

УСТОЙЧИВАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

© 2018 г. А. АШЫРАЛИЕВ, Х. БЕЛАКРУМ

Аннотация. Рассматривается нелокальная краевая задача для уравнения в частных производных третьего порядка

$$\begin{cases} \frac{d^3 u(t)}{dt^3} + A \frac{du(t)}{dt} = f(t), & 0 < t < 1, \\ u(0) = \gamma u(\lambda) + \varphi, & u'(0) = \alpha u'(\lambda) + \psi, & |\gamma| < 1, \\ u''(0) = \beta u''(\lambda) + \xi, & |1 + \beta\alpha| > |\alpha + \beta|, & 0 < \lambda \leq 1, \end{cases}$$

с самосопряженным положительно определенным оператором A в гильбертовом пространстве H . Приводится устойчивая трехшаговая разностная схема для приближенного решения задачи. Для этой разностной схемы доказывается основная теорема об устойчивости. В качестве приложений, для трех нелокальных краевых задач для уравнений в частных производных третьего порядка получены оценки устойчивости приближенных решений, полученных при помощи разностных схем.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение		1
2. Разностная схема. Основная теорема об устойчивости		5
3. Приложения		6
4. Численные результаты		10
5. Выводы		15
Список литературы		16

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелокальные краевые задачи для уравнений в частных производных являются основным направлением исследования в различных областях науки и техники (в особенности, в тех задачах прикладной математики, в которых невозможно определить граничные значения неизвестной функции). Растущий интерес, проявленный в течение последнего столетия к локальным и нелокальным краевым задачам для уравнений в частных производных с временными и пространственными аргументами, обусловлен их важностью для теории науки и промышленности (см., например, [2, 7, 13, 22–24, 27, 29, 30]). Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений в частных производных третьего порядка широко изучены (см., например, [1, 3–5, 9–11, 16, 17, 21, 25, 26, 28]). Однако теория разностных схем для уравнений в частных производных третьего порядка еще не получила достаточного развития. Этим обосновывается важность поиска устойчивых разностных схем с реализацией их на компьютере.

В работах [14, 15] локальные и нелокальные краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + c(t) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b(t) \frac{dy(t)}{dt} + a(t) y(t) = f(t)$$

исследованы при гладких функциях $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $f(t)$, заданных на отрезке $[0, T]$. Представлены трехточечные разностные схемы. Эти трехточечные разностные схемы строятся на основе

тейлоровских разложений по четырем точкам. На примере с периодическими по времени параметрами показано, что полученные результаты хорошо применимы к численному решению локальных и нелокальных краевых задач.

Различные нелокальные краевые задачи для уравнения в частных производных третьего порядка приводятся к нелокальной краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка в гильбертовом пространстве H с самосопряженным положительно определенным оператором A :

$$\begin{cases} \frac{d^3 u(t)}{dt^3} + A \frac{du(t)}{dt} = f(t), & 0 < t < 1, \\ u(0) = \gamma u(\lambda) + \varphi, & u'(0) = \alpha u'(\lambda) + \psi, |\gamma| < 1, \\ u''(0) = \beta u''(\lambda) + \xi, & |1 + \beta\alpha| > |\alpha + \beta|, 0 < \lambda \leq 1 \end{cases} \quad (1.1)$$

В работе [20] рассматривается нелокальная краевая задача (1.1) для нелокального уравнения с частными производными третьего порядка.

Функция $u(t)$ есть *решение* задачи (1.1), если выполнены следующие условия:

1. $u(t)$ трижды непрерывно дифференцируема на интервале $(0, 1)$ и дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, 1]$;
2. элемент $u'(t)$ принадлежит $D(A)$ для всех t из отрезка $[0, 1]$, а функция $Au'(t)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$;
3. $u(t)$ удовлетворяет уравнению и нелокальным краевым условиям (1.1).

Следующая основная теорема об устойчивости, представляющая оценку решения нелокальной краевой задачи (1.1), установлена при предположении, что

$$|1 + \alpha\beta| > |\alpha + \beta|. \quad (1.2)$$

Чтобы сформулировать результаты об устойчивости нелокальной краевой задачи (1.1), дадим определение отрицательной степени $A^{-\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$) самосопряженного положительно определенного оператора A следующей формулой (см. [6]):

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha} \int_0^{\infty} s^{-\alpha} (A + sI)^{-1} ds.$$

Оператор $A^{-\alpha}$ ограничен, и $A^{-\alpha}x \rightarrow x$ для любого $x \in H$ при $\alpha \rightarrow 0$. Положительная степень определяется как $(A^{-\alpha})^{-1}$, она неограничена. Для любых вещественных α и β выполняется фундаментальное свойство степеней $A^\alpha A^\beta x = A^\beta A^\alpha x = A^{\alpha+\beta}x$ при $x \in D(A^\theta)$, где $\theta = \max\{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$.

Теорема 1.1 (см. [20]). *Предположим, что $\varphi \in H, \psi \in D(A), \xi \in D(A^{1/2})$, а $f(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, 1]$. Тогда существует единственное решение задачи (1.1) и выполняются неравенства*

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \|u(t)\|_H \leq M_1 \left\{ \|\varphi\|_H + \|A^{-\frac{1}{2}}\psi\|_H + \|A^{-1}\xi\|_H + \max_{0 \leq t \leq 1} \|A^{-1}f(t)\|_H \right\}, \quad (1.3)$$

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \left\| \frac{d^3 u(t)}{dt^3} \right\|_H + \max_{0 \leq t \leq 1} \left\| A \frac{du}{dt} \right\|_H \leq M_2 \left\{ \|A\psi\|_H + \|A^{\frac{1}{2}}\xi\|_H + \|f(0)\|_H + \max_{0 \leq t \leq 1} \|f'(t)\|_H \right\}, \quad (1.4)$$

где M_1, M_2 не зависят от $f(t), \varphi, \psi, \xi$.

Далее рассмотрим приложения основных результатов к исследованию устойчивости трех нелокальных краевых задач для уравнений с частными производными третьего порядка.

Во-первых, для приложения теоремы 1.1 рассмотрим нелокальную краевую задачу для уравнения с частными производными третьего порядка

$$\begin{cases} \frac{\partial^3 u(t, x)}{\partial t^3} - (a(x)u_{tx})_x + \delta u_t(t, x) = f(t, x), & 0 < t < 1, \quad 0 < x < l, \\ u(0, x) = \gamma u(\lambda, x) + \varphi(x), & u_t(0, x) = \alpha u_t(\lambda, x) + \psi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u_{tt}(0, x) = \beta u_{tt}(\lambda, x) + \xi(x), & 0 \leq x \leq l, & 0 < \lambda \leq 1, \\ u_t(t, 0) = u_t(t, l), & u_{tx}(t, 0) = u_{tx}(t, l), & 0 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (1.5)$$

Здесь $a(x)$ ($x \in (0, l)$), $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\xi(x)$ ($x \in [0, l]$) и $f(t, x)$ ($t \in (0, 1)$, $x \in (0, l)$) — достаточно гладкие функции, удовлетворяющие всем условиям согласования, гарантирующим существование и единственность гладкого решения $u(t, x)$ задачи (1.5). Будем считать, что $a(x) \geq a > 0$, $x \in (0, l)$, $\delta > 0$, $a(l) = a(0)$.

Известно [6], что функцию $v(t, x)$, определенную на $[0, 1] \times [0, l]$, можно рассматривать как абстрактную функцию $v(t)$, определенную на $[0, 1]$, принимающую значения в $L_2[0, l]$. Это позволяет привести задачу (1.5) к абстрактной форме (1.1) в гильбертовом пространстве $H = L_2[0, l]$ всех квадратично интегрируемых функций на $[0, l]$ с самосопряженным положительно определенным оператором $A = A^x$, определенным по формуле

$$A^x u(x) = -(a(x)u_x)_x + \delta u(x) \quad (1.6)$$

с областью определения $D(A^x) = \{u(x) : u, u_x, (a(x)u_x)_x \in L_2[0, l], u(0) = u(l), u'(0) = u'(l)\}$. Здесь $f(t) = f(t, x)$ и $u(t) = u(t, x)$ — известные и неизвестные абстрактные функции на отрезке $[0, 1]$ со значениями в $H = L_2[0, l]$. Тогда из теоремы 1.1 вытекает следующая теорема об устойчивости задачи (1.5).

Теорема 1.2 (см. [20]). *Для решения задачи (1.5) имеют место неравенства устойчивости*

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \|u(t, \cdot)\|_{L_2[0, l]} \leq M_3 \left[\max_{0 \leq t \leq 1} \|f(t, \cdot)\|_{L_2[0, l]} + \|\varphi\|_{L_2[0, l]} + \|\psi\|_{L_2[0, l]} + \|\xi\|_{L_2[0, l]} \right], \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq 1} \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) \right\|_{W_2^1[0, l]} + \max_{0 \leq t \leq 1} \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(t, \cdot) \right\|_{L_2[0, l]} &\leq \\ &\leq M_3 \left[\max_{0 \leq t \leq 1} \|f_t(t, \cdot)\|_{L_2[0, l]} + \|f(0, \cdot)\|_{L_2[0, l]} + \|\psi\|_{W_2^2[0, l]} + \|\xi\|_{W_2^1[0, l]} \right] \end{aligned} \quad (1.8)$$

где M_3 не зависит от $f(t, x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\xi(x)$. Здесь $W_2^1[0, l]$ и $W_2^2[0, l]$ — пространства Соболева всех квадратично интегрируемых функций $\psi(x)$ на $[0, l]$ с нормами

$$\|\psi\|_{W_2^1[0, l]} = \left\{ \int_0^l [\psi^2(x) + \psi_x^2(x)] dx \right\}^{1/2} \quad \text{и} \quad \|\psi\|_{W_2^2[0, l]} = \left\{ \int_0^l [\psi^2(x) + \psi_{xx}^2(x)] dx \right\}^{1/2}.$$

Во-вторых, пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная открытая область с гладкой границей S , $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$. В области $[0, 1] \times \Omega$ рассмотрим краевую задачу для уравнения с частными производными третьего порядка

$$\begin{cases} \frac{\partial^3 u(t, x)}{\partial t^3} - \sum_{r=1}^n (a_r(x)u_{t x_r})_{x_r} = f(t, x), & x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, \quad 0 < t < 1, \\ u(0, x) = \gamma u(\lambda, x) + \varphi(x), & u_t(0, x) = \alpha u_t(\lambda, x) + \psi(x), & x \in \bar{\Omega}, \\ u_{tt}(0, x) = \beta u_{tt}(\lambda, x) + \xi(x), & x \in \bar{\Omega}, \quad 0 < \lambda \leq 1, \\ u_t(t, x) = 0, & x \in S, \quad 0 \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (1.9)$$

где $a_r(x)$, ($x \in \Omega$), $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\xi(x)$ ($x \in \bar{\Omega}$) и $f(t, x)$ ($t \in (0, 1)$, $x \in \Omega$) — заданные гладкие функции, а $a_r(x) > 0$. Аналогично, функцию $v(t, x)$ на $[0, 1] \times \bar{\Omega}$ можно рассматривать как абстрактную функцию $v(t)$ на $[0, 1]$ со значениями в $L_2(\bar{\Omega})$. Тогда задачу (1.9) можно записать в абстрактной форме (1.1) в гильбертовом пространстве $H = L_2(\bar{\Omega})$ квадратично интегрируемых функций на $\bar{\Omega}$ с самосопряженным положительно определенным оператором $A = A^x$:

$$A^x u(x) = \sum_{r=1}^n (a_r(x)u_{x_r})_{x_r} \quad (1.10)$$

с областью определения $D(A^x) = \{u(x) : u, u_{x_r}, (a_r(x)u_{x_r}) \in L_2(\bar{\Omega}), 1 \leq r \leq n, u(x) = 0, x \in S\}$. Здесь $f(t) = f(t, x)$ и $u(t) = u(t, x)$ — известные и неизвестные абстрактные функции, определенные на $\bar{\Omega}$ со значениями в $L_2(\bar{\Omega})$. Тогда из теоремы 1.1 и неравенства коэрцитивности для решения эллиптической дифференциальной задачи в $L_2(\bar{\Omega})$ вытекает следующая теорема об устойчивости задачи (1.9).

Теорема 1.3 (см. [20]). Для решения задачи (1.9) имеют место неравенства устойчивости

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \|u(t, \cdot)\|_{L_2(\bar{\Omega})} \leq M_4 \left[\max_{0 \leq t \leq 1} \|f(t, \cdot)\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|\varphi\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|\psi\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|\xi\|_{L_2(\bar{\Omega})} \right], \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq 1} \|u(t, \cdot)\|_{W_2^2(\bar{\Omega})} + \max_{0 \leq t \leq 1} \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(t, \cdot) \right\|_{L_2(\bar{\Omega})} &\leq \\ &\leq M_4 \left[\max_{0 \leq t \leq 1} \|f_t(t, \cdot)\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|f(0, \cdot)\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|\psi\|_{W_2^2(\bar{\Omega})} + \|\xi\|_{W_2^1(\bar{\Omega})} \right] \end{aligned} \quad (1.12)$$

где M_4 не зависит от $f(t, x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\xi(x)$. Здесь и далее $W_2^1(\bar{\Omega})$ и $W_2^2(\bar{\Omega})$ будут обозначать пространства Соболева квадратично интегрируемых функций $\psi(x)$ на $\bar{\Omega}$ с нормами

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{W_2^1(\bar{\Omega})} &= \left(\int \dots \int_{x \in \bar{\Omega}} \left[|\psi(x)|^2 + \sum_{r=1}^n |\psi_{x_r}(x)|^2 \right] dx_1 \dots dx_n \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|\psi\|_{W_2^2(\bar{\Omega})} &= \left(\int \dots \int_{x \in \bar{\Omega}} \left[|\psi(x)|^2 + \sum_{r=1}^n |\psi_{x_r x_r}(x)|^2 \right] dx_1 \dots dx_n \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

В-третьих, рассмотрим краевую задачу для уравнения с частными производными третьего порядка

$$\begin{cases} \frac{\partial^3 u(t, x)}{\partial t^3} - \sum_{r=1}^m (a_r(x) u_{t x_r})_{x_r} + \delta u_t(t, x) = f(t, x), & x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, \quad 0 < t < 1, \\ u(0, x) = \gamma u(\lambda, x) + \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \alpha u_t(\lambda, x) + \psi(x), & x \in \bar{\Omega}, \\ u_{tt}(1, x) = \beta u_{tt}(\lambda, x) + \xi(x), & x \in \bar{\Omega}, \quad 0 < \lambda < 1, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \vec{m}}(0, x) = 0, & x \in S, \quad 0 \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (1.13)$$

где $a_r(x)$, $x \in \Omega$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\xi(x)$, $x \in \bar{\Omega}$ и $f(t, x)$ ($t \in (0, 1)$, $x \in \Omega$) — заданные гладкие функции, $a_r(x) > 0$, а \vec{m} — вектор нормали к S .

Аналогично, задачу (1.13) можно записать в абстрактной форме (1.1) в гильбертовом пространстве $H = L_2(\bar{\Omega})$ квадратично интегрируемых функций на $\bar{\Omega}$ с самосопряженным положительно определенным оператором $A = A^x$:

$$A^x u(x) = - \sum_{r=1}^m (a_r(x) u_{x_r})_{x_r} + \delta u(x) \quad (1.14)$$

с областью определения $D(A^x) = \left\{ u(x) : u, u_{x_r}, (a_r(x) u_{x_r})_{x_r} \in L_2(\bar{\Omega}), 1 \leq r \leq m, \frac{\partial u}{\partial \vec{m}} = 0, x \in S \right\}$.

Здесь $f(t) = f(t, x)$ и $u(t) = u(t, x)$ — известная и неизвестная абстрактные функции на $\bar{\Omega}$ со значениями в $L_2(\bar{\Omega})$. Из теоремы 1.1 и неравенства коэрцитивности для решения эллиптической дифференциальной задачи в $L_2(\bar{\Omega})$ вытекает следующая теорема об устойчивости задачи (1.13).

Теорема 1.4 (см. [20]). Для решения задачи (1.13) имеют место неравенства устойчивости

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \|u(t, \cdot)\|_{L_2(\bar{\Omega})} \leq M_5 \left[\max_{0 \leq t \leq 1} \|f(t, \cdot)\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|\varphi\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|\psi\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|\xi\|_{L_2(\bar{\Omega})} \right] \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq 1} \|u(t, \cdot)\|_{W_2^2(\bar{\Omega})} + \max_{0 \leq t \leq 1} \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(t, \cdot) \right\|_{L_2(\bar{\Omega})} &\leq \\ &\leq M_5 \left[\max_{0 \leq t \leq 1} \|f_t(t, \cdot)\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|f(0, \cdot)\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|\psi\|_{W_2^2(\bar{\Omega})} + \|\xi\|_{W_2^1(\bar{\Omega})} \right], \end{aligned} \quad (1.16)$$

где M_5 не зависит от $f(t, x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\xi(x)$.

В настоящей работе исследуются устойчивые разностные схемы, применяемые для приближенного решения задачи (1.1) при условии, что выполнено неравенство (1.2). Для приближенного решения задачи (1.1) представлена устойчивая трехшаговая разностная схема. Однако оценить устойчивость решения этой разностной схемы при предположении (1.2) пока не удалось. Применяя операторный подход монографии [19], справедливость утверждения основной теоремы об устойчивости для указанной разностной схемы удалось установить при следующем, более сильном, чем (1.2), предположении:

$$1 > |\alpha| |\beta| + |\alpha| + |\beta|. \quad (1.17)$$

Оценки устойчивости решений разностных схем получены для приближенных решений трех нелокальных краевых задач для уравнений в частных производных третьего порядка, возникающих в приложениях. Однако общность подхода, рассматриваемого в настоящей работе, позволяет рассматривать и более широкий класс многомерных задач. Представлены соответствующие численные результаты.

2. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ

Рассмотрим следующую разностную схему первого порядка точности:

$$\begin{cases} \frac{u_{k+2} - 3u_{k+1} + 3u_k - u_{k-1}}{\tau^3} + A \frac{u_{k+2} - u_{k+1}}{\tau} = f_k, \\ f_k = f(t_k), \quad 1 \leq k \leq N-2, \quad N\tau = \bar{1}, \\ u_0 = \gamma u_m + \varphi, \quad \frac{u_1 - u_0}{\tau} = \alpha \frac{u_m - u_{m-1}}{\tau} + \psi, \\ (I + \tau^2 A) \frac{u_2 - 2u_1 + u_0}{\tau^2} = \beta \frac{u_m - 2u_{m-1} + u_{m-2}}{\tau^2} + \xi. \end{cases} \quad (2.1)$$

Она предназначена для приближенного решения нелокальной краевой задачи (1.1). Здесь и далее используется обозначение $m = \lceil \lambda/\tau \rceil$.

Теорема 2.1. *Предположим, что $\lambda \geq 2\tau$, $\varphi \in H$, $\psi \in D(A)$, $\xi \in D(A^{1/2})$ и выполняется предположение (1.17). Тогда решение разностной схемы (2.1) удовлетворяет следующим неравенствам устойчивости:*

$$\max_{0 \leq k \leq N} \|u_k\|_H \leq M_6 \left\{ \max_{1 \leq k \leq N-2} \|A^{-1/2} f_k\|_H + \|A^{-1} \xi\|_H + \|A^{-1/2} \psi\|_H + \|\varphi\|_H \right\}, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq N-2} \left\| \frac{u_{k+2} - 3u_{k+1} + 3u_k - u_{k-1}}{\tau^3} \right\|_H + \max_{1 \leq k \leq N-2} \left\| A \frac{u_{k+2} - u_{k+1}}{\tau} \right\|_H &\leq \\ &\leq M_7 \left\{ \max_{2 \leq k \leq N-2} \frac{\|f_k - f_{k-1}\|_H}{\tau} + \|f_1\|_H + \|A^{1/2} \xi\|_H + \|A\psi\|_H \right\}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где M_6, M_7 не зависят от $f_k, 1 \leq k \leq N-2$, и φ, ψ, ξ .

Доказательство. Очевидно, трехшаговую разностную схему (2.1) можно переписать в виде эквивалентной ей системы из одношаговой и двухшаговой разностных схем:

$$\begin{cases} \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} = v_{k-1}, \quad u_0 = \gamma u_m + \varphi, \quad 1 \leq k \leq N, \\ \frac{v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}}{\tau^2} + Av_{k+1} = f_k, \quad 1 \leq k \leq N-2, \\ v_0 = \alpha v_{m-1} + \psi, \quad (I + \tau^2 A) \frac{v_1 - v_0}{\tau} = \beta \frac{v_{m-1} - v_{m-2}}{\tau} + \xi. \end{cases}$$

Применяя операторный подход из монографии [19], можно установить оценки устойчивости

$$\max_{0 \leq k \leq N-1} \|v_k\|_H \leq M \left\{ \max_{1 \leq k \leq N-2} \|A^{-1/2} f_k\|_H + \|A^{-1} \xi\|_H + \|A^{-1/2} \psi\|_H + \|\varphi\|_H \right\}, \quad (2.4)$$

$$\max_{1 \leq k \leq N-2} \left\| \frac{v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}}{\tau^2} \right\|_H + \max_{1 \leq k \leq N-2} \|Av_{k+1}\|_H \leq$$

$$\leq M \left\{ \max_{2 \leq k \leq N-2} \frac{\|f_k - f_{k-1}\|_H}{\tau} + \|f_1\|_H + \|A^{1/2}\xi\|_H + \|A\psi\|_H \right\} \quad (2.5)$$

для решений двухшаговых разностных схем

$$\begin{cases} \frac{v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}}{\tau^2} + Av_{k+1} = f_k, & 1 \leq k \leq N-2, \\ v_0 = \alpha v_{m-1} + \psi, & (I + \tau^2 A) \frac{v_1 - v_0}{\tau} = \beta \frac{v_{m-1} - v_{m-2}}{\tau} + \xi. \end{cases}$$

Понятно, что для решения одношаговой разностной схемы $\frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} = v_{k-1}$, $u_0 = \gamma u_m + \varphi$, $1 \leq k \leq N$, справедлива формула $u_k = \frac{\gamma}{1-\gamma} \sum_{i=0}^{m-1} v_i \tau + \sum_{i=0}^{k-1} v_i \tau + \frac{1}{1-\gamma} \varphi$. Отсюда получаем следующие оценки:

$$\max_{0 \leq k \leq N} \|u_k\|_H \leq M_{10} \left\{ \max_{0 \leq k \leq N-1} \|v_k\|_H + \|\varphi\|_H \right\}, \quad (2.6)$$

$$\max_{1 \leq k \leq N-2} \left\| A \frac{u_{k+2} - u_{k+1}}{\tau} \right\|_H \leq M_{11} \max_{1 \leq k \leq N-2} \|Av_{k+1}\|_H. \quad (2.7)$$

Оценка (2.2) следует из оценок (2.4) и (2.6). Применяя разностное уравнение

$$\frac{u_{k+2} - 3u_{k+1} + 3u_k - u_{k-1}}{\tau^3} + A \frac{u_{k+2} - u_{k+1}}{\tau} = f_k,$$

неравенство треугольника и оценку (2.6), получаем, что

$$\max_{1 \leq k \leq N-2} \left\| \frac{u_{k+2} - 3u_{k+1} + 3u_k - u_{k-1}}{\tau^3} \right\|_H \leq M \left\{ \max_{1 \leq k \leq N-2} \|Av_{k+1}\|_H + \max_{2 \leq k \leq N-2} \frac{\|f_k - f_{k-1}\|_H}{\tau} + \|f_1\|_H \right\}. \quad (2.8)$$

Следовательно, оценка (2.3) следует из оценок (2.5), (2.7) и (2.8), что и завершает доказательство теоремы 2.1. \square

Отметим, что при выполнении условий теоремы 2.1 не удается получить оценку устойчивости для решения разностной схемы

$$\begin{cases} \frac{u_{k+2} - 3u_{k+1} + 3u_k - u_{k-1}}{\tau^3} + A \frac{u_{k+2} - u_{k+1}}{\tau} = f_k, \\ f_k = f(t_k), & 1 \leq k \leq N-2, \quad N\tau = 1, \\ u_0 = \gamma u_m + \varphi, & \frac{u_1 - u_0}{\tau} = \alpha \frac{u_m - u_{m-1}}{\tau} + \psi, \\ \frac{u_2 - 2u_1 + u_0}{\tau^2} = \beta \frac{u_m - 2u_{m-1} + u_{m-2}}{\tau^2} + \xi. \end{cases}$$

Приближение $(I + \tau^2 A) \frac{u_2 - 2u_1 + u_0}{\tau^2}$ для $u''(0)$ лучше, чем $\frac{u_2 - 2u_1 + u_0}{\tau^2}$, с точки зрения устойчивости разностной схемы (2.1) и позволяет получить утверждение теоремы 2.1. Такой подход для гиперболических уравнений впервые был применен в работе [18] (более подробно см. в [19]).

3. ПРИЛОЖЕНИЯ

В этом разделе рассматриваются приложения теоремы 2.1. Вначале рассматривается следующая нелокальная краевая задача (1.5). Задачу дискретизации задачи (1.5) разобьем на два этапа. На первом определим пространственную сетку $[0, l]_h = \{x = x_n : x_n = nh, 0 \leq n \leq M, Mh = l\}$ и введем гильбертовы пространства $L_{2h} = L_2([0, l]_h)$ и $W_{2h}^2 = W_2^2([0, l]_h)$ сеточных функций $\varphi^h(x) = \{\varphi_n\}_0^M$, определенных на $[0, l]_h$, с нормами $\|\varphi^h\|_{L_{2h}} = \left(\sum_{x \in [0, l]_h} |\varphi^h(x)|^2 h \right)^{1/2}$ и $\|\varphi^h\|_{W_{2h}^2} =$

$\|\varphi^h\|_{L_{2h}} + \left(\sum_{x \in [0, l]_h} |\varphi_{x\bar{x},j}^h(x)|^2 h \right)^{1/2}$ соответственно.

Дифференциальному оператору A^x , определенному формулами (1.5), поставим в соответствие разностный оператор A_h^x следующим образом:

$$A_h^x \varphi^h(x) = \{-(a(x)\varphi_{\bar{x}})_{x,n} + \delta\varphi_n\}_1^{M-1}. \quad (3.1)$$

Этот оператор действует в пространстве сеточных функций $\varphi^h(x) = \{\varphi_n\}_0^M$, удовлетворяющих условиям $\varphi_0 = \varphi_M$, $\varphi_1 - \varphi_0 = \varphi_M - \varphi_{M-1}$. Хорошо известно, что A_h^x — самосопряженный положительно определенный оператор в L_{2h} . С помощью A_h^x получаем нелокальную краевую задачу

$$\begin{cases} \frac{d^3 u^h(t, x)}{dt^3} + A_h^x \frac{du^h(t, x)}{dt} = f^h(t, x), & 0 < t < 1, \quad x \in [0, l]_h, \\ u^h(0, x) = \gamma u^h(\lambda, x) + \varphi^h(x), \quad u_t^h(0, x) = \alpha u_t^h(\lambda, x) + \psi^h(x), \\ u_{tt}^h(0, x) = \beta u_{tt}^h(\lambda, x) + \xi^h(x), \quad x \in [0, l]_h. \end{cases} \quad (3.2)$$

На втором шаге заменяем задачу (3.2) на разностную схему (2.1):

$$\begin{cases} \frac{u_{k+2}^h(x) - 3u_{k+1}^h(x) + 3u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau^3} + A_h^x \frac{u_{k+2}^h(x) - u_{k+1}^h(x)}{\tau} = f_k^h(x), \\ f_k^h(x) = f^h(t_k, x), \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N-2, \quad x \in [0, l]_h, \quad N\tau = 1, \\ u_0^h(x) = \gamma u_m^h(x) + \varphi^h(x), \quad \frac{u_1^h(x) - u_0^h(x)}{\tau} = \alpha \frac{u_m^h(x) - u_{m-1}^h(x)}{\tau} + \psi^h(x), \\ (I_h + \tau^2 A_h^x) \frac{u_2^h(x) - 2u_1^h(x) + u_0^h(x)}{\tau^2} = \beta \frac{u_m^h(x) - 2u_{m-1}^h(x) + u_{m-2}^h(x)}{\tau^2} + \xi^h(x), \quad x \in [0, l]_h. \end{cases} \quad (3.3)$$

Теорема 3.1. *Предположим, что $\lambda \geq 2\tau$ и выполнено условие (1.17). Тогда для решения $\{u_k^h(x)\}_0^N$ задачи (3.3) имеют место оценки устойчивости*

$$\max_{0 \leq k \leq N} \|u_k^h\|_{L_{2h}} \leq M_{13} \left\{ \max_{1 \leq k \leq N-2} \|f_k^h\|_{L_{2h}} + \|\varphi^h\|_{L_{2h}} + \|\psi^h\|_{L_{2h}} + \|\xi^h\|_{L_{2h}} \right\},$$

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq N-2} \left\| \frac{u_{k+2}^h - 3u_{k+1}^h + 3u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau^3} \right\|_{L_{2h}} + \max_{1 \leq k \leq N-2} \left\| \frac{u_{k+2}^h - u_{k+1}^h}{\tau} \right\|_{W_{2h}^2} \leq \\ & \leq M_{14} \left\{ \max_{2 \leq k \leq N-2} \left\| \frac{1}{\tau} (f_k^h - f_{k-1}^h) \right\|_{L_{2h}} + \|f_1^h\|_{L_{2h}} + \|\psi^h\|_{W_{2h}^2} + \|\xi^h\|_{W_{2h}^1} \right\}, \end{aligned}$$

где M_{13} и M_{14} не зависят ни от $\varphi^h(x)$, $\psi^h(x)$, $\xi^h(x)$, ни от $f_k^h(x)$, $1 \leq k \leq N-2$.

Доказательство. В гильбертовом пространстве L_{2h} разностную схему (3.3) можно записать в абстрактной форме

$$\begin{cases} \frac{u_{k+2}^h - 3u_{k+1}^h + 3u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau^3} + A_h \frac{u_{k+2}^h - u_{k+1}^h}{\tau} = f_k^h, \\ 1 \leq k \leq N-2, \quad N\tau = 1, \\ u_0^h = \gamma u_m^h + \varphi^h, \quad \frac{u_1^h - u_0^h}{\tau} = \alpha \frac{u_m^h - u_{m-1}^h}{\tau} + \psi^h, \\ (I_h + \tau^2 A_h) \frac{u_2^h - 2u_1^h + u_0^h}{\tau^2} = \beta \frac{u_m^h - 2u_{m-1}^h + u_{m-2}^h}{\tau^2} + \xi^h, \end{cases}$$

где $A_h = A_h^x$ — самосопряженный положительно определенный оператор, заданный формулой (3.1), а $f_k^h = f_k^h(x)$ и $u_k^h = u_k^h(x)$ — известная и неизвестная абстрактные сеточные функции, определенные на $[0, l]_h$, со значениями в $H = L_{2h}$. Значит, оценки теоремы 3.1 следуют из оценок (2.2) и (2.3), что завершает доказательство теоремы 3.1. \square

Далее рассмотрим нелокальную краевую задачу (1.9). Разобьем дискретизацию задачи (1.9) на два этапа. На первом определим пространственную сетку $\bar{\Omega}_h = \{x = x_r = (h_1 j_1, \dots, h_n j_n), j = (j_1, \dots, j_n), 0 \leq j_r \leq N_r, N_r h_r = 1, r = 1, \dots, n\}$, $\Omega_h = \bar{\Omega}_h \cap \Omega$, $S_h = \bar{\Omega}_h \cap S$ (это обозначение будет использоваться и далее).

Введем банаховы пространства $L_{2h} = L_2(\bar{\Omega}_h)$ и $W_{2h}^2 = W_2^2(\bar{\Omega}_h)$ сеточных функций $\varphi^h(x) = \{\varphi(h_1 r_1, \dots, h_m r_m)\}$, определенных на $\bar{\Omega}_h$, с нормами $\|\varphi^h\|_{L_{2h}} = \left(\sum_{x \in \bar{\Omega}_h} |\varphi^h(x)|^2 h_1 \cdots h_m \right)^{1/2}$ и

$$\|\varphi^h\|_{W_{2h}} = \|\varphi^h\|_{L_{2h}} + \left(\sum_{x \in \bar{\Omega}_h} \sum_{r=1}^m |(\varphi^h)_{x_r \bar{x}_r, j_r}|^2 h_1 \cdots h_m \right)^{1/2} \text{ соответственно.}$$

Дифференциальному оператору A^x , определенному соотношениями (1.9), поставим в соответствие разностный оператор A_h^x , определенный следующим образом:

$$A_h^x u^h = - \sum_{r=1}^n \left(\alpha_r(x) u_{x_r}^h \right)_{x_r, j_r}. \quad (3.4)$$

Это самосопряженный положительно определенный оператор в L_{2h} , действующий в пространстве сеточных функций $u^h(x)$, удовлетворяющих условиям $u^h(x) = 0$ для всех x из S_h . С помощью разностного оператора A_h^x получаем следующую нелокальную краевую задачу:

$$\begin{cases} \frac{d^3 u^h(t, x)}{dt^3} + A_h^x \frac{du^h(t, x)}{dt} = f^h(t, x), & 0 < t < 1, \quad x \in [0, l]_h, \\ u^h(0, x) = \gamma u^h(\lambda, x) + \varphi^h(x), \quad u_t^h(0, x) = \alpha u_t^h(\lambda, x) + \psi^h(x), \\ u_{tt}^h(0, x) = \beta u_{tt}^h(\lambda, x) + \xi^h(x), \quad x \in [0, l]_h. \end{cases} \quad (3.5)$$

На следующем этапе задача (3.5) заменяется разностной схемой (2.1) для бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{u_{k+2}^h(x) - 3u_{k+1}^h(x) + 3u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau^3} + A_h^x \frac{u_{k+2}^h(x) - u_{k+1}^h(x)}{\tau} = f_k^h(x), \\ f_k^h(x) = f^h(t_k, x), \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N-2, \quad x \in \Omega_h, \quad N\tau = 1, \\ u_0^h(x) = \gamma u_m^h(x) + \varphi^h(x), \quad \frac{u_1^h(x) - u_0^h(x)}{\tau} = \alpha \frac{u_m^h(x) - u_{m-1}^h(x)}{\tau} + \psi^h(x), \\ (I_h + \tau^2 A_h^x) \frac{u_2^h(x) - 2u_1^h(x) + u_0^h(x)}{\tau^2} = \beta \frac{u_m^h(x) - 2u_{m-1}^h(x) + u_{m-2}^h(x)}{\tau^2} + \xi^h(x), \quad x \in \bar{\Omega}_h. \end{cases} \quad (3.6)$$

Теорема 3.2. *Предположим, что $\lambda \geq 2\tau$ и выполнено условие (1.17). Тогда для решения $\{u_k^h(x)\}_0^N$ задачи (3.6) выполняются оценки устойчивости*

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq k \leq N} \|u_k^h\|_{L_{2h}} &\leq M_1(\gamma) \left\{ \max_{1 \leq k \leq N-2} \|f_k^h\|_{L_{2h}} + \|\varphi^h\|_{L_{2h}} + \|\psi^h\|_{L_{2h}} + \|\xi^h\|_{L_{2h}} \right\}, \\ \max_{1 \leq k \leq N-2} \left\| \frac{u_{k+2}^h - 3u_{k+1}^h + 3u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau^3} \right\|_{L_{2h}} &+ \max_{1 \leq k \leq N-2} \left\| \frac{u_{k+2}^h - u_{k+1}^h}{\tau} \right\|_{W_{2h}^2} \leq \\ &\leq M_2 \left\{ \max_{2 \leq k \leq N-2} \left\| \frac{1}{\tau} (f_k^h - f_{k-1}^h) \right\|_{L_{2h}} + \|f_1^h\|_{L_{2h}} + \|\psi^h\|_{W_{2h}^2} + \|\xi^h\|_{W_{2h}^1} \right\}, \end{aligned}$$

где $M_1(\gamma)$ и M_2 не зависят ни от $\varphi^h(x), \psi^h(x), \xi^h(x)$, ни от $f_k^h(x), 1 \leq k \leq N-2$.

Доказательство. В гильбертовом пространстве $L_{2h} = L_2(\bar{\Omega}_h)$ с самосопряженным положительно определенным оператором $A_h = A_h^x$ разностную схему (3.6) можно записать в абстрактной форме (2.1) посредством формулы (3.4), где $f_k^h = f_k^h(x)$ и $u_k^h = u_k^h(x)$ — известная и неизвестная абстрактные сеточные функции, определенные на $\bar{\Omega}_h$, со значениями в $H = L_{2h}$. Следовательно, оценки теоремы 3.2 вытекают из оценок (2.2)-(2.3) и следующей теоремы о неравенстве коэрцитивности для решений эллиптической разностной задачи в L_{2h} . \square

Теорема 3.3. *Для решений эллиптической разностной задачи (см. [8])*

$$\begin{cases} A_h^x u^h(x) = \omega^h(x), \quad x \in \Omega_h, \\ u^h(x) = 0, \quad x \in S_h, \end{cases}$$

выполняется неравенство коэрцитивности

$$\sum_{r=1}^n \left\| u^h_{x_r x_r} \right\|_{L_{2h}} \leq M_{17} \|\omega^h\|_{L_{2h}},$$

где M_{17} не зависит ни от h , ни от ω^h .

Наконец, рассмотрим нелокальную краевую задачу (1.13). Разобьем дискретизацию задачи (1.13) на два этапа. На первом этапе дифференциальному оператору A^x , определенному соотношениями (1.13), поставим в соответствие разностный оператор A_h^x , действующий по формуле

$$A_h^x u^h = - \sum_{r=1}^n \left(\alpha_r(x) u_{x_r}^h \right)_{x_r, j_r} + \delta u^h. \quad (3.7)$$

Это самосопряженный положительно определенный оператор в L_{2h} , действующий в пространстве сеточных функций $u^h(x)$, удовлетворяющих условию $D^h u^h(x) = 0$ для всех x из S_h , где D^h — приближение оператора $\frac{\partial}{\partial \bar{p}}$. При помощи разностного оператора A_h^x получаем следующую нелокальную краевую задачу:

$$\begin{cases} \frac{d^3 u^h(t, x)}{dt^3} + A_h^x \frac{du^h(t, x)}{dt} = f^h(t, x), & 0 < t < 1, \quad x \in \Omega_h, \\ u^h(0, x) = \gamma u^h(\lambda, x) + \varphi^h(x), \quad u_t^h(0, x) = \alpha u_t^h(\lambda, x) + \psi^h(x), \\ u_{tt}^h(0, x) = \beta u_{tt}^h(\lambda, x) + \xi^h(x), & x \in \bar{\Omega}_h. \end{cases} \quad (3.8)$$

На втором этапе задача (3.8) заменяется разностной схемой (2.1) для бесконечной системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{u_{k+2}^h(x) - 3u_{k+1}^h(x) + 3u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau^3} + A_h^x \frac{u_{k+2}^h(x) - u_{k+1}^h(x)}{\tau} = f_k^h(x), \\ f_k^h(x) = f^h(t_k, x), \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N-2, \quad x \in \Omega_h, \quad N\tau = 1, \\ u_0^h(x) = \gamma u_m^h(x) + \varphi^h(x), \quad \frac{u_1^h(x) - u_0^h(x)}{\tau} = \alpha \frac{u_m^h(x) - u_{m-1}^h(x)}{\tau} + \psi^h(x), \\ (I_h + \tau^2 A_h^x) \frac{u_2^h(x) - 2u_1^h(x) + u_0^h(x)}{\tau^2} = \beta \frac{u_m^h(x) - 2u_{m-1}^h(x) + u_{m-2}^h(x)}{\tau^2} + \xi^h(x), \quad x \in \bar{\Omega}_h. \end{cases} \quad (3.9)$$

Теорема 3.4. *Предположим, что $\lambda \geq 2\tau$ и выполнено условие (1.17). Тогда для решения $\{u_k^h(x)\}_0^N$ задачи (3.9) выполняются оценки устойчивости*

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq k \leq N} \|u_k^h\|_{L_{2h}} &\leq M_{18} \left\{ \max_{1 \leq k \leq N-2} \|f_k^h\|_{L_{2h}} + \|\varphi^h\|_{L_{2h}} + \|\psi^h\|_{L_{2h}} + \|\xi^h\|_{L_{2h}} \right\}, \\ \max_{1 \leq k \leq N-2} \left\| \frac{u_{k+2}^h - 3u_{k+1}^h + 3u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau^3} \right\|_{L_{2h}} &+ \max_{1 \leq k \leq N-2} \left\| \frac{u_{k+2}^h - u_{k+1}^h}{\tau} \right\|_{W_{2h}^2} \leq \\ &\leq M_{19} \left\{ \max_{2 \leq k \leq N-2} \left\| \frac{1}{\tau} (f_k^h - f_{k-1}^h) \right\|_{L_{2h}} + \|f_1^h\|_{L_{2h}} + \|\psi^h\|_{W_{2h}^2} + \|\xi^h\|_{W_{2h}^1} \right\}, \end{aligned}$$

где M_{18} и M_{19} не зависят ни от $\varphi^h(x)$, $\psi^h(x)$, $\xi^h(x)$, ни от $f_k^h(x)$, $1 \leq k \leq N-2$.

Доказательство. В гильбертовом пространстве $L_{2h} = L_2(\bar{\Omega}_h)$ с самосопряженным положительно определенным оператором $A_h = A_h^x$ разностную схему (3.9) можно записать в абстрактной форме (2.1) посредством формулы (3.7), где $f_k^h = f_k^h(x)$ и $u_k^h = u_k^h(x)$ — известная и неизвестная абстрактные сеточные функции, определенные на $\bar{\Omega}_h$, со значениями в $H = L_{2h}$. Следовательно, оценки теоремы 3.4 вытекают из оценок (2.2)-(2.3) и следующей теоремы о неравенстве коэрцитивности для решений эллиптической разностной задачи в L_{2h} . \square

Теорема 3.5. Для решений эллиптической разностной задачи (см. [8])

$$\begin{cases} A_h^x u^h(x) = \omega^h(x), & x \in \Omega_h, \\ D^h u^h(x) = 0, & x \in S_h, \end{cases}$$

справедливо неравенство коэрцитивности

$$\sum_{r=1}^n \left\| u^h_{x_r x_{\bar{r}}} \right\|_{L_{2h}} \leq M_{20} \|\omega^h\|_{L_{2h}},$$

где M_{20} не зависит ни от h , ни от ω^h .

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В случаях, когда аналитические методы не работают надлежащим образом, в прикладной математике важную роль играют численные методы отыскания приближенных решений уравнений в частных производных. В этом разделе численным образом представлены разностные схемы первого порядка точности, предназначенные для решения одномерных и двумерных уравнений в частных производных третьего порядка. Для решения задачи применяется гауссов метод исключения. Теоретические утверждения относительно решений указанных разностных схем опираются на результаты вычислительных экспериментов.

4.1. Одномерный случай. В качестве численного эксперимента, начнем наше рассмотрение с нелокальной краевой задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^3 u(t, x)}{\partial t^3} - \frac{\partial^3 u(t, x)}{\partial t \partial x^2} = f(t, x), \\ f(t, x) = -2e^{-t} \cos x, & 0 < t < 1, \quad 0 < x < \pi, \\ u(0, x) = \frac{1}{4} u(1, x) + \left(1 - \frac{1}{4e}\right) \cos x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u_t(0, x) = \frac{1}{4} u_t(1, x) - \left(1 - \frac{1}{4e}\right) \cos x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u_{tt}(0, x) = \frac{1}{4} u_{tt}(1, x) + \left(1 - \frac{1}{4e}\right) \cos x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u_{tx}(t, 0) = u_{tx}(t, \pi) = 0, & 0 \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (4.1)$$

для одномерного уравнения в частных производных третьего порядка. Точное решение задачи (4.1) есть $u(t, x) = e^{-t} \cos x$.

Получаем следующую разностную схему первого порядка точности, предназначенную для приближенного решения нелокальной краевой задачи (4.1):

$$\begin{cases} \frac{u_n^{k+2} - 3u_n^{k+1} + 3u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau^3} - \frac{u_{n+1}^{k+2} - u_{n+1}^{k+1} - 2(u_n^{k+2} - u_n^{k+1}) + u_{n-1}^{k+2} - u_{n-1}^{k+1}}{\tau h^2} = f(t_k, x_n), \\ f(t_k, x_n) = -2e^{-t_k} \cos x_n, \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N-2, \quad 1 \leq n \leq M-1, \\ N\tau = 1, \quad x_n = nh, \quad 1 \leq n \leq M-1, \quad Mh = \pi, \\ u_n^0 = \frac{1}{4} u_n^N + \left(1 - \frac{1}{4e}\right) \cos x_n, \quad 0 \leq n \leq M, \\ \frac{u_n^1 - u_n^0}{\tau} = \frac{1}{4} \frac{u_n^N - u_n^{N-1}}{\tau} - \left(1 - \frac{1}{4e}\right) \cos x_n, \quad 0 \leq n \leq M, \\ \frac{u_n^2 - 2u_n^1 + u_n^0}{\tau^2} = \frac{1}{4} \frac{u_n^N - 2u_n^{N-1} + u_n^{N-2}}{\tau^2} + \left(1 - \frac{1}{4e}\right) \cos x_n, \quad 0 \leq n \leq M, \\ u_1^k - u_0^k - u_1^{k-1} + u_0^{k-1} = 0, \quad u_M^k - u_{M-1}^k - u_M^{k-1} + u_{M-1}^{k-1} = 0, \quad 1 \leq k \leq N. \end{cases} \quad (4.2)$$

Это — система алгебраических уравнений, которую можно записать в матричном виде

$$\begin{cases} A u_{n+1} + B u_n + C u_{n-1} = D \varphi_n, & 1 \leq n \leq M-1, \\ P u_0 = Q u_1 + T, \quad P u_M = Q u_{M-1} - T. \end{cases} \quad (4.3)$$

где

$$T = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{4e} \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)},$$

$$A = C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -a & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & a & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)},$$

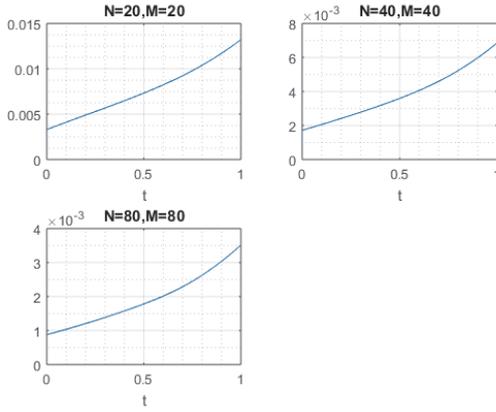
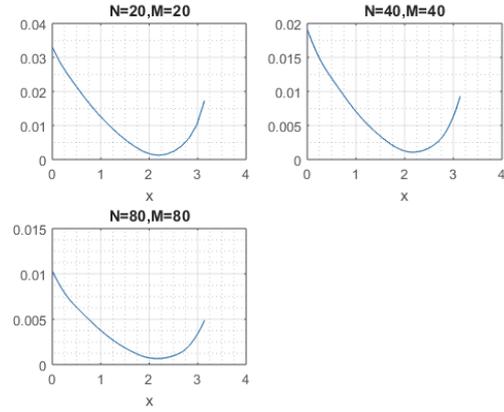
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ b & -3b & 3b - c & b - c & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & -3b & 3b - c & c - b & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & -3b & 3b - c & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 3b - c & c - b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & -3b & 3b - c & c - b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & b & -3b & 3b - c & c - b \\ -\frac{1}{\tau} & \frac{1}{\tau} & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \frac{1}{4\tau} & -\frac{1}{4\tau} \\ \frac{1}{\tau^2} & -\frac{2}{\tau^2} & \frac{1}{\tau^2} & 0 & 0 & \cdot & 0 & -\frac{1}{4\tau^2} & \frac{1}{2\tau^2} & -\frac{1}{4\tau^2} \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)},$$

$$a = \frac{1}{\tau h^2}, \quad b = -\frac{1}{\tau^3}, \quad c = \frac{2}{\tau h^2},$$

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \varphi_n^0 \\ \cdot \\ \varphi_n^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_n^0 = \left(1 - \frac{1}{4e}\right) \cos x_n, 0 \leq n \leq M, \\ \varphi_n^k = f(t_k, x_n) = -2e^{-t_k} \cos x_n, \\ t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-2, 1 \leq n \leq M-1, \\ \varphi_n^{N-1} = -\left(1 - \frac{1}{4e}\right) \cos x_n, 0 \leq n \leq M, \\ \varphi_n^N = \left(1 - \frac{1}{4e}\right) \cos x_n, 0 \leq n \leq M \end{array} \right.$$

$D = I_{N+1}$ – тождественная матрица,

$$u_s = \begin{bmatrix} u_s^0 \\ \cdot \\ u_s^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}, \quad s = n, n \pm 1.$$

Рис. 4.1. Зависимость погрешности от t .Рис. 4.2. Зависимость погрешности от x .

Поэтому, чтобы решить матричное уравнение (4.3), мы используем модифицированный метод исключения Гаусса. Решение матричного уравнения ищется в виде

$$u_n = \alpha_{n+1}u_{n+1} + \beta_{n+1}, \quad n = M - 1, \dots, 1, 0, \quad (4.4)$$

где $u_M = (P - Q\alpha_M)^{-1}(Q\beta_M - T)$, α_j ($j = 2, \dots, M$) — квадратные матрицы размерности $(N + 1) \times (N + 1)$, β_j ($j = 2, \dots, M$) — матрицы-столбцы размерности $(N + 1) \times 1$, $\alpha_1 = P^{-1}Q$, $\beta_1 = P^{-1}T$,

$$\alpha_{n+1} = -(B + C\alpha_n)^{-1}A, \quad (4.5)$$

$$\beta_{n+1} = (B + C\alpha_n)^{-1}(D\varphi_n - C\beta_n), \quad n = 1, \dots, M - 1.$$

Погрешность численного решения вычисляется по формуле

$$E_M^N = \max_{0 \leq k \leq N, 0 \leq n \leq M} |u(t_k, x_n) - u_n^k|, \quad (4.6)$$

где $u(t_k, x_n)$ — точное решение в точке (t_k, x_n) , а u_n^k — численное решение в той же точке. Результаты этих вычислений приведены в следующей таблице:

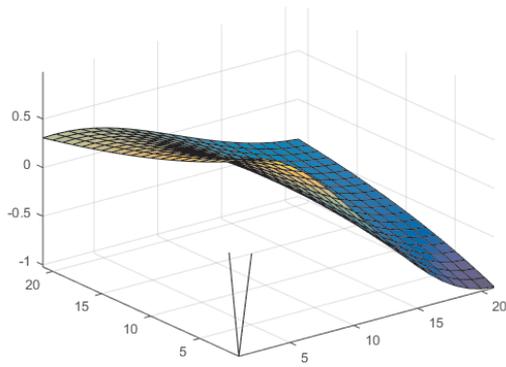
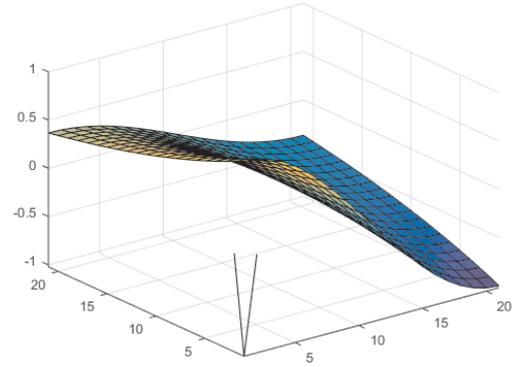
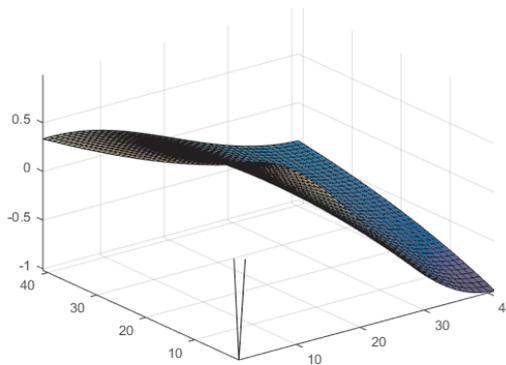
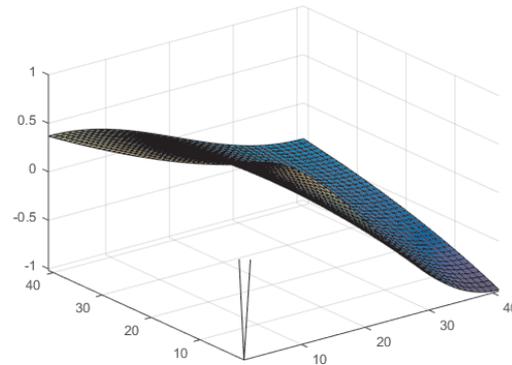
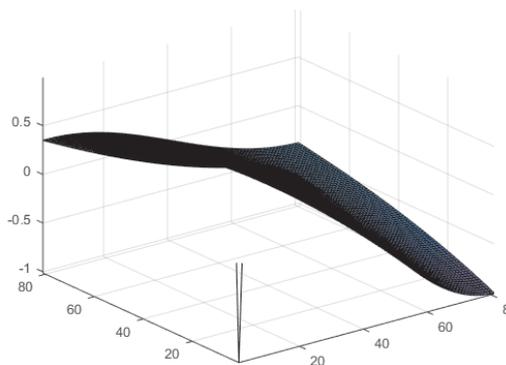
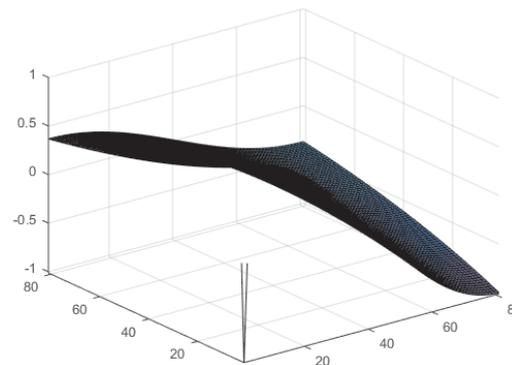
Разностные схемы/ N, M	20, 20	40, 40	80, 80
Разностная схема (4.2)	0,0609	0,0342	0,0181

Из численных результатов, приведенных в таблице (4.7), видно, что, если N и M удваиваются, то ошибка уменьшается примерно в два раза (в случае разностной схемы первого порядка).

На рис. 4.1 и 4.2 показаны графики точного и приближенного решений, а также график погрешности во всей области нахождения неизвестных функций. Как видно на рис. 4.2, погрешность уменьшается приблизительно в два раза вместе с уменьшением вдвое размера шагов по временной и пространственной координатам.

4.2. Двумерный случай. Теперь рассмотрим нелокальную краевую задачу

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^3 u(t, x, y)}{\partial t^3} - \frac{\partial^3 u(t, x, y)}{\partial t \partial x^2} - \frac{\partial^3 u(t, x, y)}{\partial t \partial y^2} = f(t, x, y), \\ f(t, x, y) = -3e^{-t} \sin x \sin y, \quad 0 < t < 1, \quad 0 < x < \pi, \\ u(0, x, y) = \frac{1}{4}u(1, x, y) + \left(1 - \frac{1}{4e}\right) \sin x \sin y, \quad 0 \leq x, y \leq \pi, \\ u_t(0, x, y) = \frac{1}{4}u_t(1, x, y) - \left(1 - \frac{1}{4e}\right) \sin x \sin y, \quad 0 \leq x, y \leq \pi, \\ u_{tt}(0, x, y) = \frac{1}{4}u_{tt}(1, x, y) + \left(1 - \frac{1}{4e}\right) \sin x \sin y, \quad 0 \leq x, y \leq \pi, \\ u_t(t, 0, y) = u_t(t, \pi, y) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, 0 \leq y \leq \pi, \\ u_t(t, x, 0) = u_t(t, x, \pi) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq \pi \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Рис. 4.3. Приближенное решение, $M = N = 20$.Рис. 4.4. Точное решение, $M = N = 20$.Рис. 4.5. Приближенное решение, $M = N = 40$.Рис. 4.6. Точное решение, $M = N = 40$.Рис. 4.7. Приближенное решение, $M = N = 80$.Рис. 4.8. Точное решение, $M = N = 80$.

для уравнения в частных производных третьего порядка. Точное решение задачи (4.8) есть $u(t, x) = e^{-t} \sin x \sin y$.

Учитывая, что $u_t(t, 0, y) = u_t(t, \pi, y) = 0$, получим $u(t, 0, y) = u(0, 0, y) = u(1, 0, y)$ и $u(t, \pi, y) = u(0, \pi, y) = u(1, \pi, y)$. Тогда из равенства $u(0, x, y) = \frac{1}{4}u(1, x, y) + \left(1 - \frac{1}{4e}\right) \sin x \sin y$ при $0 \leq x, y \leq \pi$ следует $u(t, 0, y) = u(t, \pi, y) = 0$. Аналогично получим равенства $u(t, x, 0) = u(t, x, \pi) = 0$, $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq x \leq \pi$ из условия $u_t(t, x, 0) = u_t(t, x, \pi) = 0$, $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq x \leq \pi$, а также из $u(0, x, y) = \frac{1}{4}u(1, x, y) + \left(1 - \frac{1}{4e}\right) \sin x \sin y$, $0 \leq x, y \leq \pi$, следует, что $u(t, x, 0) = u(t, x, \pi) = 0$, $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq x \leq \pi$.

Тогда задачу (4.8) можно переписать в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^3 u(t, x, y)}{\partial t^3} - \frac{\partial^3 u(t, x, y)}{\partial t \partial x^2} - \frac{\partial^3 u(t, x, y)}{\partial t \partial y^2} = f(t, x, y), \\ f(t, x, y) = -3e^{-t} \sin x \sin y, \quad 0 < t < 1, \quad 0 < x < \pi, \\ u(0, x, y) = \frac{1}{4} u(1, x, y) + \left(1 - \frac{1}{4e}\right) \sin x \sin y, \quad 0 \leq x, y \leq \pi, \\ u_t(0, x, y) = \frac{1}{4} u_t(1, x, y) - \left(1 - \frac{1}{4e}\right) \sin x \sin y, \quad 0 \leq x, y \leq \pi, \\ u_{tt}(0, x, y) = \frac{1}{4} u_{tt}(1, x, y) + \left(1 - \frac{1}{4e}\right) \sin x \sin y, \quad 0 \leq x, y \leq \pi, \\ u(t, 0, y) = u(t, \pi, y) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \pi, \\ u(t, x, 0) = u(t, x, \pi) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{array} \right. \quad (4.9)$$

Получим следующую разностную схему первого порядка по t для приближенного решения нелокальной краевой задачи (4.9):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{n,m}^{k+2} - 3u_{n,m}^{k+1} + 3u_{n,m}^k - u_{n,m}^{k-1}}{\tau^3} - \frac{u_{n+1,m}^{k+2} - u_{n+1,m}^{k+1} - 2(u_{n,m}^{k+2} - u_{n,m}^{k+1}) + u_{n-1,m}^{k+2} - u_{n-1,m}^{k+1}}{\tau h^2} - \\ - \frac{u_{n,m+1}^{k+2} - u_{n,m+1}^{k+1} - 2(u_{n,m}^{k+2} - u_{n,m}^{k+1}) + u_{n,m-1}^{k+2} - u_{n,m-1}^{k+1}}{\tau h^2} = f(t_k, x_n, y_m), \\ f(t_k, x_n, y_m) = -3e^{-t_k} \sin x_n \sin y_m, \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N-2, \quad 1 \leq n, m \leq M-1, \\ N\tau = 1, \quad x_n = nh, \quad y_m = mh, \quad 1 \leq n, m \leq M-1, \quad Mh = \pi, \\ u_{n,m}^0 = \frac{1}{4} u_{n,m}^N + \left(1 - \frac{1}{4e}\right) \sin x_n \sin y_m, \quad 0 \leq n, m \leq M, \\ \frac{u_{n,m}^1 - u_{n,m}^0}{\tau} = \frac{1}{4} \frac{u_{n,m}^N - u_{n,m}^{N-1}}{\tau} - \left(1 - \frac{1}{4e}\right) \sin x_n \sin y_m, \quad 0 \leq n, m \leq M, \\ \frac{u_{n,m}^2 - 2u_{n,m}^1 + u_{n,m}^0}{\tau^2} = \frac{1}{4} \frac{u_{n,m}^N - 2u_{n,m}^{N-1} + u_{n,m}^{N-2}}{\tau^2} + \left(1 - \frac{1}{4e}\right) \sin x_n \sin y_m, \quad 0 \leq n, m \leq M, \\ u_{0,m}^k = u_{M,m}^k = 0, \quad u_{n,0}^k = u_{n,M}^k = 0, \quad 1 \leq k \leq N, \quad 0 \leq n, m \leq M. \end{array} \right. \quad (4.10)$$

Это — система алгебраических уравнений, которую можно представить в матричном виде

$$\left\{ \begin{array}{l} A u_{n+1} + B u_n + C u_{n-1} = R \varphi_n, \quad 1 \leq n \leq M-1, \\ u_0 = O, \quad u_M = O, \end{array} \right. \quad (4.11)$$

где $u_s = [u_{s,0}^0, \dots, u_{s,0}^N, u_{s,1}^0, \dots, u_{s,1}^N, u_{s,M}^0, \dots, u_{s,M}^N]^t$, $s = n, n \pm 1$, A, B, C, I — квадратные матрицы размерности $(N+1)(M+1) \times (N+1)(M+1)$, I, R — тождественные матрицы,

$$a = \frac{1}{\tau h^2}, \quad b = -\frac{1}{\tau^3}, \quad c = \frac{2}{\tau h^2},$$

$$A = C = \begin{bmatrix} O & O & \cdot & O & O \\ O & E & \cdot & O & O \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ O & O & \cdot & E & O \\ O & O & \cdot & O & O \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} Q & O & O & O & \cdot & O & O & O & O \\ E & D & E & O & \cdot & O & O & O & O \\ O & E & D & E & \cdot & O & O & O & O \\ \cdot & \cdot \\ O & O & O & O & \cdot & O & E & D & E \\ O & O & O & O & \cdot & O & O & O & Q \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -a & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & a & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & a & -a \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ b & -3b & 3b-2c & 2c-b & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & -3b & 3b-2c & 2c-b & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & b & -3b & 3b-2c & 2c-b \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} Q &= I_{(N+1) \times (N+1)}, \quad O = O_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \varphi_{m,n}^k = f(t_k, x_n, y_m), \\ f(t_k, x_n, y_m) &= -3e^{-tk} \sin(x_n) \sin(y_m), \quad k = \overline{1, N-2}, \quad n = \overline{1, M-1}, \quad m = \overline{1, M-1}, \\ \varphi_{m,n}^0 &= \left(1 - \frac{1}{4e}\right) \sin(x_n) \sin(y_m), \quad n = \overline{0, M}, \quad m = \overline{0, M}, \\ \varphi_{m,n}^{N-1} &= -\left(1 - \frac{1}{4e}\right) \sin(x_n) \sin(y_m) \tau, \quad n = \overline{0, M}, \quad m = \overline{0, M}, \\ \varphi_{m,n}^N &= \left(1 - \frac{1}{4e}\right) \sin(x_n) \sin(y_m) \tau^2, \quad n = \overline{0, M}, \quad m = \overline{0, M}. \end{aligned}$$

Следовательно, чтобы найти решение матричного уравнения (4.11), можно применить модифицированный метод исключения Гаусса. Решение матричного уравнения будем искать в виде

$$u_n = \alpha_{n+1} u_{n+1} + \beta_{n+1}, \quad n = M-1, \dots, 1, \quad u_M = O, \quad (4.12)$$

где α_j ($j = 2, \dots, M$) — квадратные матрицы размерности $(N+1)(M+1) \times (N+1)(M+1)$, β_j ($j = 1, \dots, M-1$) — матрицы-столбцы размерности $(N+1)(M+1) \times 1$, α_1 и β_1 — нулевые матрицы,

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= -(B + C\alpha_n)^{-1} A_n, \\ \beta_{n+1} &= (B + C\alpha_n)^{-1} (D\varphi_n - C\beta_n), \quad n = 1, \dots, M-1. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Погрешность численного решения вычисляется по формуле

$$E_M^N = \max_{0 \leq k \leq N, 1 \leq n, m \leq M-1} |u(t_k, x_n, y_m) - u_{n,m}^k|, \quad (4.14)$$

где $u(t_k, x_n, y_m)$ — точное решение в точке (t_k, x_n, y_m) , а $u_{n,m}^k$ — численное решение в той же точке. Результаты этих вычислений приведены в следующей таблице:

Разностные схемы/ N, M	10, 10, 10	20, 20, 20	40, 40, 40	(4.15)
Разностная схема (4.2)	0,0840	0,0446	0,0229	

Из численных результатов, приведенных в таблице (4.15), видно, что, если N и M удваиваются, то ошибка уменьшается примерно в два раза (в случае разностной схемы первого порядка).

Здесь можно привести аналогичные графики точного и приближенного решений и погрешности на всей области определения искомых функций.

5. Выводы

Применяя предложенный подход, а также метод монографии [19], в гильбертовом пространстве H с самосопряженным оператором A можно исследовать следующую нелокальную краевую задачу для уравнения в частных производных третьего порядка:

$$\begin{cases} \frac{d^3 u(t)}{dt^3} + A \frac{du(t)}{dt} = f(t), & 0 < t < 1, \\ u(0) = \int_0^\lambda \gamma(s) u(s) ds + \varphi, & u'(0) = \int_0^\lambda \alpha(s) u'(s) ds + \psi, \\ u''(0) = \int_0^\lambda \beta(s) u''(s) ds + \xi, & 0 < \lambda \leq 1. \end{cases} \quad (5.1)$$

Для получения приближенных решений задачи (5.1) можно применить устойчивую трехшаговую разностную схему. При определенных условиях на $\gamma(t)$, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ справедлива теорема об устойчивости указанной разностной схемы. В качестве приложений получены оценки устойчивости решений разностных схем, применяемых для получения приближенных решений нелокальных краевых задач для уравнений в частных производных третьего порядка. Представлены численные результаты.

Благодарности. Авторы благодарят проф. Ч. Ашыралыева (университет Гумушэйн, Турция) и рецензента за полезные советы по улучшению настоящей статьи. Работа подготовлена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ по Программе повышения конкурентоспособности РУДН «5-100» среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2016–2020 гг. и была опубликована в рамках целевой программы BR05236656 Научного комитета Министерства образования и науки республики Казахстан.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амиров Ш., Кожанов А. И.* Смешанная задача для одного класса сильно нелинейных уравнений соболевского типа высокого порядка// Докл. РАН. — 2013. — 451, № 5. — С. 492–494.
2. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М.: МАКС Пресс, 2016.
3. *Габов Г. А., Свешников А. Г.* Задачи динамики стратифицированных жидкостей. — М.: Наука, 1986.
4. *Кожанов А. И.* Смешанная задача для некоторых классов нелинейных уравнений третьего порядка// Мат. сб. — 1982. — 118, № 4. — С. 504–522.
5. *Кожанов А. И.* Смешанная задача для одного класса квазилинейных уравнений третьего порядка// В сб.: «Краевые задачи для нелинейных уравнений математической физики». — Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1982. — С. 118–128.
6. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
7. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения// Усп. мат. наук. — 2016. — 71, № 5. — С. 3–112.
8. *Соболевский П. Е.* Разностные методы приближенного решения дифференциальных уравнений. — Воронеж: Воронежский гос. ун-т, 1975.
9. *Араков Ю.* On the solution of a boundary-value problem for a third-order equation with multiple characteristics// Ukr. Math. J. — 2012. — 64, № 1. — С. 1–12.
10. *Араков Ю., Irgashev B.* Boundary-value problem for a generate high-odd order equation// Ukr. Math. J. — 2015. — 66, № 10. — С. 1475–1490.
11. *Араков Ю., Rutkauskas S.* On a boundary value problem to third order PDE with multiple characteristics// Nonlinear Anal. Model. Control. — 2011. — 16, № 3. — С. 255–269.
12. *Ashyralyev A.* Fractional spaces generated by the positivite differential and difference operator in a Banach space// В сб.: «Mathematical methods in engineering. Selected papers of the International Symposium, MME06, Ankara, Turkey, April 27–29, 2006». — Dordrecht: Springer, 2007. — С. 13–22.
13. *Ashyralyev C., Akyuz G., Dedetürk M.* Approximate solution for an inverse problem of multidimensional elliptic equation with multipoint nonlocal and Neumann boundary conditions// Electron. J. Differ. Equ. — 2017. — 2017, № 197. — С. 1–16.
14. *Ashyralyev A., Arjmand D., Koksai M.* A note on the Taylor's decomposition on four points for a third-order differential equation// Appl. Math. Comput. — 2007. — 188, № 2. — С. 1483–1490.
15. *Ashyralyev A., Arjmand D., Koksai M.* Taylor's decomposition on four points for solving third-order linear time-varying systems// J. Franklin Inst. — 2009. — 346, № 7. — С. 651–662.
16. *Ashyralyev A., Belakroum Kh., Guezane-Lakoud A.* Stability of boundary-value problems for third order partial differential equations// Electron. J. Differ. Equ. — 2017. — 2017, № 53. — С. 1–11.
17. *Ashyralyev A., Simsek S. N.* An operator method for a third-order partial differential equation// Numer. Funct. Anal. Optim. — 2017. — 38, № 9. — С. 1–19.
18. *Ashyralyev A., Sobolevskii P. E.* A note on the difference schemes for hyperbolic equations// Abstr. Appl. Anal. — 2001. — 6, № 2. — С. 63–70.
19. *Ashyralyev A., Sobolevskii P. E.* New difference schemes for partial differential equations. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 2004.
20. *Belakroum Kh., Ashyralyev A., Guezane-Lakoud A.* A note on the nonlocal boundary value problem for a third order partial differential equation// AIP Conf. Proc. — 2016. — 1759. — Article ID 020021.
21. *Denche M., Memou A.* Boundary value problem with integral conditions for a linear third-order equation// J. Appl. Math. — 2003. — 11. — С. 533–567.

22. *Direk Z., Ashyraliyev M.* FDM for the integral-differential equation of the hyperbolic type// *Adv. Difference Equ.* — 2014. — 2014, № 132. — С. 1–8.
23. *Fattorini H. O.* Second order linear differential equations in Banach spaces. — Amsterdam: Elsevier, 1985.
24. *Kalmenov T. S., Suragan B.* Initial-boundary value problems for the wave equation// *Electron. J. Differ. Equ.* — 2014. — 2014, № 48. — С. 1–6.
25. *Kudu M., Amirali I.* Method of lines for third order partial differential equations// *J. Appl. Math. Phys.* — 2014. — 2, № 2. — С. 33–36.
26. *Latrous C., Memou A.* A three-point boundary value problem with an integral condition for a third-order partial differential equation// *Abstr. Appl. Anal.* — 2005. — 2005, № 1. — С. 33–43.
27. *Lunardi A.* Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1995.
28. *Niu J., Li P.* Numerical algorithm for the third-order partial differential equation with three-point boundary value problem// *Abstr. Appl. Anal.* — 2014. — 2014. — Article ID 630671.
29. *Shakhmurov V., Musaev H.* Maximal regular convolution-differential equations in weighted Besov spaces// *Appl. Comput. Math.* — 2017. — 16, № 2. — С. 190–200.
30. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional-differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.

Allaberen Ashyralyev

Near East University, Nicosia, TRNC, Mersin 10, Turkey;

Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6;

Институт математики и математического моделирования, 050010, Алматы, ул. Пушкина, д. 125

E-mail: allaberen.ashyralyev@neu.edu.tr, aallaberen@gmail.com

Kheireddine Belakroum

Frères Mentouri University, Constantine, Algeria

E-mail: kheireddinebelakroum@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-1-19

UDC 517.9

A Stable Difference Scheme for a Third-Order Partial Differential Equation

© 2018 A. Ashyralyev, Kh. Belakroum

Abstract. The nonlocal boundary-value problem for a third order partial differential equation

$$\begin{cases} \frac{d^3 u(t)}{dt^3} + A \frac{du(t)}{dt} = f(t), & 0 < t < 1, \\ u(0) = \gamma u(\lambda) + \varphi, & u'(0) = \alpha u'(\lambda) + \psi, & |\gamma| < 1, \\ u''(0) = \beta u''(\lambda) + \xi, & |1 + \beta\alpha| > |\alpha + \beta|, & 0 < \lambda \leq 1 \end{cases}$$

in a Hilbert space H with a self-adjoint positive definite operator A is considered. A stable three-step difference scheme for the approximate solution of the problem is presented. The main theorem on stability of this difference scheme is established. In applications, the stability estimates for the solution of difference schemes of the approximate solution of three nonlocal boundary value problems for third order partial differential equations are obtained. Numerical results for one- and two-dimensional third order partial differential equations are provided.

REFERENCES

1. Sh. Amirov and A. I. Kozhanov, “Smeshannaya zadacha dlya odnogo klassa sil’no nelineynykh uravneniy sobolevskogo tipa vysokogo poriyadka” [Mixed problem for one class of higher-order strongly nonlinear equations of Sobolev type], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2013, **451**, No. 5, 492–494 (in Russian).
2. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, *Spektral’nyy analiz funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy* [Spectral Analysis of Functional Differential Equations], MAKS Press, Moscow, 2016 (in Russian).

3. G. A. Gabov and A. G. Sveshnikov, *Zadachi dinamiki stratifitsirovannykh zhidkostey* [Problems of Dynamics of Stratified Fluids], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
4. A. I. Kozhanov, “Smeshannaya zadacha dlya nekotorykh klassov nelineynykh uravneniy tret’ego poryadka” [Mixed problem for some classes of third-order nonlinear equations], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1982, **118**, No. 4, 504–522 (in Russian).
5. A. I. Kozhanov, “Smeshannaya zadacha dlya odnogo klassa kvazilineynykh uravneniy tret’ego poryadka” [Mixed problem for one class of third-order quasilinear equations], In: *Kraevye zadachi dlya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki* [Boundary-Value Problems for Nonlinear Equations of Mathematical Physics], Inst. Math. Sib. Branch Acad. Sci. USSR, Novosibirsk, 1982, 118–128 (in Russian).
6. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial’nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
7. A. L. Skubachevskii, “Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy i ikh prilozheniya” [Boundary-value problems for elliptic functional differential equations and their applications], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 5, 3–112 (in Russian).
8. P. E. Sobolevskii, *Raznostnye metody priblizhennogo resheniya differentsial’nykh uravneniy* [Difference Methods for Approximate Solutions of Differential Equations], Voronezh State Univ., Voronezh, 1975 (in Russian).
9. Y. Apakov, “On the solution of a boundary-value problem for a third-order equation with multiple characteristics,” *Ukr. Math. J.*, 2012, **64**, No. 1, 1–12.
10. Y. Apakov and B. Irgashev, “Boundary-value problem for a generate high-odd order equation,” *Ukr. Math. J.*, 2015, **66**, No. 10, 1475–1490.
11. Y. Apakov and S. Rutkauskas, “On a boundary value problem to third order PDE with multiple characteristics,” *Nonlinear Anal. Model. Control*, 2011, **16**, No. 3, 255–269.
12. A. Ashyralyev, “Fractional spaces generated by the positivite differential and difference operator in a Banach space” [Fractional spaces generated by the positivite differential and difference operator in a Banach space], In: *Mathematical methods in engineering. Selected papers of the International Symposium, MME06, Ankara, Turkey, April 27–29, 2006* [Mathematical methods in engineering. Selected papers of the International Symposium, MME06, Ankara, Turkey, April 27–29, 2006], Springer, Dordrecht, 2007, 13–22.
13. C. Ashyralyev, G. Akyuz, and M. Dedeturk, “Approximate solution for an inverse problem of multidimensional elliptic equation with multipoint nonlocal and Neumann boundary conditions,” *Electron. J. Differ. Equ.*, 2017, **2017**, No. 197, 1–16.
14. A. Ashyralyev, D. Arjmand, and M. Koksai, “A note on the Taylor’s decomposition on four points for a third-order differential equation,” *Appl. Math. Comput.*, 2007, **188**, No. 2, 1483–1490.
15. A. Ashyralyev, D. Arjmand, and M. Koksai, “Taylor’s decomposition on four points for solving third-order linear time-varying systems,” *J. Franklin Inst.*, 2009, **346**, No. 7, 651–662.
16. A. Ashyralyev, Kh. Belakroum, and A. Guezane-Lakoud, “Stability of boundary-value problems for third order partial differential equations,” *Electron. J. Differ. Equ.*, 2017, **2017**, No. 53, 1–11.
17. A. Ashyralyev, S. N. Simsek, “An operator method for a third-order partial differential equation,” *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 2017, **38**, No. 9, 1–19.
18. A. Ashyralyev, P. E. Sobolevskii, “A note on the difference schemes for hyperbolic equations,” *Abstr. Appl. Anal.*, 2001, **6**, No. 2, 63–70.
19. A. Ashyralyev, P. E. Sobolevskii, *New Difference Schemes for Partial Differential Equations*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 2004.
20. Kh. Belakroum, A. Ashyralyev, and A. Guezane-Lakoud, “A note on the nonlocal boundary value problem for a third order partial differential equation,” *AIP Conf. Proc.*, 2016, **1759**, Article ID 020021.
21. M. Denche and A. Memou, “Boundary value problem with integral conditions for a linear third-order equation,” *J. Appl. Math.*, 2003, **11**, 533–567.
22. Z. Direk and M. Ashyraliyev, “FDM for the integral-differential equation of the hyperbolic type,” *Adv. Difference Equ.*, 2014, **2014**, No. 132, 1–8.
23. H. O. Fattorini, *Second-Order Linear Differential Equations in Banach Spaces*, Elsevier, Amsterdam, 1985.
24. T. S. Kalmenov and B. Suragan, “Initial-boundary value problems for the wave equation,” *Electron. J. Differ. Equ.*, 2014, **2014**, No. 48, 1–6.
25. M. Kudu and I. Amirali, “Method of lines for third order partial differential equations,” *J. Appl. Math. Phys.*, 2014, **2**, No. 2, 33–36.
26. C. Latrous and A. Memou, “A three-point boundary value problem with an integral condition for a third-order partial differential equation,” *Abstr. Appl. Anal.*, 2005, **2005**, No. 1, 33–43.

27. A. Lunardi, *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 1995.
28. J. Niu, P. Li, “Numerical algorithm for the third-order partial differential equation with three-point boundary value problem,” *Abstr. Appl. Anal.*, 2014, **2014**, Article ID 630671.
29. V. Shakhmurov and H. Musaev, “Maximal regular convolution-differential equations in weighted Besov spaces,” *Appl. Comput. Math.*, 2017, **16**, No. 2, 190–200.
30. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional-Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 1997.

Allaberen Ashyralyev

Near East University, Nicosia, Turkey;

RUDN University, Moscow, Russia;

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

E-mail: allaberen.ashyralyev@neu.edu.tr, aallaberen@gmail.com

Kheireddine Belakroum

Frères Mentouri University, Constantine, Algeria

E-mail: kheireddinebelakroum@gmail.com