Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 1 (2018). С. 20–36

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-20-36 УДК 517.956.4

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ И ГРАНИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

© 2018 г. **Е. А. БАДЕРКО, М. Ф. ЧЕРЕПОВА**

Аннотация. Рассмотрена смешанная задача для одномерной (по пространственной переменной) параболической системы второго порядка с Дини-непрерывными коэффициентами в области с негладкими боковыми границами. Методом граничных интегральных уравнений построено классическое решение этой задачи. Исследована гладкость решения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Теория решения краевых задач в областях с негладкими боковыми границами для параболических уравнений в пространствах Гельдера построена в работах [3–9, 19, 21, 28, 29, 31–33, 35]. Для параболических систем второго порядка с одной пространственной переменной x краевые задачи в криволинейных областях с негладкими боковыми границами в пространствах Гельдера рассматривались в работах [10–12, 14, 23, 25]. Естественно возникает вопрос о разрешимости параболических краевых задач, данные которых принадлежат топологически более слабым пространствам Дини—Гельдера. В работах [2, 20] установлена разрешимость (в классическом смысле) и исследована гладкость решения ряда краевых задач для одномерного (по x) параболического уравнения второго порядка с коэффициентами из класса Дини в криволинейных областях с негладкими границами, удовлетворяющими условию Дини—Гельдера. В [17] решена вторая краевая задача в классе Дини для одномерной (по x) параболической системы второго порядка в полуограниченной области с негладкой боковой границей. В [13] получена классическая разрешимость задачи Дирихле для одномерной (по x) параболической системы с Дини-непрерывными коэффициентами в полуограниченной области с негладкой границей из класса Дини—Гельдера.

В настоящей работе рассматривается смешанная начально-краевая задача для одномерной (по x) параболической системы второго порядка с Дини-непрерывными коэффициентами. На одной границе области задано граничное условие первого рода, а на другой — граничное условие второго рода. Методом граничных интегральных уравнений, разработанным в [10, 12] для параболических систем второго порядка с одной пространственной переменной, строится классическое решение поставленной задачи для таких систем в криволинейной области Ω с негладкими боковыми границами из класса Дини—Гельдера. При этом от правой части граничного условия первого рода требуется лишь, чтобы у нее существовала непрерывная производная порядка $1/2$, а от правой части граничного условия второго рода требуется только непрерывность. Доказывается, что найденное решение принадлежит пространству $\underset{0}{C}^{1,1/2}[0,T]$ функций, непрерывных вместе с производной по пространственной переменной и дробной производной порядка $1/2$ по «временной» переменной t в

Работа второго автора выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-11-00306).

замыкании области (определение пространства см. ниже в разделе 2). В силу ослабления условия на граничные функции предлагаемый результат является новым и в случае одного уравнения.

В работе получены также оценки для старших производных решения, характеризующие возможный рост к бесконечности этих производных вблизи боковых границ области.

Статья состоит из 5 разделов. В разделе 1 ставится краевая задача и приводятся необходимые сведения о фундаментальной матрице решений параболической системы. В разделе 2 определяются функциональные пространства и формулируется основная теорема существования решения и его гладкости. В разделе 3 устанавливается разрешимость системы граничных интегральных уравнений, к которой редуцируется исходная задача. В разделе 4 доказывается основная теорема. В разделе 5 доказываются оценки для старших производных решения.

1. Краевая задача; фундаментальная матрица решений

В полосе $D = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T)\}$, где $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $0 < T < +\infty$, рассматривается равномерно параболический по Петровскому (см. [22]) матричный оператор

$$Lu = \partial_t u - \sum_{k=0}^{2} A^{(k)}(x,t)\partial_x^k u, \quad u = (u_1, \ldots, u_m),\ m \geqslant 1,$$

где $A^{(k)} = \left\| a_{ij}^{(k)} \right\|_{i,j=1}^{m}$ — матрицы размерности $m \times m$, элементы которых суть вещественные функции, определенные в $\overline{D}$ и удовлетворяющие условиям:

a) собственные числа μ_r матрицы $A^{(2)}$ подчиняются неравенству $\operatorname{Re}\mu_r(x,t) \geqslant \delta$ для некоторого $\delta > 0$ и всех $(x,t) \in \overline{D}, r = \overline{1,m}$;

b) функции $a_{ij}^{(k)}$, $i,j = \overline{1,m}$, $k = 0,1,2$, ограничены в $\overline{D}$;

c) $\left| a_{ij}^{(k)}(x+\Delta x, t+\Delta t) - a_{ij}^{(k)}(x,t) \right| \leqslant \omega_0(|\Delta x| + |\Delta t|^{1/2})$, $i,j = \overline{1,m}$, $k = 0,1,2$,

где ω_0 — модуль непрерывности такой, что $\widetilde{\widetilde{\omega}}_0 = \int\limits_0^z y^{-1}dy \int\limits_0^y \omega_0(\xi)\xi^{-1}d\xi < +\infty$, $z > 0$, и для некоторого $\varepsilon_0 \in (0,1)$ функция $\omega_0(z)z^{-\varepsilon_0}$, $z > 0$, почти убывает.

Функция $\nu(z)$ называется *почти убывающей*, если для некоторой постоянной $C > 0$ выполняется неравенство $\nu(z_1) \leqslant C\nu(z_2)$ при $z_1 \geqslant z_2$. Следуя [15, с. 150-151], *модулем непрерывности* называем непрерывную, неубывающую, полуаддитивную на $[0,+\infty)$ функцию ω такую, что $\omega(0) = 0$. Говорим, что модуль непрерывности ω удовлетворяет *условию Дини*, если

$$\widetilde{\omega}(z) = \int\limits_0^z \omega(\xi)\xi^{-1}d\xi < +\infty, \quad z > 0. \tag{1.1}$$

Отметим некоторые известные свойства модуля непрерывности ω, которые понадобятся нам в дальнейшем. Имеет место оценка (см. [15, с. 152]) $\omega(\lambda z) \leqslant (\lambda+1)\omega(z)$, $\lambda \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. Функция $\omega(z)/z$, $z > 0$, почти убывает, а именно, $\dfrac{\omega(z_1)}{z_1} \leqslant 2\dfrac{\omega(z_2)}{z_2}$, $z_1 \geqslant z_2 > 0$. Отсюда, в частности, следует, что если $0 < z \leqslant z_0$, то $z \leqslant C(z_0)\omega(z)$, где $C(z_0) = 2z_0/\omega(z_0)$.

Далее, если модуль непрерывности ω удовлетворяет условию Дини (1.1), то $\widetilde{\omega}$ — также модуль непрерывности, причем $\omega(z) \leqslant 2\widetilde{\omega}(z)$, $z \geqslant 0$.

Если ω — модуль непрерывности, то функция $\omega^*(z) = \omega\left(z^{1/2}\right)$ также является модулем непрерывности. При этом, если ω удовлетворяет условию Дини, то ω^* также удовлетворяет условию Дини и имеет место равенство $\widetilde{\omega^*}(z) = 2\widetilde{\omega}(z^{1/2})$, $z \geqslant 0$.

Наконец, справедлива оценка (см. [18]) $\omega(|x|)\exp\{-|x|^2/t\} \leqslant C\omega(t^{1/2})\exp\{-c|x|^2/t\}$ для некоторых $C, c > 0$ и всех $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$.

В полосе D рассматриваем область $\Omega = \{(x,t) \in D : g_1(t) < x < g_2(t)\}$ с негладкими боковыми границами $\Sigma_k = \{(x,t) \in \overline{D} : x = g_k(t)\}, k = 1,2$. Предполагаем, что функции $g_k, k = 1,2,$

удовлетворяют условиям:

$$g_1(t) < g_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.2}$$

$$|g_k(t+\Delta t) - g_k(t)| \leqslant C|\Delta t|^{1/2}\omega_1(|\Delta t|^{1/2}), \quad t, t+\Delta t \in [0,T], \quad k=1,2, \tag{1.3}$$

где ω_1 — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини (1.1), и для некоторого $\varepsilon_1 \in (0,1)$ функция $\omega_1(z)z^{-\varepsilon_1}$, $z>0$, почти убывает.

В области Ω ставится задача отыскания классического решения системы

$$Lu = 0 \text{ в } \Omega, \tag{1.4}$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,0) = 0, \quad g_1(0) \leqslant x \leqslant g_2(0), \tag{1.5}$$

и граничным условиям

$$u(g_1(t),t) = \psi_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.6}$$

$$\partial_x u(g_2(t),t) = \psi_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1.7}$$

Известно (см. [16]) что при условиях a)–c) существует фундаментальная матрица решений системы $Lu=0$, причем она имеет вид

$$\Gamma(x,t,\xi,\tau) = Z\left(x-\xi, t-\tau; A^{(2)}(\xi,\tau)\right) + W(x,t;\xi,\tau), \quad (x,t;\xi,\tau) \in \overline{D}\times\overline{D}, \quad t>\tau, \tag{1.8}$$

где $Z\left(x-\xi,t-\tau;A^{(2)}(\xi,\tau)\right)$ — фундаментальная матрица решений системы $\partial_t u - A^{(2)}(\xi,\tau)\partial_x^2 u = 0$ с «замороженными» в точке (ξ,τ) коэффициентами,

$$W(x,t;\xi,\tau) = \int\limits_\tau^t d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Z\left(x-y, t-\eta; A^{(2)}(y,\eta)\right)\mu(y,\eta;\xi,\tau)dy. \tag{1.9}$$

Вектор-плотность μ в (1.9) находится из условия, чтобы столбцы матрицы $\Gamma(x,t,\xi,\tau)$ удовлетворяли по переменным (x,t) системе $Lu=0$ в слое $\{\tau<t<T\}$. Матрица Z из (1.8) имеет вид (см. [27, с. 297], [1, с. 133])

$$Z\left(x,t;A^{(2)}(\xi,\tau)\right) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma x}\exp\left\{-\sigma^2 A^{(2)}(\xi,\tau)t\right\}d\sigma, \quad t>0. \tag{1.10}$$

Имеют место оценки (см. [16], [27, с. 298], [34, с. 67]):

$$|\partial_t^k\partial_x^l\Gamma(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C(t-\tau)^{-(2k+l+1)/2}\exp\left\{-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right\}, \tag{1.11}$$

$$|\partial_t^k\partial_x^l W(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C\widetilde{\omega}_0\left((t-\tau)^{1/2}\right)(t-\tau)^{-(2k+l+1)/2}\exp\left\{-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right\}, \tag{1.12}$$

$$2k+l \leqslant 2, \quad x,\xi\in\mathbb{R}, \quad 0\leqslant\tau<t\leqslant T;$$

$$|\partial_t^k\partial_x^l Z(x,t;A^{(2)}(\xi,\tau))| \leqslant C(k,l)t^{-(2k+l+1)/2}\exp\left\{-c\frac{x^2}{t}\right\}, \tag{1.13}$$

$$|\Delta_{\xi,\tau}\partial_t^k\partial_x^l Z(x,t;A^{(2)}(\xi,\tau))| \leqslant C(k,l)\omega_0(|\Delta\xi|+|\Delta\tau|^{1/2})t^{-(2k+l+1)/2}\exp\left\{-c\frac{x^2}{t}\right\}, \tag{1.14}$$

$$k,l\geqslant 0, \quad x,\xi,\xi+\Delta\xi\in\mathbb{R}, \quad 0\leqslant\tau<\tau+\Delta\tau\leqslant T, \quad 0<t\leqslant T;$$

$$|\Delta_t\partial_x^l W(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C(\Delta t)^{1-l/2}\widetilde{\omega}_0\left((t-\tau)^{1/2}\right)(t-\tau)^{-3/2}\exp\left\{-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right\}, \tag{1.15}$$

$$l=0,1, \quad x,\xi\in\mathbb{R}, \quad 0\leqslant\tau<t<t+\Delta t\leqslant T, \quad \Delta t\leqslant t-\tau.$$

Здесь и далее через C,c обозначаем положительные постоянные, зависящие от δ, T, кривых Σ_1,Σ_2 и коэффициентов оператора L.

Решение задачи (1.4)–(1.7) будем искать в виде суммы векторных параболических потенциалов простого слоя

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{2} U_k\varphi_k(x,t) \equiv \sum_{k=1}^{2} \int_0^t \Gamma(x,t;g_k(\tau),\tau)\varphi_k(\tau)d\tau, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}, \tag{1.16}$$

где Γ — матрица (1.8), непрерывные на $[0,T]$ вектор-функции $\varphi_k = (\varphi_{k1},\dots,\varphi_{km}), k = 1,2$, подлежат определению. Вектор-функция (1.16) является классическим решением уравнения (1.4) в $D\backslash(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ и удовлетворяет начальному условию (1.5). Подставляя (1.16) в граничные условия (1.6), (1.7) и используя теорему о скачке пространственной производной потенциала простого слоя (см. [16, 24]), получаем систему граничных интегральных уравнений Вольтерры

$$\sum_{k=1}^{2} \int_0^t \Gamma(g_1(t),t;g_k(\tau),\tau)\varphi_k(\tau)d\tau = \psi_1(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.17}$$

$$\frac{1}{2}\left(A^{(2)}\right)^{-1}(g_2(t),t)\varphi_2(t) + \sum_{k=1}^{2} \int_0^t \partial_x\Gamma(g_2(t),t;g_k(\tau),\tau)\varphi_k(\tau)d\tau = \psi_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.18}$$

для отыскания неизвестных плотностей φ_1, φ_2.

2. Формулировка основного результата

Будем использовать следующие функциональные пространства: $C[0,T]$ — пространство непрерывных вектор-функций $\psi : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ с нормой $||\psi;[0,T]||^0 = \max\limits_{[0,T]}|\psi|$ и $\underset{0}{C}[0,T] = \{\psi \in C[0,T] : \psi(0) = 0\}$. Здесь и далее для любого вектора b (или матрицы A) под $|b|$ (соответственно, $|A|$) понимаем максимум из модулей компонент b (элементов A).

Пусть

$$\partial^{1/2}\psi(t) \equiv (\partial_t^{1/2}\psi)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-\tau)^{-1/2}\psi(\tau)d\tau, \quad t \in [0,T],$$

— оператор дробного дифференцирования порядка 1/2. Через $C^{1/2}[0,T]$ обозначим (см. [10, 12]) пространство вектор-функций $\psi \in C[0,T]$, для которых существует $\partial^{1/2}\psi \in C[0,T]$; при этом, $||\psi;[0,T]||^{1/2} = \max\limits_{[0,T]}|\psi| + \max\limits_{[0,T]}|\partial^{1/2}\psi|$. Через $\underset{0}{C}{}^{1/2}[0,T]$ обозначим пространство вектор-функций $\psi \in C^{1/2}[0,T]$, для которых $\psi(0) = 0$ и $\partial^{1/2}\psi(0) = 0$.

Пусть ω — модуль непрерывности. Через $\underset{0}{H}{}^{1/2+\omega}[0,T]$ обозначим пространство вектор-функций $\psi \in \underset{0}{C}[0,T]$, для которых

$$|\psi;[0,T]|^{1/2+\omega} = ||\psi;[0,T]||^0 + \sup_{(0,T)}\left\{\frac{\psi(t+\Delta t)-\psi(t)}{|\Delta t|^{1/2}\omega(|\Delta t|^{1/2})}\right\} < \infty.$$

Замечание 2.1. Если $\psi \in \underset{0}{H}{}^{1/2+\omega}[0,T]$, где ω — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини (1.1), то $\psi \in \underset{0}{C}{}^{1/2}[0,T]$ (см. [2, 18]). Обратное, вообще говоря, неверно (см. [12]).

Пусть модуль непрерывности ω удовлетворяет условию:

$$\textit{для некоторого } \varepsilon \in (0,1) \textit{ функция } \omega(z)z^{-\varepsilon},\ z > 0, \textit{ почти убывает.} \tag{2.1}$$

Через $H^\omega[0,T]$ обозначим пространство вектор-функций $\psi \in C[0,T]$, для которых

$$|\psi;[0,T]|^{\omega} = ||\psi;[0,T]||^0 + \sup_{(0,T)}\left\{\frac{\psi(t+\Delta t)-\psi(t)}{\omega(|\Delta t|^{1/2})}\right\} < \infty,$$

и $\underset{0}{H}{}^\omega[0,T] = \{\psi \in H^\omega[0,T] : \psi(0) = 0\}$.

Замечание 2.2. Для любой непрерывной на $[0,T]$ (вектор-)функции ψ существует модуль непрерывности ω, удовлетворяющий условию (2.1) и такой, что $|\psi;[0,T]|^{\omega}<\infty$. Другими словами, пространства $H^{\omega}[0,T]$ и $C[0,T]$ отличаются только нормами.

Действительно, если $\psi\equiv\mathrm{const}$ на $[0,T]$, утверждение очевидно. Пусть $\psi\not\equiv\mathrm{const}$ на $[0,T]$ и ω_ψ — модуль непрерывности (вектор-)функции ψ, т. е. $\omega_\psi(z)=\sup\limits_{t,t+\Delta t\in[0,T],|\Delta t|\leqslant z}|\psi(t+\Delta t)-\psi(t)|$, $z\in[0,T]$. Тогда (см. [15, с. 150]) $\omega_\psi(0)=0$ и ω_ψ непрерывна, не убывает и полуаддитивна на $[0,T]$. Кроме того, $\dfrac{\omega_\psi(z_1)}{z_1}\leqslant 2\dfrac{\omega_\psi(z_2)}{z_2}, z_1\geqslant z_2>0$.

Пусть $\alpha\in(0,1)$. Полагаем $\omega(z)=\omega_\psi^\alpha(z)$, если $0\leqslant z\leqslant T$, и $\omega(z)=\omega_\psi^\alpha(T)$, если $T<z<+\infty$. Очевидно, что ω непрерывна и не убывает на $[0,T]$ и $\omega(0)=0$. Покажем, что ω полуаддитивна.

Сначала заметим, что для любых $p,q>0$ и $0<\alpha<1$ выполнено неравенство

$$(p+q)^\alpha\leqslant p^\alpha+q^\alpha. \tag{2.2}$$

Действительно, для любых $p_1,q_1\geqslant 0$ и $r>1$ имеем $(p_1+q_1)^r=(p_1+q_1)^{r-1}p_1+(p_1+q_1)^{r-1}q_1\geqslant p_1^r+q_1^r$. Следовательно, полагая $p_1=p^\alpha, q_1=q^\alpha, r=1/\alpha$, при $\alpha\in(0,1)$ получим $(p^\alpha+q^\alpha)^{1/\alpha}\geqslant p+q$, откуда и вытекает неравенство (2.2).

Используя (2.2), находим

$$\omega(z_1+z_2)\equiv[\omega_\psi(z_1+z_2)]^\alpha\leqslant[\omega_\psi(z_1)+\omega_\psi(z_2)]^\alpha\leqslant\omega_\psi^\alpha(z_1)+\omega_\psi^\alpha(z_2)\equiv\omega(z_1)+\omega(z_2),$$

т. е. ω полуаддитивна.

Далее, пусть $\alpha<\varepsilon<1$. Тогда для $z_1\geqslant z_2>0$ имеем:

$$\frac{\omega(z_1)}{z_1^\varepsilon}=\frac{1}{\omega_\psi^{\varepsilon-\alpha}(z_1)}\cdot\left[\frac{\omega_\psi(z_1)}{z_1}\right]^\varepsilon\leqslant\frac{1}{\omega_\psi^{\varepsilon-\alpha}(z_2)}\cdot\left[2\frac{\omega_\psi(z_2)}{z_2}\right]^\varepsilon=2^\varepsilon\frac{\omega_\psi^\alpha(z_2)}{z_2^\varepsilon}\equiv C(\varepsilon)\frac{\omega(z_2)}{z_2^\varepsilon}.$$

Следовательно, ω удовлетворяет условию (2.1).

Наконец, так как $|\Delta t|\leqslant c|\Delta t|^{1/2}$, где $c=\max(1,T^{1/2})$, то

$$\begin{aligned}|\psi(t+\Delta t)-\psi(t)|\leqslant\omega_\psi(|\Delta t|)\leqslant\omega_\psi(c|\Delta t|^{1/2})\leqslant C\omega_\psi(|\Delta t|^{1/2})=\\=C\omega_\psi^\alpha(|\Delta t|^{1/2})\omega_\psi^{1-\alpha}(|\Delta t|^{1/2})\leqslant C_1\omega_\psi^\alpha(|\Delta t|^{1/2})\equiv C_1\omega(|\Delta t|^{1/2}),\end{aligned}$$

где $C_1=C\omega_\psi^{1-\alpha}\left(T^{1/2}\right)$. Следовательно, $|\psi;[0,T]|^\omega<+\infty$.

Не ограничивая общности, далее везде предполагаем, что ω удовлетворяет условию (2.1).

Через $C^{1/2,\omega}[0,T]$ обозначим пространство вектор-функций $\psi\in C^{1/2}[0,T]$, для которых $\partial^{1/2}\psi\in H^\omega[0,T]$; при этом $||\psi;[0,T]||^{1/2,\omega}=||\psi;[0,T]||^0+|\partial^{1/2}\psi;[0,T]|^\omega$. Через $\underset{0}{C}{}^{1/2,\omega}[0,T]$ обозначим пространство вектор-функций $\psi\in C^{1/2,\omega}[0,T]$, для которых $\psi(0)=0$ и $\partial^{1/2}\psi(0)=0$.

Замечание 2.3. Если $\psi\in C^{1/2}[0,T]$, то $\psi\in C^{1/2,\omega}[0,T]$ для некоторого модуля непрерывности ω, удовлетворяющего условию (2.1) (см. замечание 2.2).

Через $\underset{0}{C}(\overline{\Omega})$ обозначим пространство вектор-функций $u:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^m$, непрерывных в $\overline{\Omega}$, для которых $u(x,0)=0$. Через $\underset{0}{C}{}^{1,1/2}(\overline{\Omega})$ обозначим (см. [10,12]) пространство вектор-функций $u\in\underset{0}{C}(\overline{\Omega})$, для которых существуют $\partial_x u,\partial_t^{1/2}u\in\underset{0}{C}(\overline{\Omega})$; при этом $||u;\Omega||^{1,1/2}=\sum\limits_{l\leqslant 1}\sup\limits_{\Omega}|\partial_x^l u|+\sup\limits_{\Omega}|\partial_t^{1/2}u|$. Под значениями (вектор-)функций и их производных на границе области Ω понимаем их предельные значения «изнутри» Ω.

Теорема 2.1. *Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям a)–c), а функции $g_k, k=1,2$, задающие кривые, удовлетворяют Σ_k-условиям* (1.2), (1.3). *Тогда для любых вектор-функций $\psi_1\in\underset{0}{C}{}^{1/2}[0,T]$ и $\psi_2\in\underset{0}{C}[0,T]$ справедливы следующие утверждения*:

1) *классическим решением задачи* (1.4)–(1.7) *является сумма потенциалов простого слоя* (1.16)*, где $\{\varphi_k\in\underset{0}{C}[0,T], k=1,2\}$ — единственное решение системы интегральных уравнений* (1.17)*,* (1.18);

2) *это решение принадлежит пространству* $\underset{0}{C}^{1,1/2}(\overline{\Omega})$ *и выполнена оценка*

$$||u;\Omega||^{1,1/2} \leqslant C\left(||\psi_1;[0,T]||^{1/2} + ||\psi_2;[0,T]||^0\right). \tag{2.3}$$

Замечание 2.4. Утверждение теоремы 2.1 является новым и в случае одного уравнения ($m=1$).

Замечание 2.5. Краевая задача для системы с ненулевой правой частью и ненулевым начальным условием сводится к задаче (1.4)–(1.7) с помощью плоского параболического потенциала и потенциала Пуассона (см. [34, с. 59, 104]).

3. Система граничных интегральных уравнений

В этом разделе исследуется система граничных интегральных уравнений Вольтерры (1.17), (1.18). Обозначим $\bar{A}_k(\tau) = A^{(2)}(g_k(\tau),\tau), k=1,2$. Используя представление (1.8)) для матрицы Γ, положим $\Gamma(g_1(t),t;\ g_1(\tau),\tau) = Z\left(0,t-\tau;\bar{A}_1(\tau)\right) + N_{11}(t,\tau)$, где $N_{11}(t,\tau) = [Z(g_1(t)-g_1(\tau),t-\tau;\bar{A}_1(\tau)) - Z(0,t-\tau;\bar{A}_1(\tau))] + W(g_1(t),t;g_1(\tau),\tau)$.

Обозначим $N_{12}(t,\tau) = \Gamma(g_1(t),t;g_2(\tau),\tau)$, $N_{2k}(t,\tau) = \partial_x\Gamma(g_2(t),t;g_k(\tau),\tau)$, $k=1,2$. Тогда систему (1.17), (1.18) можно записать в виде

$$\int\limits_0^t Z\left(0,t-\tau;\bar{A}_1(\tau)\right)\varphi_1(\tau)d\tau + \sum_{k=1}^2\int\limits_0^t N_{1k}(t,\tau)\varphi_k(\tau)d\tau = \psi_1(t), \quad t\in[0,T], \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{2}\bar{A}_2^{-1}(t)\varphi_2(t) + \sum_{k=1}^2\int\limits_0^t N_{2k}(t,\tau)\varphi_k(\tau)d\tau = \psi_2(t), \quad t\in[0,T]. \tag{3.2}$$

Пусть

$$M(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-y^2\bar{A}_1(\tau)\}dy \tag{3.3}$$

и $I^{1/2}\varphi(t) \equiv (I^{1/2}\varphi)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t(t-\tau)^{-1/2}\varphi(\tau)d\tau$ — оператор дробного интегрирования порядка 1/2. Так как (см. (1.10))

$$Z\left(0,t-\tau;\bar{A}_1(\tau)\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}M(\tau), \tag{3.4}$$

уравнение (3.1) примет вид $\frac{1}{2}I^{1/2}(M\varphi_1)(t) + \sum\limits_{k=1}^2\int\limits_0^t N_{1k}(t,\tau)\varphi_k(\tau)d\tau = \psi_1(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$.

Обозначим $\mathcal{H}_{sk}\varphi(t) = \int\limits_0^t N_{sk}(t,\tau)\varphi_k(\tau)d\tau, s,k=1,2, t\in[0,T]$, и перепишем систему (3.1), (3.2) в операторном виде

$$\frac{1}{2}I^{1/2}(M\varphi_1) + \sum_{k=1}^2\mathcal{H}_{1k}\varphi_k = \psi_1, \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{2}\bar{A}_2^{-1}\varphi_2 + \sum_{k=1}^2\mathcal{H}_{2k}\varphi_k = \psi_2. \tag{3.6}$$

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Тогда операторы* $\mathcal{H}_{1k}\varphi, k=1,2,$ *суть ограниченные операторы из* $C[0,T]$ *в* $\underset{0}{H}^{1/2+\omega}[0,T]$, $\omega = \widetilde{\omega}_0+\omega_1$.

Доказательство. Достаточно доказать оценки

$$|\mathcal{H}_{1k}\varphi(t)| \leqslant C||\varphi||^0 t^{1/2}\left[\widetilde{\omega}_0\left(t^{1/2}\right) + \omega_1\left(t^{1/2}\right)\right], \tag{3.7}$$

$$|\Delta_t\mathcal{H}_{1k}\varphi(t)| \leqslant C||\varphi||^0(\Delta t)^{1/2}\left[\widetilde{\omega}_0\left((\Delta t)^{1/2}\right) + \omega_1\left((\Delta t)^{1/2}\right)\right], \tag{3.8}$$

$$t, t+\Delta t\in[0,T], \quad \Delta t>0, \quad k=1,2, \quad ||\varphi||^0 = ||\varphi;[0,T]||^0.$$

Заметим, что, в силу (1.2), (1.11) при $s \neq k$ справедлива оценка

$$\left|\partial_x^l \Gamma(g_s(t), t; g_k(\tau), \tau)\right| \leqslant C, l = 0, 1, 2, \tag{3.9}$$

поэтому

$$|N_{12}(t, \tau)| \leqslant C. \tag{3.10}$$

В силу (1.3), (1.13), получаем неравенство

$$\left|Z\left(g_1(t) - g_1(\tau), t - \tau; \bar{A}_1(\tau)\right) - Z\left(0, t - \tau; \bar{A}_1(\tau)\right)\right| \leqslant C(t - \tau)^{-1/2}\omega_1\left((t - \tau)^{1/2}\right),$$

которое вместе с (1.12) дает оценку

$$|N_{11}| \leqslant C(t - \tau)^{-1/2}\left[\widetilde{\omega}_0\left((t - \tau)^{1/2}\right) + \omega_1\left((t - \tau)^{1/2}\right)\right]. \tag{3.11}$$

Из (3.10), (3.11) вытекает требуемая оценка (3.7):

$$|\mathcal{H}_{1k}\varphi(t)| \leqslant C||\varphi||^0 \int\limits_0^t \left\{1 + (t - \tau)^{-1/2}\left[\widetilde{\omega}_0\left((t - \tau)^{1/2}\right) + \omega_1\left((t - \tau)^{1/2}\right)\right]\right\} d\tau \leqslant$$
$$\leqslant C||\varphi||^0 t^{1/2}\left[\widetilde{\omega}_0\left(t^{1/2}\right) + \omega_1\left(t^{1/2}\right)\right], \quad k = 1, 2.$$

Неравенство (3.8) (в силу (3.7)) достаточно доказать в случае $0 < \Delta t < t$. Положим

$$\Delta_t \mathcal{H}_{sk}\varphi(t) = \sum_{i=0}^{1}(-1)^{i+1}\int\limits_{t-\Delta t}^{t+i\Delta t} N_{sk}(t + i\Delta t, \tau)\varphi(\tau)d\tau +$$
$$+ \int\limits_0^{t-\Delta t}[\Delta_t N_{sk}(t, \tau)]\varphi(\tau)d\tau = R^1_{sk} - R^0_{sk} + R^2_{sk}, \quad s, k = 1, 2. \tag{3.12}$$

Из (3.10), (3.11) получаем оценку для R^i_{1k} при $i = 0, 1$ и $k = 1, 2$:

$$\left|R^i_{1k}\right| \leqslant C||\varphi||^0 \int\limits_{t-\Delta t}^{t+i\Delta t}\{1 + (t + i\Delta t - \tau)^{-1/2}[\widetilde{\omega}_0\left((t + i\Delta t - \tau)^{1/2}\right) +$$
$$+ \omega_1\left((t + i\Delta t - \tau)^{1/2}\right)]\}d\tau \leqslant C||\varphi||^0(\Delta t)^{1/2}\left[\widetilde{\omega}_0\left((\Delta t)^{1/2}\right) + \omega_1\left((\Delta t)^{1/2}\right)\right].$$

Рассмотрим $R^2_{1k}, k = 1, 2$. Используя теорему о среднем и (1.3), (1.13), имеем

$$\left|\Delta_t\left[Z\left(g_1(t) - g_1(\tau), t - \tau; \bar{A}_1(\tau)\right) - Z\left(0, t - \tau; \bar{A}_1(\tau)\right)\right]\right| \leqslant$$
$$\leqslant C\omega_1\left((t - \tau)^{1/2}\right)[(\Delta t)^{1/2}\omega_1\left((\Delta t)^{1/2}\right)(t - \tau)^{-1} + (\Delta t)(t - \tau)^{-3/2}].$$

Отсюда и из (1.15), следует, что

$$|\Delta N_{11}(t, \tau)| \leqslant C\{(\Delta t)^{1/2}\omega_1\left((\Delta t)^{1/2}\right)(t - \tau)^{-1}\omega_1\left((t - \tau)^{1/2}\right) +$$
$$+ (\Delta t)(t - \tau)^{-3/2}\left[\widetilde{\omega}_0\left((t - \tau)^{1/2}\right) + \omega_1\left((t - \tau)^{1/2}\right)\right]\}. \tag{3.13}$$

В силу (1.2), (1.3), (1.11) справедливо неравенство

$$|\Delta N_{12}(t, \tau)| \leqslant C(\Delta t)^{1/2}\omega_1\left((\Delta t)^{1/2}\right). \tag{3.14}$$

Из (3.13), (3.14) и в силу свойств функций ω_0 и ω_1 находим

$$|R^2_{1k}| \leqslant C||\varphi||^0\{(\Delta t)^{1/2}\omega_1\left((\Delta t)^{1/2}\right)\int\limits_0^t[1+(t-\tau)^{-1}\omega_1\left((t-\tau)^{1/2}\right)]d\tau+$$

$$+(\Delta t)^{1-\varepsilon_0/2}\widetilde{\omega}_0\left((\Delta t)^{1/2}\right)\int\limits_0^{t-\Delta t}(t-\tau)^{-(3-\varepsilon_0)/2}d\tau+(\Delta t)^{1-\varepsilon_1/2}\omega_1\left((\Delta t)^{1/2}\right)\int\limits_0^{t-\Delta t}(t-\tau)^{-(3-\varepsilon_1)/2}d\tau\leqslant$$

$$\leqslant C||\varphi||^0(\Delta t)^{1/2}\left[\widetilde{\omega}_0\left((\Delta t)^{1/2}\right)+\omega_1\left((\Delta t)^{1/2}\right)\right].$$

Лемма доказана. □

Лемма 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Тогда операторы* $\mathcal{H}_{2k}\varphi, k=1,2,$ *суть ограниченные операторы из* $C[0,T]$ *в* $\underset{0}{H}^{\omega}[0,T], \omega=\widetilde{\widetilde{\omega}}_0+\widetilde{\omega}_1$.

Доказательство. Утверждение леммы будет следовать из оценок

$$|\mathcal{H}_{2k}\varphi(t)|\leqslant C||\varphi||^0\left[\widetilde{\widetilde{\omega}}_0\left(t^{1/2}\right)+\widetilde{\omega}_1\left(t^{1/2}\right)\right], \tag{3.15}$$

$$|\Delta_t\mathcal{H}_{2k}\varphi(t)|\leqslant C||\varphi||^0\left[\widetilde{\widetilde{\omega}}_0\left((\Delta t)^{1/2}\right)+\widetilde{\omega}_1\left((\Delta t)^{1/2}\right)\right], \tag{3.16}$$

$$t, t+\Delta t\in[0,T], \Delta t>0; k=1,2; ||\varphi||^0=||\varphi;[0,T]||^0.$$

Докажем оценку (3.15). Из неравенства (3.9) следует, что

$$|N_{21}(t,\tau)|\leqslant C. \tag{3.17}$$

В силу представления (1.8) имеем

$$N_{22}(t,\tau)=\partial_x Z\left(g_2(t)-g_2(\tau),t-\tau;\bar{A}_2(\tau)\right)+\partial_x W\left(g_2(t),t;g_2(\tau),\tau\right).$$

Поскольку

$$\partial_x Z\left(g_2(t)-g_2(\tau),t-\tau;\bar{A}_2(\tau)\right)=-\frac{g_2(t)-g_2(\tau)}{2(t-\tau)}(\bar{A}_2)^{-1}(\tau)Z\left(g_2(t)-g_2(\tau),t-\tau;\bar{A}_2(\tau)\right), \tag{3.18}$$

то в силу (1.3), (1.13) получим

$$\left|\partial_x Z\left(g_2(t)-g_2(\tau),t-\tau;\bar{A}_2(\tau)\right)\right|\leqslant C\omega_1\left((t-\tau)^{1/2}\right)(t-\tau)^{-1}.$$

Отсюда и из неравенства (1.12) имеем

$$|N_{22}(t,\tau)|\leqslant[\omega_1\left((t-\tau)^{1/2}\right)+\widetilde{\omega}_0\left((t-\tau)^{1/2}\right)](t-\tau)^{-1}. \tag{3.19}$$

Следовательно, в силу (3.17) и (3.19), находим

$$|\mathcal{H}_{2k}\varphi(t)|\leqslant C||\varphi||^0\int\limits_0^t\{[\omega_1\left((t-\tau)^{1/2}\right)+\widetilde{\omega}_0\left((t-\tau)^{1/2}\right)](t-\tau)^{-1}+1\}d\tau\leqslant$$

$$\leqslant C||\varphi||^0\left[\widetilde{\omega}_1\left(t^{1/2}\right)+\widetilde{\widetilde{\omega}}_0\left(t^{1/2}\right)\right], k=1,2.$$

Оценку (3.16) для операторов $\mathcal{H}_{2k}\varphi, k=1,2$, доказываем с помощью представления (3.12). При этом (в силу (3.15)) можно считать, что $0<\Delta t<t$. Из (3.17) и (3.19) получаем оценку (3.16) для R^i_{2k} при $i=0,1$ и $k=1,2$:

$$|R^i_{2k}|\leqslant C||\varphi||^0\int\limits_{t-\Delta t}^{t+i\Delta t}\{[\widetilde{\omega}_0\left((t+i\Delta t-\tau)^{1/2}\right)+\omega_1\left((t+i\Delta t-\tau)^{1/2}\right)](t+i\Delta t-\tau)^{-1}+1\}d\tau\leqslant$$

$$\leqslant C||\varphi||^0\left[\widetilde{\widetilde{\omega}}_0\left((\Delta t)^{1/2}\right)+\widetilde{\omega}_1\left((\Delta t)^{1/2}\right)\right].$$

Рассмотрим $R^2_{2k}, k=1,2$. Используя представление (3.18) и соотношения (1.3), (1.13), имеем

$$\left|\Delta_t\partial_x Z\left(g_2(t)-g_2(\tau), t-\tau; \bar{A}_2(\tau)\right)\right| \leqslant C[(\Delta t)^{1/2}\omega_1\left((\Delta t)^{1/2}\right)(t-\tau)^{-3/2}+(\Delta t)\omega_1\left((t-\tau)^{1/2}\right)(t-\tau)^{-2}].$$

Отсюда и из неравенства (1.15), с учетом свойств функций ω_0 и ω_1, находим

$$|R^2_{22}| \leqslant C||\varphi||^0\{(\Delta t)^{1/2}\omega_1\left((\Delta t)^{1/2}\right)\int\limits_0^{t-\Delta t}(t-\tau)^{-3/2}d\tau+$$

$$+(\Delta t)\frac{\omega_1\left((\Delta t)^{1/2}\right)}{(\Delta t)^{1/2}}\int\limits_0^{t-\Delta t}(t-\tau)^{-3/2}d\tau+(\Delta t)^{(1-\varepsilon_0)/2}\widetilde{\omega}_0\left((\Delta t)^{1/2}\right)\int\limits_0^{t-\Delta t}(t-\tau)^{-(3-\varepsilon_0)/2}d\tau\}\leqslant$$

$$\leqslant C||\varphi||^0[\omega_1\left((\Delta t)^{1/2}\right)+\widetilde{\omega}_0\left((\Delta t)^{1/2}\right)]\leqslant C||\varphi||^0\left[\widetilde{\widetilde{\omega}}_0\left((\Delta t)^{1/2}\right)+\widetilde{\omega}_1\left((\Delta t)^{1/2}\right)\right].$$

Наконец, из соотношений (1.2), (1.3), (1.13), (1.15) следует, что

$$|\Delta_t\partial_x\Gamma(g_2(t),t;g_1(\tau),\tau)|\leqslant C(\Delta t)^{1/2}[\widetilde{\omega}_0\left((t-\tau)^{1/2}\right)+\omega_1\left((\Delta t)^{1/2}\right)]\leqslant C(\Delta t)^{1/2},$$

поэтому, используя свойства модуля непрерывности, находим

$$|R^2_{21}|\leqslant C||\varphi||^0(\Delta t)^{1/2}\leqslant C||\varphi||^0\left[\widetilde{\widetilde{\omega}}_0\left((\Delta t)^{1/2}\right)+\widetilde{\omega}_1\left((\Delta t)^{1/2}\right)\right].$$

Лемма доказана. □

Лемма 3.3. *([2, 18]). Пусть ω — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини* (1.1). *Тогда оператор $\partial^{1/2}$ есть ограниченный оператор из $\underset{0}{H}^{1/2+\omega}[0,T]$ в $\underset{0}{H}^{\widetilde{\omega}}[0,T]$.*

Лемма 3.4. *Оператор вложения $J: H^\omega[0,T]\to C[0,T]$ компактен.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}\subset H^\omega[0,T]$ — ограниченное множество. Тогда существует постоянная $C>0$ такая, что $|\varphi;[0,T]|^\omega\leqslant C$ для любой $\varphi\in\mathcal{B}$, т. е., $|\varphi(t)|\leqslant C$ и $|\Delta_t\varphi(t)|\leqslant C|\Delta t|^\omega$ для любой $\varphi\in\mathcal{B}$ и любых $t, t+\Delta t\in[0,T]$. Поэтому множество $\mathcal{B}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Следовательно, по теореме Арцела—Асколи, множество $\mathcal{B}$ предкомпактно в $C[0,T]$, значит J — компактный оператор. Лемма доказана. □

Лемма 3.5. *Пусть $\varphi\in\underset{0}{H}^\omega[0,T]$. Если существует постоянная $C>0$ такая, что для любого $t_0\in(0,T]$ выполнено неравенство*

$$|\varphi;[0,t_0]|^\omega\leqslant C||\varphi;[0,t_0]||^0, \tag{3.20}$$

то $\varphi\equiv 0$ on $[0,T]$.

Доказательство. Для доказательства используем рассуждения из [12]. Фиксируем произвольное $t_0\in(0,T]$ и положим

$$\varphi^0(t)=\varphi(t),\ \text{если } 0\leqslant t\leqslant t_0,\ \text{и } \varphi^0(t)=\varphi(t_0),\ \text{если } t_0<t\leqslant T. \tag{3.21}$$

Из неравенства (3.20) следует, что

$$|\varphi^0;[0,t_0]|^\omega\leqslant C||\varphi^0;[0,t_0]||^0. \tag{3.22}$$

Так как $\varphi\in\underset{0}{H}^\omega[0,T]$, то в силу неравенства (3.22) находим

$$\sup_{(0,t_0)}|\varphi^0(t)|=\sup_{(0,t_0)}|\varphi(t)|=\sup_{(0,t_0)}\left\{\frac{|\varphi(t)-\varphi(0)|}{\omega\left(t^{1/2}\right)}\omega\left(t^{1/2}\right)\right\}\leqslant\omega\left((t_0)^{1/2}\right)|\varphi;[0,t_0]|^\omega=$$

$$=\omega\left((t_0)^{1/2}\right)|\varphi^0;[0,t_0]|^\omega\leqslant C\omega\left((t_0)^{1/2}\right)||\varphi_0;[0,t_0]||^0,$$

где C — постоянная из (3.20). Для достаточно малого t_0 выполнено $C\omega\left((t_0)^{1/2}\right)\leqslant 1/2$, следовательно, $\varphi^0\equiv\varphi\equiv 0$ на $[0,t_0]$.

Если $t_0 = T$, то лемма доказана. Если $t_0 < T$, то рассматриваем t_1 такое, что $t_1 = 2t_0$, если $2t_0 \leqslant T$, и $t_1 = T$, если $2t_0 > T$. Полагаем $\varphi^1(t) = \varphi(t)$, если $0 \leqslant t \leqslant t_1$ и $\varphi^1(t) = \varphi(t_1)$, если $t_1 < t \leqslant T$. Используя равенство $\varphi^1 \equiv 0$ на $[0, t_0]$, получим

$$\sup_{(0,t_1)} |\varphi^1(t)| = \sup_{(t_0,t_1)} |\varphi^1(t)| = \sup_{(t_0,t_1)} |\varphi(t)| = \sup_{(t_0,t_1)} \left\{ \frac{|\varphi(t) - \varphi(t_0)|}{\omega\left((t-t_0)^{1/2}\right)} \omega\left((t-t_0)^{1/2}\right) \right\} \leqslant$$
$$\leqslant \omega\left((t_0)^{1/2}\right) |\varphi; [0,t_1]|^\omega = \omega\left((t_0)^{1/2}\right) |\varphi^1; [0,t_1]|^\omega \leqslant C\omega\left((t_0)^{1/2}\right) ||\varphi^1; [0,t_1]||^0,$$

где C — постоянная из (3.20). Поскольку $C\omega\left((t_0)^{1/2}\right) \leqslant 1/2$, то $\varphi^1 \equiv \varphi \equiv 0$ на $[0, t_1]$.

Если $t_1 < T$, то, продолжая этот процесс, через конечное число шагов получаем утверждение леммы. □

Следуя А. Н. Тихонову [26], назовем оператор $K : C[0,T] \to C[0,T]$ *вольтерровым*, если для любого $t \in [0,T]$ из равенства $\varphi_1 = \varphi_2$ на $[0,t]$ следует, что $K\varphi_1 = K\varphi_2$ на $[0,t]$.

Лемма 3.6. *Пусть $K : C[0,T] \to \underset{0}{H}^\omega[0,T]$ — линейный ограниченный вольтерров оператор. Тогда уравнение $\varphi + K\varphi = 0$ имеет в $C[0,T]$ только решение $\varphi = 0$.*

Доказательство. Для доказательства используем рассуждения из [8, 12]. Пусть $\varphi \in C[0,T]$ — решение уравнения $\varphi + K\varphi = 0$. Тогда $\varphi = -K\varphi$, причем $K\varphi \in \underset{0}{H}^\omega[0,T]$. Следовательно, $\varphi \in \underset{0}{H}^\omega[0,T]$.

Фиксируем произвольное $t_0 \in (0,T]$. Поскольку $\varphi(t) = -(K\varphi^0)(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, где функция φ^0 определена в (3.21), то, в силу условия на K,

$$|\varphi; [0,t_0|^\omega = |K\varphi^0; [0,t_0]|^\omega \leqslant |K\varphi^0; [0,T]|^\omega \leqslant ||K|| \cdot ||\varphi^0; [0,T]||^0 = ||K|| \cdot ||\varphi; [0,t_0]||^0.$$

Тогда из леммы 3.5 следует, что $\varphi = 0$. Лемма доказана. □

Из лемм 3.4, 3.6 вытекает

Лемма 3.7. *Пусть $K : C[0,T] \to \underset{0}{H}^\omega[0,T]$ — линейный ограниченный вольтерров оператор. Тогда для любой вектор-функции $\psi \in C[0,T]$ уравнение $\varphi + K\varphi = \psi$ имеет единственное решение $\varphi \in C[0,T]$ и справедлива оценка $||\varphi; [0,T]||^0 \leqslant C||\psi; [0,T]||^0$ для некоторой постоянной $C > 0$.*

Замечание 3.1. Для матрицы M, заданной формулой (3.3), имеет место равенство

$$M^2(\tau) = \bar{A}_1^{-1}(\tau), \quad \tau \in [0,T]. \tag{3.23}$$

Действительно (см. [23]), обозначим $I = Z\left(0, t; \bar{A}_1(\tau)\right)$. Из (3.4) следует, что

$$I = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} M(\tau). \tag{3.24}$$

С другой стороны,

$$I^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\{-(x^2+y^2)\bar{A}_1(\tau)t\} dxdy = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{+\infty} \exp\{-r^2 \bar{A}_1(\tau)t\} rdr =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{\bar{A}_1^{-1}(\tau)}{2t} \exp\{-r^2 \bar{A}_1(\tau)t\} \right) dr =$$
$$= \frac{1}{2\pi} [-\lim_{r \to +\infty} \frac{\bar{A}_1^{-1}(\tau)}{2t} \exp\{-r^2 \bar{A}_1(\tau)t\} + \lim_{r \to 0} \frac{\bar{A}_1^{-1}(\tau)}{2t} \exp\{-r^2 \bar{A}_1(\tau)t\}] = \frac{1}{4\pi t} \bar{A}_1^{-1}(\tau).$$

Отсюда и из (3.24) получаем равенство (3.23).

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Тогда для любых вектор-функций* $\psi_1 \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$ *и* $\psi_2 \in \underset{0}{C}[0,T]$ *система* (1.17), (1.18) *имеет единственное решение* $\{\varphi_k \in \underset{0}{C}[0,T],\ k=1,2\}$ *и справедлива оценка*

$$||\varphi_k;[0,T]||^0 \leqslant C\left(||\psi_1;[0,T]||^{1/2} + ||\psi_2;[0,T]||^0\right), \quad k=1,2. \tag{3.25}$$

Доказательство. Как показано выше, система (1.17), (1.18) может быть записана в виде (3.5), (3.6). Из условий b), c) и (1.3) следует, что матрица $M \in H^{\omega_0}[0,T]$; причем $|M;[0,T]|^{\omega_0} \leqslant C|\bar{A}_1;[0,T]|^{\omega_0} \leqslant C$. Применяя к уравнению (3.5) оператор дробного дифференцирования $\partial^{1/2}$, получим, в силу лемм 3.1, 3.3 и равенств $\partial^{1/2}I^{1/2}f = f$ и $I^{1/2}\partial^{1/2}f = f$, справедливых для любых $f \in C[0,T]$ и $f \in C^{1/2}[0,T] \cap \underset{0}{C}[0,T]$, соответственно, уравнение

$$M\varphi_1 + \sum_{k=1}^{2} 2\partial^{1/2}\mathcal{H}_{1k}\varphi_k = 2\partial^{1/2}\psi_1, \tag{3.26}$$

которое эквивалентно (3.5) для $\varphi_k \in C[0,T]$.

Из условий a), b) вытекает, что $\delta_1 \leqslant \det \overline{A}_1(\tau) \leqslant \delta_1'$ для некоторых $\delta_1, \delta_1' > 0$ и всех $\tau \in [0,T]$; кроме того, $\overline{A}_1 \in H^{\omega_0}[0,T]$. Поэтому существует обратная матрица $\overline{A}_1^{-1}$, причем для некоторых $\delta_2, \delta_2' > 0$ и всех $\tau \in [0,T]$ имеет место неравенство $\delta_2 \leqslant \det \overline{A}_1^{-1}(\tau) \leqslant \delta_2'$ и, кроме того, $\overline{A}_1^{-1} \in H^{\omega_0}[0,T]$. Отсюда и из равенства (3.23) следует, что $\delta_3 \leqslant \det M(\tau) \leqslant \delta_3'$ для некоторых $\delta_3, \delta_3' > 0$ и всех $\tau \in [0,T]$; кроме того, $M \in H^{\omega_0}[0,T]$. Тогда существует обратная матрица $M^{-1}(\tau)$ и для некоторого $\delta_4 > 0$ и всех $\tau \in [0,T]$ выполнено неравенство $\det M^{-1}(\tau) \geqslant \delta_4$. Кроме того, $M^{-1} \in H^{\omega_0}[0,T]$, причем

$$|M^{-1};[0,T]|^{\omega_0} \leqslant C|M;[0,T]|^{\omega_0} \leqslant C. \tag{3.27}$$

Умножая обе части (3.26) на M^{-1}, получим эквивалентное уравнение

$$\varphi_1 + \sum_{k=1}^{2} 2M^{-1}\partial^{1/2}\mathcal{H}_{1k}\varphi_k = 2M^{-1}\partial^{1/2}\psi_1. \tag{3.28}$$

Умножая обе части (3.6) на $2\bar{A}_2$, получим эквивалентное уравнение

$$\varphi_2 + \sum_{k=1}^{2} 2\bar{A}_2\mathcal{H}_{2k}\varphi_k = 2\bar{A}_2\psi_2. \tag{3.29}$$

Для решения системы (3.28), (3.29) введем обозначения:

$$\varphi = \begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}, \quad \widetilde{\psi} = 2\begin{pmatrix}M^{-1}\partial^{1/2}\\ \bar{A}_2\end{pmatrix}^{\top}\psi, \quad K = 2\begin{pmatrix}M^{-1}\partial^{1/2}\mathcal{H}_{11} & M^{-1}\partial^{1/2}\mathcal{H}_{12}\\ \bar{A}_2\mathcal{H}_{21} & \bar{A}_2\mathcal{H}_{22}\end{pmatrix}$$

и перепишем систему (3.28), (3.29) в виде

$$\varphi + K\varphi = \widetilde{\psi}, \tag{3.30}$$

где $\widetilde{\psi} \in \underset{0}{C}[0,T]$, причем $||\widetilde{\psi};[0,T]||^0 \leqslant C\left(||\psi_1;[0,T]||^{1/2} + ||\psi_2;[0,T]||^0\right)$.

Далее используем рассуждения из [8, 12]. Оператор K — вольтерров оператор. Кроме того, в силу лемм 3.1, 3.2, 3.3 и оценки (3.27), K — линейный ограниченный оператор из $C[0,T]$ в $\underset{0}{H}^{\omega}[0,T], \omega = \widetilde{\widetilde{\omega}}_0 + \widetilde{\omega}_1$. Следовательно, по лемме 3.7 для любой $\widetilde{\psi} \in C[0,T]$ уравнение (3.30) имеет единственное решение $\varphi \in C[0,T]$ и справедлива оценка $||\varphi;[0,T]||^0 \leqslant C\left\|\widetilde{\psi};[0,T]\right\|^0$. Наконец, так как $K(C[0,T]) \subset \underset{0}{H}^{\omega}[0,T]$, $\omega = \widetilde{\widetilde{\omega}}_0 + \widetilde{\omega}_1$ и $\widetilde{\psi}(0) = 0$, то решение φ уравнения (3.30) принадлежит $\underset{0}{C}[0,T]$. Теорема доказана. □

Замечание 3.2. Из равенства (3.30) и лемм 3.1, 3.2, 3.3 следует, что если $\psi_1 \in \underset{0}{C}^{1/2,\omega_2}[0,T]$ и $\psi_2 \in \underset{0}{C}^{\omega_3}[0,T]$, то решение φ уравнения (3.30) принадлежит $\underset{0}{H}^{\omega}[0,T]$, где $\omega = \widetilde{\widetilde{\omega}}_0 + \widetilde{\omega}_1 + \omega_2 + \omega_3$, и выполнена оценка $|\varphi;[0,T]|^{\omega} \leqslant C(||\psi_1;[0,T]||^{1/2,\omega_2} + |\psi_2;[0,T]|^{\omega_3})$.

4. Доказательство теоремы 2.1

Доказательство теоремы 2.1. Решение задачи (1.4)–(1.7) ищем в виде суммы потенциалов (1.16), где вектор-плотности φ_1, φ_2 подлежат определению. Для любых непрерывных на $[0,T]$ плотностей φ_1, φ_2 вектор-функция (1.16) является классическим решением уравнения (1.4) и удовлетворяет начальному условию (1.5). Для отыскания неизвестных плотностей подставляем вектор-функцию (1.16) в граничные условия (1.6), (1.7), откуда получаем систему граничных интегральных уравнений Вольтерры (1.17), (1.18). Из теоремы 3.1 следует, что система (1.17), (1.18) имеет единственное решение $\{\varphi_k \in \underset{0}{C}[0,T], k=1,2\}$ и выполнена оценка (3.25). Поэтому существует классическое решение задачи (1.4)–(1.7), которое имеет вид суммы потенциалов простого слоя (1.16). Используя теперь результат о гладкости потенциала простого слоя с плотностью $\varphi \in \underset{0}{C}[0,T]$ полученный в [10, 12], заключаем, что найденное решение задачи (1.4)–(1.7) принадлежит пространству $\underset{0}{C}^{1,1/2}[\overline{\Omega}]$ и выполнена оценка (2.3). Теорема доказана. □

5. Оценки старших производных решения задачи

Пусть $G_+ = \{(x,t) \in D : x > g(t)\}$ и $G_- = \{(x,t) \in D : x < g(t)\}$ — полуограниченные области с негладкой боковой границей $\Sigma = \{(x,t) \in \overline{D} : x = g(t)\}$. Предполагаем, что для функции g выполнено условие

$$|g(t+\Delta t) - g(t)| \leqslant C|\Delta t|^{1/2}\omega_1(|\Delta t|^{1/2}),\ t, t+\Delta t \in [0,T], \tag{5.1}$$

где ω_1 — модуль непрерывности из условия (1.3).

В G_+ и G_- рассмотрим потенциал простого слоя

$$U\varphi(x,t) = \int\limits_0^t \Gamma(x,t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)d\tau. \tag{5.2}$$

где Γ — матрица (1.8), $\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_m)$ — вектор-функция. Обозначим параболическое расстояние от точки $(x,t) \in \underset{(-)}{G_+}$ до боковой границы Σ через $d(x,t) = \inf\limits_{(\xi,\tau)\in\Sigma,\tau\leqslant t} \left\{|x-\xi| + |t-\tau|^{1/2}\right\}$.

Лемма 5.1. *Пусть для коэффициентов оператора L выполнены условия* a)–c) *и для функции g выполнено условие* (5.1). *Пусть вектор-функция φ принадлежит $\underset{0}{H}^{\omega}[0,T]$. Тогда для производной $\partial_x^2 U\varphi$ потенциала* (5.2) *имеет место оценка*

$$|\partial_x^2 U\varphi(x,t)| \leqslant C|\varphi;[0,T]|^{\omega}\omega_5(d(x,t))d^{-1}(x,t), \quad (x,t) \in G_+, \tag{5.3}$$

где $\omega_5 = \widetilde{\omega}_0 + \omega_1 + \omega$.

Замечание 5.1. Оценка (5.3) в случае одного уравнения ($m=1$) получена в [36].

Доказательство. Для доказательства используем метод работ [30, 36]. Обозначим $||\varphi||^0 = ||\varphi;[0,T]||^0$, $|\varphi|^{\omega} = |\varphi;[0,T]|^{\omega}$, $d = d(x,t)$ и $\bar{A}(\tau) = A^{(2)}(g(\tau),\tau)$. В соответствии с представлением (1.8) имеем:

$$\partial_x^2 U\varphi(x,t) = \int\limits_0^t \partial_x^2 Z(x-g(\tau), t-\tau; \bar{A}(\tau))\varphi(\tau)d\tau + \int\limits_0^t \partial_x^2 W(x,t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)d\tau \equiv$$
$$\equiv U_0\varphi(x,t) + U_1\varphi(x,t), (x,t) \in G_+. \tag{5.4}$$

Оценим $U_1\varphi$. Из (1.12) следует неравенство

$$|U_1\varphi(x,t)| \leqslant C||\varphi||^0 \int\limits_0^t \frac{\widetilde{\omega}_0\left((t-\tau)^{1/2}\right)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-c\frac{|x-g(\tau)|^2}{t-\tau}\right\} d\tau.$$

Заметим, что

$$\exp\left\{-c\frac{|x-g(\tau)|^2}{t-\tau}\right\} = e^c \exp\left\{-c\frac{|x-g(\tau)|^2 + (t-\tau)}{t-\tau}\right\} \leqslant e^c \exp\left\{-\frac{c}{2}\frac{d^2(x,t)}{t-\tau}\right\} \tag{5.5}$$

для $(x,t) \in G_+$, $0 \leqslant \tau < t$. Кроме того, для модуля непрерывности ω, удовлетворяющего условию (2.1), справедлива оценка (см. [36]):

$$\int\limits_0^t \frac{\omega\left((t-\tau)^{1/2}\right)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-c\frac{d^2}{t-\tau}\right\} d\tau \leqslant C\omega(d)d^{-1}, \quad t,d>0. \tag{5.6}$$

Поэтому

$$|U_1\varphi(x,t)| \leqslant C||\varphi||^0 \widetilde{\omega}_0(d)d^{-1}. \tag{5.7}$$

Рассмотрим $U_0\varphi$. Положим

$$U_0(x,t) = \int\limits_0^t [\partial_x^2 Z(x-g(\tau),t-\tau;\bar{A}(\tau))\varphi(\tau) - \partial_x^2 Z(x-g(t),t-\tau;\bar{A}(t))\varphi(t)]d\tau +$$
$$+ \int\limits_0^t \partial_x^2 Z(x-g(t),t-\tau;\bar{A}(t))d\tau\varphi(t) \equiv U_{01}\varphi(x,t) + U_{02}\varphi(x,t).$$

Интеграл $U_{01}\varphi$ представим в виде

$$U_{01}\varphi(x,t) = \int\limits_0^t [\partial_x^2 Z(x-g(\tau),t-\tau;\bar{A}(\tau)) - \partial_x^2 Z(x-g(t),t-\tau;\bar{A}(\tau))]\varphi(\tau)d\tau +$$
$$+ \int\limits_0^t [\partial_x^2 Z(x-g(t),t-\tau;\bar{A}(\tau)) - \partial_x^2 Z(x-g(t),t-\tau;\bar{A}(t))]\varphi(\tau)d\tau +$$
$$+ \int\limits_0^t \partial_x^2 Z(x-g(t),t-\tau;\bar{A}(t))[\varphi(\tau)-\varphi(t)]d\tau.$$

Используя теорему о среднем, соотношения (1.13), (1.14), (5.1), (5.5), (5.6) и условие на φ, находим

$$|U_{01}\varphi(x,t)| \leqslant C|\varphi|^\omega \int\limits_0^t \frac{(\omega_0+\omega_1+\omega)\left((t-\tau)^{1/2}\right)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-c\frac{d^2}{t-\tau}\right\} d\tau \leqslant C|\varphi|^\omega(\omega_0+\omega_1+\omega)(d)d^{-1}. \tag{5.8}$$

Оценим $U_{02}\varphi$. Матрица $Z\left(x,t;A^{(2)}(y,\eta)\right)$ является решением системы $\partial_t Z - A^{(2)}(y,\eta)\partial_x^2 Z = 0$, поэтому для любых фиксированных $x,y \in \mathbb{R}, t\in(0,T], \eta\in[0,T]$ справедливо равенство

$$\int\limits_0^t \partial_x^2 Z(x,t-\tau;A^{(2)}(y,\eta))d\tau = \left(A^{(2)}\right)^{-1}(y,\eta)Z(x,t;A^{(2)}(y,\eta)).$$

Подставим вместо y,η соответственно $g(t),t$. Тогда при $x>g(t)$ имеем

$$U_{02}\varphi(x,t) = \bar{A}^{-1}(t)Z(x-g(t),t;\bar{A}(t))\varphi(t).$$

В силу условий a), b) элементы матрицы $\bar{A}^{-1}$ ограничены на $[0,T]$. Отсюда и из (1.13) и неравенств $|x-g(t)| \geqslant d(x,t)$, $(x,t)\in G_+$, $|\varphi(t)| = |\varphi(t)-\varphi(0)| \leqslant |\varphi|^\omega \omega\left(t^{1/2}\right)$, $t\in[0,T]$, получим

$$|U_{02}\varphi(x,t)| \leqslant C|\varphi|^\omega \frac{\omega\left(t^{1/2}\right)}{t^{1/2}} \exp\left\{-c\frac{d^2}{t}\right\} \leqslant C|\varphi|^\omega \omega(d)d^{-1}. \tag{5.9}$$

Из (5.4), (5.7)–(5.9) следует требуемая оценка (5.3). □

Замечание 5.2. Аналогичное утверждение справедливо для области G_-.

Из теоремы 2.1, леммы 5.1, замечаний 2.2, 2.3, 3.2, 5.2 и результата о гладкости потенциала простого слоя в пространстве Дини, полученного в [16], вытекает следующая теорема.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1 *и* $\psi_1 \in \underset{0}{C}^{1/2,\omega_2}[0,T]$, $\psi_2 \in \underset{0}{C}^{\omega_3}[0,T]$. *Тогда для решения* u *из теоремы* 2.1 *выполнены оценки*

$$|\partial_x^2 u(x,t)| \leqslant C\left(||\psi_1;[0,T]||^{1/2,\omega_2} + |\psi_2;[0,T]|^{\omega_3}\right)\omega_4(d(x,t))d^{-1}(x,t),$$
$$|\partial_t u(x,t)| \leqslant C\left(||\psi_1;[0,T]||^{1/2,\omega_2} + |\psi_2;[0,T]|^{\omega_3}\right)\omega_4(d(x,t))d^{-1}(x,t),$$

где $\omega_4 = \widetilde{\widetilde{\omega}}_0 + \widetilde{\omega}_1 + \omega_2 + \omega_3$, $(x,t) \in \Omega$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1984.
2. *Бадерко Е. А.* О решении методом потенциалов одной задачи теплопроводности с сосредоточенными теплоемкостями// Дифф. уравн. — 1972. — *8*, № 7. — С. 1225–1234.
3. *Бадерко Е. А.* О разрешимости граничных задач для параболических уравнений высокого порядка в областях с криволинейными боковыми границами// Дифф. уравн. — 1976. — *12*, № 10. — С. 1781–1792.
4. *Бадерко Е. А.* О решении первой краевой задачи для параболических уравнений с помощью потенциала простого слоя// Докл. АН СССР. — 1985. — *283*, № 1. — С. 11–13.
5. *Бадерко Е. А.* О «почти» модельной краевой задаче для параболического уравнения высокого порядка// Дифф. уравн. — 1987. — *23*, № 1. — С. 22–29.
6. *Бадерко Е. А.* Метод теории потенциала в краевых задачах для $2m$-параболических уравнений в полуограниченной области// Дифф. уравн. — 1988. — *24*, № 1. — С. 3–9.
7. *Бадерко Е. А.* Решение задачи с косой производной для параболического уравнения методом граничных интегральных уравнений// Дифф. уравн. — 1989. — *25*, № 1. — С. 14–20.
8. *Бадерко Е. А.* О параболической краевой задаче в области простого вида// Дифф. уравн. — 1991. — *27*, № 1. — С. 17–29.
9. *Бадерко Е. А.* Краевые задачи для параболического уравнения и граничные интегральные уравнения// Дифф. уравн. — 1992. — *28*, № 1. — С. 17–23.
10. *Бадерко Е. А., Черепова М. Ф.* Первая краевая задача для параболических систем в плоских областях с негладкими боковыми границами// Докл. РАН. — 2014. — *458*, № 4. — С. 379–381.
11. *Бадерко Е. А., Черепова М. Ф.* Задача Бицадзе—Самарского для параболической системы на плоскости// Докл. РАН. — 2016. — *471*, № 5. — С. 517–519.
12. *Бадерко Е. А., Черепова М. Ф.* Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости// Дифф. уравн. — 2016. — *52*, № 2. — С. 198–208.
13. *Бадерко Е. А., Черепова М. Ф.* Задача Дирихле для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами на плоскости// Докл. РАН. — 2017. — *476*, № 1. — С. 7–10.
14. *Бадерко Е. А., Черепова М. Ф.* Решение задачи Бицадзе—Самарского для параболической системы в полуограниченной области// Дифф. уравн. — 2017. — *53*, № 10. — С. 1327–1335.
15. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. — М.: Наука, 1977.
16. *Зейнеддин М.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в классах Дини// Деп. ВИНИТИ РАН. — 16.04.92. — № 1294-В92.
17. *Зейнеддин М.* О потенциале простого слоя для параболической системы в классах Дини// Дисс. к.ф.-м.н. — Москва, 1992.
18. *Камынин Л. И.* Гладкость тепловых потенциалов в пространстве Дини—Гельдера// Сиб. мат. ж. — 1970. — *11*, № 5. — С. 1017–1045.
19. *Камынин Л. И.* К теории Жевре для параболических потенциалов. VI// Дифф. уравн. — 1972. — *8*, № 6. — С. 1015–1025.
20. *Камынин Л. И.* О решении методом потенциалов основных краевых задач для одномерного параболического уравнения второго порядка// Сиб. мат. ж. — 1974. — *15*, № 4. — С. 806–834.
21. *Камынин Л. И.* Приложения параболических потенциалов Паньи к краевым задачам математической физики. I// Дифф. уравн. — 1990. — *26*, № 5. — С. 829–841.
22. *Петровский И. Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций// Бюлл. МГУ. Секц. А. — 1938. — *1*, № 7. — С. 1–72.
23. *Семаан Х. М.* О решении второй краевой задачи для параболических систем в областях на плоскости с негладкой боковой границей// Деп. ВИНИТИ РАН. — 26.02.99. — № 567-В99.
24. *Твеританов В. А.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка// Деп. ВИНИТИ АН СССР. — 02.09.88. — № 6850-В88.

25. *Тверитинов В. А.* Решение второй краевой задачи для параболической системы с одной пространственной переменной методом граничных интегральных уравнений// Деп. ВИНИТИ АН СССР. — 15.11.89. — № 6906-В89.
26. *Тихонов А. Н.* О функциональных уравнениях типа Volterra и их применениях к некоторым задачам математической физики// Бюлл. МГУ. Секц. А. — 1938. — *1*, № 8. — С. 1–25.
27. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. — М.: Мир, 1968.
28. *Черепова М. Ф.* Решение методом потенциала I-ой краевой задачи для параболического уравнения 2-го порядка в нецилиндрической области// Деп. ВИНИТИ АН СССР. — 11.01.85. — № 361-85-Деп.
29. *Черепова М. Ф.* О задаче Бицадзе—Самарского для параболического уравнения// Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1986. — № 4. — С. 74–76.
30. *Черепова М. Ф.* Об оценках пространственных производных второго порядка для параболического потенциала простого слоя// Дифф. уравн. — 1996. — *32*, № 4. — С. 545–549.
31. *Черепова М. Ф.* О разрешимости краевых задач для параболического уравнения высокого порядка с растущими коэффициентами// Докл. РАН. — 2006. — *411*, № 2. — С. 171–172.
32. *Черепова М. Ф.* О разрешимости краевых задач для параболического уравнения с растущими вблизи границы коэффициентами// Дифф. уравн. — 2007. — *43*, № 1. — С. 110–121.
33. *Черепова М. Ф.* Краевые задачи для параболического уравнения высокого порядка с растущими коэффициентами// Дифф. уравн. — 2008. — *44*, № 4. — С. 507–516.
34. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. — М.: Наука, 1964.
35. *Baderko E. A.* Parabolic problems and boundary integral equations// Math. Methods Appl. Sci. — 1997. — *20*. — С. 449–459.
36. *Martynova K. K., Cherepova M. F.* Estimates for the derivative of parabolic simple layer potential in the Dini space// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2016. — *219*, № 6. — С. 973–993.

Е. А. Бадерко
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1
E-mail: baderko.ea@yandex.ru

М. Ф. Черепова
Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»,
111250, Москва, ул. Красноказарменная, 14
E-mail: CherepovaMF@mpei.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-20-36 UDC 517.956.4

Mixed Problem for a Parabolic System on a Plane and Boundary Integral Equations

 E. A. Baderko, M. F. Cherepova

Abstract. We consider the mixed problem for a one-dimensional (with respect to the spatial variable) second-order parabolic system with Dini-continuous coefficients in a domain with nonsmooth lateral boundaries. Using the method of boundary integral equations, we find a classical solution of this problem. We investigate the smoothness of solution as well.

REFERENCES

1. V. I. Arnol'd, *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations], Nauka, Moscow, 1984 (in Russian).
2. E. A. Baderko, "O reshenii metodom potentsialov odnoy zadachi teploprovodnosti s sosredotochennymi teploemkostyami" [On application of the method of potentials to solution of one heat conduction problem with concentrated thermal conductivity], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1972, **8**, No. 7, 1225–1234 (in Russian).

3. E. A. Baderko, "O razreshimosti granichnykh zadach dlya parabolicheskikh uravneniy vysokogo poryadka v oblastyakh s krivolineynymi bokovymi granitsami" [On solvability of boundary problems for higher-order parabolic equations in domains with nonsmooth lateral boundaries], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1976, **12**, No. 10, 1781–1792 (in Russian).
4. E. A. Baderko, "O reshenii pervoy kraevoy zadachi dlya parabolicheskikh uravneniy s pomoshch'yu potentsiala prostogo sloya" [On solution of the first boundary-value problem for parabolic equations by means of the single layer potential], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1985, **283**, No. 1, 11–13 (in Russian).
5. E. A. Baderko, "O «pochti» model'noy kraevoy zadache dlya parabolicheskogo uravneniya vysokogo poryadka" [On "almost" model boundary-value problem for a higher-order parabolic equation], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1987, **23**, No. 1, 22–29 (in Russian).
6. E. A. Baderko, "Metod teorii potentsiala v kraevykh zadachakh dlya $2m$-parabolicheskikh uravneniy v poluogranichennoy oblasti" [The potential theory method in boundary-value problems for $2m$-parabolic equations in a semibounded domain], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1988, **24**, No. 1, 3–9 (in Russian).
7. E. A. Baderko, "Reshenie zadachi s kosoy proizvodnoy dlya parabolicheskogo uravneniya metodom granichnykh integral'nykh uravneniy" [Solution of a problem for a parabolic equation with an oblique derivative by means of the boundary integral equations method], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1989, **25**, No. 1, 14–20 (in Russian).
8. E. A. Baderko, "O parabolicheskoy kraevoy zadache v oblasti prostogo vida" [On a parabolic boundary-value problem in a simple domain], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1991, **27**, No. 1, 17–29 (in Russian).
9. E. A. Baderko, "Kraevye zadachi dlya parabolicheskogo uravneniya i granichnye integral'nye uravneniya" [Boundary-value problems for a parabolic equation and boundary integral equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1992, **28**, No. 1, 17–23 (in Russian).
10. E. A. Baderko and M. F. Cherepova, "Pervaya kraevaya zadacha dlya parabolicheskikh sistem v ploskikh oblastyakh s negladkimi bokovymi granitsami" [The first boundary-value problem for parabolic systems in plane domains with nonsmooth lateral boundaries], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2014, **458**, No. 4, 379–381 (in Russian).
11. E. A. Baderko and M. F. Cherepova, "Zadacha Bitsadze—Samarskogo dlya parabolicheskoy sistemy na ploskosti" [The Bitsadze–Samarskii problem for a parabolic system on a plane], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2016, **471**, No. 5, 517–519 (in Russian).
12. E. A. Baderko and M. F. Cherepova, "Potentsial prostogo sloya i pervaya kraevaya zadacha dlya parabolicheskoy sistemy na ploskosti" [The single layer potential and the first boundary-value problem for a parabolic system on a plane], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2016, **52**, No. 2, 198–208 (in Russian).
13. E. A. Baderko and M. F. Cherepova, "Zadacha Dirikhle dlya parabolicheskikh sistem s Dini-nepreryvnymi koeffitsientami na ploskosti" [The Dirichlet problem for parabolic systems with Dini-continuous coefficients of a plane], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2017, **476**, No. 1, 7–10 (in Russian).
14. E. A. Baderko and M. F. Cherepova, "Reshenie zadachi Bitsadze—Samarskogo dlya parabolicheskoy sistemy v poluogranichennoy oblasti" [Solution of the Bitsadze–Samarskii problem for a parabolic system in a semibounded domain], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2017, **53**, No. 10, 1327–1335 (in Russian).
15. V. K. Dzyadyk, *Vvedenie v teoriyu ravnomernogo priblizheniya funktsiy polinomami* [Introduction to the Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials], Nauka, Moscow, 1977 (in Russian).
16. M. Zeyneddin, "Gladkost' potentsiala prostogo sloya dlya parabolicheskoy sistemy vtorogo poryadka v klassakh Dini" [Smoothness of the single layer potential for a second-order parabolic system in the Dini classes], *VINITI RAN*, 16.04.92, No. 1294-V92 (in Russian).
17. M. Zeyneddin, "O potentsiale prostogo sloya dlya parabolicheskoy sistemy v klassakh Dini" [On the single layer potential for a parabolic system in the Dini classes], *PhD Thesis*, Moscow, 1992 (in Russian).
18. L. I. Kamynin, "Gladkost' teplovykh potentsialov v prostranstve Dini—Gel'dera" [Smoothness of the heat potentials in the Dini–Hölder space], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1970, **11**, No. 5, 1017–1045 (in Russian).
19. L. I. Kamynin, "K teorii Zhevre dlya parabolicheskikh potentsialov. VI" [To the Gevrey theory for parabolic potentials. VI], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1972, **8**, No. 6, 1015–1025 (in Russian).
20. L. I. Kamynin, "O reshenii metodom potentsialov osnovnykh kraevykh zadach dlya odnomernogo parabolicheskogo uravneniya vtorogo poryadka" [On the application of the potentials method to solution of principal boundary-value problems for a second-order one-dimensional parabolic equation], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1974, **15**, No. 4, 806–834 (in Russian).
21. L. I. Kamynin, "Prilozheniya parabolicheskikh potentsialov Pan'i k kraevym zadacham matematicheskoy fiziki. I" [Applications of the parabolic Pagni potentials to boundary-value problems in mathematical physics. I], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1990, **26**, No. 5, 829–841 (in Russian).

22. I. G. Petrovskiy, “O probleme Koshi dlya sistem lineynykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi v oblasti neanaliticheskikh funktsiy” [On the Cauchy problem for systems of linear partial differential equations in the area of nonanalytic functions], *Byull. MGU. Sekts. A* [Bull. Moscow State Univ. Sec. A], 1938, **1**, No. 7, 1–72 (in Russian).
23. Kh. M. Semaan, “O reshenii vtoroy kraevoy zadachi dlya parabolicheskikh sistem v oblastyakh na ploskosti s negladkoy bokovoy granitsey” [On solution of the second boundary-value problem for parabolic systems in plane domains with nonsmooth lateral boundary], *VINITI RAN* [VINITI Russ. Acad. Sci.], 26.02.99, No. 567-V99.
24. V. A. Tveritinov, “Gladkost’ potentsiala prostogo sloya dlya parabolicheskoy sistemy vtorogo poryadka” [Smoothness of the single layer potential for a second-order parabolic system], *VINITI AN SSSR* [VINITI Acad. Sci. USSR], 02.09.88, No. 6850-V88.
25. V. A. Tveritinov, “Reshenie vtoroy kraevoy zadachi dlya parabolicheskoy sistemy s odnoy prostranstvennoy peremennoy metodom granichnykh integral’nykh uravneniy” [Solution of the second boundary-value problem for a parabolic system with one spatial variable by means of boundary integral equations], *VINITI AN SSSR* [VINITI Acad. Sci. USSR], 15.11.89, No. 6906-V89.
26. A. N. Tikhonov, “O funktsional’nykh uravneniyakh tipa Volterra i ikh primeneniyakh k nekotorym zadacham matematicheskoy fiziki” [On functional equations of Volterra type and their applications to some problems of mathematical physics], *Byull. MGU. Sekts. A* [Bull. Moscow State Univ. Sec. A], 1938, **1**, No. 8, 1–25 (in Russian).
27. A. Fridman, *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi parabolicheskogo tipa* [Partial Differential Equations of Parabolic Type], Mir, Moscow, 1968 (in Russian).
28. M. F. Cherepova, “Reshenie metodom potentsiala I-oy kraevoy zadachi dlya parabolicheskogo uravneniya 2-go poryadka v netsilindricheskoy oblasti” [Solution by the potential method of the first boundary-value problem for a second-order parabolic equation in a noncylindric domain], *VINITI AN SSSR* [VINITI Acad. Sci. USSR], 11.01.85, No. 361-85-Dep.
29. M. F. Cherepova, “O zadache Bitsadze—Samarskogo dlya parabolicheskogo uravneniya” [On the Bitsadze–Samarskii problem for a parabolic equation], *Vestnik Mosk. un-ta. Ser. 1. Mat. Mekh.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 1986, No. 4, 74–76 (in Russian).
30. M. F. Cherepova, “Ob otsenkakh prostranstvennykh proizvodnykh vtorogo poryadka dlya parabolicheskogo potentsiala prostogo sloya” [On estimates of second-order spatial derivatives for the parabolic single layer potential], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1996, **32**, No. 4, 545–549 (in Russian).
31. M. F. Cherepova, “O razreshimosti kraevykh zadach dlya parabolicheskogo uravneniya vysokogo poryadka s rastushchimi koeffitsientami” [On solvability of boundary-value problems for a higher-order parabolic equation with growing coefficients], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2006, **411**, No. 2, 171–172 (in Russian).
32. M. F. Cherepova, “O razreshimosti kraevykh zadach dlya parabolicheskogo uravneniya s rastushchimi vblizi granitsy koeffitsientami” [On solvability of boundary-value problems for a parabolic equation with growing near the boundary coefficients], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2007, **43**, No. 1, 110–121 (in Russian).
33. M. F. Cherepova, “Kraevye zadachi dlya parabolicheskogo uravneniya vysokogo poryadka s rastushchimi koeffitsientami” [Boundary-value problems for a higher-order parabolic equation with growing coefficients], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2008, **44**, No. 4, 507–516 (in Russian).
34. S. D. Eydel’man, *Parabolicheskie sistemy* [Parabolic Systems], Nauka, Moscow, 1964 (in Russian).
35. E. A. Baderko, “Parabolic problems and boundary integral equations,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 1997, **20**, 449–459.
36. K. K. Martynova and M. F. Cherepova, “Estimates for the derivative of parabolic simple layer potential in the Dini space,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2016, **219**, No. 6, 973–993.

E. A. Baderko
Lomonosov Moscow State University,
Faculty of Mechanics and Mathematics,
1 Leninskiye Gory, 119991 Moscow GSP-1, Russia
E-mail: baderko.ea@yandex.ru

M. F. Cherepova
National Research University “Moscow Power Engineering Institute,”
14 Krasnokazarmennaya st., 111250 Moscow, Russia
E-mail: CherepovaMF@mpei.ru