Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 1 (2018). С. 74–85

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-74-85 УДК 517.957

ОБОБЩЕННЫЕ УСЛОВИЯ КЕЛЛЕРА—ОССЕРМАНА ДЛЯ ПОЛНОСТЬЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© 2018 г. **И. КАПУЦЦО ДОЛЬЧЕТТА, Ф. ЛЕОНИ, А. ВИТОЛО**

Аннотация. Исследуется существование глобальных (т. е. определенных на всем пространстве) субрешений полностью нелинейных вырождающихся эллиптических уравнений. Необходимые и достаточные условия на коэффициенты при младших членах обобщают классические условия Келлера—Оссермана для полулинейных эллиптических уравнений. Наш анализ показывает, что в случае нарушения условия существования глобальных субрешений можно получить априорные оценки для локальных субрешений.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В настоящей работе излагаются недавно полученные (см. [18, 19]) результаты о существовании глобальных субрешений и априорных оценок для локальных субрешений для полностью нелинейных вырождающихся эллиптических уравнений с младшими членами. В общем случае рассматриваются дифференциальные неравенства второго порядка вида

$$F(x, D^2u) \geqslant f(u) + g(u)\,|Du|^q, \tag{1.1}$$

где свободный член $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и коэффициент первого порядка $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывные монотонно возрастающие функции, причем функция f положительна. Будем считать, что показатель q принадлежит $(0, 2]$, а главная часть F есть вырождающийся эллиптический оператор второго порядка, т. е. такая непрерывная функция $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_n \to \mathbb{R}$, что $F(x, O) = 0$ и выполняется (нормализованное) условие эллиптичности

$$0 \leqslant F(x, X+Y) - F(x, X) \leqslant \operatorname{tr}(Y), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ X,\ Y \in \mathcal{S}_n,\ Y \geqslant O, \tag{1.2}$$

где $\mathcal{S}_n$ — пространство вещественных симметричных матриц порядка $n \times n$, частично упорядоченное обычным образом.

В качестве модельных примеров F можно рассматривать вырождающийся максимальный оператор Пуччи $\mathcal{M}^+_{0,1}$, определенный соотношением

$$\mathcal{M}^+_{0,1}(X) = \sum_{\mu_i > 0} \mu_i(X), \tag{1.3}$$

а также k-частичный Лапласиан, задаваемый соотношением

$$\mathcal{P}^+_k(X) = \mu_{n-k+1}(X) + \ldots + \mu_n(X), \tag{1.4}$$

где $\mu_1(X) \leqslant \mu_2(X) \leqslant \ldots \leqslant \mu_n(X)$ — упорядоченные собственные значения матрицы X.

Напомним, что экстремальные операторы Пуччи — это явные полностью нелинейные операторы, играющие центральную роль в теории эллиптической регулярности уравнений недивергентного вида (см. [15]). Отметим, что оператор (1.3) является максимальным в классе всех вырождающихся эллиптических операторов, обращающихся в нуль при $X = O$. В частности, для любого $k = \overline{1, n}$ и любого X из $\mathcal{S}_n$ справедливо неравенство $\mathcal{P}_k^+(X) \leqslant \mathcal{M}_{0,1}^+(X)$, а если u удовлетворяет неравенству

$$\mathcal{P}_k^+(D^2 u) \geqslant f(u) + g(u)\,|Du|^q \tag{1.5}$$

или неравенству (1.1), то u удовлетворяет и неравенству

$$\mathcal{M}_{0,1}^+(D^2 u) \geqslant f(u) + g(u)\,|Du|^q. \tag{1.6}$$

Что касается операторов $\mathcal{P}_k^+$, то они естественным образом возникают в римановой геометрии — в частности, при изучении k-выпуклых многообразий (см. [41, 42]). Их связь с уравнениями в частных производными недавно рассматривалась в [16, 30] (см. также [4, 26, 27]). Кроме того, они возникают при применении множеств уровня к геометрическим эволюционным задачам (см. [3, 28]), а также в задаче о выпуклой оболочке (см. [38]). Свежие результаты о регулярности и существовании главных собственных функций можно найти в [10], а о теоремах типа Лиувилля — в [11].

Частным случаем неравенства (1.1) является полулинейное равномерно эллиптическое неравенство $\Delta u \geqslant f(u)$. Для положительных f это неравенство изучалось в [32, 39] (независимо); хорошо известно, что в этом случае решения во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ существуют тогда и только тогда, когда f удовлетворяет классическому условию

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(\int\limits_0^t f(s)\,ds\right)^{1/2}} = +\infty. \tag{1.7}$$

Цель настоящей работы — получить аналогичные результаты для неравенства общего вида (1.1), определив более точные условия на младшие коэффициенты, гарантирующие, что глобальных субрешений не существует, а для локальных субрешений справедливы универсальные оценки сверху.

Поскольку рассматриваются операторы недивергентного вида, используется понятие вязкого решения; общие сведения о существовании, единственности и регулярности для этого класса решений можно найти в [15, 20].

Полученные нами условия обобщают (1.7) и зависят от знака функции g, т. е. от того, является ли член первого порядка «абсорбирующим» или «реактивным».

Если $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) > 0$, то необходимое и достаточное условие «сублинейности» (1.7) нужно обобщить таким образом, чтобы правильно учесть положительно определенный член первого порядка. Мы доказываем, что неравенство (1.6) имеет глобальное вязкое решение тогда и только тогда, когда

$$q \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(\int\limits_0^t f(s)\,ds\right)^{1/2} + \left(\int\limits_0^t g^+(s)\,ds\right)^{1/(2-q)}} = +\infty. \tag{1.8}$$

Также доказывается, что это условие является необходимым и достаточным для существования глобального вязкого решения неравенства (1.5) при условии, что $g(t) \geqslant 0$ для всех вещественных значений t.

В частности, устанавливается, что если $q > 1$, то глобальных субрешений не существует, как бы медленно ни росли f и g, а в случае, когда $q \leqslant 1$, ограничения на рост нужны и для f, и для g.

В случае, когда $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) \leqslant 0$, члены нулевого и первого порядка неравенства (1.6) конкурируют друг с другом, поскольку имеют противоположные знаки. Наш анализ показывает, что в этом случае глобальные вязкие субрешения существуют тогда и только тогда, когда выполняется следующий ослабленный вариант условия (1.7), содержащий f, g и q:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(\int_0^t e^{-2\int_s^t \left(-\frac{g(\tau)}{f(\tau)}\right)^{2/q} f(\tau)\,d\tau} f(s)\,ds\right)^{1/2}} = +\infty. \tag{1.9}$$

В частности, доказывается, что если $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) < 0$, то (1.9) эквивалентно соотношению

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{\left(\int_0^t f(s)\,ds\right)^{1/2}} + \frac{1}{f(t)^{1/q}}\right] dt = +\infty. \tag{1.10}$$

Отметим, что при $q = 2$ это условие обращается в следующее условие «субквадратического» роста: $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{f(t)^{1/2}} = +\infty$. Кроме того, для всех случаев доказывается, что, если условие (1.8), (1.9) или (1.10) (соответственно) нарушается, а u удовлетворяет неравенству (1.1) в любом открытом подмножестве Ω пространства $\mathbb{R}^n$, то u универсально оценивается сверху явной функцией расстояния до границы, определенной функцией f, g или q соответственно (см. теорему 3.4).

Из предшествующих результатов в данной области отметим результат [14] о существовании и единственности глобальных решений полулинейных уравнений, в которых $f(u) = |u|^{p-1}u$, $p > 1$, и результаты [12, 13, 21, 35, 36] о дальнейших обобщениях главной части и членов нулевого порядка на случаи, когда оператор имеет более общий дивергентный вид.

Для полностью нелинейного случая аналогичные результаты получены в [5, 23, 24, 27], а для уравнений с гессианом, включая k-ю основную симметрическую функцию собственных значений $\mu_1(D^2u), \ldots, \mu_n(D^2u)$ — в [6, 7, 31]. Результаты о приложениях к устранимым особенностям можно найти в [33].

Для уравнений с градиентными членами аналогичное «абсорбирующее» свойство суперлинейных членов первого порядка в полулинейных эллиптических уравнениях впервые установлено в [34]. Впоследствии оно активно изучалось разными авторами — см., например, [40] (о полулинейных уравнениях) или [1, 25] (о полностью нелинейных равномерно эллиптических уравнениях, в которых члены первого порядка имеют вид $h(|Du|)$).

Как и в [32, 39], наши методы доказательств основаны на сравнении сферически симметричных решений неравенств (1.5) и (1.6). Этот подход требует подробного анализа начальной задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют эти сферически симметричные решения. В частности, нужно исследовать существование глобальных максимальных решений; оказывается, что глобальные решения неравенства (1.6) существуют тогда и только тогда, когда существуют глобальные сферически симметричные решения. Отметим, что этот факт доказывается методом сравнения, который применим и в рассматриваемых здесь вырождающихся случаях, причем никаких априорных предположений о росте u на бесконечности не делается.

Если максимальные решения соответствующей задачи для обыкновенного дифференциального уравнения не являются глобальными, то в шарах пространства $\mathbb{R}^n$ получаем существование сферически симметричных решений задач

$$\begin{cases} \mathcal{M}^+_{0,1}(D^2u) = f(u) + g(u)\,|Du|^q & \text{в } B, \\ u = +\infty & \text{на } \partial B; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{P}^+_k(D^2u) = f(u) + g(u)\,|Du|^q & \text{в } B, \\ u = +\infty & \text{на } \partial B. \end{cases}$$

Решения, разрушающиеся на границе, широко изучаются как для полулинейных, так и для полностью нелинейных эллиптических уравнений. Что касается полностью нелинейного случая, то, помимо основополагающей работы [34], отметим результаты [5, 22]. Из совсем свежих результатов о разрушающихся решениях полностью нелинейных сингулярных и вырождающихся уравнений отметим [9].

Кроме того, отметим, что в некоторых случаях наши результаты можно также применить для нахождения нижних оценок суперрешений вырожденных эллиптических уравнений. В качестве примера, пусть v — положительное суперрешение уравнения $\mathcal{M}^-(D^2v) + v^\theta \leqslant 0$ в Ω, где $\Omega \in \mathbb{R}^n$ — открытое подмножество с непустой границей, а $\mathcal{M}^-$ — вырожденный inf-оператор Пуччи, определенный как $\mathcal{M}^-(M) = \sum\limits_{\mu_i<0} \mu_i(M) = -\mathcal{M}^+(-M)$. Тогда легко доказать, что функция $u = \dfrac{1}{v}$ удовлетворяет неравенству $\mathcal{M}^+(D^2u) \geqslant u^{2-\theta}$. В случае $\theta < 1$ из наших результатов о субрешениях следует оценка $u(x) \leqslant \dfrac{C}{d(x)^{\frac{2}{1-\theta}}}$ при $x \in \Omega$, где $C > 0$ — положительная константа, а $d(x)$ — расстояние от точки x до границы $\partial\Omega$. Это, в свою очередь, дает равномерную оценку снизу $v(x) \geqslant c\, d(x)^{\frac{2}{1-\theta}}$ при $x \in \Omega$.

2. Сферически симметричные решения и принцип сравнения

Пусть f, g — непрерывные неубывающие функции. Считая, что $c > 0$, $q > 0$ и $a \in \mathbb{R}$, рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \varphi'' + \dfrac{c-1}{r}\,\varphi' = f(\varphi) + g(\varphi)\,|\varphi'|^q, \\ \varphi(0) = a, \\ \varphi'(0) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь и далее, *решением* задачи (2.1) в $[0, R)$, где $0 < R \leqslant +\infty$, мы называем такую функцию φ из $C^2((0,R)) \cap C([0,R))$, для которой $0 = \varphi'(0) = \lim\limits_{r\to 0} \varphi'(r)$, $\exists \lim\limits_{r\to 0^+} \varphi''(r) \in \mathbb{R}$. Следовательно, обыкновенное дифференциальное уравнение из (2.1) должно выполняться и в точке $r = 0$.

Существование локальных решений задачи (2.1) следует из классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывными данными. При доказательстве свойств монотонности и выпуклости локальных решений φ задачи (2.1) используется следующий результат.

Лемма 2.1. *Пусть $c > 0$, $q > 0$, а функции $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывны. Если φ — решение задачи* (2.1) *в* $[0, R)$, *то справедливы следующие утверждения*:

(i) *если f положительна, то φ строго возрастает*;

(ii) *если f положительна, f, g — неубывающие, а $c \geqslant 1$, то φ выпукла и*

$$\varphi'(r) \leqslant \left(\frac{f(\varphi(r))}{g^-(\varphi(r))}\right)^{1/q} \text{ для всех } r \text{ из } [0,R); \tag{2.2}$$

(iii) *если f положительна, f, g — неубывающие, g неотрицательна, а $c \geqslant 1$, то*

$$\varphi''(r) \geqslant \frac{\varphi'(r)}{r} \text{ для всех } r \text{ из } [0,R). \tag{2.3}$$

Доказательство. Из (2.1) следует, что $c\varphi''(0) = \lim\limits_{r\to 0^+}\left(\varphi''(r) + (c-1)\,\dfrac{\varphi'(r)}{r}\right) = f(a) > 0$, т. е., φ' возрастает, а следовательно, положительна на некотором интервале $(0, r_0)$. В действительности неравенство $\varphi'(r) > 0$ справедливо на всем интервале $(0, R)$, поскольку в противном случае в $(0, R)$ существовала бы точка такая r^*, что $\varphi'(r^*) = 0$, $\varphi''(r^*) \leqslant 0$ и $\varphi''(r^*) = f(\varphi(r^*)) > 0$. Значит, утверждение (i) доказано.

Теперь докажем утверждение (ii). Поскольку $\varphi''(0) > 0$, существует такое положительное r_1, что $\varphi'(r) > 0$ и $\varphi''(r) > 0$ для любого r из $(0, r_1]$. Предположим обратное тому, что требуется доказать, т. е., что существует такое τ, превосходящее r_1, что $\varphi''(\tau) < 0$. Тогда функция φ' имеет в $(0, \tau)$ точку локального строгого максимума r_0 и множество $\mathcal{R} = \{r \in (0, r_0) : \varphi'(r) = \varphi'(\tau)\}$ не пусто. Пусть $\sigma = \min \mathcal{R}$. Тогда $\varphi''(\sigma) \geqslant 0$. Значит, мы нашли такое σ, что $\sigma < \tau$, $\varphi'(\sigma) = \varphi'(\tau)$ и

$$\varphi''(\sigma) - \varphi''(\tau) > 0. \tag{2.4}$$

С другой стороны, подставляя σ и τ в (2.1), получаем, что

$$\varphi''(\sigma) - \varphi''(\tau) = (c-1)\left(\frac{\varphi'(\tau)}{\tau} - \frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma}\right) + g(\varphi(\sigma))\varphi'(\sigma)^q - g(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)^q\, f(\varphi(\sigma)) - f(\varphi(\tau)).$$

Поскольку f, g и φ монотонны, $c \geqslant 1$, $\sigma < \tau$ и $\varphi'(\sigma) = \varphi'(\tau)$, отсюда следует, что $\varphi''(\sigma) - \varphi''(\tau) \leqslant 0$, что противоречит (2.4). Следовательно, в $[0, R)$ функция φ выпукла и возрастает. Тогда из (2.1) мы получаем, что $f(\varphi) + g(\varphi)(\varphi')^q \geqslant 0$ в $[0, R)$, откуда вытекает (2.2), что и доказывает утверждение (ii).

Наконец, докажем утверждение (iii). Умножая уравнение (2.1) на r^{c-1} и интегрируя результат по промежутку от 0 до r, получаем, что

$$r^{c-1}\varphi'(r) \leqslant \left[f(\varphi(r)) + g(\varphi(r))\varphi'(r)^q\right] \int\limits_0^r s^{c-1} ds = \left[\varphi''(r) + \frac{(c-1)}{r}\varphi'(r)\right] \frac{r^c}{c},$$

поскольку φ, φ', f и g — неубывающие функции. Значит, (2.3) доказано. □

Теперь рассмотрим уравнения в частных производных

$$\mathcal{M}^+_{0,1}(D^2u) = f(u) + g(u)\,|Du|^q, \tag{2.5}$$

$$\mathcal{P}^+_k(D^2u) = f(u) + g(u)\,|Du|^q. \tag{2.6}$$

Покажем, что сферически симметричные решения указанных уравнений могут быть найдены из решений φ задачи (2.1), принадлежащих пространству $C^2\left([0, R)\right)$.

Лемма 2.2. *Справедливы следующие утверждения*:

(i) *Пусть f и g — непрерывные неубывающие функции, f положительна, $q > 0$, φ из $C^2([0, R))$ — решение задачи Коши* (2.1) *при $c = n$. Тогда $\Phi(x) = \varphi(|x|)$ принадлежит $C^2(B_R)$ и является классическим решением уравнения* (2.5) *в шаре B_R.*

(ii) *Пусть f и g — непрерывные неубывающие функции, f положительна, g неотрицательна, $q > 0$, φ из $C^2([0, R))$ — решение задачи Коши* (2.1) *при $c = k$. Тогда $\Phi(x) = \varphi(|x|)$ принадлежит $C^2(B_R)$ и является классическим решением уравнения* (2.6) *в шаре B_R.*

Доказательство. Непосредственные вычисления показывают, что если $\Phi(x) = \varphi(|x|)$, то

$$D^2\Phi(x) = \begin{cases} \varphi''(0)\, I_n, & \text{если } x = 0, \\ \dfrac{\varphi'(|x|)}{|x|}\, I_n + \left(\varphi''(|x|) - \dfrac{\varphi'(|x|)}{|x|}\right) \dfrac{x}{|x|} \otimes \dfrac{x}{|x|}, & \text{если } x \neq 0. \end{cases}$$

Поскольку $\varphi \in C^2([0, R))$, $\varphi'(0) = 0$ и $\varphi''(0) = \lim\limits_{r \to 0} \varphi'(r)/r$, отсюда вытекает, что Φ принадлежит $C^2(B_R)$. Кроме того, Φ — выпуклая, поскольку φ — выпуклая и возрастающая, а из определения оператора $\mathcal{M}^+_{0,1}$ следует, что $\mathcal{M}^+_{0,1}(D^2\Phi(x)) = \varphi''(|x|) + (n-1)\,\dfrac{\varphi'(|x|)}{|x|}$. Следовательно, если φ удовлетворяет (2.1) при $c = n$, то Φ удовлетворяет (2.5).

Точно так же мы получаем, что если $g \geqslant 0$ и φ удовлетворяет (2.1) при $c = k$, то $\varphi''(|x|) \geqslant \dfrac{\varphi'(|x|)}{|x|}$ в силу леммы 2.1(iii). Следовательно, $\mathcal{P}^+_k(D^2\Phi(x)) = \varphi''(|x|) + (k-1)\,\dfrac{\varphi'(|x|)}{|x|}$ и Φ удовлетворяет (2.6). □

Следующий результат демонстрирует, какая форма принципа сравнения потребуется далее. Указанный результат непосредственно следует из определения суб- и суперрешения, если она из сравниваемых функций — гладкая. Чтобы сравнивать негладкие (а лишь вязкие) суб- и суперрешения, требуется некая общая техника регуляризации (см. [20]).

Предложение 2.1. *Пусть f, g — непрерывные функции, f — строго возрастающая, g — неубывающая, а $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, удовлетворяющая* (1.2). *Далее, предположим, что u из $USC(B_R)$ и Φ из $C^2(B_R)$ удовлетворяют двойному неравенству*

$$F(x, D^2u) - f(u) - g(u)\,|Du|^q \geqslant 0 \geqslant F(x, D^2\Phi) - f(\Phi) - g(\Phi)\,|D\Phi|^q \quad \textit{в } B_R$$

и предельному соотношению

$$\limsup_{|x| \to R^-} \left(u(x) - \Phi(x)\right) \leqslant 0.$$

Тогда $u(x) \leqslant \Phi(x)$ для любого x из B_R.

Доказательство. Предположим, напротив, что $u - \Phi$ достигает положительного максимума во внутренней точке x_0 шара B_R. В определении вязкого субрешения u возьмем $\Phi(x) + u(x_0) - \Phi(x_0)$ в качестве основной функции в точке x_0. Получим неравенство $F(x_0, D^2\Phi(x_0)) \geqslant f(u(x_0)) + g(u(x_0))\,|D\Phi(x_0)|^q$, которое в силу строгой монотонности f и монотонности g противоречит тому, что Φ — суперрешение. □

3. Существование глобальных суперрешений и априорные оценки сверху

Подробный анализ максимального решения начальной задачи (2.1) приводит к следующим результатам о существовании глобальных решений (см. доказательство в [19]).

Теорема 3.1. *Пусть* $0 < q \leqslant 2$, $c \geqslant 1$, *а* f, g — *непрерывные неубывающие функции, причем* f *положительна. Пусть* φ — *максимальное решение начальной задачи* (2.1). *Тогда справедливы следующие утверждения*:

(i) *если* $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) > 0$, *то* φ *определена на всей полуоси* $[0,+\infty)$ *тогда и только тогда, когда*

$$q \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(t\,f(t))^{1/2} + (t\,g^+(t))^{1/(2-q)}} = +\infty; \tag{3.1}$$

(ii) *если* $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) \leqslant 0$, *то* φ *определена на всей полуоси* $[0,+\infty)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(\int\limits_0^t e^{-2\int\limits_s^t \left(\frac{g^-(\tau)}{f(\tau)}\right)^{2/q} f(\tau)\,d\tau} f(s)\,ds\right)^{1/2}} = +\infty; \tag{3.2}$$

(iii) *если* $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) < 0$, *то* (3.2) *равносильно соотношению*

$$\int\limits_0^{+\infty} \left[\frac{1}{(t\,f(t))^{1/2}} + \frac{1}{f(t)^{1/q}}\right] dt = +\infty. \tag{3.3}$$

В частности, из теоремы 3.1 следует, что либо все максимальные функции задачи Коши (2.1) разрушаются при конечном R, либо все максимальные функции определены на всей полуоси $[0,+\infty)$, и это не зависит от начальных данных a, а зависит только от роста f и g при $t \to +\infty$ (и эта зависимость регулируется условиями (3.1)–(3.3)). Это соответствует классической теории субквадратичных обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [29]), поскольку при нашем предположении о том, что $q \leqslant 2$, выполняется условие роста Нагумо.

Рассмотрим некоторые следствия условий (3.1), (3.2) и (3.3).

Из условия (3.1) очевидно следует, что $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(tf(t))^{1/2}} = +\infty$ и $\int\limits_{t_0}^{+\infty} \frac{dt}{(t\,g^+(t))^{1/(2-q)}} = +\infty$ при любом $t_0 > 0$, так что $g^+(t_0) > 0$, но (3.1) не вытекает из этих двух условий. Таким образом, условие (3.1) сильнее, чем классическое условие Келлера—Оссермана

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(t\,f(t))^{1/2}} = +\infty, \tag{3.4}$$

поскольку ограничивает на бесконечности рост и f, и g; например, для функций, растущих как степенные $g(t) \simeq t^\alpha$ при $t \to +\infty$, условие (3.1) дает $\alpha \leqslant 1 - q$, и при $q = 1$ функция может расти не быстрее логарифмической $g(t) \simeq (\ln t)^\alpha$, где $\alpha \leqslant 1$.

Условие (3.3) сводится к требованию либо $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(tf(t))^{1/2}} = +\infty$, либо $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(f(t))^{1/q}} = +\infty$; при $q = 2$ это равносильно следующему условию «субквадратичности»: $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(f(t))^{1/2}} = +\infty$. Для функций f со степенным ростом на бесконечности, например, для $f(t) \simeq t^\alpha$ при $t \to +\infty$, соотношение (3.3) означает, что $0 \leqslant \alpha \leqslant \max\{1, q\}$. Однако это справедливо и для функций вида $f(t) \simeq t\,(\ln t)^\alpha$, где $\alpha \geqslant 0$ при $q > 1$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$ при $q \leqslant 1$.

Если $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$, то соотношение

$$\int\limits_0^{+\infty} \left[\frac{1}{(t\,f(t))^{1/2}} + \left(\frac{g^-(t)}{f(t)}\right)^{1/q}\right] dt = +\infty \tag{3.5}$$

является достаточным условием того, что все максимальные решения определены на всей полуоси $[0, +\infty)$. С другой стороны, если существует глобальное максимальное решение φ из $C^2([0, +\infty))$, то

$$\int\limits_0^{+\infty} \left[\frac{1}{(t\,f(t))^{1/2}} + \left(\frac{\int_0^t g^-(s)\,ds}{\int_0^t f(s)\,ds}\right)^{1/q}\right] dt = +\infty. \tag{3.6}$$

Условия (3.5) и (3.6) не эквиваленты друг другу (даже при $q < 2$). Это легко видеть на примере, в котором $q = 2$, $f(t) \simeq t\,(\ln t)^\alpha$, а $g(t) \simeq -1/t$ при $t \to +\infty$. В этом случае условие (3.5) выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha \leqslant 2$, в то время как (3.6) справедливо и при $\alpha \leqslant 3$. Мы видим, что в этом случае (3.2) требует выполнения неравенства $\alpha \leqslant 2$.

С другой стороны, легко доказать, что, если $q < 2$ и $c_1/t^\beta \leqslant g^-(t) \leqslant c_2/t^\beta$, где c_1, c_2 и β — положительные постоянные, а t достаточно велико, то, независимо от поведения f, условия (3.5) и (3.6) эквиваленты друг другу. В этом случае оба эти условия являются более явными формулировками условия (3.2).

Если $g \equiv 0$, то условие (3.2) сводится к классическому условию Келлера—Оссермана (3.4). Аналогичное условие можно получить и в том случае, когда $g > 0$ при $q \to 0$. Действительно, при $q \to 0$ условие (3.1) обращается в условие (3.4), примененное к положительной неубывающей нелинейности $f(t) + g(t)$.

Объединяя теорему 3.1 с результатом сравнения, полученным в предложении 2.1, получаем следующий результат о существовании глобальных субрешений уравнения (2.5).

Теорема 3.2. *Пусть f, g — непрерывные неубывающие функции, причем f положительна и строго возрастает. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(i) *если $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) > 0$, то глобальное вязкое субрешение u уравнения* (2.5)*, принадлежащее $USC(\mathbb{R}^n)$, существует тогда и только тогда, когда выполняется условие* (3.1);

(ii) *если $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$, то глобальное вязкое субрешение u уравнения* (2.5)*, принадлежащее $USC(\mathbb{R}^n)$, существует тогда и только тогда, когда выполняется условие* (3.2);

(iii) *если $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) < 0$, то глобальное вязкое субрешение u уравнения* (2.5)*, принадлежащее $USC(\mathbb{R}^n)$, существует тогда и только тогда, когда выполняется условие* (3.3).

Доказательство.

(i) Если выполняется условие (3.1), то любое максимальное решение задачи Коши (2.1) при $c = n$, определенное на всей полуоси $[0, +\infty)$ в силу теоремы 3.1(i), дает в силу леммы 2.2 гладкое глобальное (суб)решение уравнения (2.5).

Предположим, напротив, что существует глобальное субрешение u уравнения (2.5), принадлежащее $USC(\mathbb{R}^n)$, для которого соотношение (3.1) не выполняется. Рассмотрим максимальное решение $\varphi(r)$ задачи Коши (2.1) при $c = n$ и $a < u(0)$. По теореме 3.1(i), функция $\varphi(r)$ разрушается в некоторой положительной точке $r = R(a)$. С другой стороны, по лемме 2.2 и предложению 2.1 функции u и $\Phi(x) = \varphi(|x|)$ можно сравнить в шаре $B_{R(a)}$, что приводит к следующему противоречию: $u(0) \leqslant \Phi(0) = a < u(0)$. Таким же образом утверждения (ii) и (iii) следуют из утверждений (ii) и (iii) теоремы 3.1 (соответственно). □

В силу максимальности оператора $\mathcal{M}^+_{0,1}$, условия (3.1), (3.2) и (3.3) необходимы для существования глобальных вязких решений неравенства (1.1) при $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) < 0$ соответственно.

Доказательство теоремы 3.2 применимо и к субрешениям уравнения (2.6), но в этом случае требуется наложить дополнительное условие неотрицательности функции $g(t)$, чтобы иметь соответствие между решениями системы (2.1) и сферически симметричными решениями уравнения (2.6). В итоге получаем следующий результат.

Теорема 3.3. *Пусть f, g — непрерывные неотрицательные неубывающие функции, причем f положительна и строго возрастает. Тогда глобальное вязкое субрешение u уравнения* (2.6), *принадлежащее $USC(\mathbb{R}^n)$, существует тогда и только тогда, когда выполняется условие* (3.1).

Технику сравнения, используемую при доказательстве теоремы 3.2, можно применить и для оценки сверху вязких решений неравенства (1.1) в любом открытом подмножестве Ω пространства $\mathbb{R}^n$. Если $\partial\Omega \neq \varnothing$, то при любом x из $\mathbb{R}^n$ определим $d(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ — функцию расстояния до границы $\partial\Omega$. Тогда получаем следующий результат, доказательство которого можно найти в [19].

Теорема 3.4. *Пусть f, g — непрерывные неубывающие функции, причем f — положительная и строго возрастающая, и*

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty, \quad \textit{если} \quad \lim_{t\to+\infty} g(t) < +\infty. \tag{3.7}$$

Пусть Ω — открытая область с непустой границей в $\mathbb{R}^n$. Пусть $q \in (0,2]$ и $u \in USC(\Omega)$ — вязкое решение неравенства (1.1) *в Ω. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(i) *если $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) > 0$ и условие* (3.1) *не выполнено, то в каждой точке Ω выполнено неравенство*

$$u(x) \leqslant \max\{t_0,\ \mathcal{R}^{-1}(d(x))\}, \tag{3.8}$$

где $t_0 = \inf\{t \in \mathbb{R}:\ g(t) \geqslant 0\}$, а $\mathcal{R}: \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ определена соотношением

$$\mathcal{R}(a) = \begin{cases} 2\left(\dfrac{n}{2-q}\right)^{1/(2-q)} \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dt}{\left(\int_a^t f(s)\,ds\right)^{1/2} + \left(\int_a^t g^+(s)\,ds\right)^{1/(2-q)}} & \textit{при} \quad q < 2, \\ \sqrt{\dfrac{n}{2}} \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dt}{\left(\int_a^t e^{\frac{2}{n}\int_s^t g^+(\tau)\,d\tau} f(s)\,ds\right)^{1/2}} & \textit{при} \quad q = 2; \end{cases} \tag{3.9}$$

(ii) *если $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$ и условие* (3.2) *не выполнено, то в каждой точке Ω выполнено неравенство $u(x) \leqslant \mathcal{R}^{-1}(d(x))$, где $\mathcal{R}: \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ определена соотношением*

$$\mathcal{R}(a) = \frac{n^{1/q}}{\sqrt{q}} \int_a^{+\infty} \frac{dt}{\left(\int_a^t e^{-2\int_s^t \left(\frac{g^-(r)}{f(r)}\right)^{2/q} f(r)\,dr} f(s)\,ds\right)^{1/2}}; \tag{3.10}$$

(iii) *если $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) < 0$ и условие* (3.3) *не выполнено, то в каждой точке Ω выполнено неравенство $u(x) \leqslant \mathcal{R}^{-1}(d(x))$, где $\mathcal{R}: \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ определена соотношением*

$$\mathcal{R}(a) = 2\frac{n^{1/q}}{q} \int_a^{+\infty} \left[\frac{1}{\left(\int_a^t f(s)\,ds\right)^{1/2}} + \left(\frac{\int_a^t g^-(s)\,ds}{\int_a^t f(s)\,ds}\right)^{1/q}\right] dt. \tag{3.11}$$

Относительно условия (3.7) отметим, что оно нужно только в случае, когда $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) > 0$ и $q > 1$; во всех остальных случаях оно выполняется в силу нарушения условий (3.1)–(3.3). Оно гарантирует, что амплитуда $R(a)$ максимального интервала существования максимального решения задачи Коши (2.1) удовлетворяет соотношению $\lim\limits_{a\to+\infty} R(a) = 0$. Чтобы показать его необходимость, можно использовать тот же контрпример, что и в [40]. Действительно, пусть $q = 2$, $g \equiv 1$ и для любого вещественного a функция φ, принадлежащая $C^2([0, R(a)))$, является максимальным решением задачи

$$\begin{cases} \varphi'' + \dfrac{n-1}{r}\varphi' = f(\varphi) + (\varphi')^2, \\ \varphi(0) = a, \ \varphi'(0) = 0. \end{cases}$$

Тогда сферически симметричная функция $\Phi(x) = \varphi(|x|)$ удовлетворяет и задаче

$$\begin{cases} -\Delta\Phi + f(\Phi) + |D\Phi|^2 = 0 \text{ в } B_{R(a)}, \\ \Phi = +\infty \text{ на } \partial B_{R(a)}, \end{cases}$$

а значит, функция $\Psi(x) = e^{-\Phi(x)}$ удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} -\Delta\Psi = f\left(\ln\dfrac{1}{\Psi}\right)\Psi \text{ в } B_{R(a)}, \\ \Psi > 0 \quad \text{в } B_{R(a)}, \ \Psi = 0 \text{ на } \partial B_{R(a)}. \end{cases}$$

Тогда из свойств первого собственного значения оператора Лапласа с однородными условиями Дирихле вытекает, что $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) \geqslant \lambda_1\left(B_{R(a)}\right)$, где $\lambda_1\left(B_{R(a)}\right)$ обозначает первое собственное значение Дирихле оператора $-\Delta$ в $B_{R(a)}$. Следовательно, если λ_1 — это первое собственное значение оператора $-\Delta$ в B_1, а $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) < +\infty$, то $R(a) \geqslant \sqrt{\dfrac{\lambda_1}{\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)}}$ $\forall a \in \mathbb{R}$.

Благодарности. Авторы благодарят независимого рецензента за внимание к этой работе; в частности, за нетривиальный пример, с помощью которого удалось показать, что одно замечание в исходной версии статьи было некорректным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Alarcón S., García-Melián J., Quaas A.* Keller—Ossermann conditions for some elliptic problems with gradient terms// J. Differ. Equ. — 2012. — *252.* — С. 886–914.
2. *Alarcón S., Quaas A.* Large viscosity solutions for some fully nonlinear equations// NoDEA Nonlinear Differ. Equ. Appl. — 2013. — *20.* — С. 1453–1472.
3. *Ambrosio L., Soner H. M.* Level set approach to mean curvature flow in arbitrary codimension// J. Differ. Geom. — 1996. — *43*, № 4. — С. 693–737.
4. *Amendola M. E., Galise G., Vitolo A.* Riesz capacity, maximum principle and removable sets of fully nonlinear second order elliptic operators// Differ. Integral Equ. Appl. — 2013. — *26*, № 7-8. — С. 845–866.
5. *Amendola M. E., Galise G., Vitolo A.* On the uniqueness of blow-up solutions of fully nonlinear elliptic equations// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2013. — *Suppl.* — С. 771–780.
6. *Bao J., Ji X.* Necessary and sufficient conditions on solvability for Hessian inequalities// Proc. Am. Math. Soc. — 2010. — *138.* — С. 175–188.
7. *Bao J., Ji X.* Existence and nonexistence theorem for entire subsolutions of k-Yamabe type equations// J. Differ. Equ. — 2012. — *253.* — С. 2140–2160.
8. *Bernstein S. R.* Sur les equations du calcul des variations// Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4). — 1912. — *29.* — С. 431–485.
9. *Birindelli I., Demengel F., Leoni F.* Ergodic pairs for singular or degenerate fully nonlinear operators// arXiv: 1712.02671 [math.AP]. — 07.12.2017.
10. *Birindelli I., Galise G., Ishii H.* A family of degenerate elliptic operators: maximum principle and its consequences// Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire. — 2018. — *35*, № 2. — С. 417–441.
11. *Birindelli I., Galise G., Leoni F.* Liouville theorems for a family of very degenerate elliptic nonlinear operators// Nonlinear Anal. — 2017. — *161.* — С. 198–211.
12. *Boccardo L., Gallouet T., Vazquez J. L.* Nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ without growth restriction on the data// J. Differ. Equ. — 1993. — *105*, № 2. — С. 334–363.

13. *Boccardo L., Gallouet T., Vazquez J. L.* Solutions of nonlinear parabolic equations without growth restrictions on the data// Electron. J. Differ. Equ. — 2001. — *2001*, № 60. — С. 1–20.
14. *Brezis H.* Semilinear equations in $\mathbb{R}^n$ without conditions at infinity// Appl. Math. Optim. — 1984. — *12*. — С. 271–282.
15. *Caffarelli L. A., Cabré X.* Fully nonlinear elliptic equations. — Providence: Am. Math. Soc., 1995.
16. *Caffarelli L. A., Li Y. Y., Nirenberg L.* Some remarks on singular solutions of nonlinear elliptic equations. I// J. Fixed Point Theory Appl. — 2009. — *5*. — С. 353–395.
17. *Capuzzo Dolcetta I., Leoni F., Porretta A.* Hölder estimates for degenerate elliptic equations with coercive Hamiltonians// Trans. Am. Math. Soc. — 2010. — *362*, № 9. — С. 4511–4536.
18. *Capuzzo Dolcetta I., Leoni F., Vitolo A.* Entire subsolutions of fully nonlinear degenerate elliptic equations// Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.). — 2014. — *9*, № 2. — С. 147–161.
19. *Capuzzo Dolcetta I., Leoni F., Vitolo A.* On the inequality $F(x, D^2u) \geqslant f(u) + g(u)|Du|^q$// Math. Ann. — 2016. — *365*, № 1-2. — С. 423–448.
20. *Crandall M. G., Ishii H., Lions P. L.* User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations// Bull. Am. Math. Soc. — 1992. — *27*, № 1. — С. 1–67.
21. *D'Ambrosio L., Mitidieri E.* A priori estimates, positivity results, and nonexistence theorems for quasilinear degenerate elliptic inequalities// Adv. Math. — 2010. — *224*. — С. 967–1020.
22. *Demengel F., Goubet O.* Existence of boundary blow up solutions for singular or degenerate fully nonlinear equations// Commun. Pure Appl. Anal. — 2013. — *12*, № 2. — С. 621–645.
23. *Diaz G.* A note on the Liouville method applied to elliptic eventually degenerate fully nonlinear equations governed by the Pucci operators and the Keller—Ossermann condition// Math. Ann. — 2012. — *353*. — С. 145–159.
24. *Esteban M. G., Felmer P. L., Quaas A.* Super-linear elliptic equations for fully nonlinear operators without growth restrictions for the data// Proc. Edinb. Math. Soc. (2). — 2010. — *53*, № 1. — С. 125–141.
25. *Felmer P. L., Quaas A., Sirakov B.* Solvability of nonlinear elliptic equations with gradient terms// J. Differ. Equ. — 2013. — *254*, № 11. — С. 4327–4346.
26. *Galise G.* Maximum principles, entire solutions and removable singularities of fully nonlinear second order equations. — Ph.D. Thesis, Salerno, 2011/2012.
27. *Galise G., Vitolo A.* Viscosity solutions of uniformly elliptic equations without boundary and growth conditions at infinity// Int. J. Differ. Equ. — 2011. — Article ID 453727.
28. *Giga Y.* Surface evolution equations. A level set approach. — Basel: Birkhäuser Verlag, 2006.
29. *Hartman P.* Ordinary differential equations. — New York—London: Wiley, 1964.
30. *Harvey R., Lawson Jr B.* Existence, uniqueness and removable singularities for nonlinear partial differential equations in geometry// arXiv: 1303.1117 — 05.03.2013.
31. *Jin Q., Li Y. Y., Xu H.* Nonexistence of positive solutions for some fully nonlinear elliptic equations// Methods Appl. Anal. — 2005. — *12*. — С. 441–449.
32. *Keller J. B.* On solutions of $\Delta u = f(u)$// Commun. Pure Appl. Math. — 1957. — *10*. — С. 503–510.
33. *Labutin D. A.* Removable singularities for fully nonlinear elliptic equations// Arch. Ration. Mech. Anal. — 2000. — *155*, № 3. — С. 201–214.
34. *Lasry J.-M., Lions P.-L.* Nonlinear elliptic equations with singular boundary conditions and stochastic control with state constraints. I. The model problem// Math. Ann. — 1989. — *283*. — С. 583–630.
35. *Leoni F.* Nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ with «absorbing» zero order terms// Adv. Differ. Equ. — 2000. — *5*. — С. 681–722.
36. *Leoni F., Pellacci B.* Local estimates and global existence for strongly nonlinear parabolic equations with locally integrable data// J. Evol. Equ. — 2006. — *6*. — С. 113–144.
37. *Nagumo M.* Über die differential gleichung $y'' = f(x, y, y')$// Proc. Phys.-Math. Soc. Japan. — 1937. — *19*. — С. 861–866.
38. *Oberman A., Silvestre L.* The Dirichlet problem for the convex envelope// Trans. Am. Math. Soc. — 2011. — *363*, № 11. — С. 5871–5886.
39. *Osserman R.* On the inequality $\Delta u \geqslant f(u)$// Pacific J. Math. — 1957. — *7*. — С. 1141–1147.
40. *Porretta A.* Local estimates and large solutions for some elliptic equations with absorption// Adv. Differ. Equ. — 2004. — *9*, № 3-4. — С. 329–351.
41. *Sha J.-P.* Handlebodies and p-convexity// J. Differ. Geom. — 1987. — *25*. — С. 353–361.
42. *Wu H.* Manifolds of partially positive curvature// Indiana Univ. Math. J. — 1987. — *36*. — С. 525–548.

Italo Capuzzo Dolcetta
Dipartimento di Matematica, Sapienza Università di Roma, Rome, Italy
E-mail: capuzzo@mat.uniroma1.it

Fabiana Leoni
Dipartimento di Matematica, Sapienza Università di Roma, Rome, Italy
E-mail: leoni@mat.uniroma1.it

Antonio Vitolo
Dipartimento di Ingegneria Civile, Università di Salerno, Fisciano, Italy
E-mail: vitolo@unisa.it

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-74-85 UDC 517.957

Generalized Keller–Osserman Conditions for Fully Nonlinear Degenerate Elliptic Equations

 I. Capuzzo Dolcetta, F. Leoni, A. Vitolo

Abstract. We discuss the existence of entire (i.e. defined on the whole space) subsolutions of fully nonlinear degenerate elliptic equations, giving necessary and sufficient conditions on the coefficients of the lower order terms which extend the classical Keller–Osserman conditions for semilinear elliptic equations. Our analysis shows that, when the conditions of existence of entire subsolutions fail, a priori upper bounds for local subsolutions can be obtained.

REFERENCES

1. S. Alarcón, J. García-Melián, and A. Quaas, "Keller—Ossermann conditions for some elliptic problems with gradient terms," *J. Differ. Equ.*, 2012, **252**, 886–914.
2. S. Alarcón and A. Quaas, "Large viscosity solutions for some fully nonlinear equations," *NoDEA Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, 2013, **20**, 1453–1472.
3. L. Ambrosio and H. M. Soner, "Level set approach to mean curvature flow in arbitrary codimension," *J. Differ. Geom.*, 1996, **43**, No. 4, 693–737.
4. M. E. Amendola, G. Galise, and A. Vitolo, "Riesz capacity, maximum principle and removable sets of fully nonlinear second order elliptic operators," *Differ. Integral Equ. Appl.*, 2013, **26**, No. 7-8, 845–866.
5. M. E. Amendola, G. Galise, and A. Vitolo, "On the uniqueness of blow-up solutions of fully nonlinear elliptic equations," *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2013, **Suppl.**, 771–780.
6. J. Bao and X. Ji, "Necessary and sufficient conditions on solvability for Hessian inequalities," *Proc. Am. Math. Soc.*, 2010, **138**, 175–188.
7. J. Bao and X. Ji, "Existence and nonexistence theorem for entire subsolutions of k-Yamabe type equations," *J. Differ. Equ.*, 2012, **253**, 2140–2160.
8. S. R. Bernstein, "Sur les equations du calcul des variations," *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 1912, **29**, 431–485.
9. I. Birindelli, F. Demengel, and F. Leoni, "Ergodic pairs for singular or degenerate fully nonlinear operators," *arXiv: 1712.02671 [math.AP]*, 07.12.2017.
10. I. Birindelli, G. Galise, and H. Ishii, "A family of degenerate elliptic operators: maximum principle and its consequences," *Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire*, 2018, **35**, No. 2, 417–441.
11. I. Birindelli, G. Galise, and F. Leoni, "Liouville theorems for a family of very degenerate elliptic nonlinear operators," *Nonlinear Anal.*, 2017, **161**, 198–211.
12. L. Boccardo, T. Gallouet, and J. L. Vazquez, "Nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ without growth restriction on the data," *J. Differ. Equ.*, 1993, **105**, No. 2, 334–363.
13. L. Boccardo, T. Gallouet, and J. L. Vazquez, "Solutions of nonlinear parabolic equations without growth restrictions on the data," *Electron. J. Differ. Equ.*, 2001, **2001**, No. 60, 1–20.
14. H. Brezis, "Semilinear equations in $\mathbb{R}^n$ without conditions at infinity," *Appl. Math. Optim.*, 1984, **12**, 271–282.
15. L. A. Caffarelli and X. Cabré , *Fully Nonlinear Elliptic Equations*, Am. Math. Soc., Providence, 1995.
16. L. A. Caffarelli, Y. Y. Li, and L. Nirenberg, "Some remarks on singular solutions of nonlinear elliptic equations. I," *J. Fixed Point Theory Appl.*, 2009, **5**, 353–395.

17. I. Capuzzo Dolcetta, F. Leoni, and A. Porretta, “Hölder estimates for degenerate elliptic equations with coercive Hamiltonians,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 2010, **362**, No. 9, 4511–4536.
18. I. Capuzzo Dolcetta, F. Leoni, and A. Vitolo, “Entire subsolutions of fully nonlinear degenerate elliptic equations,” *Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.)*, 2014, **9**, No. 2, 147–161.
19. I. Capuzzo Dolcetta, F. Leoni, and A. Vitolo, “On the inequality $F(x, D^2u) \geqslant f(u) + g(u)|Du|^q$,” *Math. Ann.*, 2016, **365**, No. 1-2, 423–448.
20. M. G. Crandall, H. Ishii, and P. L. Lions, “User’s guide to viscosity solutions of second order partial differential equations,” *Bull. Am. Math. Soc.*, 1992, **27**, No. 1, 1–67.
21. L. D’Ambrosio and E. Mitidieri, “A priori estimates, positivity results, and nonexistence theorems for quasilinear degenerate elliptic inequalities,” *Adv. Math.*, 2010, **224**, 967–1020.
22. F. Demengel and O. Goubet, “Existence of boundary blow up solutions for singular or degenerate fully nonlinear equations,” *Commun. Pure Appl. Anal.*, 2013, **12**, No. 2, 621–645.
23. G. Diaz, “A note on the Liouville method applied to elliptic eventually degenerate fully nonlinear equations governed by the Pucci operators and the Keller—Ossermann condition,” *Math. Ann.*, 2012, **353**, 145–159.
24. M. G. Esteban, P. L. Felmer, and A. Quaas, “Super-linear elliptic equations for fully nonlinear operators without growth restrictions for the data,” *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)*, 2010, **53**, No. 1, 125–141.
25. P. L. Felmer, A. Quaas, and B. Sirakov, “Solvability of nonlinear elliptic equations with gradient terms,” *J. Differ. Equ.*, 2013, **254**, No. 11, 4327–4346.
26. G. Galise, *Maximum principles, entire solutions and removable singularities of fully nonlinear second order equations*, Salerno, Ph.D. Thesis, 2011/2012.
27. G. Galise and A. Vitolo, “Viscosity solutions of uniformly elliptic equations without boundary and growth conditions at infinity,” *Int. J. Differ. Equ.*, 2011, Article ID 453727.
28. Y. Giga, *Surface Evolution Equations. A Level Set Approach*, Birkhäuser, Basel, 2006.
29. P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, Wiley, New York–London, 1964.
30. R. Harvey and B. Lawson Jr, “Existence, uniqueness and removable singularities for nonlinear partial differential equations in geometry,” *arXiv: 1303.1117*, 05.03.2013.
31. Q. Jin, Y. Y. Li, and H. Xu, “Nonexistence of positive solutions for some fully nonlinear elliptic equations,” *Methods Appl. Anal.*, 2005, **12**, 441–449.
32. J. B. Keller, “On solutions of $\Delta u = f(u)$,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1957, **10**, 503–510.
33. D. A. Labutin, “Removable singularities for fully nonlinear elliptic equations,” *Arch. Ration. Mech. Anal.* , 2000, **155**, No. 3, 201–214.
34. J.-M. Lasry and P.-L. Lions, “Nonlinear elliptic equations with singular boundary conditions and stochastic control with state constraints. I. The model problem,” *Math. Ann.*, 1989, **283**, 583–630.
35. F. Leoni, “Nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ with «absorbing» zero order terms,” *Adv. Differ. Equ.*, 2000, **5**, 681–722.
36. F. Leoni and B. Pellacci, “Local estimates and global existence for strongly nonlinear parabolic equations with locally integrable data,” *J. Evol. Equ.*, 2006, **6**, 113–144.
37. M. Nagumo, “Über die differential gleichung $y'' = f(x, y, y')$,” *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan*, 1937, **19**, 861–866.
38. A. Oberman and L. Silvestre, “The Dirichlet problem for the convex envelope,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 2011, **363**, No. 11, 5871–5886.
39. R. Osserman, “On the inequality $\Delta u \geqslant f(u)$,” *Pacific J. Math.*, 1957, **7**, 1141–1147.
40. A. Porretta, “Local estimates and large solutions for some elliptic equations with absorption,” *Adv. Differ. Equ.*, 2004, **9**, No. 3-4, 329–351.
41. J.-P. Sha, “Handlebodies and p-convexity,” *J. Differ. Geom.*, 1987, **25**, 353–361.
42. H. Wu, “Manifolds of partially positive curvature,” *Indiana Univ. Math. J.*, 1987, **36**, 525–548.

Italo Capuzzo Dolcetta
Dipartimento di Matematica, Sapienza Università di Roma, Rome, Italy
E-mail: `capuzzo@mat.uniroma1.it`

Fabiana Leoni
Dipartimento di Matematica, Sapienza Università di Roma, Rome, Italy
E-mail: `leoni@mat.uniroma1.it`

Antonio Vitolo
Dipartimento di Ingegneria Civile, Università di Salerno, Fisciano, Italy
E-mail: `vitolo@unisa.it`