имеющих полюса первого порядка в особых точках $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Полагая, что матрицы B_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ зависят от положения особых точек $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, Шлезингер получил свое уравнение (1.1), требуя, чтобы матрицы монодромии системы (1.2) не изменялись при малом изменении положения особых точек. Рихард Фукс в 1905 году вывел шестое уравнение Пенлеве как уравнение движения в зависимости от четырех особых точек пятой ложной особой точки (вокруг нее решения не ветвятся) скалярного фуксового уравнения второго порядка, которое реализует как представление монодромии некоторое двумерное представление фундаментальной группы сферы Римана с четырьмя выколотыми точками. Значительно позже было показано, что уравнение Шлезингера для матриц второго порядка имеет редукцию к шестому уравнению Пенлеве. Таким образом была установлена тесная связь между разными подходами к получению шестого уравнения Пенлеве, которое изначально было получено из совсем других требований к нелинейным аналитическим дифференциальным уравнениям второго порядка, а именно, требовалось, чтобы их решения в качестве подвижных особых точек (т. е. зависящих от начальных условий) имели только полюса.

Специальные случаи уравнения Шлезингера (1.1) были изучены Гарнье, Аппелем, Лаппо-Данилевским и некоторыми другими математиками в 20-е годы XX века. Значительно позже, уже в 70-х и 80-х годах XX века, Аомото, Мальгранжем, Мива и Джимбо были рассмотрены общие вопросы существования решений и их особенностей для уравнений Шлезингера. В частности, было дано описание дивизора Мальгранжа как дивизора особенностей решения $(B_1(a), B_2(a), \dots, B_n(a))$ уравнения Шлезингера, определяющего изомонодромную шлезингеровскую деформацию

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i(a)}{z - a_i}\right) y \tag{1.3}$$

фуксовой системы (1.2), а Мива и Джимбо определили τ-функцию $\tau(a)$ как решение уравнения

$$\mathrm{d} \ln \tau(a) = \kappa \sum_{i \neq j,\, i,j=1}^{n} \operatorname{tr}(B_i(a) B_j(a)) \frac{\mathrm{d}(a_i - a_j)}{a_i - a_j}. \tag{1.4}$$

Нулями τ-функции $\tau(a)$ локально определяется дивизор Мальгранжа. Интерес к решениям уравнения Шлезингера резко возрос после того, как была четко описана редукция этих уравнений для матриц второго порядка к шестому уравнению Пенлеве, которое появляется во многих задачах современной математической физики. Подробное описание выше затронутых понятий и утверждений имеются в книге А. А. Болибруха [1], а также в работах [6, 7, 11]. В настоящей работе рассмотрены явные интегральные выражения гипергеометрического и гиперэллиптического типа для решений уравнений Шлезингера в классах верхнетреугольных матриц с собственными числами, образующими арифметические прогрессии с одинаковой разностью. Эти интегральные представления уточняют подобные представления из работ [8, 12] и дополняют и обобщают результаты работы [6].

2. Уравнения Шлезингера

Пусть $B_i(a)$, $i = 1, 2, \dots, n$ — набор квадратных матриц порядка p, определенных в некоторой области $U \subset \mathbb{C}^n$ комплексного линейного пространства $\mathbb{C}^n$, и точка $a^0 = (a_1^0, a_2^0, \dots, a_n^0) \in U$. *Уравнением Шлезингера* называется нелинейная пфаффова система уравнений на набор матриц

$$\mathrm{d} B_i(a) = -\sum_{j=1,\, j \neq i}^{n} [B_i(a), B_j(a)] \frac{\mathrm{d}(a_i - a_j)}{a_i - a_j}. \tag{2.1}$$

Здесь $[B_i, B_j] = B_i B_j - B_j B_i$ обозначает коммутатор матриц. Уравнение Шлезингера определено на дополнении $\mathbb{C}^n_* = \{a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n |\ a_i \neq a_j,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, \dots, n\}$ к объединению диагональных гиперплоскостей $a_i = a_j$, $i \neq j$.

Переписывая равенства 1-дифференциальных форм (2.1) как равенства коэффициентов при дифференциалах независимых переменных в левых и правых частях этих равенств, получим запись уравнения Шлезингера в форме системы уравнений в частных производных

$$\frac{\partial B_i}{\partial a_j} = \frac{[B_i, B_j]}{a_i - a_j}, \quad i \neq j,\ i, j = 1, \dots n, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial a_i} = -\sum_{j=1,\, j \neq i}^{n} \frac{[B_i, B_j]}{a_i - a_j}, \quad i = 1, \dots n. \tag{2.3}$$

3. Некоторые свойства уравнения Шлезингера и его решений

1. Уравнение Шлезингера интегрируемо в смысле Фробениуса и, следовательно, в достаточно малой окрестности точки $a^0 = (a_1^0, a_2^0, \dots, a_n^0) \in \mathbb{C}_*^n$ имеет голоморфное решение $B(a) = (B_1(a), B_2(a), \dots, B_n(a))$ с любыми начальными значениями $B(a^0) = (B_1(a^0) = B_1^0, B_2(a^0) = B_2^0, \dots, B_n(a^0) = B_n^0)$.

2. Собственные значения матриц решения $B_i(a)$ не зависят от a, т. е. являются константами или интегралами уравнения Шлезингера.

3. Сумма матриц решения уравнения Шлезингера

$$\sum_{i=1}^{n} B_i(a) = -B_\infty$$

не зависит от a, т. е. является постоянной матрицей или является матричным интегралом уравнения Шлезингера. Будем полагать, что матрица B_∞ является диагональной матрицей.

4. Теорема Мальгранжа утверждает, что локальное решение $B(a) = (B_1(a), B_2(a), \dots, B_n(a))$ уравнения Шлезингера аналитически продолжается как мероморфная функция на все универсальное накрытие $\widetilde{\mathbb{C}}_*^n$. Полярный дивизор особенностей аналитического продолжения зависит от начальных условий уравнения Шлезингера. Этот дивизор называется тета-дивизором Мальгранжа и обозначается Θ.

5. В общем случае, полярный дивизор Θ (тета-дивизор Мальгранжа) решения $B(a)$ в $\widetilde{C}_*^n$ является непустым, как отмечено выше, зависит от начальных данных $B(a^0)$ и локально задается нулями тау-функции Мивы $\tau(a)$, которая есть решение уравнения

$$\mathrm{d}\ln\tau(a) = \kappa \sum_{i\neq j,\, i,j=1}^{n} \mathrm{tr}(B_i(a)B_j(a)) \frac{\mathrm{d}(a_i - a_j)}{a_i - a_j},$$

где параметр κ определяется по начальным условиям уравнения Шлезингера.

4. Верхнетреугольные матрицы и их разбиения в сумму

Мы будем искать решения уравнения Шлезингера среди квадратных верхнетреугольных матриц $B_i(a)$, $i = 1, \dots, n$ размера $p \times p$, каждую из которых запишем в виде суммы диагональной и наддиагональных матриц:

$$B_i(a) = \Lambda_i(a) + U_i^1(a) + \dots + U_i^{p-1}(a). \tag{4.1}$$

Здесь

$$\Lambda_i(a) = \begin{pmatrix} \lambda_i^1(a) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i^2(a) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_i^p(a) \end{pmatrix}$$

— диагональная матрица. Далее,

$$U_i^1(a) = \begin{pmatrix} 0 & u_i^{1,1}(a) & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & u_i^{1,2}(a) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & u_i^{1,p-1}(a) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— матрица с ненулевыми (возможно) элементами только в первой наддиагонали,

$$U_i^2(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_i^{2,1}(a) & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_i^{2,2}(a) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & 0 & u_i^{2,p-2}(a) \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— матрица с ненулевыми (возможно) элементами только во второй наддиагонали и т. д.,

$$U_i^{p-1}(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & u_i^{p-1,1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— матрица с ненулевым (возможно) элементом только в правом верхнем углу.

Заметим, что коммутатором k-ой наддиагональной матрицы и m-ой наддиагональной матрицы является некоторая $(k+m)$-ая наддиагональная матрица при $k+m \leqslant p-1$ или нулевая матрица при $k+m > p-1$.

5. Уравнение Шлезингера для верхнетреугольных матриц

Для верхнетреугольных матриц, записанных в форме (4.1), уравнение Шлезингера (1.1), с учетом вида коммутаторов вехнетреугольных матриц, переписывается как система пфаффовых уравнений

$$d\Lambda_i(a) = 0,$$
$$dU_i^1(a) = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} ([\Lambda_i,\, U_j^1] + [U_i^1,\, \Lambda_j])\frac{d(a_i - a_j)}{a_i - a_j},$$
$$dU_i^k(a) = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \left([\Lambda_i,\, U_j^k] + [U_i^k,\, \Lambda_j] + \sum_{r+s=k} [U_i^r,\, U_j^s]\right)\frac{d(a_i - a_j)}{a_i - a_j},$$
$$k = 2, \dots, p-1.$$

Всюду $i = 1, 2, \dots, n$. Для получения такого вида уравнений необходимо еще раз отметить, что коммутатором наддиагональных матриц будет наддиагональная матрица, и, разбивая правую и левую части на наддиагональные матрицы, а затем приравнивая наддиагональные матрицы одного вида в правой и левой частях, получим выписанные уравнения.

Форма уравнений Шлезингера для верхнетреугольных матриц показывает, что диагональные матрицы $\Lambda_i(a)$ в их записи (4.1) не зависят от a, так как их полный дифференциал равен нулю.

Для элементов матриц Λ^i, U_i^k, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, p-1$, мы получаем следующую рекуррентную систему линейных дифференциальных уравнений (начиная с третьей системы — неоднородных уравнений):

$$d\,\lambda_i^m = 0,\ \ i = 1, \dots n,\ \ m = 1, \dots p,$$
$$\mathrm{d}\, u_i^{1,m} = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} (\lambda_i^{m,m+1} u_j^{1,m} - \lambda_j^{m,m+1} u_i^{1,m})\frac{\mathrm{d}(a_i - a_j)}{a_i - a_j}, \quad i = 1, \dots n,\ \ m = 1, \dots p-1,$$
$$\mathrm{d}\, u_i^{2,m} = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} [(\lambda_i^{m,m+2} u_j^{2,m} - \lambda_j^{m,m+2} u_i^{2,m}) + (u_i^{1,m} u_j^{1,m+1} - u_j^{1,m} u_i^{1,m+1})]\frac{\mathrm{d}(a_i - a_j)}{a_i - a_j},$$

$$\mathrm{d}\, u_i^{k,m} = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} ((\lambda_i^{m,m+k} u_j^{k,m} - \lambda_j^{m,m+k} u_i^{k,m}) + \sum_{r+s=k} (u_i^{r,m} u_j^{s,m+r} - u_j^{r,m} u_i^{s,m+r}))\frac{\mathrm{d}(a_i - a_j)}{a_i - a_j}, \quad (5.1)$$
$$i = 1, \dots n,\ \ m = 1, \dots p-k,\ \ k = 1,\, \dots,\, p-1,$$

где $\lambda_i^{m,m+1} = \lambda_i^m - \lambda_i^{m+1}$, $i = 1, \dots n$, $m = 1, \dots p-1$, $\lambda_i^{m,m+2} = \lambda_i^m - \lambda_i^{m+2}$, $i, j = 1, \dots n$, $m = 1, \dots p-2$, далее, $\lambda_i^{m,m+k} = \lambda_i^m - \lambda_i^{m+k}$, и последний параметр системы $\lambda_i^{1,p} = \lambda_i^1 - \lambda_i^p$.

Сформулируем итог алгебраических переписываний уравнения Шлезингера в виде теоремы.

Теорема 5.1. *Уравнение Шлезингера для верхнетреугольных (нижнетреугольных) матриц записывается как рекуррентная последовательность линейных неоднородных пфаффовых систем.*

5.1. Частный случай линейной редукции для $p = 2, 3$**.** В частном случае, для $p = 2$ и для верхнетреугольных матриц

$$B_i(a) = \begin{pmatrix} \lambda_i^1 & u_i(a) \\ 0 & \lambda_i^2 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n,$$

мы получаем следующую линейную пфаффову систему уравнений:

$$d\,\lambda_i^m = 0, \quad i = 1, \dots n, \;\; m = 1,\, 2,$$

$$\mathrm{d}\, u_i = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} (\lambda_i u_j - \lambda_j u_i) \frac{\mathrm{d}(a_i - a_j)}{a_i - a_j}, \quad i, j = 1, \dots n, \tag{5.2}$$

где $\lambda_i = \lambda_i^1 - \lambda_i^2$, $i = 1, \dots n$.

Для верхнетреугольных 3×3-матриц

$$B_i(a) = \begin{pmatrix} \lambda_i^1 & u_i(a) & w_i(a) \\ 0 & \lambda_i^2 & v_i(a) \\ 0 & 0 & \lambda_i^3 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n.$$

уравнения Шлезингера записывается в виде двух линейных систем (учитывая постоянство диагональных элементов) на функции $u_i(a)$, $v_i(a)$, $i = 1,\, 2, \dots n$,

$$\mathrm{d}\, u_i = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} (\lambda_i u_j - \lambda_j u_i) \frac{\mathrm{d}(a_i - a_j)}{a_i - a_j}, \quad i, j = 1, \dots n, \tag{5.3}$$

где $\lambda_i = \lambda_i^1 - \lambda_i^2$, $i = 1, \dots n$;

$$\mathrm{d}\, v_i = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} (\mu_i v_j - \mu_j v_i) \frac{\mathrm{d}(a_i - a_j)}{a_i - a_j}, \quad i, j = 1, \dots n, \tag{5.4}$$

где $\mu_i = \lambda_i^2 - \lambda_i^3$, $i = 1, \dots n$.

Для элементов $w_i(a)$ матрицы $B_i(a)$ система уравнений записывается в следующей форме:

$$\mathrm{d}\, w_i = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} [(\nu_i w_j - \nu_j w_i) + (u_i v_j - u_j v_i)] \frac{\mathrm{d}(a_i - a_j)}{a_i - a_j}, \tag{5.5}$$

где $\nu_i = \lambda_i^1 - \lambda_i^3$, $i = 1,\, 2,\, \dots n$.

Эти пфаффовы системы переписываются в форме уравнений в частных производных в следующем виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial a_j} = \frac{\lambda_j u_i - \lambda_i u_j}{a_i - a_j}, \quad i \neq j, \; 1 \leqslant i,\, j \leqslant n, \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial a_j} = \frac{\mu_j v_i - \mu_i v_j}{a_i - a_j}, \quad i \neq j, \; 1 \leqslant i,\, j \leqslant n, \tag{5.7}$$

и с условием на эти функции

$$\sum_{i}^{n} u_i = \sum_{i}^{n} v_i = 0. \tag{5.8}$$

Для функций $w_i(a)$, $i = 1, 2, \dots n$, получаем линейную неоднородную систему (полагая, что функции $u_i(a)$, $v_i(a)$, $i = 1,\, 2, \dots n$, уже найдены)

$$\frac{\partial w_i}{\partial a_j} = \frac{\nu_j w_i - \nu_i w_j}{a_i - a_j} + \frac{u_i(a) v_j(a) - u_j(a) v_i(a)}{a_i - a_j}, \quad i \neq j, \; 1 \leqslant i, \; j \leqslant n, \tag{5.9}$$

и условием

$$\sum_{i}^{n} w_i = 0. \tag{5.10}$$

6. Интегрирование многозначных дифференциальных 1-форм

Элементы пространства решений для любого верхнетреугольного уравнения Шлезингера мы будем искать в форме гипергеометрических интегралов. Соответствующие интегралы являются интегралами от многозначных дифференциальных 1-форм по многозначным циклам. Поэтому в этом разделе мы кратко изложим некоторые сведения о таком интегрировании, которые содержатся в работах [3, 5, 9, 10] и в учебнике [2].

Рассмотрим многозначную функцию на сфере Римана $\Phi(z, a_1, \ldots, a_n) = (z-a_1)^{\lambda_1} \cdots (z-a_n)^{\lambda_n}$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ и $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ — фиксированные параметры, а $z \in \bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ — переменная на сфере Римана. Если хотя бы один из параметров λ_j, $j = 1, \ldots, n$ не является целым числом, то функция $\Phi(z, a_1, \ldots, a_n)$ есть многозначная функция на одномерном комплексном многообразии $M = \mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Определим одномерную локальную систему (т. е. одномерное локально тривиальное векторное расслоение с постоянными функциями перехода относительно подходящего покрытия) на M по представлению фундаментальной группы $\rho : \pi_1(M, z_0) \to \mathbb{C}^*$, принимающего на образующих $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ этой группы значения $\rho(\gamma_j) = \exp(2\pi\lambda_j)$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Образующие γ_j, $1 \leqslant j \leqslant n$ являются свободными образующими свободной группы $\pi_1(M, z_0) = F_n$ ранга n, классы сопряженности которых задаются петлями, обходящими по малой окружности соответствующие точки a_j, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Пусть $\widetilde{M}$ — универсальное накрытие над M, и зададим естественное действие группы $\pi_1(M, z_0)$ на произведении $\widetilde{M} \times \mathbb{C}$ формулой $\forall \gamma \in \pi_1(M, z_0)$, $\gamma(\tilde{m}, w) = (\gamma\tilde{m}, \rho(\gamma)w)$, где $\gamma\tilde{m}$ — действие скольжением на универсальном накрытии. Действие $\pi_1(M, z_0)$ согласовано со структурой прямого произведения на $\widetilde{M} \times \mathbb{C}$. Определим локальную систему L_ρ на M как фактор-пространство $L_\rho = \widetilde{M} \times \mathbb{C}/\pi_1(M)$.

Отображение расслоения p задается как проекция на первый сомножитель $p : \widetilde{M} \times \mathbb{C}/\pi_1(M) \to \widetilde{M}/\pi_1(M) = M$. Структура векторного пространства в слое отображения p задается обычным правилом сложения комплексных чисел в слое $(\tilde{m}, w_1) + (\tilde{m}, w_2) = (\tilde{m}, w_1 + w_2)$ и правилом умножения на комплексное число $\lambda p^{-1}(m) = (\tilde{m}, \lambda w)$, где $\tilde{m} \in \widetilde{M}$.

Определим многозначное сечение σ локальной системы L_ρ как то, что получится из постоянного сечения $\tilde{\sigma}(\tilde{m}) = (\tilde{m}, 1)$ тривиального расслоений $\widetilde{M} \times \mathbb{C} \to \widetilde{M}$ при последующем переходе к классам эквивалентности относительно определенного действия фундаментальной группы. Обозначим классы эквивалентности чертой сверху. Тогда имеем равенство $\overline{\tilde{\sigma}(\gamma\tilde{m}, 1)} = \overline{(\gamma\tilde{m}, 1)} = \overline{(\tilde{m}, \rho(\gamma^{-1}))} = \rho(\gamma^{-1})\overline{\tilde{\sigma}(\tilde{m})}$. Упрощая обозначения, например, полагая, что $\tilde{\sigma} = \sigma$, $\overline{\tilde{m}} = m$, $\gamma\tilde{m} = \gamma m$ и убирая всюду черту сверху, последнее равенство можно записать в следующем виде: $\sigma(\gamma m) = (\gamma m, 1) = (m, \rho(\gamma^{-1})) = \rho(\gamma^{-1})\sigma(m)$. Такая запись подчеркивает многозначность сечения σ и не приводит к путанице. Аналогично определяется сопряженная локальная система L_ρ^{-1} для представления ρ^{-1}, $\rho^{-1}(\gamma_j) = (\rho(\gamma_j))^{-1} = \exp(-2pi\lambda_j)$.

Рассмотрим на $\tilde{M}$ аналитические дифференциальные 1-формы $\eta_j = \Phi(z, a_1, \ldots, a_n)\dfrac{\mathrm{d}\, z}{z - a_j} \otimes \sigma$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Эти 1-формы являются обычными однозначными 1-формами на M, зависящими от положения точек $a_1, \ldots, a_n$ на $\mathbb{C}$ как от параметров. Однозначность форм следует из свойства $\Phi(\gamma m, a_1, \ldots, a_n) = \rho(\gamma)\Phi(m, a_1, \ldots, a_n)$ аналитического продолжения функции Φ из малой окрестности точки $z_0 \in M$ на все универсальное накрытие $\widetilde{M}$ и равенства $\sigma(\gamma m) = \rho^{-1}(\gamma)\sigma(m)$. Таким образом мы имеем для каждого $1 \leqslant j \leqslant n$ семейство однозначных 1-форм $\eta_j(a)$, $a = (a_1, \ldots, n)$ на комплексной прямой $\mathbb{C}$ с особыми точками, в точках $a_1, \ldots, a_n$. Эти формы представляют классы когомологий де Рама $H^1_{DR}(M, L_\rho)$, правила дифференцирования по параметрам которых описаны в работе [10].

Определим цепи и гомологии с коэффициентами в локальной системе L_ρ^{-1} [5, 11, 13] и их спаривание с когомологиями де Рама $H^1_{DR}(M, L_\rho)$. Группа 1-цепей с локальными коэффициентами в L_ρ^{-1} порождена конечными линейными комбинациями $\gamma = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i \otimes \tau_i$, где каждый c_i, $1 \leqslant i \leqslant k$ является 1-симплексом в M, а каждый τ_i, $1 \leqslant i \leqslant k$ является постоянным сечением тривиализованного ограничения локальной системы $L_{\rho^{-1}}|_{c_i}$ на c_i. Более точно, τ_i — это горизонтальное сечение ограничения локальной системы над симплексом c_i относительно интегрируемой (плоской) связности, которая всегда имеется в локальной системе и задается нулевыми формами связности в локальных голоморфных тривиализациях. Спаривание $\langle \eta_j, \gamma\rangle$ обычно обозначается интегралом $\int\limits_\gamma \Phi(z,\ a_1, \ldots, a_n)\dfrac{\mathrm{d}\, z}{z-a_j}\otimes\sigma$ и определяется равенством

$$\int\limits_\gamma \Phi(z,\ a_1,\ \ldots,\ a_n)\frac{\mathrm{d}\, z}{z-a_j}\otimes\sigma = \sum_{i=1}^k \int\limits_{a_i} \Phi(z,\ a_1,\ \ldots,\ a_n)\langle\sigma,\ \tau_i\rangle\frac{\mathrm{d}\, z}{z-a_j}. \tag{6.1}$$

Если цепь с локальными коэффициентами γ является нетривиальным циклом, то она гомологична в группе гомологий $H_1(M,\ L_\rho^{-1})$ (см. [2, 5, 13]) линейной комбинации циклов в M, представленных двойными петлями Похгаммера или отрезками (точнее, интервалами), соединяющих какие-либо пары точек из набора точек $\{a_1,\ \ldots,\ a_n\}$. Напомним, что двойная петля Похгаммера, соответствующая двум точкам, есть коммутатор двух петель, каждая из которых обходит по малой окружности одну из точек.

Дифференцирование интегралов (6.1) по параметрам осложняется зависимостью от параметров одномерного комплексного многообразия M (было бы правильнее писать $M(a_1,\ \ldots,\ a_n)$) где лежат циклы, по которым производится интегрирование. Для преодоления этой трудности превратим семейство многообразий $M(a_1,\ \ldots,\ a_n)$ в слои расслоения $\hat{p} : \mathbb{C}_*^{n+1} \to C_*^n$, где $\hat{p}(z,\ a_1, \ldots a_n) = (a_1, \ldots a_n)$. На пространстве расслоения $\mathbb{C}_*^{n+1}$ определим формы $\hat{\eta}_j = \Phi(z,\ a_1,\ \ldots,\ a_n)\dfrac{\mathrm{d}(z-a_j)}{z-a_j}\otimes\hat{\sigma}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, где $\hat{\sigma}$ — одномерное представление фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{C}_*^{n+1},\ \hat{z}_0)$, строится по представлению ρ фундаментальной группы слоя $\pi_1(M(a_1,\ \ldots,\ a_n),\ z_0)$. Ограничения на слой $M(a_1,\ \ldots,\ a_n)$ каждой формы $\hat{\eta}_j$ дает форму η_j. Взятие полного дифференциала от форм $\hat{\eta}_j$ на пространстве расслоения $\mathbb{C}_*^{n+1}$ и последующее ограничение полученной формы на слой $M(a_1,\ \ldots,\ a_n)$ составляют суть дифференцирования классов гомологий по параметрам и дифференцирования интеграла (6.1) по параметрам подынтегрального выражения. Подробное изложение, как уже было отмечено выше, содержится в работах [3, 5, 9–11] и в учебнике [2].

Привычные правила дифференцирования интегралов, зависящих от параметров от однозначных форм, сохраняются. В следующем разделе мы используем методы дифференцирования интегралов, зависящих от параметров.

7. Интегральные решения верхнетреугольного уравнения Шлезингера для $p = 2$

В этом разделе мы предъявим решения в интегральной форме уравнения Шлезингера для верхнетреугольных матриц размера 2×2

$$B_i(a) = \begin{pmatrix} \lambda_i^1 & u_i(a)\\ 0 & \lambda_i^2\end{pmatrix},\quad i = 1,\ldots,n.$$

В случае 2×2-матриц уравнение Шлезингера, как показано выше, есть линейная пфаффова система

$$\mathrm{d}\, u_i = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^n (\lambda_i u_j - \lambda_j u_i)\frac{\mathrm{d}(a_i-a_j)}{a_i-a_j},\quad i,j = 1,\ldots n, \tag{7.1}$$

где $\lambda_i = \lambda_i^1 - \lambda_i^2$, $i = 1,\ldots n$.

Пусть локальная система $\mathcal{L}_\rho$ определяется представлением $\rho : \pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus \{a_1,\ldots, a_n, \infty\},\ t_0) = F_n \to \mathbb{C}^*$ фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus \{a_1,\ldots, a_n, \infty\},\ t_0) = F_n$, которое отправляет образующие $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ свободной группы F_n в ненулевые комплексные числа $q_1 = e^{2\pi i\lambda_1},\ldots, q_n = e^{2\pi i\lambda_n}$ и числа λ_i, как указано выше, равны $\lambda_i = \lambda_i^1 - \lambda_i^2$, $i = 1,\ldots n$.

Далее следуя приемам работы с интегралами и методам вычисления из работ [3, 9–11], докажем следующую теорему.

Теорема 7.1. *Если ни одно из чисел $\lambda_i = \lambda_i^1 - \lambda_i^2$, $1 \leqslant i \leqslant n$ не равно целому числу, то элементы $u_i(a)$ матриц $B_i(a) = \begin{pmatrix} \lambda_i^1 & u_i(a)\\ 0 & \lambda_i^2\end{pmatrix}$, $i = 1,\ldots,n$, определяющих базис пространства* *решений линейной пфаффовой системы* (7.1), *задаются интегралами гипергеометрического типа*

$$u_i^j(a_1,\dots,a_n) = \lambda_i \int\limits_{\gamma_j} (z-a_1)^{\lambda_1}\cdots(z-a_n)^{\lambda_n}\frac{\mathrm{d}\,z}{z-a_i}\otimes\sigma, \tag{7.2}$$

где $\gamma_j,\ j=1,\dots,n$ — *двойные петли Похгаммера, соответствующие парам точек* $\{a_1, a_j\},\ j\in\{a_2,\dots,\infty\}$ *и задающих базис в гомологиях* $H_1(\mathbb{C}P^1\setminus\{a_1,\dots,a_n,\infty\}, L_\rho^{-1})$ *с локальными коэффициентами* L_ρ^{-1}. *Если в наборе* $\lambda_j,\ 1\leqslant j\leqslant n$ *имеются целые числа, то интегралы* (7.2) *определяют просто какие-либо решения* (*не обязательно дают базис*).

Доказательство. Рассмотрим интеграл $u_i(a_1,\dots,a_n) = \lambda_i \int\limits_\gamma \Phi\frac{\mathrm{d}\,z}{z-a_i}\otimes\sigma$. Далее мы будем опускать символ σ при дифференцировании этого интеграла по параметрам, так как операция тензорного умножения на σ перестановочна с операциями дифференцирования или взятия дифференциала. Возьмем полный дифференциал от $u_i(a_1,\dots,a_n)$ по параметрам $a_1,\dots,a_n$:

$$\mathrm{d}\,u_i(a_1,\dots,a_n) = \lambda_i\,\mathrm{d}\int\limits_\gamma \Phi\frac{\mathrm{d}\,z}{z-a_i} = -\lambda_i\sum_{j=1}^n\left(\int\limits_\gamma\frac{\lambda_j\Phi}{(z-a_j)(z-a_i)}dz\right)da_j + \lambda_i\left(\int\limits_\gamma\frac{\Phi dz}{(z-a_i)^2}\right)da_i =$$

$$= -\lambda_i\sum_{j\neq i}\left(\int\limits_\gamma\frac{\lambda_j\Phi}{(z-a_j)(z-a_i)}dz\right)da_j - \lambda_i\left(\int\limits_\gamma(\lambda_i-1)\frac{\Phi dz}{(z-a_i)^2}\right)da_i =$$

(Преобразуем дробь под первым интегралом: $\dfrac{1}{(z-a_i)(z-a_j)} = \dfrac{1}{a_i-a_j}\left(\dfrac{1}{z-a_i}-\dfrac{1}{z-a_j}\right)$, тогда получим)

$$= -\sum_{j\neq i}\frac{\lambda_i\lambda_j}{a_i-a_j}\left(\int\limits_\gamma\frac{\Phi}{z-a_i}dz - \int\limits_\gamma\frac{\Phi}{z-a_j}dz\right)da_j - \lambda_i\left(\int\limits_\gamma(\lambda_i-1)\frac{\Phi dz}{(z-a_i)^2}\right)da_i. \tag{7.3}$$

Для дифференциала только по переменной z функции $\dfrac{\Phi(z, a_1,\dots,a_n)}{z-a_i}$ имеем равенство

$$\mathrm{d}\,\frac{\Phi(z)}{z-a_i} = (\lambda_i-1)\frac{\Phi(z)dz}{(z-a_i)^2}dz + \sum_{j\neq i}\frac{\lambda_j\Phi(z)}{(z-a_j)(z-a_i)}dz.$$

Воспользовавшись теоремой Стокса, получим

$$-\int\limits_\gamma(\lambda_i-1)\frac{\Phi(z)}{(z-a_i)^2}dz = \sum_{j\neq i}\int\limits_\gamma\frac{\lambda_j\Phi(z)}{(z-a_j)(z-a_i)}dz =$$

$$= \int\limits_\gamma\lambda_j\Phi(z)\left(\frac{1}{a_i-a_j}\left(\frac{1}{z-a_i}-\frac{1}{z-a_j}\right)\right)dz = \sum_{j\neq i}\frac{\lambda_j}{a_i-a_j}\int\limits_\gamma\frac{\Phi(z)}{z-a_i}dz - \sum_{j\neq i}\frac{\lambda_j}{a_i-a_j}\int\limits_\gamma\frac{\Phi}{z-a_j}dz.$$

Обозначим $G_i = \int\limits_\gamma\dfrac{\Phi(z)}{z-a_i}dz,\ 1\leqslant i\leqslant n$. Тогда последнее равенство принимает вид

$$-\int\limits_\gamma(\lambda_i-1)\frac{\Phi(z)}{(z-a_i)^2}dz = \sum_{j\neq i}\left(\frac{\lambda_j}{a_i-a_j}G_i - \frac{\lambda_j}{a_i-a_j}G_j\right).$$

Заметим, что из определений функций F_i и G_i мы имеем равенство $u_i = \lambda_i G_i$. Если в выражении (7.3) для полного дифференциала $\mathrm{d}\,u_i$ использовать последние два равенства, то получим следующее равенство:

$$du_i = \sum_{j\neq i}(\lambda_j u_i - \lambda_i u_j)\,\frac{da_i - da_j}{a_i-a_j}. \tag{7.4}$$

Это показывает, что мы получили решение уравнения Шлезингера для $p=2$. Пфаффову систему (7.4) еще называют системой Жордана—Похгаммера [11], которая вполне интегрируема в смысле Фробениуса. Утверждение теоремы, что предъявленные интегралы дают базис решений этой системы, есть другое доказательство полной интегрируемости. То, что интегралы образуют базис, следует из того, что указанные двойные петли Похгаммера в количестве n штук линейно независимы, что следует из линейной независимости форм η_j (особенности в разных точках и разных порядков) и невырожденности спаривания в силу двойственности Пуанкаре [5, 11]. Теорема доказана. $\square$

Интегралы для решений, указанные в теореме 7.1, являются интегралами гипергеометрического типа, обобщающие интегральное представление для гипергеометрической функции, дающей решение гипергеометрического уравнения Гаусса.

8. Интегральные решения верхнетреугольного уравнения Шлезингера для произвольного p

В этом разделе мы представим решения гипергеометрического типа уравнений Шлезингера для верхнетреугольных матриц любого размера $p \geqslant 2$ с дополнительным ограничением на собственные значения матриц, задающих начальные данные для решений. Напомним, что собственные значения матриц $B_i(a)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ уравнения Шлезингера являются интегралами для этого уравнения, т. е. совпадают с собственными значениями начальных данных $B_i(a^0)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Теперь докажем теорему, обобщающую теорему из предыдущего раздела.

Теорема 8.1. *Пусть для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ собственные значения $\lambda_i^1, \lambda_i^2, \ldots, \lambda_i^p$ каждой матрицы начальных данных $B_i(a^0)$ верхнетреугольного уравнения Шлезингера образуют арифметическую прогрессию с одной и той же разностью Δ, причем ни одно из чисел $k\Delta$, $1 \leqslant k \leqslant p-1$, не является целым. Тогда при выборе начальных данных для внедиагональных элементов матриц $B_i(a^0), 1 \leqslant i \leqslant n$, удовлетворяющих условиям $u_i^{k,m}(a^0) = u_j^{k,m}(a^0)$, для всех пар $\{i, j\}$, $i \neq j$, при фиксированных k, m, все элементы $u_i^{k,l}(a)$ каждой матрицы решения $(B_1(a), \ldots, B_n(a))$ верхнетреугольного уравнения Шлезингера являются интегралами гипергеометрического типа* (7.2).

Доказательство. При предположениях теоремы о собственных значениях матриц из начальных условий система уравнений на элементы $u_i^{1,m}(a)$ из первых наддиагональных матриц U_i^1, $1 \leqslant i \leqslant n$ имеет вид

$$\mathrm{d}\, u_i^{1,m} = \Delta \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} (u_i^{1,m} - u_j^{1,m}) \frac{\mathrm{d}(a_i - a_j)}{a_i - a_j}, \quad i = 1, \ldots n,\ \ m = 1, \ldots p-1, \tag{8.1}$$

и по структуре совпадает с уравнениями (7.4), но с одним параметром $\lambda_i^{m,m+1} = \lambda_i^m - \lambda_i^{m+1} = \Delta$, $i = 1, \ldots n$, $m = 1, \ldots, p-1$, удовлетворяющим условиям теоремы 7.1. Тогда в силу теоремы 7.1 базис решений для этих элементов задается интегралами

$$u_i^{1,m,j}(a_1, \ldots, a_n) = \Delta \int_{\gamma_j} \prod_{k=1}^{n} (z - a_k)^{\Delta}. \tag{8.2}$$

В силу предположений теоремы на начальные условия решений $u_i^{1,m}(a^0) = u_j^{1,m}(a^0)$ системы (8.1) решения $u_i^{1,m}(a)$, $u_j^{1,m}(a)$ совпадают, т. е. $u_i^{1,m}(a) = u_j^{1,m}(a)$.

Для элементов $u_i^{2,m}(a)$ второй наддиагональной матрицы U_i^2 имеет место неоднородная система линейных пфаффовых уравнений

$$\mathrm{d}\, u_i^{2,m} = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} [2\Delta(u_j^{2,m} - u_i^{2,m}) + (u_i^{1,m} u_j^{1,m+1} - u_j^{1,m} u_i^{1,m+1})] \frac{\mathrm{d}(a_i - a_j)}{a_i - a_j}, \tag{8.3}$$

так как для разностей собственных значений матриц имеем равенства $\lambda_i^{m,m+2} = \lambda_i^m - \lambda_i^{m+2} = 2\Delta$, $i, j = 1, \ldots n$, $m = 1, \ldots p-2$. Из совпадения решений $u_i^{1,m}(a) = u_j^{1,m}(a)$ $i \neq j$ следует равенство нулю нелинейной по функциям $u_i^{1,m}(a)$, $u_j^{1,m}(a)$ части уравнения для $u_i^{2,m}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. В итоге мы получаем линейное по $u_i^{2,m}$, $1 \leqslant i \leqslant n$ уравнение, которое по структуре совпадает с уравнением (7.1) или, точнее, с (8.1), а его решение с (7.2) или, точнее, с (8.2), но с параметром 2Δ, удовлетворяющим условию на параметры теоремы 7.1.

В общем случае подобное наблюдение также имеет место, когда мы рассматриваем систему уравнений для элементов из k-той ($k < p$) наддиагональной матрицы

$$\mathrm{d}\, u_i^{k,m} = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} (k\Delta(u_j^{k,m} - u_i^{k,m}) + \sum_{r+s=k} (u_i^{r,m} u_j^{s,m+r} - u_j^{r,m} u_i^{s,m+r}))\frac{\mathrm{d}(a_i - a_j)}{a_i - a_j}, \qquad \lambda_i^{m,m+k} = \lambda_i^m - \lambda_i^{m+k} = k\Delta. \tag{8.4}$$

В силу предположения на начальные условия и из описанного совпадения элементов из наддиагональных матриц с меньшим индексом, чем k, нелинейная часть (рассматриваемая как неоднородность) уравнения (8.4) обращается в нуль, и мы получаем линейную пфаффову систему на функции $u_i^{k,m}$, совпадающую по структуре с (8.1), базис решений которой задается интегралами (8.2), но все для параметра $k\Delta$, который удовлетворяет условию на параметр теоремы 7.1. Такая процедура поиска базиса решений, составленного из гипергеометрических интегралов, завершается за $p-1$ шагов. Теорема доказана. □

Отметим, что системы вида (8.1) всесторонне изучал Т. Коно. Их связь с уравнениями Шлезингера была отмечена в работе [12]. Коно такие системы уравнений, как уже было отмечено выше, называл системами Жордана—Похгаммера и установил их связь с классическими уравнениями Янга—Бакстера, указал гипергеометрический базис решений и доказал, что представление монодромии такой системы эквивалентно представлению Бурау [11]. Аналогичное исследование провели М. Капович и Дж. Миллсон для уравнения (7.1), установив его связь с изгибаниями многоугольников в трехмерном пространстве и описав монодромию этого уравнения с помощью представления Гасснера [9].

9. Решения верхнетреугольного уравнения Шлезингера при рациональном параметре Δ

В этом разделе мы более детально опишем форму решений, доставляемых для систем

$$\mathrm{d}\, u_i = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} (\lambda_i u_j - \lambda_j u_i)\frac{\mathrm{d}(a_i - a_j)}{a_i - a_j},) \quad i, j = 1, \ldots n,$$

где $\lambda_1 = \lambda^1 = \cdots = \lambda = \Delta$ и $\Delta = \pm\dfrac{m}{N}$ — рациональное число, числитель и знаменатель которого взаимно простые натуральные числа $(m,\, N) = 1$. К этим системам, как показано в теореме 8.1, редуцируются верхнетреугольные уравнения Шлезингера при дополнительных ограничениях на собственные числа. При указанных ограничениях на параметры λ_i дифференциальная форма под интегралом в выражении для решения принимает вид $\eta_i(z) = (P^m(z))^{\pm\frac{1}{N}}\dfrac{dz}{z - a_i}$, где $P(z)$ — многочлен $P(z) = (z - a_1)(z - a_2)\cdots(z - a_n)$.

Естественно рассмотреть алгебраическую кривую Γ в $\mathbb{C}^2$, заданную уравнением $\Gamma = \{(z,\, w) \in \mathbb{C}^2 |\ w^N = P^m(z)\}$. При $m > 2$ у этой кривой все точки $a_1, \ldots, a_n$ будут особыми точками. Поэтому мы положим $m = 1$, и тогда у кривой Γ, возможно, только точка на бесконечности будет особой при стандартном ее замыкании в двумерном комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^2$, а в аффинной части $\mathbb{C}^2$ — она неособая. При отображении проектирования $(z, w) \to z$ кривая Γ является n-листным разветвленным накрытием над комплексной прямой $\mathbb{C}$ с множеством точек ветвления $\{a_1, \ldots, a_n\}$. При $N = 2$ и $\Delta = -\dfrac{1}{2}$ формы $\eta_i(z)$ поднимаются на Γ как однозначные голоморфные 1-формы $\tilde{\eta}_i(z)$.

Локальная система L_ρ на проколотой комплексной прямой $\mathbb{C}\backslash\{a_1, \ldots, a_n\}$ поднимается как тривиальная локальная система на кривую Γ (так как соотношения в фундаментальной группе Γ, если они появляются, порождаются коммутаторами элементов и потому с универсального накрытия $\widetilde{M}$ тривиальная локальная система опускается как тривиальная).

В каждую двойную петлю Похгаммера γ (т. е. цикл Похгаммера, которые порождают гомологии с коэффициентами в локальной системе L_ρ^{-1}) на проколотой комплексной прямой проектируется некоторый цикл $\tilde{\gamma}$ (с коэффициентами в тривиальной локальной системе) на стандартном замыкании Γ в комплексной проективной плоскости. Имеет место естественное равенство $\int\limits_{\gamma} \eta(z) = \int\limits_{\tilde{\gamma}} \tilde{\eta}(z)$. Интегралы в правой части последнего равенства являются гиперэллиптическими интегралами, в случае $n = 3$ — это просто эллиптические интегралы.

Все сказанное выше в этом разделе сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 9.1. *Верхнетреугольные уравнения Шлезингера для матриц произвольного размера $p \times p$, в которых собственные значения матриц начальных условий образуют арифметические прогрессии с разностью $\Delta = -\dfrac{1}{2}$, имеют базис решений, представленный гиперэллиптическими интегралами.*

Для верхнетреугольных матриц размера 2×2 результаты содержатся в работе [6].

В заключение автор выражает благодарность Р. Р. Гонцову за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 16-51-150005-НЦНИ-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болибрух А. А.* Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений. — М.: МЦНМО, 2009.
2. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. — М.: Физматлит, 1963.
3. *Aomoto K.* On the structure of integrals of power product of linear functions// Sci. Papers College Gen. Edu. Univ. Tokyo. — 1977. — *27*, № 2. — С. 49–61.
4. *Aomoto K.* Founctions hyperlogarithmiques et groupes de monodromie unipotens// Sci. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. — 1978. — *25*. — С. 149–156.
5. *Deligne P., Mostow G. D.* Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy// Publ. IHES. — 1986. — *63*. — С. 5–90.
6. *Dragovich V., Schramchenko V.* Algebro-geometric solutions to triangular Schlesinger systems// `arxiv:1604.01820v2[math.AG]`.
7. *Dubrovin B., Mazzocco M.* On the reductions and classical solutions of the Schlesinger equations// В сб. «Differential Equations and Quantum Groups». — Strasburg: IRMA, 2007. — С. 157–187.
8. *Gontsov R. R., Leksin V. P.* On the reducibility of Schlesinger isomonodromic families// В сб. «Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE 2012». — Cambridge: Cambridge Sci. Publ., 2014. — С. 21–34.
9. *Kapovich M., Millson J.* Quantization of bending deformations of polygons in $\mathbb{E}^3$, hypergeometric integrals and the Gassner representation// Can. Math. Bull. — 2001. — *44*, № 1. — С. 36–60.
10. *Katz N., Oda T.* On the differentiation of de Rham cohomology classes with respect to parameters// J. Math. Kyoto Univ. — 1968. — *8*. — С. 199–213.
11. *Kohno T.* Linear representations of braid groups and classical Yang—Baxter equations// Contemp. Math. — 1988. — *78*. — С. 339–363.
12. *Leksin V. P.* Isomonodromy deformations and hypergeometric-type systems// В сб. «Painlevé Equations and Related Topics». — Berlin—Boston: Walther de Gruyter, 2012. — С. 117–122.
13. *Żoladek H.* The Monodromy Group. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 2006.

В. П. Лексин
Государственный социально-гуманитарный университет,
140452, г. Коломна, ул. Зеленая, д. 30
E-mail: `lexin_vpmail.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-86-97 UDC 517.927

Schlesinger's Equations for Upper Triangular Matrices and Their Solutions

© 2018 **V. P. Lexin**

Abstract. We consider explicit integral expressions of hypergeometric and hyperelliptic types for solutions of Schlesinger's equations in classes of upper triangular matrices with eigenvalues that produce arithmetic progressions with the same difference. These integral representations extend and generalize earlier known results.

REFERENCES

1. A. A. Bolibrukh, *Obratnye zadachi monodromii v analiticheskly teorii differentsial'nykh uravneniy* [Inverse Problems of Monodromy in Analytical Theory of Differential Equations], MTSNMO, Moscow, 2009 (in Russian).
2. E. T. Whittaker and G. N. Watson, *Kurs sovremennogo analiza* [A Course of Modern Analysis], Fizmatlit, Moscow, 1963 (Russian translation).
3. K. Aomoto, "On the structure of integrals of power product of linear functions," *Sci. Papers College Gen. Edu. Univ. Tokyo.*, 1977, **27**, No. 2, 49–61.
4. K. Aomoto, "Founctions hyperlogarithmiques et groupes de monodromie unipotens," *Sci. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.* , 1978, **25**, 149–156.
5. P. Deligne and G. D. Mostow, "Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy," *Publ. IHES.*, 1986, **63**, 5–90.
6. V. Dragovich and V. Schramchenko, "Algebro-geometric solutions to triangular Schlesinger systems," *Arxiv*: 1604.01820v2[math.AG].
7. B. Dubrovin and M. Mazzocco, "On the reductions and classical solutions of the Schlesinger equations," In: *Differential Equations and Quantum Groups*. — IRMA, Strasburg 2007, pp. 157–187.
8. R. R. Gontsov and V. P. Leksin, "On the reducibility of Schlesinger isomonodromic families," In: *Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE* 2012. — Cambridge Sci. Publ., Cambridge, 2014, pp. 21–34.
9. M. Kapovich and J. Millson, "Quantization of bending deformations of polygons in $\mathbb{E}^3$, hypergeometric integrals and the Gassner representation," *Can. Math. Bull.*, 2001, **44**, No. 1, 36–60.
10. N. Katz and T. Oda, "On the differentiation of de Rham cohomology classes with respect to parameters," *J. Math. Kyoto Univ.*, 1968, **8**, 199–213.
11. T. Kohno, "Linear representations of braid groups and classical Yang—Baxter equations," *Contemp. Math.*, 1988, **78**, 339–363.
12. V. P. Leksin, "Isomonodromy deformations and hypergeometric-type systems," In: *Painlevé Equations and Related Topics*. — Walther de Gruyter, Berlin—Boston, 2012, pp. 117–122.
13. H. Žoladek, *The Monodromy Group*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 2006.

V. P. Lexin
State Socio-Humanitarian University, Kolomna, Russia
E-mail: lexin_vpmail.ru