Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 1 (2018). С. 60–73

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-60-73 УДК 517.968.72

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАТОРНЫХ МОДЕЛЕЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

© 2018 г. **В. В. ВЛАСОВ, Н. А. РАУТИАН**

Аннотация. В работе изучается корректная разрешимость начальных задач для абстрактных интегродифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве, а также проводится спектральный анализ оператор-функций, являющихся символами указанных уравнений. Изучаемые уравнения представляют собой абстрактную форму линейных интегродифференциальных уравнений в частных производных, возникающих в теории вязкоупругости и имеющих ряд других важных приложений. Установлена локализация и структура спектра оператор-функций, являющихся символами этих уравнений.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Работа посвящена исследованию интегродифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Рассматриваемые уравнения представляют собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущенное слагаемыми, содержащими вольтерровы интегральные операторы. Эти уравнения могут быть реализованы как интегродифференциальные уравнения в частных производных, возникающие в теории вязкоупругости (см. [13, 17], а также как интегродифференциальные уравнения Гуртина—Пипкина (см. [15, 24, 25, 30]), которые описывают процесс распространения тепла в средах с памятью с конечной скоростью. Кроме того, указанные уравнения возникают в задачах усреднения в многофазных средах (закон Дарси, см. [3, 12]).

Перечисленные задачи можно объединить в достаточно широкий класс интегродифференциальных уравнений в частных производных, поэтому более естественно рассматривать интегродифференциальные уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовых пространствах (абстрактные интегродифференциальные уравнения), которые могут быть реализованы как интегродифференциальные уравнения в частных производных. В настоящее время существует обширная литература по абстрактным интегродифференциальным уравнениям (см., например, работы [2–11, 21–23, 27–34] и цитированную в них литературу). В работах [1, 2, 21–23, 27, 34] (см. также цитированную в них литературу) изучались интегродифференциальные уравнения, главной частью которых является абстрактное параболическое уравнение. Интегродифференциальные уравнения, главной частью которых является абстрактное гиперболическое уравнение, изучены в меньшей степени (см., например, [5–11, 20, 28, 33]).

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, A — самосопряженный положительный оператор, $A^* = A$, действующий в пространстве H, имеющий компактный обратный.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01215).

Рассмотрим следующую задачу для интегродифференцильного уравнения второго порядка на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A^2u - \int_0^t K(t-s)A^2u(s)\,ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.1}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1. \tag{1.2}$$

где A — самосопряженный положительный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, имеющий компактный обратный.

Скалярная функция $K(t)$ имеет представление

$$K(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j R_j(t), \tag{1.3}$$

где $c_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$, функции $R_j(t)$ — дробно-экспоненицальные функции (см. [17, гл. 1]), которые имеют вид

$$R_j(t) = t^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_j)^n t^{n\alpha}}{\Gamma[(n+1)\alpha]}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{1.4}$$

$\Gamma(\cdot)$ — гамма функция Эйлера. При этом предполагается, что последовательность $\{\beta_j\}$ удовлетворяет следующим условиям: $0 < \beta_j < \beta_{j+1,}$, $j \in \mathbb{N}$, $\beta_j \to +\infty$, $j \to +\infty$. Кроме того, выполнены условия

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\beta_j} < 1, \tag{1.5}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j < +\infty. \tag{1.6}$$

Преобразование Лапласа функции $R_j(t)$ имеет вид $\hat{R}_j(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda^\alpha + \beta_j}$ (см. [17, гл. 1]). При этом под λ^α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ понимается главная ветвь многозначной функции $f(\lambda) = \lambda^\alpha$, $\lambda \in \mathbb{C}$, с разрезом по отрицательной действительной полуоси $\lambda^\alpha = |\lambda^\alpha| e^{i\alpha \arg \lambda}$, $-\pi < \arg \lambda < \pi$.

Следует также отметить, что уравнения рассматриваемого вида возникают в физических задачах. Широкий класс приложений — это задачи усреднения в многофазных средах, где одной из фаз является упругая (или вязкоупругая) среда, а другой — вязкая (сжимаемая или несжимаемая) жидкость (подробнее см. [18, 19]). Задача усреднения состоит в том, чтобы построить эффективную (усредненную) модель такой двухфазной среды, когда отдельные включения той или иной фазы быстро чередуются при изменении пространственных переменных. Предварительные исследования показывают, что одномерная модель распространения колебаний в такой усредненной (гомогенизированной) среде в абстрактной форме может быть записана как операторное уравнение, рассматриваемое в данной работе.

К уравнениям, близким по форме к рассматриваемым в этой статье, относится ряд уравнений и систем уравнений, возникающих в кинетической теории газов. В этих задачах интегральные слагаемые играют роль вязкости. Такое операторное представление вязкости возникает при выводе уравнений газовой динамики непосредственно из законов взаимодействия молекул (см. [16]).

Рассматривая преобразование Лапласа уравнения (1.1) при однородных начальных условиях, получаем оператор-функцию

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + A^2 - \hat{K}(\lambda)A^2, \tag{1.7}$$

которая является символом этого уравнения. Здесь $\hat{K}(\lambda)$ — преобразование Лапласа ядра $K(t)$, имеющие представление

$$\hat{K}(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\lambda^\alpha + \beta_j}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1. \tag{1.8}$$

В предлагаемой работе мы устанавливаем корректную разрешимость начальной задачи для уравнения (1.1) в весовых пространствах Соболева на положительной полуоси и исследуем вопрос о локализации спектра для оператор-функции $L(\lambda)$, являющейся символом указанного уравнения.

В наших предшествующих работах [4–11, 33] проводилось подробное исследование задачи (1.1), (1.2) в случае, когда ядро $K(t)$ было представимо рядом убывающих экспонент с положительными коэффициентами, что равносильно случаю $\alpha = 1$ в представлении (1.3). Наш подход к исследованию основывался на спектральном анализе оператор-функции (1.7), который также дает возможность получить результат о корректной разрешимости и представление решения указанной задачи в виде ряда по экспонентам, соответствующим точкам спектра оператор-функции $L(\lambda)$. Отметим также, что результаты работ [4–8, 10, 11, 33] подытожены в главе 3 монографии [9].

Следует отметить, что метод, используемый нами для доказательства корректной разрешимости начальных задач для абстрактных интегродифференциальных уравнений, существенно отличается от более традиционного подхода, использованного Л. Пандолфи в работе [32], где разрешимость изучается в функциональном пространстве на конечном временном интервале $(0, T)$. В нашей работе разрешимость изучается в весовых пространствах Соболева $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A)$ вектор-функций на положительной полуоси $\mathbb{R}_+$, где A — положительный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Доказательство нашей теоремы 2.1 о резрешимости существенно использует гильбертову структуру пространств $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A)$, $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, а также теорему Пэли—Винера, в то время, как в работе [32] рассмотрения проводятся в банаховом функциональном пространстве гладких функций на конечном временном интервале $(0, T)$.

На протяжении всей работы выражение вида $D \lesssim E$ подразумевает неравенство $D \leqslant cE$, выполненное с некоторой положительной константой c, выражение $D \approx E$ означает $D \lesssim E \lesssim D$. Мы используем символы := и =: для введения новых величин.

2. Формулировка результатов

Превратим область определения $\mathrm{Dom}(A^\beta)$ оператора A^β, $\beta > 0$, в гильбертово пространство H_β, введя на $\mathrm{Dom}(A^\beta)$ норму $\|\cdot\|_\beta = \|A^\beta \cdot\|$, эквивалентную норме графика оператора A^β.

2.1. Корректная разрешимость. Через $W^n_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A)$ обозначим пространство Соболева вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ со значениями в H, снабженное нормой

$$\|u\|_{W^n_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A)} \equiv \left(\int_0^\infty e^{-2\gamma t} \left(\left\| u^{(n)}(t) \right\|_H^2 + \|Au(t)\|_H^2 \right) dt \right)^{1/2}, \quad \gamma \geqslant 0.$$

Подробнее о пространствах $W^n_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A)$ см. в монографии [14, гл. 1]. Для $n = 0$ полагаем $W^0_{2,\gamma}\left(\mathbb{R}_+, A^0\right) = L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, где через $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$ обозначено пространство измеримых функций со значениями в пространстве H, снабженное нормой

$$\|f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} = \left(\int_0^{+\infty} e^{-2\gamma t} \|f(t)\|^2{}_H dt \right)^{1/2}.$$

Определение 2.1. Будем называть вектор-функцию u *сильным решением* задачи (1.1), (1.2), если она принадлежит пространству $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A)$ для некоторого $\gamma \geqslant 0$, удовлетворяет уравнению (1.1) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$ и начальному условию (1.2).

Следующая теорема дает достаточное условие корректной разрешимости задачи (1.1), (1.2).

Теорема 2.1. *Предположим, что вектор-функция* $Af(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$ *для некоторого* $\gamma_0 > 0$, *ядро* $K(t)$ *представимо в виде* (1.3), (1.4) *с постоянной* α ($\frac{1}{2} < \alpha < 1$), *а также выполняются условия* (1.5), (1.6) *и, кроме того,* $\varphi_0 \in H_3$, $\varphi_1 \in H_2$. *Тогда существует такое* $\gamma_1 > \gamma_0$, *что для всех* $\gamma \geqslant \gamma_1$ *задача* (1.1), (1.2) *имеет единственное решение в пространстве* $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A)$, *удовлетворяющее неравенству*

$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \leqslant d \left(\|Af\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \left\|A^3\varphi_0\right\|_H + \left\|A^2\varphi_1\right\|_H \right), \tag{2.1}$$

с постоянной d, не зависящей от вектор-функции f и векторов φ_0, φ_1.

2.2. Спектральный анализ. Обозначим через a_j собственные значения оператора A ($Ae_j = a_j e_j$), занумерованные в порядке возрастания (с учетом кратности): $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots, a_n \to +\infty$ ($n \to +\infty$). Соответствующие собственные векторы $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ образуют ортонормированный базис пространства H. Рассмотрим сужение оператор-функции $L(\lambda)$ на одномерное подпространство, натянутое на вектор e_n:

$$l_n(\lambda) = (L(\lambda) e_n, e_n) = \lambda^2 + a_n^2 \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda^\alpha + \beta_k}\right), \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1.$$

Перейдем к изучению структуры спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в случае, когда выполнены условия (1.5), (1.6).

Теорема 2.2. *Пусть выполнено условие* (1.5). *Тогда спектр оператор-функции $L(\lambda)$ лежит в открытой левой полуплоскости.*

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия* (1.5) *и $c_j = 0$ для всех j, больших некоторого $N \in \mathbb{N}$. Тогда для каждого достаточно большого $n \in \mathbb{N}$ существует два невещественных комплексно-сопряженных нуля $\lambda_n^{+} = \bar{\lambda}_n^{-}$ функции $l_n(\lambda)$, имеющих следующую асимптотику*:

$$\lambda_n^{\pm} = -\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) a_n^{1-\alpha} \frac{Q}{2} \pm i a_n \left(1 - \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) a_n^{-\alpha} \frac{Q}{2}\right) + o\left(a_n^{1-\alpha}\right), \quad n \to +\infty, \tag{2.2}$$

где $Q = \sum\limits_{j=1}^{N} c_j$.

Здесь уместно сделать важное замечание.

Замечание 2.1. При $\alpha = 1$ асимптотическая формула (2.2) переходит в ранее известную асимптотическую формулу (2.15) из работы [11] (см. также [9]).

Отметим, что оператор-функция вида (1.7) в случае, когда ядра интегральных операторов являются рядами убывающих экспонент с положительными коэффициентами, изучалась в [7]. Теоремы 2.1, 2.3 представляют собой естественное развитие результатов работы [7].

3. Доказательство основных результатов

Начнем с доказательства теоремы 2.1 в случае однородных (нулевых) начальных условий $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$. При доказательстве теоремы 2.1 с нулевыми начальными условиями используется схема доказательства корректной разрешимости задачи Коши для уравнений гиперболического типа, основанная на применении преобразования Лапласа. В связи с этим, для удобства читателя, напомним широко известные факты, которые мы будем использовать в дальнейшем.

Определение 3.1. Назовем *пространством Харди $H_2(\mathrm{Re}\,\lambda > \gamma, H)$* класс вектор-функций $\hat{f}(\lambda)$ со значениями в H, голоморфных в полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda > \gamma \geqslant 0\}$, для которых

$$\sup_{x>\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\|\hat{f}(x+iy)\right\|_H^2 dy < \infty \quad (\lambda = x + iy). \tag{3.1}$$

Сформулируем хорошо известную теорему Пэли—Винера для пространств Харди $H_2(\mathrm{Re}\,\lambda > \gamma, H)$.

Теорема (Пэли—Винер)**.**

1. *Пространство $H_2(\mathrm{Re}\,\lambda > \gamma, H)$ совпадает с множеством вектор-функций* (*преобразований Лапласа*)*, допускающих представление*

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt, \tag{3.2}$$

где $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,\lambda > \gamma \geqslant 0$.

2. *Для любой вектор-функции* $\hat{f}(\lambda) \in H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, H)$ *существует и единственно представление* (3.2), *где вектор-функция* $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, *причем справедлива формула обращения*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\gamma + iy) e^{(\gamma+iy)t} dy, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \gamma \geqslant 0. \tag{3.3}$$

3. *Для вектор-функций* $\hat{f}(\lambda) \in H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, H)$ *и* $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, *связанных соотношением* (3.2), *справедливо равенство*:

$$\|\hat{f}\|^2_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\gamma,H)} \equiv \sup_{x>\gamma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\|\hat{f}(x+iy)\right\|^2_H dy = \int\limits_0^{+\infty} e^{-2\gamma t} \|f(t)\|^2_H \, dt \equiv \|f\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)}. \tag{3.4}$$

Сформулированная теорема широко известна для скалярных функций. Однако она без труда обобщается на случай вектор-функций со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Доказательство теоремы 2.1. Вначале рассмотрим задачу (1.1), (1.2) с нулевыми начальными данными $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$. Применяя преобразование Лапласа к уравнению (1.1), получаем следующее представление для преобразования Лапласа решения задачи (1.1), (1.2):

$$\hat{u}(\lambda) = L^{-1}(\lambda) \hat{f}(\lambda). \tag{3.5}$$

Согласно теореме Пэли—Винера $A\hat{f}(\lambda) \in H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma; H)$, поскольку$Af(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$.

Перейдем к оценке оператор-функции $L^{-1}(\lambda)$ а правой полуплоскости. Разделим правую полуплоскость на две области

$$\Omega_1 = \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda = x > |y|, y = \operatorname{Im}\lambda\}, \quad \Omega_2 = \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda = x < |y|, y = \operatorname{Im}\lambda\}, \; x > 0.$$

Вначале проведем оценки в области Ω_2. Преобразование Лапласа $\hat{K}(\lambda)$ допускает представление

$$\hat{K}(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[c_j \frac{(|\lambda|^\alpha \cos(\alpha\varphi) + \beta_j) - i|\lambda|^\alpha \sin(\alpha\varphi)}{(|\lambda|^\alpha \cos(\alpha\varphi) + \beta_j)^2 + (|\lambda|^\alpha \sin(\alpha\varphi))^2} \right]. \tag{3.6}$$

Рассмотрим следующие скалярные функции

$$\mathrm{M}_n(\lambda) = \frac{l_n(\lambda)}{a_n^2} = \frac{1}{a_n^2}(L(\lambda)e_n, e_n) = \frac{\lambda^2}{a_n^2} + 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda^\alpha + \beta_k}, \quad n \in \mathbb{N},$$

и выделим их вещественные и мнимые части

$$\operatorname{Re}\mathrm{M}_n(\lambda) = \frac{x^2 - y^2}{a_n^2} + 1 - \operatorname{Re}\hat{K}(\lambda), \quad \operatorname{Im}\mathrm{M}_n(\lambda) = \frac{2xy}{a_n^2} - \operatorname{Im}K(\lambda).$$

Тогда $\operatorname{Im}\mathrm{M}_n(\lambda)$ допускает следующую оценку снизу:

$$\operatorname{Im}\mathrm{M}_n(\lambda) = \frac{2xy}{a_n^2} + \sum_{j=1}^{\infty} c_j \frac{|\lambda|^\alpha \sin(\alpha\varphi)}{(|\lambda|^\alpha \cos(\alpha\varphi) + \beta_j)^2 + (|\lambda|^\alpha \sin(\alpha\varphi))^2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2xy}{a_n^2} + \sum_{j=1}^{\infty} c_j \frac{y^\alpha \sin\left(\dfrac{\alpha\pi}{4}\right)}{|\lambda|^{2\alpha} + 2\beta_j|\lambda|^\alpha + \beta_j^2} \geqslant \frac{2xy}{a_n^2} + c_1 \frac{y^\alpha \left(\sin\left(\dfrac{\alpha\pi}{4}\right)\right)}{(2y^\alpha + \beta_1)^2}.$$

Следовательно, для $y > x \geqslant \gamma > 0$ получаем неравенство

$$\frac{2xy}{a_n^2} + c_1 \frac{y^\alpha \sin\left(\dfrac{\alpha\pi}{4}\right)}{(2y^\alpha + \beta_1)^2} \geqslant \frac{2xy}{a_n^2} + \frac{k_1}{y^\alpha} \geqslant \frac{2\gamma y^{1+\alpha} + k_1 a_n^2}{a_n^2 y^\alpha} \geqslant k_2 \frac{a_n y^{(1-\alpha)/2}}{a_n^2} \tag{3.7}$$

с положительными постоянными k_1 и k_2. В результате приходим к оценке

$$\frac{1}{|l_n(\lambda)|} \leqslant \frac{1}{a_n^2 |\operatorname{Im}\mathrm{M}_n(\lambda)|} \leqslant \frac{k_3}{a_n y^{(1-\alpha)/2}}. \tag{3.8}$$

Из неравенства (3.8) для всех $y > x \geqslant \gamma$ вытекает оценка

$$\frac{a_n}{|l_n(\lambda)|} \leqslant \frac{k_3}{y^{(1-\alpha)/2}}. \tag{3.9}$$

Совершенно аналогично, для всех $y < -x < -\gamma$ получим неравенство

$$\frac{a_n}{|l_n(\lambda)|} \leqslant \frac{k_4}{|y|^{(1-\alpha)/2}}. \tag{3.10}$$

В результате, объединяя два последних неравенства, приходим к тому, что в области $\Omega_2 \cap \{(x,y) : |y| > x > \gamma > 0\}$ выполнено неравенство

$$\frac{a_n}{|l_n(\lambda)|} \leqslant \frac{k_5}{|y|^{(1-\alpha)/2}}. \tag{3.11}$$

Оценим теперь $\operatorname{Re} \mathrm{M}_n(\lambda)$ в области Ω_1 для достаточно больших x. Заметим прежде всего, что в области Ω_1 справедливо неравенство $x^2 - y^2 \geqslant 0$. Тогда для достаточно больших $|\lambda|$ имеем

$$\operatorname{Re} \mathrm{M}_n(\lambda) \geqslant 1 - \operatorname{Re} \hat{K}(\lambda) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} c_j \frac{|\lambda|^{\alpha} \cos(\alpha\varphi) + \beta_j}{(|\lambda|^{\alpha} \cos(\alpha\varphi) + \beta_j)^2 + |\lambda|^{2\alpha} \sin^2(\alpha\varphi)} \geqslant$$

$$\geqslant 1 - \sum_{j=1}^{\infty} c_j \frac{|\lambda|^{\alpha} + \beta_j}{|\lambda|^{2\alpha} + 2|\lambda|^{\alpha}\beta_j \cos\left(\dfrac{\alpha\pi}{4}\right) + \beta_j^2} \geqslant 1 - \frac{d_1}{|\lambda|^{\alpha}}. \tag{3.12}$$

Следовательно, для заданного δ $(0 < \delta < 1)$ можно выбрать такое $R_0 > 0$, что для $\lambda : |\lambda| > R_0$ будет выполнена оценка

$$\operatorname{Re} \mathrm{M}_n(\lambda) > 1 - \delta.$$

Таким образом, для всех $|\lambda| > R_0$, $\lambda \in \Omega_1$ получаем следующее неравенство:

$$\frac{a_n}{|l_n(\lambda)|} \leqslant \frac{a_n}{|\operatorname{Re} \mathrm{M}_n(\lambda)|\, a_n^2} \leqslant \frac{\mathrm{const}}{a_n}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.13}$$

с постоянной const, не зависящей от n.

В теореме 2.2 настоящей статьи независимо установлено, что в замкнутой правой полуплоскости отсутствует спектр оператор-функции $L(\lambda)$ и, следовательно, функции $\dfrac{a_n}{l_n(\lambda)}$ являются аналитическими (регулярными) в открытой правой полуплоскости. По теореме Вейерштрасса отсюда немедленно вытекает, что функции $\dfrac{a_n}{l_n(\lambda)}$ будут являться ограниченными на множестве $\{\lambda : \lambda \in \Omega_1 \cap \{0 < \gamma < |\lambda| < R_0\}\}$. Таким образом неравенство (3.13) будет справедливо в области $\Omega_1 \cap \{\lambda : \{|\lambda| > \gamma > 0\}\}$.

Из оценок (3.11) и (3.13) следует, что существует такая константа $d > 0$, для которой справедливо неравенство

$$\sup_{\operatorname{Re}\lambda > \gamma} \left| \frac{a_n}{l_n(\lambda)} \right| \leqslant d < \infty, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.14}$$

В свою очередь, из неравенства (3.14) имеем

$$\sup_{\operatorname{Re}\lambda > \gamma} \left\| A L^{-1}(\lambda) \right\| \leqslant d < \infty. \tag{3.15}$$

Перейдем к доказательству однозначной разрешимости задачи (1.1), (1.2) в пространстве $W_{2,\gamma}^2\left(\mathbb{R}_+, A^2\right)$ с нулевыми начальными данными $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$. Покажем вначале, что вектор-функция $A^2 u(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$.

Легко видеть, что

$$A^2 \hat{u}(\lambda) = A^2 L^{-1}(\lambda) \hat{f}(\lambda) = A L^{-1}(\lambda) A \hat{f}(\lambda). \tag{3.16}$$

Согласно условиям теоремы 2.1, вектор-функция $A^2 f(t)$ принадлежит пространству $L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$. Следовательно, по теореме Пэли—Винера вектор-функция $A\hat{f}(\lambda)$ принадлежит пространству $H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma_0, H)$ и справедливо следующее равенство:

$$\|Af\|_{L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+,H)} = \left\| A\hat{f} \right\|_{H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma_0, H)}. \tag{3.17}$$

Согласно (3.14)–(3.17) мы получаем цепочку неравенств

$$\left\|A^2u\right\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} = \left\|A^2\hat{u}\right\|^2_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\gamma,H)} = \left\|AL^{-1}(\lambda)\,A\hat{f}(\lambda)\right\|^2_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\gamma,H)} \leqslant d^2\,\|Af\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)}\,. \tag{3.18}$$

Таким образом, вектор-функция $A^2u(t)$ принадлежит пространству $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)$ и справедлива следующая оценка:

$$\left\|A^2u\right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant d\|Af\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)}. \tag{3.19}$$

Покажем теперь, что вектор-функция $\lambda^2\hat{u}(\lambda)$ также принадлежит пространству $H_2(\operatorname{Re}\lambda>\gamma,H)$. Заметим, что при $\operatorname{Re}\lambda>\gamma$ справедливо представление

$$I = \lambda^2L^{-1}(\lambda) + \left(1-\hat{K}(\lambda)\right)A^2L^{-1}(\lambda)\,. \tag{3.20}$$

Следовательно, при $\operatorname{Re}\lambda>\gamma$ имеем

$$\hat{f}(\lambda) = \lambda^2\hat{u}(\lambda) + \left(1-\hat{K}(\lambda)\right)A^2L^{-1}(\lambda)\,\hat{f}(\lambda)\,. \tag{3.21}$$

В силу предположений относительно функции $K(t)$ функция $1-\hat{K}(\lambda)$ является ограниченной и аналитической в полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda>\gamma\}$. В самом деле, справедливо следующее неравенство:

$$\left|1-\hat{K}(\lambda)\right| \leqslant 1 + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_j}{|\lambda^\alpha+\beta_j|} \leqslant \text{const}\,.$$

Регулярность (аналитичность) вытекает, согласно (1.6), из равномерной сходимости ряда. Оценим вектор-функцию $\lambda^2\hat{u}(\lambda)$ в пространстве Харди $H_2(\operatorname{Re}\lambda>\gamma,H)$.

Из представления (3.21), неравенства (3.14) и предыдущей оценки получаем

$$\begin{aligned}\left\|\lambda^2\hat{u}(\lambda)\right\|_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\gamma,H)} \leqslant \left\|\hat{f}(\lambda)\right\|_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\gamma,H)} + \left|1-\hat{K}(\lambda)\right|\left\|AL^{-1}(\lambda)\,Af(\lambda)\right\|_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\gamma,H)} \leqslant\\ \leqslant \text{const}\,\|Af(\lambda)\|_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\gamma,H)}.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Таким образом, из теоремы Пэли—Винера вытекает неравенство

$$\left\|\frac{d^2u}{dt^2}\right\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant d_1\,\|Af\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)}\,. \tag{3.23}$$

Наконец, объединяя оценки (3.19) и (3.23), мы получаем, что вектор-функция $u(t)$ принадлежит пространству $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)$, и справедлива оценка

$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \leqslant d_2\|Af\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)}. \tag{3.24}$$

Рассмотрим теперь задачу (1.1), (1.2) с неоднородными начальными данными φ_0 и φ_1. Положим

$$u(t) = \cos(At)\,\varphi_0 + A^{-1}\sin(At)\,\varphi_1 + w(t)\,. \tag{3.25}$$

Тогда вектор-функция $w(t)$ является решением задачи

$$\frac{d^2w}{dt^2} + A^2w(t) - \int_0^t K(t-s)A^2w(s)\,ds = f_1(t)\,, \tag{3.26}$$

$$w(+0) = w^{(1)}(+0) = 0, \tag{3.27}$$

где $f_1(t) = f(t) - h(t)$, $h(t) = \int_0^t K(t-s)A^2\left(\cos(As)\,\varphi_0 + A^{-1}\sin(As)\,\varphi_1\right)ds.$

Для доказательства теоремы достаточно установить следующее неравенство:

$$\|Af_1\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant \|Af\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \|Ah\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} < \infty. \tag{3.28}$$

Оценим вектор-функцию $Ah(t)$. С этой целью оценим вектор-функцию $A\hat{h}(\lambda)$ в пространстве Харди $H_2(\operatorname{Re}\lambda>\gamma,H)$. Вектор-функция $A\hat{h}(\lambda)$ допускает представление

$$A\hat{h}(\lambda) = \hat{K}(\lambda)\,A\left[\lambda\left(\lambda^2I+A^2\right)^{-1}A^2\varphi_0 + A\left(\lambda^2I+A^2\right)^{-1}A\varphi_1\right] =$$

$$= \hat{K}(\lambda)\left[\lambda\left(\lambda^2 I + A^2\right)^{-1} A^3\varphi_0 + A\left(\lambda^2 I + A^2\right)^{-1} A^2\varphi_1\right]. \tag{3.29}$$

В дальнейшем мы будем использовать следующее известное предложение (см., например, [7]).

Предложение 3.1. *Для $\kappa > 0$ в полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > \kappa\}$ справедливы неравенства*

$$\left\|A\left(\lambda^2 I + A^2\right)^{-1}\right\| \leqslant \frac{\text{const}}{\operatorname{Re}\lambda}, \qquad \left\|\lambda\left(\lambda^2 I + A^2\right)^{-1}\right\| \leqslant \frac{\text{const}}{\operatorname{Re}\lambda}. \tag{3.30}$$

Легко видеть, что в полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > \kappa > 0\}$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{|\lambda^\alpha + \beta|^2} = \frac{1}{\left(x_0^2 + y^2\right)^\alpha + 2\left(x_0^2 + y^2\right)^{\alpha/2}\beta\cos(\alpha\varphi) + \beta^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{y^{2\alpha}\left(1 + \dfrac{x_0^2}{y^2}\right)^\alpha\left(1 + \dfrac{2\cos(\alpha\varphi)\,\beta}{\left(x_0^2 + y^2\right)^{\alpha/2}} + \dfrac{\beta^2}{\left(x_0^2 + y^2\right)^\alpha}\right)} \leqslant \frac{\text{const}}{y^{2\alpha} + 1} \tag{3.31}$$

здесь $\lambda = x_0 + iy$, $x_0 = |\lambda|\cos\varphi$, $y = |\lambda|\sin\varphi$, $x_0 > \kappa$, $y > 0$, $\beta > 0$. Следовательно, в силу предположения (1.6) и неравенства (3.30) мы получаем оценку

$$\left|\hat{K}(x_0 + iy)\right| \leqslant \frac{\text{const}}{|y|^\alpha + 1}. \tag{3.32}$$

Вначале оценим вектор-функцию $Ah_1(\lambda) = \hat{K}(\lambda)\left[\lambda\left(\lambda^2 I + A^2\right)^{-1} A^3\varphi_0\right]$. Из неравенств (3.30) и (3.32) получаем

$$\left\|A\hat{h}_1(\lambda)\right\|^2_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\kappa,H)} = \sup_{x_0>\kappa}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\|K(x_0 + iy)(x_0 + iy)\left[\left(x_0^2 + y^2\right)I + A^2\right]^{-1} A^3\varphi_0\right\|^2 dy \leqslant$$

$$\leqslant d_4\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left\|A^3\varphi_0\right\|}{|y|^{2\alpha} + 1}dy \leqslant d_5\left\|A^3\varphi_0\right\|^2. \tag{3.33}$$

с положительными постоянными d_4, d_5.

Аналогично для вектор-функции $Ah_2(\lambda) = \hat{K}(\lambda)A\left(\lambda^2 I + A^2\right)^{-1} A^2\varphi_1$, в силу (3.30) и (3.32), справедлива следующая оценка

$$\|Ah_2(\lambda)\|^2_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\kappa,H)} = \sup_{x_0>\kappa}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\|K(x_0 + iy)A\Big((x_0 + iy)^2 I + A^2\Big)^{-1} A^2\varphi_1\right\|^2 dy \leqslant$$

$$\leqslant d_6\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left\|A^2\varphi_1\right\|^2}{|y|^{2\alpha+1} + 1}dy \leqslant d_7\left\|A^2\varphi_1\right\|^2 \tag{3.34}$$

с положительными постоянными d_6, d_7. Объединяя оценки (3.33) и (3.34), при $\alpha > 1/2$ получаем неравенство

$$\left\|A\hat{h}(\lambda)\right\|_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\kappa,H)} \leqslant d_8\left(\left\|A^3\varphi_0\right\| + \left\|A^2\varphi_1\right\|\right) \tag{3.35}$$

с постоянной d_8, не зависящей от φ_0 и φ_1. Наконец, из (3.35), согласно теореме Пэли—Винера, вытекает искомое неравенство

$$\|Ah(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant d_9\left(\left\|A^3\varphi_0\right\| + \left\|A^2\varphi_1\right\|\right) \tag{3.36}$$

с постоянной d_9, не зависящей от φ_0 и φ_1. Теорема 2.1 доказана. □

Доказательство теоремы 2.2. Функция $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + a_n^2$, где $\lambda = x + iy$, отображает верхний правый квадрант $\Phi_{\pi/2} = \{\lambda : 0 < \arg\lambda < \pi/2\}$ в верхнюю полуплоскость $\{\lambda : \operatorname{Im}\lambda > 0\}$. В свою очередь, функция $\Psi(\lambda) = \left(\sum\limits_{J=1}^{\infty}\dfrac{c_j}{\lambda^\alpha + \beta_j}\right)a_n^2$ отображает угол $\Phi_{\pi/2}$ в угол $\{\lambda : -\alpha\pi/2 < \arg\lambda < 0\}$.

Следовательно, уравнение $\varphi(\lambda) = \Psi(\lambda)$, эквивалентное уравнению $l_n(\lambda) = 0$, не имеет решений в первом квадранте. Вследствие того, что функция $l_n(\lambda)$ имеет вещественные коэффициенты, ее невещественные нули являются комплексно сопряженными. Таким образом, уравнение $l_n(\lambda) = 0$ не имеет нулей в квадранте $\Phi_{-\pi/2} = \{\lambda : -\pi/2 < \arg\lambda < 0\}$. Более того, при выполнении условия (1.5) уравнение $\phi(x) = \Psi(x)$ не имеет решений, лежащих на полуоси $(0, +\infty)$, поскольку график параболы $x^2 + a_n^2$ в этом случае не пересекается с графиком функции $\Psi(x) = \left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{x^\alpha + \beta_j}\right) a_n^2$ при положительных x.

Отметим также, что на мнимой оси нет спектра оператор-функции $L(\lambda)$. В самом деле, рассмотрим два случая:

$$1)\quad y > 0,\quad x = 0,\quad iy = e^{i\frac{\pi}{2}} y;$$

$$2)\quad y < 0,\quad x = 0,\quad iy = e^{-i\frac{\pi}{2}} t,\quad t > 0.$$

В первом случае справедливо следующее неравенство:

$$\operatorname{Im} l_n(iy) = -y^\alpha \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\left(\left(y^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + \beta_j\right)^2 + y^{2\alpha} \sin^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right)} \right) a_n^2 < 0,$$

Во втором случае имеем

$$\operatorname{Im} l_n\left(e^{\frac{-\pi i}{2}} t\right) = t^\alpha \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}{\left(t^\alpha \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + \beta_j\right)^2 + t^{2\alpha} \sin^2\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \right) a_n^2 > 0.$$

При $x = y = 0$ имеем

$$l_n(0) = a_n^2 \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\beta_j}\right) > 0.$$

Поскольку спектр оператор-функции $L(\lambda)$ совпадает с замыканием объединения нулей функций $l_n(\lambda), n \in \mathbb{N}$, а каждая из функций $l_n(\lambda)$, по доказанному, не имеет нулей в замкнутой правой полуплоскости, то и оператор-функция $L(\lambda)$ не имеет спектра в замкнутой правой полуплоскости. Теорема 2.2 доказана. □

Замечание 3.1. При нарушении условия (1.5), т. е. при $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\beta_j} > 1$, в правой полуплоскости имеется бесконечное число вещественных собственных значений оператор-функции.

Данное замечание может быть установлено из простых графических соображений.

Рассмотрим сужения вектор-функций $l_n(\lambda)$ на вещественную ось. Уравнение $l_n(x) = 0$ может быть переписано в виде $\varphi_n(x) = \psi(x)$, где

$$\varphi_n(x) = \frac{x^2}{a_n^2} + 1, \quad \psi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{x^\alpha + \beta_j}.$$

Заметим, что функция $\psi(x)$ на полуоси $[0, +\infty)$ является монотонно убывающей и достигающей своего максимума при $x = 0$, равного $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\beta_j} > 1$. Поэтому график функции $\psi(x)$ пересекается с графиками парабол $\varphi_n(x)$ при положительных значениях x_n. При этом с ростом n нули x_n будут стремиться к точке x^*, являющейся решением уравнения $\psi(x) = 1$.

Доказательство теоремы 2.3. Будем искать невещественные комплексно-сопряженные нули функций $l_n(\lambda)$ в виде $\lambda_n^\pm = \pm i a_n + \tau_n a_n$, $n \to +\infty$, где $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная последовательность. Тогда исходное уравнение

$$\hat{K}\left(\lambda_n^\pm\right) = \frac{\left(\lambda_n^\pm\right)^2}{a_n^2} + 1 \tag{3.37}$$

эквивалентно уравнению $\hat{K}(\lambda_n^{\pm}) = \tau_n(\tau_n + 2i)$. Таким образом

$$\tau_n = \frac{\hat{K}(\lambda_n^{\pm})}{(2i + \tau_n)}. \tag{3.38}$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением нулей λ_n^+ (для λ_n^- результат вытекает из того, что λ_n^+ и λ_n^- являются комплексно-сопряженными числами). Обозначим

$$h_n(\tau) = \frac{K(\lambda_n^+)}{(\tau + 2i)}, \quad \lambda_n^+ = ia_n + \tau_n a_n.$$

Тогда соотношение (3.38) может быть переписано в виде $\tau_n = h_n(\tau_n)$. Покажем, что существует неподвижная точка τ_n отображения $\tau \to h_n(\tau)$ при $n \to +\infty$. Для этого достаточно показать, что отображение $\tau \to h_n(\tau)$, $n \to +\infty$, является сжимающим. Искомое решение τ_n может быть найдено, как предел последовательности $\left\{\tau_n^k\right\}_{k=1}^{\infty}$, $k \to +\infty$, $\tau_n^k = h_n\left(\tau_n^{k-1}\right)$.

Отображение $\tau \to h_n(\tau)$ является сжимающим. Действительно, это следует из оценки

$$\left|h'(\tau)\right| = \left|\frac{\hat{K}(\lambda_n^+) - \hat{K}'(\lambda_n^+)(a_n\tau + 2ia_n)}{(\tau + 2i)^2}\right| \leqslant \frac{\left|\hat{K}(\lambda_n^+)\right| + \left|\hat{K}'(\lambda_n^+)\, 2\lambda_n^+\right|}{2} \tag{3.39}$$

и следующей леммы.

Лемма 3.1. *Соотношения*

$$\left|\lambda \hat{K}'(\lambda)\right| \to 0, \quad \left|\hat{K}(\lambda)\right| \to 0, \quad |\lambda| \to +\infty, \tag{3.40}$$

выполнены в области $\Omega_{\pi-\delta} = \{\lambda : |\arg \lambda| < \pi - \delta,\ 0 < \delta < \pi/4\}$.

Доказательство. Соотношения (3.40) следуют из представлений

$$\hat{K}(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{\alpha}} \sum_{j=1}^{N} \frac{c_j}{1 + \dfrac{\beta_j}{\lambda^{\alpha}}}, \quad \lambda \hat{K}'(\lambda) = \frac{-\alpha}{\lambda^{\alpha}} \sum_{j=1}^{N} \frac{c_j}{\left(1 + \dfrac{\beta_j}{\lambda^{\alpha}}\right)^2}$$

и следующих оценок:

$$\left|\hat{K}(\lambda)\right| \leqslant \frac{M_1}{|\lambda|^{\alpha}} \sum_{j=1}^{N} c_j, \quad \left|\lambda \hat{K}'(\lambda)\right| \leqslant \frac{M_2}{|\lambda|^{\alpha}} \sum_{j=1}^{N} c_j.$$

где M_1, $M_2 = \mathrm{const}$. □

Используя разложение правой части (3.38) в многочлен Тейлора по степеням τ_n, получаем

$$h_n(\tau_n) = \frac{-i\hat{K}(ia_n)}{2}\left(1 + O(\tau_n)\right),\ n \to +\infty. \tag{3.41}$$

Таким образом, для τ_n справедливо представление

$$\tau_n = -\frac{iK(ia_n)}{2}\left(1 + O(\tau_n)\right),\ n \to +\infty. \tag{3.42}$$

Лемма 3.2. *В области* $\Omega_{\pi-\delta}$ *функция* $\hat{K}(\lambda)$ *допускает представление*

$$\hat{K}(\lambda) = \frac{Q_1}{\lambda^{\alpha}} + \frac{Q_2}{\lambda^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{2\alpha}}\right),\ |\lambda| \to +\infty, \tag{3.43}$$

где $Q_1 = \sum\limits_{j=1}^{N} c_j$, $Q_2 = -\sum\limits_{j=1}^{N} c_j \beta_j$.

Доказательство. Представление (3.43) немедленно вытекает из очевидного соотношения

$$\frac{c_j}{\lambda^{\alpha} + \beta_j} = \frac{c_j}{\lambda^{\alpha}}\left(1 - \frac{\beta_j}{\lambda^{\alpha}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha}}\right)\right),\ j = 1, \ldots, N;\ |\lambda| \to +\infty,\ \lambda \in \Omega_{\pi-\delta}.$$

□

Из соотношений (3.42), а также представления $\hat{K}(\lambda) = \dfrac{Q_1}{\lambda^\alpha} + o\left(\dfrac{1}{\lambda^\alpha}\right)$, вытекающего из (3.43), получаем асимптотическое представление для τ_n:

$$\tau_n = \frac{-iQ_1}{2(ia_n)^\alpha}\left(1 + o(\tau_n)\right) + o\left(\frac{1}{a_n^\alpha}\right) = -\frac{e^{\frac{\pi i}{2}(1-\alpha)}}{2} a_n^{-\alpha} Q_1 + o\left(\frac{1}{a_n^\alpha}\right),\ a_n \to +\infty. \tag{3.44}$$

Таким образом, невещественные собственные значения λ_n^+ допускают представление

$$\lambda_n^+ = ia_n - \frac{e^{\frac{\pi i}{2}(1-\alpha)}}{2} a_n^{1-\alpha} Q_1 + o\left(a_n^{1-\alpha}\right),\ a_n \to +\infty. \tag{3.45}$$

В свою очередь,

$$e^{\frac{\pi i}{2}(1-\alpha)} = \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right). \tag{3.46}$$

Наконец, используя (3.46) и выделяя вещественную и мнимую часть в представлении (3.45), получим искомую формулу:

$$\lambda_n^\pm = -\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) a_n^{1-\alpha}\frac{Q_1}{2} \pm i\left(a_n - \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) a_n^{1-\alpha}\frac{Q_1}{2}\right) + o\left(a_n^{1-\alpha}\right),\ a_n \to +\infty.$$

□

Теорема 2.3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Власов В.В.* О разрешимости и свойствах решений функционально-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве// Мат. сб. — 1995. — *186*, № 8. — С. 67–92.
2. *Власов В.В.* О разрешимости и оценках решений функционально-дифференциальных уравнений в пространствах Соболева// Тр. МИАН. — 1999. — *227*. — С. 109–121.
3. *Власов В.В., Гавриков А.А., Иванов С.А., Князьков Д.Ю., Самарин В.А., Шамаев А.С.* Спектральные свойства комбинированных сред// Соврем. пробл. мат. и мех. — 2009. — *5*, № 1. — С. 134–155.
4. *Власов В.В., Медведев Д.А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2008. — *30*. — С. 3–173.
5. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Корректная разрешимость и спектральный анализ абстрактных гиперболических интегродифференциальных уравнений// Тр. сем. им. И.Г. Петровского. — 2011. — *28*. — С. 75–114.
6. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* О свойствах решений интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории тепломассообмена// Тр. Моск. мат. об-ва. — 2014. — *75*, № 2. — С. 131–155.
7. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Корректная разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *58*. — С. 22–42.
8. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Корректная разрешимость вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве// Дифф. уравн. — 2016. — *52*, № 9. — С. 1168–1177.
9. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М.: МАКС Пресс, 2016.
10. *Власов В.В., Раутиан Н.А., Шамаев А.С.* Разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике// Докл. РАН. — 2010. — *434*, № 1. — С. 12–15.
11. *Власов В.В., Раутиан Н.А., Шамаев А.С.* Спектральный анализ и корректная разрешимость абстрактных интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2011. — *39*. — С. 36–65.
12. *Жиков В.В.* Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости// Мат. сб. — 2000. — *191*, № 7. — С. 31–72.
13. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. — М.: Наука, 1970.
14. *Лионс Ж.Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
15. *Лыков А.В.* Проблема тепло- и массообмена. — Минск: Наука и техника, 1976.
16. *Палин В.В., Радкевич Е.В.* Законы сохранения и их гиперболические регуляризации// Соврем. пробл. мат. и мех. — 2009. — *5*, № 1. — С. 88–115.

17. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. — М.: Наука, 1977.
18. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. — М.: Мир, 1984.
19. *Шамаев А. С., Шумилова В. В.* Усреднение уравнений акустики для вязкоупругого материала с каналами, заполненными вязкой сжимаемой жидкостью// Изв. РАН. Мех. жид. и газа. — 2011. — № 2. — С. 92–103.
20. *Desch W., Miller R. K.* Exponential stabilization of Volterra integrodifferential equations in Hilbert space// J. Differ. Equ. — 1987. — *70*. — С. 366–389.
21. *Di Blasio G.* Parabolic Volterra equations of convolution type// J. Integral Equ. Appl. — 1994. — *6*. — С. 479–508.
22. *Di Blasio G., Kunisch K., Sinestari E.* L^2-regularity for parabolic partial integrodifferential equations with delays in the highest order derivatives// J. Math. Anal. Appl. — 1984. — *102*. — С. 38–57.
23. *Di Blasio G., Kunisch K., Sinestari E.* Stability for abstract linear functional differential equations// Izrael. J. Math. — 1985. — *50*, № 3. — С. 231–263.
24. *Eremenko A., Ivanov S.* Spectra of the Gurtin—Pipkin type equations// J. SIAM Math. Anal. — 2011. — *43*, № 5. — С. 2296—2306.
25. *Gurtin M. E., Pipkin A. C.* Theory of heat conduction with finite wave speed// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1968. — *31*. — С. 113–126.
26. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. 2. Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids. — Berlin: Basel—Boston, 2003.
27. *Kunisch K., Mastinsek M.* Dual semigroups and structual operators for partial differential equations with unbounded operators acting on the delays// Differ. Integral Equ. — 1990. — *3*, № 4. — С. 733–756.
28. *Medvedev D. A., Vlasov V. V., Wu J.* Solvability and structural properties of abstract neutral functional differential equations// Funct. Differ. Equ. — 2008. — *66*, № 3-4. — С. 249–272.
29. *Miller R. K.* Volterra integral equation in Banach space// Funkcialaj Ekvac. — 1975. — *18*. — С. 163–194.
30. *Miller R. K.* An integrodifferential equation for rigid heat conductors with memory// J. Math. Anal. Appl. — 1978. — *66*. — С. 313–332.
31. *Miller R. K., Wheeler R. L.* Well-posedness and stability of linear Volterra interodifferential equations in abstract spaces// Funkcialaj Ekvac. — 1978. — *21*. — С. 279–305.
32. *Pandolfi L.* The controllability of the Gurtin—Pipkin equations: a cosine operator approach// Appl. Math. Optim. — 2005. — *52*. — С. 143–165.
33. *Vlasov V. V., Wu J.* Solvability and spectral analysis of abstract hyperbolic equations with delay// J. Funct. Differ. Equ. — 2009. — *16*, № 4. — С. 751–768.
34. *Wu J.* Theory and applications of partial functional differential equations. — New York: Springer, 1996.

В. В. Власов
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1
E-mail: vicvvlasov@rambler.ru

Н. А. Раутиан
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1
E-mail: nrautian@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-60-73 UDC 517.968.72

Investigation of Operator Models Arising in Viscoelasticity Theory

© 2018 **V. V. Vlasov, N. A. Rautian**

Abstract. We study the correct solvability of initial problems for abstract integrodifferential equations with unbounded operator coefficients in a Hilbert space. We do spectral analysis of operator-functions that are symbols of such equations. The equations under consideration are an abstract form of linear integrodifferential equations with partial derivatives arising in viscoelasticity theory and having a number of other important applications. We describe localization and structure of the spectrum of operator-functions that are symbols of such equations.

REFERENCES

1. V. V. Vlasov, "O razreshimosti i svoystvakh resheniy funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy v gil'bertovom prostranstve" [On solvability and properties of solutions of functional differential equations in Hilbert space], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1995, **186**, No. 8, 67–92 (in Russian).
2. V. V. Vlasov, "O razreshimosti i otsenkakh resheniy funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy v prostranstvakh Soboleva" [On solvability and estimates of solutions of functional differential equations in Sobolev spaces], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1999, **227**, 109–121 (in Russian).
3. V. V. Vlasov, A. A. Gavrikov, S. A. Ivanov, D. Yu. Knyaz'kov, V. A. Samarin, and A. S. Shamaev, "Spektral'nye svoystva kombinirovannykh sred" [Spectral properties of combined media], *Sovrem. probl. mat. i mekh.* [Contemp. Probl. Math. Mech.], 2009, **5**, No. 1, 134–155 (in Russian).
4. V. V. Vlasov and D. A. Medvedev, "Funktsional'no-differentsial'nye uravneniya v prostranstvakh Soboleva i svyazannye s nimi voprosy spektral'noy teorii" [Functional-differential equations in Sobolev spaces and related problems of spectral theory], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2008, **30**, 3–173 (in Russian).
5. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "Korrektnaya razreshimost' i spektral'nyy analiz abstraktnykh giperbolicheskikh integrodifferentsial'nykh uravneniy" [Well-posedness and spectral analysis of abstract hyperbolic integrodifferential equations], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 2011, **28**, 75–114 (in Russian).
6. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "O svoystvakh resheniy integrodifferentsial'nykh uravneniy, voznikayushchikh v teorii teplomassoobmena" [On properties of solutions of integrodifferential equations arising in the theory of heat and mass transfer], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 2014, **75**, No. 2, 131–155 (in Russian).
7. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "Korrektnaya razreshimost' i spektral'nyy analiz integrodifferentsial'nykh uravneniy, voznikayushchikh v teorii vyazkouprugosti" [Well-posedness and spectral analysis of integro-differential equations arising in viscoelasticity theory], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **58**, 22–42 (in Russian).
8. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "Korrektnaya razreshimost' vol'terrovykh integro-differentsial'nykh uravneniy v gil'bertovom prostranstve" [Well-posedness of Volterra integrodifferential equations in Hilbert space], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2016, **52**, No. 9, 1168–1177 (in Russian).
9. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, *Spektral'nyy analiz funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Spectral Analysis of Functional Differential Equation], MAKS Press, Moscow, 2016 (in Russian).
10. V. V. Vlasov, N. A. Rautian, and A. C. Shamaev, "Razreshimost' i spektral'nyy analiz integrodifferentsial'nykh uravneniy, voznikayushchikh v teplofizike i akustike" [Solvability and spectral analysis of integrodifferential equations arising in thermophysics and acoustics], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2010, **434**, No. 1, 12–15 (in Russian).
11. V. V. Vlasov, N. A. Rautian, and A. C. Shamaev, "Spektral'nyy analiz i korrektnaya razreshimost' abstraktnykh integrodifferentsial'nykh uravneniy, voznikayushchikh v teplofizike i akustike" [Spectral analysis and correct solvability of abstract integrodifferential equations arising in thermophysics and acoustics], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2011, **39**, 36–65 (in Russian).

12. V. V. Zhikov, "Ob odnom rasshirenii i primenenii metoda dvukhmasshtabnoy skhodimosti" [On one extension and application of the method of two-scale convergence], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2000, **191**, No. 7, 31–72 (in Russian).
13. A. A. Il'yushin and B. E. Pobedrya, *Osnovy matematicheskoy teorii termovyazkouprugosti* [Foundations of Mathematical Theory of Viscoelasticity], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
14. J. L. Lions and E. Magenes, *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya* [Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications], Mir, Moscow, 1971 (Russian translation).
15. A. V. Lykov, *Problema teplo- i massoobmena* [Problem of Heat and Mass Transfer], Nauka i tekhnika, Minsk, 1976 (in Russian).
16. V. V. Palin and E. V. Radkevich, "Zakony sokhraneniya i ikh giperbolicheskie regulyarizatsii" [Conservation laws and their hyperbolic regularizations], *Sovrem. probl. mat. i mekh.* [Contemp. Probl. Math. Mech.], 2009, **5**, No. 1, 88–115 (in Russian).
17. Yu. N. Rabotnov, *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel* [Elements of Hereditary Mechanics of Solid Bodies], Nauka, Moscow, 1977 (in Russian).
18. E. Sanchez-Palencia, *Neodnorodnye sredy i teoriya kolebaniy* [Non-Homogeneous Media and Vibration Theory], Mir, Moscow, 1984 (Russian translation).
19. A. S. Shamaev and V. V. Shumilova, "Usrednenie uravneniy akustiki dlya vyazkouprugogo materiala s kanalami, zapolnennymi vyazkoy szhimaemoy zhidkost'yu" [Averaging of the acoustics equations for viscoelastic media with channels filled with viscous compressible fluid], *Izv. RAN. Mekh. zhid. i gaza* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Mech. Fluid Gas], 2011, No. 2, 92–103 (in Russian).
20. W. Desch and R. K. Miller, "Exponential stabilization of Volterra integrodifferential equations in Hilbert space," *J. Differ. Equ.*, 1987, **70**, 366–389.
21. G. Di Blasio, "Parabolic Volterra equations of convolution type," *J. Integral Equ. Appl.*, 1994, **6**, 479–508.
22. G. Di Blasio, K. Kunisch, and E. Sinestari, "L^2-regularity for parabolic partial integrodifferential equations with delays in the highest order derivatives," *J. Math. Anal. Appl.*, 1984, **102**, 38–57.
23. G. Di Blasio, K. Kunisch, and E. Sinestari, "Stability for abstract linear functional differential equations," *Izrael. J. Math.*, 1985, **50**, No. 3, 231–263.
24. A. Eremenko and S. Ivanov, "Spectra of the Gurtin—Pipkin type equations," *J. SIAM Math. Anal.*, 2011, **43**, No. 5, 2296–2306.
25. M. E. Gurtin and A. C. Pipkin, "Theory of heat conduction with finite wave speed," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1968, **31**, 113–126.
26. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. 2. Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids*, Basel—Boston, Berlin, 2003.
27. K. Kunisch and M. Mastinsek, "Dual semigroups and structual operators for partial differential equations with unbounded operators acting on the delays," *Differ. Integral Equ.*, 1990, **3**, No. 4, 733–756.
28. D. A. Medvedev, V. V. Vlasov, and J. Wu, "Solvability and structural properties of abstract neutral functional differential equations," *Funct. Differ. Equ.*, 2008, **66**, No. 3-4, 249–272.
29. R. K. Miller, "Volterra integral equation in Banach space," *Funkcialaj Ekvac.*, 1975, **18**, 163–194.
30. R. K. Miller, "An integrodifferential equation for rigid heat conductors with memory," *J. Math. Anal. Appl.*, 1978, **66**, 313–332.
31. R. K. Miller and R. L. Wheeler, "Well-posedness and stability of linear Volterra interodifferential equations in abstract spaces," *Funkcialaj Ekvac.*, 1978, **21**, 279–305.
32. L. Pandolfi, "The controllability of the Gurtin—Pipkin equations: a cosine operator approach," *Appl. Math. Optim.*, 2005, **52**, 143–165.
33. V. V. Vlasov and J. Wu, "Solvability and spectral analysis of abstract hyperbolic equations with delay," *J. Funct. Differ. Equ.* , 2009, **16**, No. 4, 751–768.
34. J. Wu, *Theory and applications of partial functional differential equations*, Springer, New York, 1996.

V. V. Vlasov
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: `vicvvlasov@rambler.ru`

N. A. Rautian
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: `nrautian@mail.ru`