Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 3 (2019). С. 513–546

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-3-513-546 УДК 517.958

О ВНУТРЕННЕЙ РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЗАХАРОВА—КУЗНЕЦОВА

© 2019 г. **А. В. ФАМИНСКИЙ**

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы внутренней регулярности слабых решений начально-краевых задач для уравнения Захарова—Кузнецова с двумя пространственными переменными. Начальная функция предполагается нерегулярной, а основным параметром, влияющим на регулярность, является скорость убывания начальной функции на бесконечности. Основные результаты работы относятся к случаю задачи, поставленной на полуполосе. При этом различные типы краевых условий (например, Дирихле или Неймана) влияют на характер внутренней регулярности. Приводится также обзор ранее полученных результатов для других типов областей: всей плоскости, полуплоскости и полосы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Двумерное уравнение Захарова—Кузнецова (ЗК)

$$u_t + bu_x + u_{xxx} + u_{xyy} + uu_x = 0, \quad u = u(t, x, y), \quad b \in \mathbb{R} - \mathrm{const}, \tag{1.1}$$

является модельным для описания нелинейных волн в средах с дисперсией, распространяющихся в заданном направлении (в данном случае это ось x) и испытывающих поперечные деформации. Впервые оно было выведено в работе [4] для описания нелинейных ионно-звуковых волн в плазме, помещенной в магнитное поле, и в дальнейшем получило название уравнения Захарова—Кузнецова. Следует отметить, что в указанной статье рассматривался случай трех пространственных переменных (тогда в левую часть уравнения добавляется слагаемое u_{xzz}), однако здесь изучается его редуцированный двумерный вариант. Строгий вывод ЗК-модели можно найти, например, в [30, 36].

Уравнение (1.1) является одним из вариантов $(2+1)$-мерного обобщения уравнения Кортевега—де Фриза

$$u_t + bu_x + u_{xxx} + uu_x = 0, \quad u = u(t, x). \tag{1.2}$$

Отметим, что в отличие от уравнения (1.2), обладающего бесконечным набором законов сохранения, для уравнения Захарова—Кузнецова известны только два:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} u^2\,dxdy = \mathrm{const}, \quad \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \Bigl(u_x^2 + u_y^2 - \frac{1}{3}u^3\Bigr)\,dxdy = \mathrm{const}. \tag{1.3}$$

Аналог 1-го из указанных законов сохранения (вместе с так называемом эффектом локального сглаживания) был использован в статье [5] (см. также [32]) для построения глобальных по времени слабых решений задачи Коши для уравнения (1.2) при нерегулярной начальной функции $u_0 \in L_2(\mathbb{R})$, а именно, решений из класса

$$u \in L_\infty(0,T;L_2(\mathbb{R})), \quad \sup_{x_0\in\mathbb{R}} \int_0^T \int_{x_0}^{x_0+1} u_x^2\,dxdt < +\infty.$$

Более того, в [5] было показано, что если дополнительно известно, что $x^\alpha u_0 \in L_2(\mathbb{R}_+)$ (здесь и далее $\mathbb{R}_+ = (0,+\infty)$) для некоторого $\alpha > 0$, то

$$x^\alpha u \in L_\infty(0,T;L_2(\mathbb{R}_+)), \quad x^{\alpha-1/2}u_x \in L_2(0,T;L_2(\mathbb{R}_+)).$$

При этом в случае $\alpha \geqslant 3/4$ построенные решения единственны в классе

$$(1+x_+)^{3/4}u \in L_\infty(0,T;L_2(\mathbb{R}))$$

(здесь и далее $x_+ = \max(x,0)$). Наконец, в этой же работе было установлено свойство повышения внутренней гладкости слабых решений в зависимости от скорости убывания начальной функции при $x \to +\infty$: если $\alpha \geqslant n/2$ для некоторого натурального n, то решение обладает при $t > 0$ обобщенными производными до порядка $n+1$, причем для любых $\delta \in (0,T)$, $x_0 \in \mathbb{R}$

$$(x-x_0+1)^{\alpha-n/2}\partial_x^n u \in L_\infty(\delta,T;L_2(x_0,+\infty)), \quad \sup_{x_1\geqslant x_0} \int_\delta^T \int_{x_1}^{x_1+1} (\partial_x^{n+1}u)^2\,dxdt < +\infty,$$

а если $\alpha > n/2$, то

$$(x-x_0+1)^{\alpha-n/2-1/2}\partial_x^{n+1}u \in L_2(\delta,T;L_2(x_0,+\infty)).$$

Для случая начальной функции из пространства $H^1(\mathbb{R})$ аналогичные результаты (с использованием также аналога 2-го из законов сохранения (1.3)) были получены в статье [7], а для начально-краевой задачи на полуоси $\mathbb{R}_+$ с краевым условием $u|_{x=0} = \mu(t)$ — в статье [8].

Отметим также, что в статье [31] рассматривалась задача Коши для уравнения Кортевега—де Фриза с нерегулярной начальной функцией, экспоненциально быстро убывающей при $x \to +\infty$, а именно, $(1+\exp(\alpha x))u_0 \in L_2(\mathbb{R})$ для $\alpha > 0$; была установлена однозначная разрешимость в классе функций таких, что

$$(1+\exp(\alpha x))u \in L_\infty(0,T;L_2(\mathbb{R})), \quad \exp(\alpha x)u_x \in L_2((0,T)\times\mathbb{R}),$$

и доказана бесконечная гладкость построенных решений при $t > 0$.

Целью настоящей работы является изучение свойств внутренней регулярности слабых решений различных начально-краевых задач для уравнения (1.1), аналогичных описанным выше для уравнения (1.2). Поскольку основным параметром, влияющим на гладкость решения, является скорость убывания начальной функции (и, как следствие, самого решения) при $x \to +\infty$, будем рассматривать следующие области: 1) вся плоскость $\mathbb{R}^2$, 2) полуплоскость $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) : x > 0\}$, 3) горизонтальная полоса заданной ширины $\Sigma_L = \{(x,y) : 0 < y < L\}$, 4) полуполоса $\Sigma_{L,+} = \{(x,y) : x > 0, 0 < y < L\}$. Основные новые результаты настоящей статьи относятся именно к этому последнему 4-му случаю. В качестве весов при $x \to +\infty$ будут выбираться степенные функции и экспоненты.

Везде далее (если не оговорено противное) j, k, l, m, n обозначают неотрицательные целые числа, $p,q \in [1,+\infty]$, $s \in \mathbb{R}$, $[s]$ — целая часть числа $s \geqslant 0$. Если $\nu = (k_1,k_2)$ — целочисленный мультииндекс, $|\nu| = k_1 + k_2$, то положим $\partial^\nu = \partial_x^{k_1}\partial_y^{k_2}$. Пусть

$$|D^k\phi| = \Bigl(\sum_{|\nu|=k} (\partial^\nu\phi)^2\Bigr)^{1/2}, \qquad |D\phi| = |D^1\phi|.$$

Положим

$$\omega(x) \equiv \begin{cases} ce^{1/(x^2-1)}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

где положительная константа c выбрана так, чтобы $\int\limits_{-1}^{1} \omega(x)\,dx = 1$. Свойства этой функции хорошо известны, в частности, $\omega \in C^\infty(\mathbb{R})$. Положим

$$\eta(x) \equiv \int\limits_{-\infty}^{2x-1} \omega(\xi)\,d\xi = 2\int\limits_{-\infty}^{x} \omega(2\xi-1)\,d\xi.$$

Тогда $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\eta'(x) > 0$ при $x \in (0,1)$, $\eta(x) = 0$ при $x \leqslant 0$, $\eta(x) = 1$ при $x \geqslant 1$, $\eta(x) + \eta(1-x) \equiv 1$. Будем также использовать свойство $\eta'(x) \leqslant c\eta^{1/2}(x)$ для некоторой положительной константы c и любого $x \in \mathbb{R}$ (оно легко следует из ограниченности сверху η'' на $\mathbb{R}$).

Пусть I обозначает либо всю действительную ось $\mathbb{R}$, либо полуось $\mathbb{R}_+$. Будем говорить, что бесконечно гладкая на $\overline{I}$ функция $\psi(x)$ является *допустимой весовой функцией*, если $|\psi^{(j)}(x)| \leqslant c(j)\psi(x)$ для всех натуральных чисел j и всех $x \in \overline{I}$. Очевидно, что любая допустимая весовая функция удовлетворяет неравенству $c^{-1}e^{-c_0x} \leqslant \psi(x) \leqslant ce^{c_0x}$ для некоторых положительных констант c_0, c и всех $x \in \overline{I}$. Нетрудно видеть, что $\psi^s(x)$ для любого $s \in \mathbb{R}$ также является допустимой весовой функцией (более подробно см. в [18]). Также очевидно, что произведение допустимых весовых функций является допустимой весовой функцией.

Примерами допустимых весовых функций являются $e^{2\alpha x}$ и $1 + e^{2\alpha x}$ (в дальнейшем они будут использоваться при $\alpha > 0$). Другим важным примером в случае $I = \mathbb{R}_+$ является степенная функция

$$\rho_\alpha(x) \equiv (1+x)^{2\alpha}, \quad \alpha > 0. \tag{1.4}$$

При $\alpha = 0$ будем использовать обозначение

$$\rho_0(x) \equiv 2 - \frac{1}{\ln(x+e)}. \tag{1.5}$$

Важной особенностью приведенных примеров весовых функций является то, что их производные $\psi'(x)$ также являются допустимыми весовыми функциями.

Будем говорить, что $\psi_1(x) \sim \psi_2(x)$ на I, если $c^{-1}\psi_1(x) \leqslant \psi_2(x) \leqslant c\psi_1(x)$ для некоторой положительной константы c и всех $x \in I$.

Лемма 1.1. *Пусть Ω — одна из четырех упомянутых выше областей* ($\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2_+$, Σ_L *или* $\Sigma_{L,+}$). *Пусть $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ суть две допустимые весовые функции, такие что $\psi_1(x) \leqslant c_0\psi_2(x)$ $\forall x \in \overline{I}$* ($I = \mathbb{R}$ *или* $I = \mathbb{R}_+$ *соответственно*) *для некоторой константы $c_0 > 0$. Пусть k — натуральное число, $m \in [0,k)$, $q \in [2,+\infty]$, если $k - m \geqslant 2$, и $q \in [2,+\infty)$, если $m = k-1$. Тогда существует константа $c > 0$, такая что для любой функции $\varphi(x,y)$, для которой $|D^k\varphi|\psi_1^{1/2}(x) \in L_2(\Omega)$, $\varphi\psi_2^{1/2}(x) \in L_2(\Omega)$, справедливо следующее неравенство*:

$$\big\||D^m\varphi|\psi_1^s(x)\psi_2^{1/2-s}(x)\big\|_{L_q(\Omega)} \leqslant c\big\||D^k\varphi|\psi_1^{1/2}(x)\big\|^{2s}_{L_2(\Omega)}\big\|\varphi\psi_2^{1/2}(x)\big\|^{1-2s}_{L_2(\Omega)} + c\big\|\varphi\psi_2^{1/2}(x)\big\|_{L_2(\Omega)}, \tag{1.6}$$

где

$$s = s(k,m,q) = \frac{m+1}{2k} - \frac{1}{kq}. \tag{1.7}$$

Доказательство. Если $\Omega = \mathbb{R}^2$, то данное неравенство является частным случаем более общего неравенства, установленного в [9] для произвольного числа переменных (при $q = +\infty$ в той статье накладывалось некоторое дополнительное техническое неравенство на функции ψ_1 и ψ_2, которое, как выяснилось позднее, легко снять). Для остальных областей доказательство аналогично (см., например, [19], где рассматривалась область $\Omega = \Sigma_L$). В целях использования неравенства в настоящей статье приведем доказательство для $\Omega = \Sigma_{L,+}$ и $k \leqslant 2$.

Без ограничения общности можно считать, что φ — гладкая убывающая при $x \to +\infty$ функция. Вначале следуя [6], установим одно вспомогательное неравенство: для $p \in [1,2)$, $p^* = 2p/(2-p)$ равномерно относительно L

$$\|\varphi\|_{L_{p^*}(\Sigma_{L,+})} \leqslant \frac{c(p)}{L}\big\||D\varphi| + |\varphi|\big\|_{L_p(\Sigma_{L,+})}. \tag{1.8}$$

Для $p=1$ (тогда $p^*=2$) это неравенство следует из неравенства

$$\iint\limits_{\Sigma_{L,+}} \varphi^2\,dxdy \leqslant \int\limits_0^L \sup_{x\in\mathbb{R}_+}|\varphi|\,dy \int\limits_{\mathbb{R}_+} \sup_{y\in(0,L)}|\varphi|\,dx$$

и очевидных одномерных интерполяционных неравенств

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|f| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}_+}|f'|\,dx, \qquad \sup_{y\in(0,L)}|f| \leqslant \frac{c}{L}\int\limits_0^L \bigl(|f'|+|f|\bigr)\,dy.$$

Если $p\in(1,2)$, то пусть $\widetilde\varphi\equiv|\varphi|^{p^*/2}\operatorname{sign}\varphi$, тогда из неравенства (1.8) для $p=1$ следует, что

$$\|\varphi\|^{p^*/2}_{L_{p^*}(\Sigma_{L,+})} = \|\widetilde\varphi\|_{L_2(\Sigma_{L,+})} \leqslant \frac{c}{L}\bigl\||D\widetilde\varphi|+|\widetilde\varphi|\bigr\|_{L_1(\Sigma_{L,+})} \leqslant \frac{c(p)}{L}\bigl\||\varphi|^{p^*/2-1}(|D\varphi|+|\varphi|)\bigr\|_{L_1(\Sigma_{L,+})} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c(p)}{L}\||\varphi|^{p^*/2-1}\|_{L_{p/(p-1)}(\Sigma_{L,+})}\bigl\||D\varphi|+|\varphi|\bigr\|_{L_p(\Sigma_{L,+})} = \frac{c(p)}{L}\|\varphi\|^{p^*/2-1}_{L_{p^*}(\Sigma_{L,+})}\bigl\||D\varphi|+|\varphi|\bigr\|_{L_p(\Sigma_{L,+})},$$

откуда (1.8) вытекает и в этом случае.

Теперь мы можем доказать неравенство (1.6) для $k=1$, $m=0$, $q>2$ (для $q=2$ оно очевидно). Действительно, выбрав $p\in(1,2)$, такое что $q<p^*$, и применив сначала неравенство Гельдера, потом неравенство (1.8) к функции $\Phi\equiv|\varphi|^{2/p}\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/p^*}\operatorname{sign}\varphi$ (заметим, что $|D\Phi|\leqslant c(q)\bigl(|D\varphi|+|\varphi|\bigr)\psi_1^{1/2}|\varphi|^{2/p^*}\psi_2^{1/p^*}$) и в конце опять неравенство Гельдера, находим, что

$$\|\varphi\psi_1^{s(1,0,q)}\psi_2^{1/2-s(1,0,q)}\|_{L_q(\Sigma_{L,+})} = \|\varphi\psi_1^{1/2-1/q}\psi_2^{1/q}\|_{L_q(\Sigma_{L,+})} = \bigl\||\Phi|^{q-2}\bigl(|\varphi|\psi_2^{1/2}\bigr)^{q-2(q-2)/p}\bigr\|^{1/q}_{L_1(\Sigma_{L,+})} \leqslant$$
$$\leqslant \|\Phi\|^{1-2/q}_{L_{p^*}(\Sigma_{L,+})}\|\varphi\psi_2^{1/2}\|^{1-2(q-2)/(pq)}_{L_2(\Sigma_{L,+})} \leqslant \frac{c(q)}{L^{1-2/q}}\bigl\||D\Phi|+|\Phi|\bigr\|^{1-2/q}_{L_p(\Sigma_{L,+})}\|\varphi\psi_2^{1/2}\|^{1-2(q-2)/(pq)}_{L_2(\Sigma_{L,+})} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c_1(q)}{L^{1-2/q}}\bigl\|\bigl(|D\varphi|+|\varphi|\bigr)\psi_1^{1/2}|\varphi|^{2/p^*}\psi_2^{1/p^*}\bigr\|^{1-2/q}_{L_p(\Sigma_{L,+})}\|\varphi\psi_2^{1/2}\|^{1-2(q-2)/(pq)}_{L_2(\Sigma_{L,+})} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c_1(q)}{L^{1-2/q}}\bigl\|\bigl(|D\varphi|+|\varphi|\bigr)\psi_1^{1/2}\bigr\|^{1-2/q}_{L_2(\Sigma_{L,+})}\|\varphi\psi_2^{1/2}\|^{2/q}_{L_2(\Sigma_{L,+})}.$$

Если $k=2$, $m=1$, $q=2$, интегрирование по частям приводит к равенству

$$\iint\limits_{\Sigma_{L,+}}(\varphi_x^2+\varphi_y^2)\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}\,dxdy = -\iint\limits_{\Sigma_{L,+}}(\varphi_{xx}+\varphi_{yy})\psi_1^{1/2}\cdot\varphi\psi_2^{1/2}\,dxdy -$$
$$-\iint\limits_{\Sigma_{L,+}}\varphi\varphi_x(\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2})'\,dxdy + \int\limits_{\mathbb{R}_+}\Bigl(\varphi\varphi_y\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}\Bigr)\Big|_{y=0}^{y=L}dx - \int\limits_0^L\Bigl(\varphi\varphi_x\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}\Bigr)\Big|_{x=0}dy.$$

Для оценки предпоследнего интеграла в правой части этого равенства используем следующее одномерное интерполяционное неравенство:

$$\sup_{y\in[0,L]}|f| \leqslant c\Bigl[\Bigl(\int\limits_0^L(f')^2\,dy\Bigr)^{1/4}\Bigl(\int\limits_0^L f^2\,dy\Bigr)^{1/4} + \frac{1}{L^{1/2}}\Bigl(\int\limits_0^L f^2\,dy\Bigr)^{1/2}\Bigr],$$

а для оценки последнего интеграла — следующее:

$$\sup_{x\geqslant0}|f|(\psi_1\psi_2)^{1/4} \leqslant c\Bigl[\Bigl(\int\limits_{\mathbb{R}_+}(f')^2\psi_1\,dx\Bigr)^{1/4}\Bigl(\int\limits_{\mathbb{R}_+}f^2\psi_2\,dx\Bigr)^{1/4} + \Bigl(\int\limits_{\mathbb{R}_+}f^2\psi_2\,dx\Bigr)^{1/2}\Bigr]$$

(которое, в свою очередь, следует из элементарного неравенства $\sup\limits_{x\geqslant0}f^2(x)\leqslant 2\int\limits_{\mathbb{R}_+}|f'f|\,dx$ и свойств допустимых весовых функций), а тогда

$$\left|\int_0^L \left(\varphi\varphi_x\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}\right)\Big|_{x=0}dy\right| \leqslant \Big(\int_0^L \sup_{x\geqslant 0}\varphi^2\psi_1^{1/4}\psi_2^{3/4}\,dy\Big)^{1/2}\Big(\int_0^L \sup_{x\geqslant 0}\varphi_x^2\psi_1^{3/4}\psi_2^{1/4}\,dy\Big)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant c\Big(\iint_{\Sigma_{L,+}}\varphi_x^2\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}\Big)^{1/2}\Big[\Big(\iint_{\Sigma_{L,+}}\varphi_{xx}^2\psi_1\Big)^{1/4}\Big(\iint_{\Sigma_{L,+}}\varphi^2\psi_2\Big)^{1/4} + \Big(\iint_{\Sigma_{L,+}}\varphi^2\psi_2\Big)^{1/2}\Big].$$

В итоге получаем неравенство (1.6) в случае $k=2$, $m=1$, $q=2$.

Комбинация уже полученных неравенств (1.6) в случаях $k=1$, $m=0$ и $k=2$, $m=1$, $q=2$ приводит к этому неравенству в случае $k=2$, $m=0$, $q\in(2,+\infty)$, поскольку

$$\big(|\varphi|\psi_1^{s(2,0,q)}\psi_2^{1/2-s(2,0,q)}\big)^q = |\varphi|^q\psi_1^{q/4-1/2}\psi_2^{q/4+1/2} =$$
$$= |\varphi|^q(\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2})^{q/2-1}\psi_2 = \big(|\varphi|(\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2})^{s(1,0,q)}\psi_2^{1/2-s(1,0,q)}\big)^q,$$

и в случае $k=2$, $m=1$, $q\in(2,+\infty)$, поскольку при $|\nu|=1$

$$\big(|\partial^\nu\varphi|\psi_1^{s(2,1,q)}\psi_2^{1/2-s(2,1,q)}\big)^q = |\partial^\nu\varphi|^q\psi_1^{q/2-1/2}\psi_2^{1/2} =$$
$$= |\partial^\nu\varphi|^q\psi_1^{q/2-1}(\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}) = \big(|\partial^\nu\varphi|\psi_1^{s(1,0,q)}(\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2})^{1/2-s(1,0,q)}\big)^q.$$

Осталось рассмотреть случай $k=2$, $m=0$, $q=+\infty$. Здесь мы воспользуемся неравенством

$$\|f\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant c\big(\|f_{xx}\|_{L_1(\Omega)} + \|f_{yy}\|_{L_1(\Omega)} + \|f\|_{L_1(\Omega)}\big) \tag{1.9}$$

из книги [3] и применим его к функции $f\equiv\varphi^2\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}$. Используя неравенство Коши—Буняковского и уже полученную оценку (1.6) в случае $k=2$, $m=1$, $q=2$, завершаем доказательство леммы. □

Статья организована следующим образом. В разделе 2, который является основным разделом работы, устанавливаются результаты о внутренней регулярности слабых решений начально-краевых задач в области $\Sigma_{L,+}$. В разделах 3, 4 и 5, которые носят обзорный характер, в основном приводятся установленные ранее результаты на аналогичную тему для областей $\mathbb{R}^2_+$, $\mathbb{R}^2$ Σ_L соответственно.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-01-00590).

2. Начально-краевые задачи на полуполосе

Для уравнения (1.1) рассмотрим начально-краевые задачи в области $\Pi^+_{T,L}=(0,T)\times\Sigma_{L,+}$ (T и L — произвольные положительные числа) с начальными и краевыми условиями

$$u(0,x,y)=u_0(x,y), \qquad (x,y)\in\Sigma_{L,+}, \tag{2.1}$$
$$u(t,0,y)=\mu(t,y), \qquad (t,y)\in B_{T,L}=(0,T)\times(0,L), \tag{2.2}$$

а также одним из 4-х краевых условий при $(t,x)\in\Omega_{T,+}=(0,T)\times\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}&\text{или}\quad a)\ u(t,x,0)=u(t,x,L)=0,\\ &\text{или}\quad b)\ u_y(t,x,0)=u_y(t,x,L)=0,\\ &\text{или}\quad c)\ u(t,x,0)=u_y(t,x,L)=0,\\ &\text{или}\quad d)\ u \text{ — } L\text{-периодическая функция по } y.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Мы будем использовать обозначение «задача (1.1), (2.1)–(2.3)» для каждой из этих задач.

Для описания полученных результатов введем некоторые обозначения. Для любых $x_0\geqslant 0$, $y_0\in[0,L/2)$ положим

$$\Sigma_{L,x_0}=(x_0,+\infty)\times(0,L), \qquad \Sigma_{L,x_0,y_0}=(x_0,+\infty)\times(y_0,L-y_0)$$

(тогда $\Sigma_{L,+}=\Sigma_{L,0}$, $\Sigma_{L,x_0}=\Sigma_{L,x_0,0}$). Для любого $\delta\in[0,T)$ положим

$$\Pi^{\delta,x_0}_{T,L}=(\delta,T)\times\Sigma_{L,x_0}, \quad \Pi^{\delta,+}_{T,L}=\Pi^{\delta,0}_{T,L}, \quad \Pi^{\delta,x_0,y_0}_{T,L}=(\delta,T)\times\Sigma_{L,x_0,y_0}$$

(тогда $\Pi^+_{T,L}=\Pi^{0,+}_{T,L}$, $\Pi^{\delta,x_0}_{T,L}=\Pi^{\delta,x_0,0}_{T,L}$).

Введем специальные функциональные пространства, учитывающие граничные условия (2.3). Пусть символ $\widetilde{\mathcal{S}}(\overline{\Sigma}_L)$ обозначает пространство бесконечно гладких на $\overline{\Sigma}_L$ функций $\varphi(x,y)$, для которых $(1+|x|)^n|\partial^\nu\varphi(x,y)| \leqslant c(n,\nu)$ для любых n, мультииндексов ν, $(x,y)\in\overline{\Sigma}_L$ и $\partial_y^{2m}\varphi\big|_{y=0} = \partial_y^{2m}\varphi\big|_{y=L} = 0$ в случае a), $\partial_y^{2m+1}\varphi\big|_{y=0} = \partial_y^{2m+1}\varphi\big|_{y=L} = 0$ в случае b), $\partial_y^{2m}\varphi\big|_{y=0} = \partial_y^{2m+1}\varphi\big|_{y=L} = 0$ в случае c), $\partial_y^{m}\varphi\big|_{y=0} = \partial_y^{m}\varphi\big|_{y=L}$ в случае d) для любого m.

Пусть пространство $\widetilde{H}^s(\Sigma_L)$ является замыканием пространства $\widetilde{\mathcal{S}}(\overline{\Sigma}_L)$ по норме $H^s(\Sigma_L)$ и $\widetilde{H}^s(\Sigma_{L,x_0})$ является сужением $\widetilde{H}^s(\Sigma_L)$ на Σ_{L,x_0} (в частности, $\widetilde{H}^s(\Sigma_{L,+}) = \widetilde{H}^s(\Sigma_{L,0})$).

Нетрудно видеть, что $\widetilde{H}^0(\Sigma_{L,x_0}) = L_2(\Sigma_{L,x_0})$; для $j\geqslant 1$

в случае a) $\quad \widetilde{H}^j(\Sigma_{L,x_0}) = \{\varphi\in H^j(\Sigma_{L,x_0}) : \partial_y^{2m}\varphi|_{y=0} = \partial_y^{2m}\varphi|_{y=L} = 0,\ 2m<j\}$,

в случае b) $\quad \widetilde{H}^j(\Sigma_{L,x_0}) = \{\varphi\in H^j(\Sigma_{L,x_0}) : \partial_y^{2m+1}\varphi|_{y=0} = \partial_y^{2m+1}\varphi|_{y=L} = 0,\ 2m+1<j\}$,

в случае c) $\quad \widetilde{H}^j(\Sigma_{L,x_0}) = \{\varphi\in H^j(\Sigma_{L,x_0}) : \partial_y^{2m}\varphi|_{y=0} = 0,\ 2m<j,\ \partial_y^{2m+1}\varphi|_{y=L} = 0,\ 2m+1<j\}$,

в случае d) $\quad \widetilde{H}^j(\Sigma_{L,x_0}) = \{\varphi\in H^j(\Sigma_{L,x_0}) : \partial_y^{m}\varphi|_{y=0} = \partial_y^{m}\varphi|_{y=L},\ m<j\}$

(для натуральных j эти свойства можно принять за определение указанных пространств).

В полуполосе Σ_{L,x_0,y_0} (при $y_0>0$) будем использовать обычные пространства Соболева $H^j(\Sigma_{L,x_0,y_0})$ (без граничных условий).

Определение 2.1. Пусть $u_0\in L_2(\Sigma_{L,+})$, $\mu\in L_2(B_{T,L})$. Функция $u\in L_\infty(0,T;L_2(\Sigma_{L,+}))$ называется *слабым решением* задачи (1.1), (2.1)–(2.3), если для любой функции $\phi\in L_2(0,T;\widetilde{H}^2(\Sigma_{L,+}))$, для которой $\phi_t,\phi_{xxx},\phi_{xyy}\in L_2(\Pi^+_{T,L})$, $\phi\big|_{t=T}=0$, $\phi\big|_{x=0} = \phi_x\big|_{x=0} = 0$, справедливо равенство

$$\iiint_{\Pi^+_{T,L}} \Big[u(\phi_t+b\phi_x+\phi_{xxx}+\phi_{xyy})+\frac12 u^2\phi_x\Big]\,dxdydt + \iint\limits_{\Sigma_{L,+}} u_0\phi\big|_{t=0}\,dxdy + \iint\limits_{B_{T,L}} \mu\phi_{xx}\big|_{x=0}\,dydt = 0. \tag{2.4}$$

Замечание 2.1. Заметим, что поскольку $\phi_x\in L_2(0,T;H^2(\Sigma_{L,+}))\subset L_2(0,T;L_\infty(\Sigma_{L,+}))$ и $\phi\in L_\infty(0,T;H^1(\Sigma_{L,+}))$, интегралы в (2.4) существуют.

Введем специальные весовые пространства. Пусть $\psi(x)\not\equiv\mathrm{const}$ — некоторая допустимая весовая функция на $\overline{\mathbb{R}}_+$. Положим для $x_0\geqslant 0$, $y_0\in[0,L/2)$

$$L_2^{\psi(x)}(\Sigma_{L,x_0,y_0}) = \{\varphi(x,y) : \varphi\psi^{1/2}\in L_2(\Sigma_{L,x_0,y_0})\}$$

и снабдим это пространство естественной нормой (тогда $L_2^{\psi(x)}(\Sigma_{L,x_0}) = L_2^{\psi(x)}(\Sigma_{L,x_0,0})$). На самом деле мы будем рассматривать специальные частные случаи этих пространств, соответствующие степенным и экспоненциальным весам, и использовать следующие обозначения:

$$L_2^{\alpha}(\Sigma_{L,x_0,y_0}) = L_2^{(1+x)^{2\alpha}}(\Sigma_{L,x_0,y_0}),\qquad L_2^{\alpha,exp}(\Sigma_{L,x_0,y_0}) = L_2^{e^{2\alpha x}}(\Sigma_{L,x_0,y_0})\quad \forall\alpha>0,$$

$L_2^0(\Sigma_{L,x_0,y_0}) = L_2(\Sigma_{L,x_0,y_0})$ (и $L_2^\alpha(\Sigma_{L,x_0}) = L_2^\alpha(\Sigma_{L,x_0,0})$, $L_2^{\alpha,exp}(\Sigma_{L,x_0}) = L_2^{\alpha,exp}(\Sigma_{L,x_0,0})$, соответственно). В дальнейшем в этой части начальные функции в результатах для уравнения Захарова—Кузнецова будут выбираться именно из пространств $L_2^\alpha(\Sigma_{L,+})$ при $\alpha\geqslant 0$ и $L_2^{\alpha,exp}(\Sigma_{L,+})$ при $\alpha>0$.

Определим пространства

$$\widetilde{H}^{k,\psi(x)}(\Sigma_{L,x_0}) = \{\varphi(x,y) : \varphi\psi^{1/2}\in\widetilde{H}^k(\Sigma_{L,x_0})\},$$
$$H^{k,\psi(x)}(\Sigma_{L,x_0,y_0}) = \{\varphi(x,y) : \varphi\psi^{1/2}\in H^k(\Sigma_{L,x_0,y_0})\}$$

и снабдим их естественными нормами.

Определим следующие пространства функций, в которых будем рассматривать решения. Пусть производная $\psi'(x)$ также является допустимой весовой функцией. Введем пространство

$$\widetilde{X}^{k,\psi(x)}(\Pi^{\delta,x_0}_{T,L}) = \{u(t,x,y) : \partial_t^j u\in C([\delta,T];\widetilde{H}^{k-3j,\psi(x)}(\Sigma_{L,x_0}))\cap \\ \cap L_2(\delta,T;\widetilde{H}^{k-3j+1,\psi'(x)}(\Sigma_{L,x_0})),\quad j\leqslant k/3\},$$

и его более слабый вариант

$$\widetilde{X}_w^{k,\psi(x)}(\Pi^{\delta,x_0}_{T,L}) = \{u(t,x,y) : \partial_t^j u\in C_w([\delta,T];\widetilde{H}^{k-3j,\psi(x)}(\Sigma_{L,x_0}))\cap \\ \cap L_2(\delta,T;\widetilde{H}^{k-3j+1,\psi'(x)}(\Sigma_{L,x_0})),\quad j\leqslant k/3\}$$

(символ C_w означает слабую непрерывность). Положим

$$\widetilde{X}^{k,\alpha}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0}) = \widetilde{X}^{k,\rho_\alpha(x)}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0}), \quad \widetilde{X}_w^{k,\alpha}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0}) = \widetilde{X}_w^{k,\rho_\alpha(x)}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0}) \quad \forall\alpha \geqslant 0,$$

(функции ρ_α заданы формулами (1.4), (1.5)),

$$\widetilde{X}^{k,\alpha,exp}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0}) = \widetilde{X}^{k,e^{2\alpha x}}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0}) \quad \forall\alpha > 0.$$

Будем считать, что

$$\widetilde{X}^{\psi(x)}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0}) = \widetilde{X}^{0,\psi(x)}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0}), \quad \widetilde{X}_w^{\psi(x)}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0}) = \widetilde{X}_w^{0,\psi(x)}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0})$$

(с последующими аналогичными уточнениями обозначений $\widetilde{X}^{\alpha}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0})$, $\widetilde{X}_w^{\alpha}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0})$ и $\widetilde{X}^{\alpha,exp}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0})$). Нетрудно видеть, что, например, при $\alpha > 0$

$$X_w^\alpha(\Pi_{T,L}^+) = C_w([0,T]; L_2^\alpha(\Sigma_{L,+})) \cap L_2(0,T; \widetilde{H}^{1,\alpha-1/2}(\Sigma_{L,+})),$$
$$X_w^{\alpha,exp}(\Pi_{T,L}^+) = C_w([0,T]; L_2^{\alpha,exp}(\Sigma_{L,+})) \cap L_2(0,T; \widetilde{H}^{1,\alpha,exp}(\Sigma_{L,+})).$$

В области $\Pi_{T,L}^{\delta,x_0,y_0}$ положим при $\alpha > 0$

$$X^\alpha(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0,y_0}) = \{u(t,x,y) : u \in C([\delta,T]; L_2^\alpha(\Sigma_{L,x_0,y_0})) \cap L_2(\delta,T; H^{1,\alpha-1/2}(\Sigma_{L,x_0,y_0}))\}.$$

Положим для $\delta \in [0,T)$

$$\lambda^+(u;T,L,\delta) = \sup_{x_0\geqslant 0} \int_\delta^T \int_{x_0}^{x_0+1} \int_0^L u^2\,dydxdt, \qquad \lambda^+(u;T,L) = \lambda^+(u;T,L,0).$$

Для описания свойств краевой функции μ введем анизотропные пространства. Пусть $B_L = \mathbb{R}^t \times (0,L)$. Определим функциональное пространство $\widetilde{\mathbb{S}}(\overline{B}_L)$ полностью аналогично $\widetilde{\mathbb{S}}(\overline{\Sigma}_L)$, где переменная x заменена на t. Пусть $\widetilde{H}^{s/3,s}(B_L)$ является замыканием пространства $\widetilde{\mathbb{S}}(\overline{B}_L)$ по норме $H^{s/3,s}(B_L)$.

Точнее, пусть $\psi_l(y)$, $l = 1,2\dots,$ — ортонормальная в $L_2(0,L)$ система собственных функций оператора $(-f'')$ на отрезке $[0,L]$ с соответствующими граничными условиями: $f(0) = f(L) = 0$ в случае a), $f'(0) = f'(L) = 0$ в случае b), $f(0) = f'(L) = 0$ в случае c), $f(0) = f(L), f'(0) = f'(L)$ в случае d), λ_l — соответствующие собственные значения. Подобные системы хорошо известны и записываются через тригонометрические функции.

Для любой функции $\mu \in \widetilde{\mathbb{S}}(\overline{B}_L)$, $\theta \in \mathbb{R}$ и l пусть

$$\widehat{\mu}(\theta,l) \equiv \iint_{B_L} e^{-i\theta t}\psi_l(y)\mu(t,y)\,dtdy. \tag{2.5}$$

Тогда норма в пространстве $H^{s/3,s}(B_L)$ определяется как

$$\Big(\sum_{l=1}^{+\infty} \big\|(|\theta|^{2/3} + l^2)^{s/2}\widehat{\mu}(\theta,l)\big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^\theta)}\Big)^{1/2},$$

а норма в $H^{s/3,s}(B_{T,L})$ — как норма сужения на $B_{T,L}$. В наиболее важном для нас случае $s \geqslant 0$ величины $\widehat{\mu}(\theta,l)$ могут быть определены напрямую как пределы в $L_2(B_L)$ интегралов $\int_{-T}^{T}\int_0^L e^{-i\theta t}\psi_l(y)\mu(t,y)\,dtdy$, $T \to +\infty$.

Использование подобных анизотропных пространств может быть обосновано следующим рассуждением. Пусть $v(t,x,y)$ является решением задачи Коши

$$v_t + v_{xxx} + v_{xyy} = 0, \qquad v\big|_{t=0} = v_0(x,y)$$

из пространства $C_b(\mathbb{R}^t; H^s(\mathbb{R}^2))$, которое легко строится с помощью преобразования Фурье. Тогда согласно [17] равномерно по $x \in \mathbb{R}$

$$\big\|D_t^{1/3}v\big\|^2_{H_{t,y}^{s/3,s}(\mathbb{R}^2)} + \big\|\partial_x v\big\|^2_{H_{t,y}^{s/3,s}(\mathbb{R}^2)} + \big\|\partial_y v\big\|^2_{H_{t,y}^{s/3,s}(\mathbb{R}^2)} \sim \|v_0\|^2_{H^s(\mathbb{R}^2)}$$

(здесь символ D^α обозначает потенциал Рисса порядка $-\alpha$, пространство $H^{s/3,s}_{t,y}(\mathbb{R}^2)$ определено в части 3).

Сформулируем основные результаты о слабых решениях рассматриваемых начально-краевых задач в полуполосе $\Sigma_{L,+}$. Сначала рассмотрим случай степенных весов.

Теорема 2.1. *Пусть* $u_0 \in L_2^\alpha(\Sigma_{L,+})$ *для некоторого* $\alpha \geqslant 0$, $\mu \in \widetilde{H}^{s/3,s}(B_{T,L})$ *для некоторого* $s > 3/2$. *Тогда существует слабое решение задачи* (1.1), (2.1)–(2.3) $u \in \widetilde{X}^\alpha_w(\Pi^+_{T,L})$, *более того,* $\lambda^+(|Du|;T,L) < +\infty$. *Если* $\alpha \geqslant 1$, *то это решение единственно в пространстве* $\widetilde{X}^\alpha_w(\Pi^+_{T,L})$ *и, кроме того,* $u \in \widetilde{X}^\alpha(\Pi^+_{T,L})$.

Теорема 2.2. *Пусть* $u_0 \in L_2^\alpha(\Sigma_{L,+})$ *для некоторого* $\alpha \geqslant 1/2$, $\mu \in \widetilde{H}^{2/3,2}(B_{T,L})$. *Тогда существует слабое решение* $u(t,x,y)$ *задачи* (1.1), (2.1)–(2.3), *обладающее теми же свойствами, что и решение, построенное в теореме* 2.1, *и такое, что*

$$u \in \widetilde{X}^{1,\alpha-1/2}_w(\Pi^{\delta,+}_{T,L}), \quad \lambda^+(|D^2u|;T,L,\delta) < +\infty \quad \forall \delta \in (0,T).$$

Если $\alpha > 1/2$, *то* $u \in \widetilde{X}^{\alpha-1/2}(\Pi^{\delta,+}_{T,L})$ $\forall \delta \in (0,T)$; *если* $\alpha \geqslant 1$, *то* $u \in \widetilde{X}^{1,\alpha-1/2}(\Pi^{\delta,+}_{T,L})$ $\forall \delta \in (0,T)$.

Теорема 2.3. *Пусть условия теоремы* 2.2 *выполнены при* $\alpha > 1$. *Тогда слабое решение задачи* (1.1), (2.1)–(2.3) $u(t,x,y)$ *из пространства* $\widetilde{X}^\alpha_w(\Pi^+_{T,L})$ *обладает следующим свойством*:

$$u \in \widetilde{X}^{2,\alpha-1}(\Pi^{\delta,x_0}_{T,L}) \quad \forall \delta \in (0,T)\ \forall x_0 > 0.$$

Замечание 2.2. Вопрос о справедливости утверждения теоремы 2.3 при $\alpha = 1$ остается открытым.

Теорема 2.4. *Пусть условия теоремы* 2.2 *выполнены при* $\alpha \geqslant l/2$ *для некоторого* $l \geqslant 3$. *Тогда слабое решение задачи* (1.1), (2.1)–(2.3) $u(t,x,y)$ *из пространства* $\widetilde{X}^\alpha_w(\Pi^+_{T,L})$ *обладает следующим свойством*: *в случаях краевых условий* (2.3) *a*) *или c*)

$$\partial_x^{l-3} u \in \widetilde{X}^{3,\alpha-l/2}(\Pi^{\delta,x_0}_{T,L}) \quad \forall \delta \in (0,T)\ \forall x_0 > 0,$$

а в случаях краевых условий (2.3) *b*) *или d*)

$$u \in \widetilde{X}^{l,\alpha-l/2}(\Pi^{\delta,x_0}_{T,L}) \quad \forall \delta \in (0,T)\ \forall x_0 > 0.$$

Теорема 2.5. *Пусть рассматривается случай краевых условий* (2.3) *a) или c),* $4 \leqslant m \leqslant l$ *и условия теоремы* 2.2 *выполнены при* $\alpha > l/2 + m - 3$. *Тогда слабое решение задачи* (1.1), (2.1)–(2.3) $u(t,x,y)$ *из пространства* $\widetilde{X}^\alpha_w(\Pi^+_{T,L})$ *обладает следующим свойством: если* $4 \leqslant k \leqslant m$, *то*

$$\partial_x^{l-k}\partial_y^k u \in X^{\alpha-l/2-k+3}(\Pi^{\delta,x_0,y_0}_{T,L}) \quad \forall \delta \in (0,T)\ \forall x_0 > 0\ \forall y_0 \in (0,L/2).$$

Замечание 2.3. С использованием самого равенства (1.1) аналогичное утверждение нетрудно сформулировать и для производных решения по времени.

Теперь перейдем к случаю экспоненциальных весов.

Теорема 2.6. *Пусть* $u_0 \in L_2^{\alpha,exp}(\Sigma_{L,+})$ *для некоторого* $\alpha > 0$, $\mu \in \widetilde{H}^{s/3,s}(B_{T,L})$ *для некоторого* $s > 3/2$. *Тогда существует единственное слабое решение задачи* (1.1), (2.1)–(2.3) $u \in \widetilde{X}^{\alpha,exp}(\Pi^+_{T,L})$. *Если дополнительно известно, что* $\mu \in \widetilde{H}^{2/3,2}(B_{T,L})$, *то*

$$u \in \widetilde{X}^{1,\alpha,exp}(\Pi^{\delta,+}_{T,L}) \quad \forall \delta \in (0,T).$$

Теорема 2.7. *Пусть* $u_0 \in L_2^{\alpha,exp}(\Sigma_{L,+})$ *для некоторого* $\alpha > 0$, $\mu \in \widetilde{H}^{2/3,2}(B_{T,L})$. *Тогда слабое решение задачи* (1.1), (2.1)–(2.3) $u(t,x,y)$ *из пространства* $\widetilde{X}^{\alpha,exp}(\Pi^+_{T,L})$ *обладает следующим свойством*: *в случаях краевых условий* (2.3) *a*) *или c*) *для любого* l

$$\partial_x^l u \in \widetilde{X}^{3,\alpha,exp}(\Pi^{\delta,x_0}_{T,L}) \quad \forall \delta \in (0,T)\ \forall x_0 > 0,$$

а в случаях краевых условий (2.3) *b*) *или d*) *для любого* l

$$u \in \widetilde{X}^{l,\alpha,exp}(\Pi^{\delta,x_0}_{T,L}) \quad \forall \delta \in (0,T)\ \forall x_0 > 0.$$

Теорема 2.8. *Пусть рассматривается случай краевых условий* (2.3) *a) или c), выполнены условия теоремы* 2.7. *Тогда слабое решение задачи* (1.1), (2.1)–(2.3) $u(t,x,y)$ *из пространства* $\widetilde{X}^{\alpha,exp}(\Pi^+_{T,L})$ *обладает следующим свойством: для любых* j *и мультииндексов* ν

$$\partial_t^j\partial^\nu u \in C([\delta,T];L_2^{\alpha,exp}(\Sigma_{L,x_0,y_0})) \quad \forall\delta\in(0,T),\ \forall x_0>0,\ \forall y_0\in(0,L/2).$$

Замечание 2.4. Таким образом при выполнении условий теоремы 2.7 слабое решение становится бесконечно гладким при $t>0$, $x>0$, $0<y<L$.

Далее в этой части при интегрировании по всей полуполосе $\Sigma_{L,+}$ пределы интегрирования будем опускать.

Прежде чем приступить к доказательству сформулированных теорем, рассмотрим вспомогательную начально-краевую задачу в $\Pi^+_{T,L}$ для линейного уравнения

$$u_t + bu_x + u_{xxx} + u_{xyy} = f(t,x,y) \tag{2.6}$$

с граничными условиями (2.1)–(2.3).

Слабое решение этой задачи определяется аналогично равенству (2.4). Отметим, что такое решение единственно в пространстве $L_2(\Pi^+_{T,L})$ (см. [22]).

Для исследования этой задачи при неоднородном краевом условии (2.2) в статье [22] были построены и исследованы специальные решения однородного уравнения (2.6) типа «граничного потенциала», использующиеся для обнуления этого краевого условия.

Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$z^3 - (\lambda_l - b)z + p = 0, \quad p = \varepsilon + i\theta \in \mathbb{C},$$

где λ_l суть упомянутые выше собственные значения оператора $(-f'')$ на отрезке $[0,L]$ с соответствующими граничными условиями на концах отрезка. Для $\varepsilon>0$ обозначим через $z_0(p,l)$ единственный корень этого уравнения, для которого $\operatorname{Re} z_0 < 0$. Нетрудно видеть, что существует число

$$r_0(\theta,l) = \lim_{\varepsilon\to+0} z_0(\varepsilon+i\theta,l), \tag{2.7}$$

которое, разумеется, является корнем уравнения

$$r^3 - (\lambda_l - b)r + i\theta = 0. \tag{2.8}$$

В статье [22] с помощью формулы Кардано были изучены свойства этого корня и введено следующее определение граничного потенциала: для $\mu\in L_2(B_L)$ при $x\geqslant 0$, $y\in[0,L]$ пусть

$$J(t,x,y;\mu) \equiv \sum_{l=1}^{+\infty} \mathcal{F}_t^{-1}\Big[e^{r_0(\theta,l)x}\widehat{\mu}(\theta,l)\Big](t)\psi_l(y), \tag{2.9}$$

где символ $\mathcal{F}_t^{-1}$ обозначает обратное преобразование Фурье (по переменной t), величины $\widehat{\mu}(\theta,l)$ заданы формулами (2.5), а функции ψ_l суть собственные функции упомянутого выше оператора на отрезке $[0,L]$. Перечислим некоторые свойства функции J, установленные в [22].

Любая функция J — бесконечно гладкая при $x>0$ и удовлетворяет равенству (2.6) для $f\equiv 0$. Для любых $T>0$, $x_0>0$, n и j

$$\sup_{x\geqslant x_0}\|\partial_x^n J(\cdot,x\cdot;\mu)\|_{\widetilde{H}^{j,3j}(B_{T,L})} \leqslant c(T,x_0,n,j)\|\mu\|_{L_2(B_L)}. \tag{2.10}$$

Далее, при $3m\leqslant k$

$$\|\partial_t^m J\|_{C_b(\mathbb{R}^t;\widetilde{H}^{k-3m}(\Sigma_{L,+}))} \leqslant c(k)\|\mu\|_{\widetilde{H}^{(k+1)/3,k+1}(B_L)}, \tag{2.11}$$

при $3m+|\nu|\leqslant k+1$

$$\|\partial_t^m\partial^\nu J\|_{C_b(\overline{\mathbb{R}}^x_+;L_2(B_L))} \leqslant c(k)\|\mu\|_{\widetilde{H}^{(k+1)/3,k+1}(B_L)}, \tag{2.12}$$

в частности, $J(t,0,y;\mu)\equiv\mu(t,y)$, наконец, при $s>3/2$

$$\|J\|_{L_2(0,T;W^1_\infty(\Sigma_{L,+}))} \leqslant c(T,s)\|\mu\|_{\widetilde{H}^{(s+1)/3,s+1}(B_L)}. \tag{2.13}$$

Введем вспомогательные пространства функций, экспоненциально быстро убывающих при $x\to+\infty$. Пусть символ $\widetilde{\mathcal{S}}_{exp}(\overline{\Sigma}_{L,+})$ обозначает пространство бесконечно гладких на $\overline{\Sigma}_{L,+}$ функций $\varphi(x,y)$, таких что $e^{nx}|\partial^\nu\varphi(x,y)|\leqslant c(n,\nu)$ для любых n, мультииндексов ν, $(x,y)\in\overline{\Sigma}_{L,+}$

и $\partial_y^{2m}\varphi\big|_{y=0} = \partial_y^{2m}\varphi\big|_{y=L} = 0$ в случае a), $\partial_y^{2m+1}\varphi\big|_{y=0} = \partial_y^{2m+1}\varphi\big|_{y=L} = 0$ в случае b), $\partial_y^{2m}\varphi\big|_{y=0} = \partial_y^{2m+1}\varphi\big|_{y=L} = 0$ в случае c), $\partial_y^{m}\varphi\big|_{y=0} = \partial_y^{m}\varphi\big|_{y=L} = 0$ в случае d) для любого m.

Пусть $\widetilde{\Phi}_0(x,y) \equiv u_0(x,y)$, а при $j \geqslant 1$

$$\widetilde{\Phi}_j(x,y) \equiv \partial_t^{j-1} f(0,x,y) - (b\partial_x + \partial_x^3 + \partial_x\partial_y^2)\widetilde{\Phi}_{j-1}(x,y).$$

В статье [22] было доказано следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть* $u_0 \in \widetilde{\mathbb{S}}(\overline{\Sigma}_L) \cap \widetilde{\mathbb{S}}_{exp}(\overline{\Sigma}_{L,+})$, $f \in C^\infty\big([0,2T]; \widetilde{\mathbb{S}}(\overline{\Sigma}_L) \cap \widetilde{\mathbb{S}}_{exp}(\overline{\Sigma}_{L,+})\big)$, $\mu \in \widetilde{\mathbb{S}}(\overline{B}_L)$ *и* $\partial_t^j \mu(0,y) \equiv \widetilde{\Phi}_j(0,y)$ *для любого* j. *Тогда существует единственное решение задачи* (2.6), (2.1)–(2.3) $u \in C^\infty\big([0,T]; \widetilde{\mathbb{S}}_{exp}(\overline{\Sigma}_{L,+})\big)$.

Эта лемма позволяет строить решения задачи (2.6), (2.1)–(2.3) в негладком случае как пределы решений из пространства $C^\infty\big([0,T]; \widetilde{\mathbb{S}}_{exp}(\overline{\Sigma}_{L,+})\big)$ при наличии соответствующих оценок, установленных в гладком случае. Поэтому в доказательстве последующих лемм, относящихся к линейной задаче, для получения оценок решений рассматривается именно гладкий случай.

Лемма 2.2. *Пусть* $\psi(x)$ *является допустимой весовой функцией на* $\overline{\mathbb{R}}_+$, *такой что* $\psi'(x)$ *также является допустимой весовой функцией,* $u_0 \in L_2^{\psi(x)}(\Sigma_{L,+})$, $\mu \in \widetilde{H}^{1/3,1}(B_{T,L})$, $f \equiv f_0 + f_{1x}$, *где* $f_0 \in L_1(0,T; L_2^{\psi(x)}(\Sigma_{L,+}))$, $f_1 \in L_2(0,T; L_2^{\psi^2(x)/\psi'(x)}(\Sigma_{L,+}))$. *Тогда существует* (*единственное*) *слабое решение задачи* (2.6), (2.1)–(2.3) $u \in \widetilde{X}^{\psi(x)}(\Pi_{T,L}^+)$.

Доказательство. При $\mu \equiv 0$ это утверждение было доказано в [22]. В общем случае положим

$$g(t,x,y) \equiv J(t,x,y;\mu)\eta(2-x), \quad \widetilde{g} \equiv g_t + bg_x + g_{xxx} + g_{xyy}, \tag{2.14}$$
$$U(t,x,y) \equiv u(t,x,y) - g(t,x,y), \quad U_0(x,y) \equiv u_0(x,y) - g(0,x,y). \tag{2.15}$$

В силу свойств (2.10)–(2.12) $g \in \widetilde{X}^{\psi(x)}(\Pi_{T,L}^+)$, кроме того, так как

$$\widetilde{g} = -bJ\eta'(2-x) - J\eta'''(2-x) + 3J_x\eta''(2-x) - 3J_{xx}\eta'(2-x) - J_{yy}\eta'(2-x),$$

то $\widetilde{g} \in C^\infty(\overline{\Pi}_{T,L}^+)$, $\widetilde{g} = 0$ при $x \in [0,1] \cup [2,+\infty)$. Для функции U рассмотрим начально-краевую задачу $\Pi_{T,L}^+$ для уравнения

$$U_t + bU_x + U_{xxx} + U_{xyy} = f - \widetilde{g}, \tag{2.16}$$

с начальными и краевыми условиями

$$U\big|_{t=0} = U_0, \qquad U\big|_{x=0} = 0 \tag{2.17}$$

и с теми же краевыми условиями на $\Omega_{T,+}$, как (2.3). Согласно [22] решение этой задачи $U \in \widetilde{X}^{\psi(x)}(\Pi_{T,L}^+)$ существует, тогда функция $u \equiv U + g$ дает решение исходной задачи. Заметим, что также согласно результатам статьи [22] и свойствам функции g

$$\|u\|_{C([0,T];L_2^{\psi(x)}(\Sigma_{L,+}))} + |||Du|||_{L_2(0,T;L_2^{\psi'(x)}(\Sigma_{L,+}))} \leqslant$$
$$\leqslant c\Big(\|u_0\|_{L_2^{\psi(x)}(\Sigma_{L,+})} + \|\mu\|_{H^{1/3,1}(B_{T,L})} + \|f_0\|_{L_1(0,T;L_2^{\psi(x)}(\Sigma_{L,+}))} + \|f_1\|_{L_2(0,T;L_2^{\psi^2(x)/\psi'(x)}(\Sigma_{L,+}))}\Big). \tag{2.18}$$

□

Лемма 2.3. *Пусть* $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ *являются допустимыми весовыми функциями на* $\overline{\mathbb{R}}_+$, *такими что* $\psi_0'(x)$, $\psi_1'(x)$ *также являются допустимыми весовыми функциями и* $\psi_0'(x) \sim \psi_1(x)$. *Пусть* $u_0 \in L_2^{\psi_0(x)}(\Sigma_{L,+})$, $\mu \in \widetilde{H}^{2/3,2}(B_{T,L})$, $f \equiv f_0 + f_{1x}$, *где* $f_0 \in L_1(0,T; L_2^{\psi_0(x)}(\Sigma_{L,+}))$, $f_1 \in L_2(0,T; L_2^{\psi_0^2(x)/\psi_0'(x)}(\Sigma_{L,+}))$, $f \in L_2(\delta,T; L_2^{\psi_1^2(x)/\psi_1'(x)}(\Sigma_{L,+}))$ *для любого* $\delta \in (0,T)$. *Тогда* (*единственное*) *слабое решение задачи* (2.6), (2.1)–(2.3) $u \in \widetilde{X}^{\psi_0(x)}(\Pi_{T,L}^+)$ *обладает следующим свойством*:

$$u \in \widetilde{X}^{1,\psi_1(x)}(\Pi_{T,L}^{\delta,+}) \quad \forall \delta \in (0,T). \tag{2.19}$$

Доказательство. Пусть $\varphi_\delta(t) \equiv \eta\Big(\dfrac{2t}{\delta} - 1\Big)$. Перейдем к функции U по формулам (2.14), (2.15). Заметим, что если $\mu \in \widetilde{H}^{2/3,2}(B_{T,L})$, то $g \in \widetilde{X}^{1,\psi(x)}(B_{T,L})$ для любой допустимой весовой функции ψ (с соответствующей оценкой).

Умножим равенство (2.16) на $-2\big((U_x(t,x,y)\psi_1(x))_x + U_{yy}(t,x,y)\psi_1(x)\big)\varphi_\delta(t)$ и проинтегрируем по $\Sigma_{L,+}$:

$$\frac{d}{dt}\iint (U_x^2 + U_y^2)\psi_1\varphi_\delta\,dxdy + \iint (3U_{xx}^2 + 4U_{xy}^2 + U_{yy}^2)\psi_1'\varphi_\delta\,dxdy + \psi_1(0)\int\limits_0^L U_{xx}^2\big|_{x=0}\varphi_\delta\,dy =$$

$$= \iint (U_x^2 + U_y^2)\psi_1\varphi_\delta'\,dxdy - \int\limits_0^L (2U_{xx}U_x\psi_1' - U_x^2\psi_1'' + bU_x^2\psi_1)\big|_{x=0}\varphi_\delta\,dy +$$

$$+ \iint (U_x^2 + U_y^2)(b\psi_1' + \psi_1''')\varphi_\delta\,dxdy - 2\iint (f - \widetilde{g})\big(U_{xx}\psi_1 + U_x\psi_1' + U_{yy}\psi_1\big)\varphi_\delta\,dxdy. \quad (2.20)$$

Имеем:

$$\Big|\iint f(U_{xx} + U_{yy})\psi_1\varphi_\delta\,dxdy\Big| \leqslant \varepsilon\iint (U_{xx}^2 + U_{yy}^2)\psi_1'\varphi_\delta\,dxdy + c(\varepsilon)\iint f^2\frac{\psi_1^2}{\psi_1'}\varphi_\delta\,dxdy, \quad (2.21)$$

где $\varepsilon > 0$ может быть выбран сколь угодно малым,

$$\int\limits_0^L U_x^2\big|_{x=0}\,dy \leqslant c\Big(\iint U_{xx}^2\psi_1'\,dxdy\Big)^{1/2}\Big(\iint U_x^2\psi_1\,dxdy\Big)^{1/2} + c\iint U_x^2\psi\,dxdy. \quad (2.22)$$

Тогда из равенства (2.20) следует, что

$$|||DU|||_{C([\delta,T];L_2^{\psi_1(x)}(\Sigma_{L,+}))} + |||D^2U|||_{L_2(\delta,T;L_2^{\psi_1'(x)}(\Sigma_{L,+}))} \leqslant$$
$$\leqslant c(\delta)\Big(\|f\|_{L_2(\delta/2,T;L_2^{\psi_1^2(x)/\psi_1'(x)}(\Sigma_{L,+}))} + |||DU|||_{L_2(0,T;L_2^{\psi_1(x)}(\Sigma_{L,+}))}\Big). \quad (2.23)$$

Поскольку $\psi_0' \sim \psi_1$, применяя оценку (2.18) находим, что

$$|||Du|||_{C([\delta,T];L_2^{\psi_1(x)}(\Sigma_{L,+}))} + |||D^2u|||_{L_2(\delta,T;L_2^{\psi_1'(x)}(\Sigma_{L,+}))} \leqslant c(\delta)\Big(\|u_0\|_{L_2^{\psi_0(x)}(\Sigma_{L,+})} + \|\mu\|_{H^{2/3,2}(B_{T,L})} +$$
$$+ \|f_0\|_{L_1(0,T;L_2^{\psi_0(x)}(\Sigma_{L,+}))} + \|f_1\|_{L_2(0,T;L_2^{\psi_0^2(x)/\psi_0'(x)}(\Sigma_{L,+}))} + \|f\|_{L_2(\delta/2,T;L_2^{\psi_1^2(x)/\psi_1'(x)}(\Sigma_{L,+}))}\Big), \quad (2.24)$$

откуда следует свойство (2.19). □

Лемма 2.4. *Пусть $\psi_j(x)$, $0 \leqslant j \leqslant l$, $l \geqslant 2$, являются допустимыми весовыми функциями на $\overline{\mathbb{R}}_+$, такими что $\psi_j'(x)$ также являются допустимыми весовыми функциями и $\psi_{j-1}'(x) \sim \psi_j(x)$ при $j \geqslant 1$. Пусть $u_0 \in L_2^{\psi_0(x)}(\Sigma_{L,+})$, $\mu \in \widetilde{H}^{2/3,2}(B_{T,L})$, $f \equiv f_0 + f_{1x}$, где $f_0 \in L_1(0,T;L_2^{\psi_0(x)}(\Sigma_{L,+}))$, $f_1 \in L_2(0,T;L_2^{\psi_0^2(x)/\psi_0'(x)}(\Sigma_{L,+}))$, $f \in L_2(\delta,T;\widetilde{H}^{j-1,\psi_j^2(x)/\psi_j'(x)}(\Sigma_{L,x_0}))$ для любых $\delta \in (0,T)$, $x_0 > 0$ при $1 \leqslant j \leqslant l$. Тогда (единственное) слабое решение задачи (2.6), (2.1)–(2.3) $u \in \widetilde{X}^{\psi_0(x)}(\Pi_{T,L}^+)$ обладает следующим свойством:*

$$u \in C([\delta,T];\widetilde{H}^{l,\psi_l(x)}(\Sigma_{L,x_0})) \cap L_2(\delta,T;\widetilde{H}^{l+1,\psi_l'(x)}(\Sigma_{L,x_0})) \quad \forall\delta \in (0,T)\ \forall x_0 > 0. \quad (2.25)$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по l. При $l = 1$ утверждение доказано в лемме 2.3 (для $x_0 = 0$). Пусть $l \geqslant 2$; предположим, что

$$|||D^{l-1}u|||_{C([\delta,T];L_2^{\psi_{l-1}(x)}(\Sigma_{L,x_0}))} + |||D^lu|||_{L_2(\delta,T;L_2^{\psi_{l-1}'(x)}(\Sigma_{L,x_0}))} \leqslant c(\delta,x_0)\Big(\|u_0\|_{L_2^{\psi_0(x)}(\Sigma_{L,+})} +$$
$$+ \|\mu\|_{H^{2/3,2}(B_{T,L})} + \|f_0\|_{L_1(0,T;L_2^{\psi_0(x)}(\Sigma_{L,+}))} + \|f_1\|_{L_2(0,T;L_2^{\psi_0^2(x)/\psi_0'(x)}(\Sigma_{L,+}))} +$$

$$+\sum_{j=1}^{l-1}|||D^{j-1}f|||_{L_2(\delta/2,T;L_2^{\psi_j^2(x)/\psi_j'(x)}(\Sigma_{L,x_0/2}))}\Big).$$

Пусть $\eta_{x_0}(x)\equiv\eta\Big(\dfrac{2x}{x_0}-1\Big)$, ν — мультииндекс, для которого $|\nu|=l-1$; умножив равенство (2.6) на $2(-1)^{l-1}\partial^\nu\big[(\partial^\nu u_x(t,x,y)\psi_l(x)\eta_{x_0}(x))_x+\partial^\nu u_{yy}\psi_l(x)\eta_{x_0}(x)\big]\varphi_\delta(t)$ и проинтегрировав по $\Sigma_{L,+}$, находим:

$$\frac{d}{dt}\iint\big[(\partial^\nu u_x)^2+(\partial^\nu u_y)^2\big]\psi_l\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy+\iint\big[3(\partial^\nu u_{xx})^2+4(\partial^\nu u_{xy})^2+(\partial^\nu u_{yy})^2\big](\psi_l\eta_{x_0})'\varphi_\delta\,dxdy=$$
$$=\iint\big[(\partial^\nu u_x)^2+(\partial^\nu u_y)^2\big]\psi_l\eta_{x_0}\varphi_\delta'\,dxdy+\iint\big[(\partial^\nu u_x)^2+(\partial^\nu u_y)^2\big]\big(b(\psi_l\eta_{x_0})'+(\psi_l\eta_{x_0})'''\big)\varphi_\delta\,dxdy-$$
$$-2\iint\partial^\nu f\big[(\partial^\nu u_{xx}\psi_l\eta_{x_0}+\partial^\nu u_x(\psi_l\eta_{x_0})'+\partial^\nu u_{yy}\psi_l\eta_{x_0}\big]\varphi_\delta\,dxdy,\quad(2.26)$$

откуда следует, что

$$|||D\partial^\nu u|||_{C([\delta,T];L_2^{\psi_l(x)}(\Sigma_{L,x_0}))}+|||D^2\partial^\nu u|||_{L_2(\delta,T;L_2^{\psi_l'(x)}(\Sigma_{L,x_0}))}\leqslant$$
$$\leqslant c(\delta,x_0)\Big(\|\partial^\nu f\|_{L_2(\delta/2,T;L_2^{\psi_l^2(x)/\psi_l'(x)}(\Sigma_{L,x_0/2}))}+|||D\partial^\nu u|||_{L_2(\delta/2,T;L_2^{\psi_l(x)}(\Sigma_{L,x_0/2}))}\Big).\quad(2.27)$$

Суммируя по ν и применяя индуктивное предположение получаем, поскольку $\psi_{l-1}'\sim\psi_l$, что

$$|||D^l u|||_{C([\delta,T];L_2^{\psi_l(x)}(\Sigma_{L,x_0}))}+|||D^{l+1}u|||_{L_2(\delta,T;L_2^{\psi_l'(x)}(\Sigma_{L,x_0}))}\leqslant c(\delta,x_0)\Big(\|u_0\|_{L_2^{\psi_0(x)}(\Sigma_{L,+})}+$$
$$+\|\mu\|_{H^{1/3,1}(B_{T,L})}+\|f_0\|_{L_1(0,T;L_2^{\psi_0(x)}(\Sigma_{L,+}))}+\|f_1\|_{L_2(0,T;L_2^{\psi_0^2(x)/\psi_0'(x)}(\Sigma_{L,+}))}+$$
$$+\sum_{j=1}^{l}|||D^{j-1}f|||_{L_2(\delta/2,T;L_2^{\psi_j^2(x)/\psi_j'(x)}(\Sigma_{L,x_0/2}))}\Big).$$

□

Лемма 2.5. *Пусть для некоторого $l\geqslant4$ функции $\psi_j(x)$, $0\leqslant j\leqslant l$, удовлетворяют условиям леммы* 2.4, *$u_0\in L_2^{\psi_0(x)}(\Sigma_{L,+})$, $\mu\in\widetilde H^{2/3,2}(B_{T,L})$, $f\equiv f_0+f_{1x}$, где $f_0\in L_1(0,T;L_2^{\psi_0(x)}(\Sigma_{L,+}))$, $f_1\in L_2(0,T;L_2^{\psi_0^2(x)/\psi_0'(x)}(\Sigma_{L,+}))$, $f\in L_2(\delta,T;\widetilde H^{j-1,\psi_j^2(x)/\psi_j'(x)}(\Sigma_{L,x_0}))$ при $1\leqslant j\leqslant3$, $\partial_x^{j-3}f\in L_2(\delta,T;\widetilde H^{2,\psi_j^2(x)/\psi_j'(x)}(\Sigma_{L,x_0}))$ для любых $\delta\in(0,T)$, $x_0>0$ при $4\leqslant j\leqslant l$. Тогда* (*единственное*) *слабое решение задачи* (2.6), (2.1)–(2.3) *$u\in\widetilde X^{\psi_0(x)}(\Pi_{T,L}^+)$ обладает следующим свойством*:

$$\partial_x^{l-3}u\in C([\delta,T];\widetilde H^{3,\psi_l(x)}(\Sigma_{L,x_0}))\cap L_2(\delta,T;\widetilde H^{4,\psi_l'(x)}(\Sigma_{L,x_0}))\quad\forall\delta\in(0,T)\ \forall x_0>0.\quad(2.28)$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по l. При $l=3$ утверждение доказано в лемме 2.4. Пусть $l\geqslant4$; предположим, что

$$\sum_{k=0}^{3}\|\partial_x^{l-k-1}\partial_y^k u\|_{C([\delta,T];L_2^{\psi_{l-1}(x)}(\Sigma_{L,x_0}))}+\sum_{k=0}^{4}\|\partial_x^{l-k}\partial_y^k u\|_{L_2(\delta,T;L_2^{\psi_{l-1}'(x)}(\Sigma_{L,x_0}))}\leqslant$$
$$\leqslant c(\delta,x_0)\Big(\|u_0\|_{L_2^{\psi_0(x)}(\Sigma_{L,+})}+\|\mu\|_{H^{2/3,2}(B_{T,L})}+\|f_0\|_{L_1(0,T;L_2^{\psi_0(x)}(\Sigma_{L,+}))}+\|f_1\|_{L_2(0,T;L_2^{\psi_0^2(x)/\psi_0'(x)}(\Sigma_{L,+}))}+$$
$$+\sum_{j=1}^{l-1}\sum_{k=0}^{\min(2,j-1)}\|\partial_x^{j-k-1}\partial_y^k f\|_{L_2(\delta/2,T;L_2^{\psi_j^2(x)/\psi_j'(x)}(\Sigma_{L,x_0/2}))}\Big).$$

Пусть $0\leqslant k\leqslant2$, $\nu=(l-k-1,k)$; аналогично доказательству леммы 2.4 умножив равенство (2.6) на $2(-1)^{l-1}\partial^\nu\big[(\partial^\nu u_x(t,x,y)\psi_l(x)\eta_{x_0}(x))_x+\partial^\nu u_{yy}\psi_l(x)\eta_{x_0}(x)\big]\varphi_\delta(t)$ и проинтегрировав по $\Sigma_{L,+}$, выводим равенство (2.26), откуда, в свою очередь, получаем оценку (2.27). Суммируя по k и применяя индуктивное предположение, получаем, поскольку $\psi_{l-1}'\sim\psi_l$, что

$$\sum_{k=0}^{3} \|\partial_x^{l-k}\partial_y^k u\|_{C([\delta,T];L_2^{\psi_l(x)}(\Sigma_{L,x_0})} + \sum_{k=0}^{4} \|\partial_x^{l-k+1}\partial_y^k u\|_{L_2(\delta,T;L_2^{\psi_l'(x)}(\Sigma_{L,x_0})} \leqslant$$
$$\leqslant c(\delta,x_0)\Big(\|u_0\|_{L_2^{\psi_0(x)}(\Sigma_{L,+})} + \|\mu\|_{H^{2/3,2}(B_{T,L})} + \|f_0\|_{L_1(0,T;L_2^{\psi_0(x)}(\Sigma_{L,+}))} + \|f_1\|_{L_2(0,T;L_2^{\psi_0^2(x)/\psi_0'(x)}(\Sigma_{L,+}))} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=0}^{\min(2,j-1)} \|\partial_x^{j-k-1}\partial_y^k f\|_{L_2(\delta/2,T;L_2^{\psi_j^2(x)/\psi_j'(x)}(\Sigma_{L,x_0/2}))}\Big).$$

□

Лемма 2.6. *Пусть для некоторого $l \geqslant 4$ выполнены условия леммы 2.5. Пусть $4 \leqslant m \leqslant l$ и для любого j, для которого $4 \leqslant j \leqslant l$, существует набор допустимых весовых функций $\varkappa_{kj}(x)$, где $3 \leqslant k \leqslant \min(j,m)$, таких что производные $\varkappa_{kj}'(x)$ также являются допустимыми весовыми функциями, $\varkappa_{3j}(x) \equiv \psi_j(x)$, $\varkappa_{kj}(x) \leqslant c\big(\varkappa_{(k-1)j}'\varkappa_{kj}'(x)\big)^{1/2}$ при $k \geqslant 4$ для некоторой константы c и любого $x \geqslant 0$. Пусть $\partial_x^{j-k}\partial_y^{k-1} f \in L_2(\delta,T;L_2^{\varkappa_{(k-1)j}'(x)}(\Sigma_{L,x_0,y_0}))$ для любых $\delta \in (0,T)$, $x_0 > 0$, $y_0 \in (0,L/2)$ при $4 \leqslant j \leqslant l$, $4 \leqslant k \leqslant \min(j,m)$. Тогда (единственное) слабое решение задачи* (2.6), (2.1)–(2.3) *$u \in \widetilde{X}^{\psi_0(x)}(\Pi_{T,L}^+)$ обладает следующим свойством: при $4 \leqslant j \leqslant l$*

$$\partial_x^{j-k}\partial_y^k u \in X^{\varkappa_{kj}(x)}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0,y_0}) \quad \forall \delta \in (0,T)\ \forall x_0 > 0\ \forall y_0 \in (0,L/2). \tag{2.29}$$

Доказательство. Положим $\gamma_{y_0}(y) \equiv \eta\Big(\dfrac{2y}{y_0} - 1\Big)\eta\Big(\dfrac{2L-2y}{y_0} - 1\Big)$. Пусть $4 \leqslant j \leqslant l$, $4 \leqslant k \leqslant \min(j,m)$, положим

$$v(t,x,y) \equiv \partial_x^{j-k}\partial_y^k u(t,x,y)\gamma_{y_0}(y).$$

Тогда функция v удовлетворяет в $\Sigma_{L,+}$ уравнению

$$v_t + bv_x + v_{xxx} + v_{xyy} = F \equiv \partial_x^{j-k}\partial_y^k f\gamma_{y_0} + 2\partial_x^{j-k+1}\partial_y^{k+1} u\gamma_{y_0}' + \partial_x^{j-k+1}\partial_y^k u\gamma_{y_0}''.$$

Умножим это равенство на $2v(t,x,y)\varkappa_{kj}(x)\eta_{x_0}(x)\varphi_\delta(t)$ и проинтегрируем по $\Sigma_{L,+}$, тогда

$$\frac{d}{dt}\iint v^2\varkappa_{kj}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy + \iint (3v_x^2 + v_y^2)(\varkappa_{kj}\eta_{x_0})'\varphi_\delta\,dxdy = \iint v^2\varkappa_{kj}\eta_{x_0}\varphi_\delta'\,dxdy +$$
$$+ \iint v^2\big(b(\varkappa_{kj}\eta)' + (\varkappa_{kj}\eta)'''\big)\varphi_\delta\,dxdy + 2\iint Fv\varkappa_{kj}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy. \tag{2.30}$$

Заметим, что

$$v_y^2 \geqslant \frac{1}{2}(\partial_x^{j-k}\partial_y^{k+1}u\gamma_{y_0})^2 - (\partial_x^{j-k}\partial_y^k u\gamma_{y_0}')^2,$$

$$2\int_0^L Fv\,dy = -2\int_0^L \partial_x^{j-k}\partial_y^{k-1} f(\partial_x^{j-k}\partial_y^k u\gamma_{y_0}^2)_y\,dy - 4\int_0^L \partial_x^{j-k+1}\partial_y^k u\,\partial_x^{j-k}\partial_y^{k+1}u\,\gamma_{y_0}\gamma_{y_0}'\,dy -$$
$$- \int_0^L \partial_x^{j-k+1}\partial_y^k u\,\partial_x^{j-k}\partial_y^k u\,\big(4(\gamma_{y_0}')^2 + 2\gamma_{y_0}\gamma_{y_0}''\big)\,dy,$$

где

$$-2\iint \partial_x^{j-k}\partial_y^{k-1} f(\partial_x^{j-k}\partial_y^k u\gamma_{y_0}^2)_y\varkappa_{kj}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy \leqslant \varepsilon\iint (\partial_x^{j-k}\partial_y^{k+1}u\,\gamma_{y_0})^2\varkappa_{kj}'\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy +$$
$$+ \iint (\partial_x^{j-k}\partial_y^k u\,\gamma_{y_0}')^2\varkappa_{kj}'\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy + c(\varepsilon)\iint (\partial_x^{j-k}\partial_y^{k-1} f\,\gamma_{y_0})^2\frac{\varkappa_{kj}^2}{\varkappa_{kj}'}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy,$$

$$-4\iint \partial_x^{j-k+1}\partial_y^k u\,\partial_x^{j-k}\partial_y^{k+1}u\,\gamma_{y_0}\gamma_{y_0}'\varkappa_{kj}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \iint (\partial_x^{j-k}\partial_y^{k+1}u\,\gamma_{y_0})^2 \varkappa'_{kj}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy + c(\varepsilon)\iint (\partial_x^{j-k+1}\partial_y^{k}u\,\gamma'_{y_0})^2 \frac{\varkappa_{kj}^2}{\varkappa'_{kj}}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy.$$

Таким образом, поскольку $\varkappa_{kj}^2/\varkappa'_{kj} \leqslant c\varkappa'_{(k-1)j}$, $\varkappa_{kj} \leqslant c\varkappa'_{(k-1)j}$, из равенства (2.30) следует, что

$$\|\partial_x^{j-k}\partial_y^k u\|_{C([\delta,T];L_2^{\varkappa_{kj}(x)}(\Sigma_{L,x_0,y_0}))} + \|\partial_x^{j-k}\partial_y^{k+1}u\|_{L_2(\delta,T;L_2^{\varkappa'_{kj}(x)}(\Sigma_{L,x_0,y_0}))} \leqslant$$
$$\leqslant c(\delta,x_0,y_0)\Big(\|\partial_x^{j-k}\partial_y^{k-1}f\|_{L_2(\delta/2,T;L_2^{\varkappa'_{(k-1)j}(x)}(\Sigma_{L,x_0/2,y_0/2}))} +$$
$$+ \|\partial_x^{j-k}\partial_y^k u\|_{L_2(\delta/2,T;L_2^{\varkappa'_{(k-1)j}(x)}(\Sigma_{L,x_0/2,y_0/2}))} + \|\partial_x^{j-k+1}\partial_y^k u\|_{L_2(\delta/2,T;L_2^{\varkappa'_{(k-1)j}(x)}(\Sigma_{L,x_0/2,y_0/2}))}\Big).$$

Заметим, что для $k=4$ последние два слагаемых в правой части этого неравенства уже оценены должным образом в лемме 2.5. Тогда индукция по k завершает доказательство леммы. □

Теперь перейдем к доказательству сформулированных выше теорем уже для самого уравнения Захарова—Кузнецова.

Доказательство теоремы 2.1. Хотя этот результат уже фактически установлен в [22], рассмотрим некоторые из деталей доказательства существования слабого решения, поскольку они будут использоваться далее при доказательстве следующих теорем. При этом ход доказательства будет отличаться от использованного в [22]. Доказательство же единственности здесь приводить не будем.

Прежде всего приблизим граничные данные более гладкими. Без ограничения общности можно считать, что $\mu \in \widetilde{H}^{s/3,s}(B_L)$. Пусть функции $\mu_h \in \widetilde{\mathcal{S}}(B_L)$, $h \in (0,1]$, таковы, что $\mu_h \to \mu$ в $\widetilde{H}^{s/3,s}(B_L)$ при $h \to +0$.

Положим $g_h(t,x,y) \equiv J(t,x,y;\mu_h)\eta(2-x)$, тогда $g_h \to g$ при $h \to +0$ в любом пространстве $\widetilde{X}^{\beta,exp}(\Pi^+_{T,L})$, где функция g задана формулой (2.14). Кроме того согласно (2.13) равномерно по h

$$\|g_h\|_{L_2(0,T;W^1_\infty(\Sigma_{L,+}))} \leqslant c. \tag{2.31}$$

Пусть функции $u_0^h \in \widetilde{\mathcal{S}}(\Sigma_L)$ таковы, что $u_0^h \to u_0$ в пространстве $L_2^\alpha(\Sigma_{L,+})$ при $h \to +0$. Положим

$$U_{0h}(x,y) \equiv \Big(u_0^h(x,y) - g_h(0,x,y)\Big)\,\eta(\frac{2x}{h}-1)\eta(\frac{1}{h}+1-x), \quad u_{0h}(x,y) \equiv U_{0h}(x,y)+g_h(0,x,y). \tag{2.32}$$

Тогда $U_{0h} \to U_0$ (функция U_0 задана формулой (2.15)), $u_{0h} \to u_0$ в пространстве $L_2^\alpha(\Sigma_{L,+})$ при $h \to +0$. Кроме того $u_{0h}\big|_{x=0} = \mu_h\big|_{t=0}$. Воспользуемся результатом из статьи [22], согласно которому существует решение $u_h \in \widetilde{X}^{3,\beta,\exp}(\Pi^+_{T,L})$ $\forall \beta > 0$ начально-краевой задачи для уравнения (1.1) с начальными и краевыми условиями

$$u\big|_{t=0} = u_{0h}, \qquad u\big|_{x=0} = \mu_h$$

и соответствующими краевыми условиями (2.3). Рассмотрим также функции $U_h \equiv u_h - g_h$, которые, очевидно, являются решениями задачи для уравнения

$$U_t + bU_x + U_{xxx} + U_{xyy} + UU_x + (g_hU)_x = F_h \equiv -g_hg_{hx} - \widetilde{g}_h \tag{2.33}$$

с начальными и краевыми условиями

$$U\big|_{t=0} = U_{0h}, \qquad U\big|_{x=0} = 0$$

и соответствующими краевыми условиями (2.3), где аналогично (2.14)

$$\widetilde{g}_h \equiv g_{ht} + bg_{hx} + g_{hxxx} + g_{hxyy}.$$

Заметим, что равномерно по h для любого $\beta > 0$

$$\|F_h\|_{C([0,T];L_2^{\beta,exp}(\Sigma_{L,+}))} \leqslant c.$$

Умножив равенство (2.33) (для $U \equiv U_h$) на $2U_h(t,x,y)$ и проинтегрировав по $\Sigma_{L,+}$, получим равенство (которое, разумеется, является аналогом 1-го из законов сохранения (1.3))

$$\frac{d}{dt}\iint U_h^2\,dxdy + \int_0^L U_{hx}^2\big|_{x=0}\,dy + \iint g_{hx}U_h^2\,dxdy = 2\iint F_h U_h\,dxdy,$$

из которого с учетом (2.31) вытекают равномерные по h оценки

$$\|U_h\|_{C([0,T];L_2(\Sigma_{L,+}))} \leqslant c, \qquad \|u_h\|_{C([0,T];L_2(\Sigma_{L,+}))} \leqslant c. \tag{2.34}$$

Далее, умножив равенство (2.33) на $2U_h(t,x,y)\rho_\alpha(x)$ и проинтегрировав по $\Sigma_{L,+}$, получим равенство

$$\frac{d}{dt}\iint U_h^2\rho_\alpha\,dxdy + \int_0^L U_{hx}^2\big|_{x=0}\,dy + 3\iint (3U_{hx}^2 + U_{hy}^2)\rho'_\alpha\,dxdy -$$
$$- \iint U_h^2(\rho'''_\alpha + b\rho'_\alpha)\,dxdy - \frac{1}{3}\iint U_h^3\rho'_\alpha\,dxdy + \iint (g_{hx}\rho_\alpha - g_h\rho'_\alpha)U_h^2\,dxdy = 2\iint F_h U_h\rho_\alpha\,dxdy. \tag{2.35}$$

Здесь с учетом уже полученной оценки (2.34) и интерполяционного неравенства (1.6) (для $k=1$, $m=0$, $q=4$, $\psi_1=\psi_2\equiv\rho'_\alpha$)

$$\Big|\iint U_h^3\rho'_\alpha\,dxdy\Big| \leqslant \Big(\iint U_h^2\,dxdy\Big)^{1/2}\Big(\iint U_h^4(\rho'_\alpha)^2\,dxdy\Big)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\iint (U_{hx}^2+U_{hy}^2)\rho'_\alpha\,dxdy + c(\varepsilon)\iint U_h^2\rho_\alpha\,dxdy \tag{2.36}$$

и тогда из равенства (2.35) следует, что равномерно по h

$$\|U_h\|_{\widetilde{X}^\alpha(\Pi^+_{T,L})} \leqslant c, \qquad \|u_h\|_{\widetilde{X}^\alpha(\Pi^+_{T,L})} \leqslant c. \tag{2.37}$$

Пусть теперь $\psi(x) \equiv 1 + \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x$. Заметим, что эта функция является допустимой весовой функцией на всей оси $\mathbb{R}$, ее производная ψ' также является допустимой весовой функцией, кроме того, эта функция ограничена на $\mathbb{R}$. Пусть $x_0 \geqslant 0$, тогда умножив равенство (2.33) на $2U_h(t,x,y)\psi(x-x_0)$ и проинтегрировав по $\Sigma_{L,+}$, получим равенство аналогичное (2.35), в котором функция $\rho_\alpha(x)$ заменена на $\psi(x)$. Применяя уже полученную оценку (2.34), находим аналогично (2.37), что равномерно по h

$$\lambda^+(|Du_h|;T,L) \leqslant c. \tag{2.38}$$

На основе полученных оценок (2.37), (2.38) стандартным приемом (см., например, [22]) предельным переходом при $h\to+0$ строим слабое решение рассматриваемой задачи $u\in\widetilde{X}^\alpha_w(\Pi^+_{T,L})$, $\lambda^+(|Du|;T,L) < +\infty$.

Если $\alpha \geqslant 1$, то рассмотрим построенное решение u как решение соответствующей начально-краевой задачи для линейного уравнения (2.6) при $f\equiv -uu_x$. Применим лемму 2.2 для $\psi(x)\equiv(1+x)^{2\alpha}$, $f_0\equiv 0$, $f_1\equiv -u^2/2$. Заметим, что в этом случае $\psi^2(x)/\psi'(x)\sim(1+x)^{2\alpha+1}\leqslant(1+x)^{2\alpha-1}(1+x)^{2\alpha}$, и согласно (1.6) (для $k=1$, $m=0$, $q=4$, $\psi_1=(1+x)^{2\alpha-1}$, $\psi_2=(1+x)^{2\alpha}$)

$$\int_0^T\!\!\iint u^4(1+x)^{2\alpha-1}(1+x)^{2\alpha}\,dxdydt \leqslant c\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)}\iint u^2\rho_\alpha\,dxdy\int_0^T\!\!\iint(|Du|^2\rho'_\alpha + u^2\rho_\alpha)\,dxdydt < +\infty. \tag{2.39}$$

Тогда в силу указанной леммы $u\in\widetilde{X}^\alpha(\Pi^+_{T,L})$. □

Доказательство теоремы 2.2. Будем использовать те же гладкие решения u_h, что и в доказательстве теоремы 2.1. Заметим, что в данном случае $g_h\to g$ при $h\to+0$ в любом пространстве $\widetilde{X}^{1,\beta,exp}(\Pi^+_{T,L})$.

Умножив равенство (2.33) (для $U\equiv U_h$) на $-\big(2(U_{hx}(t,x,y)\rho_{\alpha-1/2}(x))_x+2U_{hyy}(t,x,y)\rho_{\alpha-1/2}(x)+U_h^2(t,x,y)\rho_{\alpha-1/2}(x)(x)\big)\varphi_\delta(t)$ и проинтегрировав по $\Sigma_{L,+}$, получим равенство (являющееся аналогом 2-го из законов сохранения (1.3), см. также (2.20)):

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\iint\left(U_{hx}^2+U_{hy}^2-\frac13U_h^3\right)\rho_{\alpha-1/2}\varphi_\delta\,dxdy+\iint\left(3U_{hxx}^2+4U_{hxy}^2+U_{hyy}^2\right)\rho'_{\alpha-1/2}\varphi_\delta\,dxdy+\\
&\qquad+\int_0^L U_{hxx}^2\big|_{x=0}\varphi_\delta\,dy=\iint\left(U_{hx}^2+U_{hy}^2-\frac13U_h^3\right)\rho_{\alpha-1/2}\varphi'_\delta\,dxdy+\\
&\quad+\iint\big(U_{hx}^2+U_{hy}^2\big)\big(b\rho'_{\alpha-1/2}+\rho'''_{\alpha-1/2}\big)\varphi_\delta\,dxdy-2\iint(U_{hxx}+U_{hyy})U_h^2\rho'_{\alpha-1/2}\varphi_\delta\,dxdy-\\
&\quad-\iint\left(\frac b3U_h^3+\frac14U_h^4\right)\rho'_{\alpha-1/2}\varphi_\delta\,dxdy+2\iint(g_hU_h)_x(U_{hxx}+U_{hyy})\rho_{\alpha-1/2}\varphi_\delta\,dxdy+\\
&\quad+2\iint(g_hU_h)_xU_{hx}\rho'_{\alpha-1/2}\varphi_\delta\,dxdy+\frac13\iint(2g_{hx}\rho_{\alpha-1/2}-g_h\rho'_{\alpha-1/2})U_h^3\varphi_\delta\,dxdy-\\
&\quad-2\iint F_h(U_{hxx}\rho_{\alpha-1/2}+U_{hx}\rho'_{\alpha-1/2}+U_{hyy}\rho_{\alpha-1/2})\varphi_\delta\,dxdy-\iint F_hU_h^2\rho_{\alpha-1/2}\varphi_\delta\,dxdy-\\
&\qquad-\int_0^L\big(2U_{hxx}U_{hx}\rho'_{\alpha-1/2}-U_{hx}^2\rho''_{\alpha-1/2}+bU_{hx}^2\rho_{\alpha-1/2}\big)\big|_{x=0}\varphi_\delta\,dy. \qquad (2.40)
\end{aligned}$$

Используем соответствующие аналоги неравенств (2.21), (2.22), (2.36). В частности, поскольку $\rho_{\alpha-1/2}(x)\sim\rho'_\alpha(x)$, из оценки (2.37) следует, что равномерно по h

$$\Big|\int_0^T\iint\left(U_{hx}^2+U_{hy}^2-\frac13U_h^3\right)\rho_{\alpha-1/2}\varphi'_\delta\,dxdy\,dt\Big|\leqslant c.$$

Кроме того, для сколь угодно малого $\varepsilon>0$

$$\begin{aligned}
\Big|\iint(U_{hxx}+U_{hyy})U_h^2\rho'_{\alpha-1/2}\varphi_\delta\,dxdy\Big|&\leqslant\varepsilon\iint|D^2U|^2\rho'_{\alpha-1/2}\varphi_\delta\,dxdy+c(\varepsilon)\iint U_h^4\rho'_{\alpha-1/2}\varphi_\delta\,dxdy\equiv\\
&\equiv\varepsilon\iint|D^2U|^2\rho'_{\alpha-1/2}\varphi_\delta\,dxdy+\gamma_{1h}(t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Big|\iint(g_hU_h)_x(U_{hxx}+U_{hyy})\rho_{\alpha-1/2}\varphi_\delta\,dxdy\Big|\leqslant\varepsilon\iint|D^2U|^2\rho'_{\alpha-1/2}\varphi_\delta\,dxdy+\\
&+c(\varepsilon)\operatorname*{ess\,sup}_{(x,y)\in\Sigma_{L,+}}(1+x)^{1+\varepsilon}(g_{hx}^2+g_h^2)\iint(U_{hx}^2+U_h^2)\rho_{\alpha-1/2}\varphi_\delta\,dxdy\equiv\varepsilon\iint|D^2U|^2\rho'_{\alpha-1/2}\varphi_\delta\,dxdy+\gamma_{2h}(t),
\end{aligned}$$

где $\|\gamma_{jh}\|_{L_1(0,T)}\leqslant c$. Остальные слагаемые в правой части равенства (2.40) оцениваются аналогичным образом, и тогда равномерно по h

$$\|U_h\|_{\widetilde X^{1,\alpha-1/2}(\Pi^{\delta,+}_{T,L})}\leqslant c,\qquad \|u_h\|_{\widetilde X^{1,\alpha-1/2}(\Pi^{\delta,+}_{T,L})}\leqslant c. \qquad (2.41)$$

Заменив в (2.40) $\rho_{\alpha-1/2}(x)$ на $1+\dfrac2\pi\operatorname{arctg}x$, получим аналогично (2.38), что

$$\lambda^+(|D^2u_h|;T,L,\delta)\leqslant c. \qquad (2.42)$$

Из оценок (2.37), (2.41), (2.42) предельным переходом при $h\to+0$ получаем результат о существовании слабого решения рассматриваемой задачи $u\in\widetilde X^\alpha_w(\Pi^+_{T,L})\cap\widetilde X^{1,\alpha-1/2}_w(\Pi^{\delta,+}_{T,L})$, $\lambda^+(|D^2u|;T,L,\delta)<+\infty$.

Пусть $\alpha>1/2$, тогда $\rho'_{\alpha-1/2}(x)\sim(1+x)^{2\alpha-2}$. В силу интерполяционного неравенства (1.6) (для $k=2$, $\psi_1(x)\equiv(1+x)^{2\alpha-2}$, $\psi_2(x)\equiv(1+x)^{2\alpha}$)

$$\int\limits_\delta^T\iint u^2u_x^2(1+x)^{4\alpha-2}\,dxdydt \leqslant \int\limits_\delta^T\Bigl(\iint u^4\psi_1^{1/2}\psi_2^{3/2}\,dxdy\Bigr)^{1/2}\Bigl(\iint u_x^4\psi_1^{3/2}\psi_2^{1/2}\,dxdy\Bigr)^{1/2}dt \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)}\Bigl(\iint u^2\rho_\alpha(x)\,dxdy\Bigr)\int\limits_\delta^T\iint\bigl(|D^2u|^2\rho'_{\alpha-1/2}(x)+u^2\rho_\alpha(x)\bigr)\,dxdy\,dt<+\infty. \quad (2.43)$$

Применяя лемму 2.2 к функции $v(t,x,y)\equiv u(t,x,y)\varphi_\delta(t)$ (где $f_0\equiv -uu_x\varphi_\delta-u\varphi'_\delta$, $f_1\equiv 0$, $\psi(x)\equiv(1+x)^{2\alpha-1}$, а тогда $\psi(x)\leqslant(1+x)^{4\alpha-2}$) получаем, что $u\in\widetilde{X}^{\alpha-1/2}(\Pi^{\delta,+}_{T,L})$.

Наконец, если $\alpha\geqslant 1$, то применим лемму 2.3 для $\psi_0(x)\equiv(1+x)^{2\alpha}$, $\psi_1(x)\equiv(1+x)^{2\alpha-1}$, $f\equiv -uu_x$, $f_0\equiv 0$ $f_1\equiv -u^2/2$. Заметим, что в этом случае $\psi_1^2(x)/\psi_1'(x)\sim(1+x)^{2\alpha}\leqslant(1+x)^{4\alpha-2}$. Тогда используя оценки (2.39) и (2.43), получаем, что $u\in\widetilde{X}^{1,\alpha-1/2}(\Pi^{\delta,+}_{T,L})$. □

Доказательство теоремы 2.3. Будем использовать те же гладкие решения u_h, что и в доказательстве теорем 2.1 и 2.2. При этом будем также использовать результат о дополнительной регулярности подобных решений при $x>0$ из статьи [23]: $\partial_x^n u_h\in\widetilde{X}^{3,\beta,exp}(\Pi^{0,x_0}_{T,L})$ для любых n, $x_0>0$ и $\beta>0$. В частности, $\partial_x^n u_{ht},\partial_x^n u_{hty},\partial_x^n\partial_y^j u_h\in L_2(0,T;L_2^{\beta,exp}(\Sigma_{L,x_0}))$ (при $j\leqslant 4$). Заметим, что тогда из самого равенства (1.1) (для $u\equiv u_h$) следует, что $u_{htyy}\in L_2(0,T;L_2^{\beta,exp}(\Sigma_{L,x_0}))$.

Пусть $\nu=(n_1,n_2)$ — произвольный мультииндекс, для которого $|\nu|=2$. Умножим равенство (1.1) на $\partial^\nu\bigl(\partial^\nu u_h(t,x,y)\rho_{\alpha-1}(x)\eta_{x_0}(x)\bigr)\varphi_\delta(t)$ и проинтегрируем по $\Pi^+_{t,L}$, тогда

$$\iint(\partial^\nu u_h)^2\rho_{\alpha-1}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy+\int\limits_0^t\iint\bigl(3(\partial^\nu u_{hx})^2+(\partial^\nu u_{hy})^2\bigr)(\rho_{\alpha-1}\eta_{x_0})'\varphi_\delta\,dxdy\,d\tau=$$

$$=\int\limits_0^t\iint(\partial^\nu u_h)^2\rho_{\alpha-1}\eta_{x_0}\varphi'_\delta\,dxdy\,d\tau+\int\limits_0^t\iint(\partial^\nu u_h)^2\bigl(b(\rho_{\alpha-1}\eta_{x_0})'+(\rho_{\alpha-1}\eta_{x_0})'''\bigr)\varphi_\delta\,dxdy\,d\tau-$$

$$-2\int\limits_0^t\iint\partial^\nu(u_hu_{hx})\partial^\nu u_h\rho_{\alpha-1}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy\,d\tau. \quad (2.44)$$

Заметим, что поскольку $\rho'_{\alpha-1/2}(x)\sim\rho_{\alpha-1}(x)$, из оценки (2.41) следует, что 1-й и 2-й интегралы в правой части (2.44) уже оценены равномерно по h. Интеграл от нелинейности преобразуем:

$$-2\iint\partial^\nu(u_hu_{hx})\partial^\nu u_h\rho_{\alpha-1}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy=\iint\partial^\nu(u_h^2)(\partial^\nu u_h\rho_{\alpha-1}\eta_{x_0})_x\varphi_\delta\,dxdy\leqslant$$

$$\leqslant\frac12\iint(\partial^\nu u_{hx})^2\rho'_{\alpha-1}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy+\frac12\iint(\partial^\nu(u_h^2))^2\frac{\rho^2_{\alpha-1}}{\rho'_{\alpha-1}}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy+$$

$$+\iint\partial^\nu(u_h^2)\partial^\nu u_h(\rho_{\alpha-1}\eta_{x_0})'\varphi_\delta\,dxdy. \quad (2.45)$$

Очевидно, что

$$\partial^\nu(u_h^2)=2u_h\partial^\nu u_h+2\partial^{\nu_1}u_h\partial^{\nu_2}u_h,$$

где $\nu_1+\nu_2=\nu$, $|\nu_1|=|\nu_2|=1$. Так как $\alpha>1$, то $\rho^2_{\alpha-1}(x)/\rho'_{\alpha-1}(x)\sim(1+x)\rho_{\alpha-1}(x)=\rho_{\alpha-1/2}(x)$, а тогда

$$\iint u_h^2(\partial^\nu u_h)^2\frac{\rho^2_{\alpha-1}}{\rho'_{\alpha-1}}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy\leqslant c\sup_{x\geqslant x_0/2}\bigl[(1+x)u_h^2\bigr]\iint(\partial^\nu u_h)^2\rho_{\alpha-1}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy, \quad (2.46)$$

где в силу неравенства (1.6) (для $k=2$, $m=0$, $q=+\infty$, $\psi_1(x)\equiv 1$, $\psi_2(x)\equiv(1+x)^2$) и оценок (2.37) и (2.41) равномерно по h

$$\|(1+x)u_h^2\|_{L_2(\delta/2,T;L_\infty(\Sigma_{L,x_0/2}))}\leqslant c\|u_h\|_{C[0,T];L_2^1(\Sigma_{L,+}))}\|u_h\|_{L_2(\delta/2,T;H^2(\Sigma_{L,x_0/2}))}\leqslant c_1. \quad (2.47)$$

Кроме того в силу неравенства (1.6) (для $\varphi \equiv u_{hx}$ или $\varphi \equiv u_{hy}$, $k=1$, $m=0$, $q=4$, $\psi_1(x) \equiv \rho_{\alpha-1}(x)$, $\psi_2(x) \equiv \rho_{\alpha-1/2}(x)$) и оценки (2.41) равномерно по h

$$\int_0^T\iint (\partial^{\nu_1}u_h)^2(\partial^{\nu_2}u_h)^2\frac{\rho_{\alpha-1}^2}{\rho'_{\alpha-1}}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy\,dt \leqslant c\int_{\delta/2}^T\iint_{\Sigma_{L,x_0/2}}|Du_h|^4\rho_{\alpha-1}\rho_{\alpha-1/2}\,dxdy\,dt \leqslant \\ \leqslant c_1\|u_h\|^2_{L_\infty(\delta/2,T;H^{1,\alpha-1/2}(\Sigma_{L,x_0/2}))}\|u_h\|^2_{L_2(\delta/2,T;H^{2,\alpha-1}(\Sigma_{L,x_0/2}))} \leqslant c_2. \quad (2.48)$$

Интеграл от функции $\partial^\nu(u_h^2)\partial^\nu u_h\rho'_{\alpha-1}\eta_{x_0}\varphi_\delta$ оценивается полностью аналогично (и даже проще) (2.46)–(2.48). Наконец,

$$\iint |u_h|(\partial^\nu u_h)^2\rho_{\alpha-1}\eta'_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy \leqslant c\iint |u_h|(\partial^\nu u_h)^2\eta_{x_0}^{1/2}\varphi_\delta\,dxdy \leqslant \\ \leqslant \sup_{x\geqslant x_0/2}u_h^2\iint(\partial^\nu u_h)^2\rho_{\alpha-1}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy + c_1\iint_{\Sigma_{L,x_0/2}}(\partial^\nu u_h)^2\varphi_\delta\,dxdy \equiv \\ \equiv \gamma_{1h}(t)\iint(\partial^\nu u_h)^2\rho_{\alpha-1}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy + \gamma_{2h}(t),$$

$$\iint |\partial^{\nu_1}u_h\partial^{\nu_2}u_h\partial^\nu u_h|\rho_{\alpha-1}\eta'_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy \leqslant c\iint |\partial^{\nu_1}u_h\partial^{\nu_2}u_h\partial^\nu u_h|\eta_{x_0}^{1/2}\varphi_\delta\,dxdy \leqslant \\ \leqslant \iint(\partial^\nu u_h)^2\rho_{\alpha-1}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy + c_1\iint_{\Sigma_{L,x_0/2}}|Du_h|^4\varphi_\delta\,dxdy \equiv \\ \equiv \iint(\partial^\nu u_h)^2\rho_{\alpha-1}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy + \gamma_{3h}(t),$$

где согласно (2.41), (2.47), (2.48) $\|\gamma_{jh}\|_{L_1(0,T)} \leqslant c$ равномерно по h. Таким образом, из равенства (2.44) следует, что равномерно по h

$$\|u_h\|_{\widetilde{X}^{2,\alpha-1}(\Pi^{\delta,x_0}_{T,L})} \leqslant c. \quad (2.49)$$

Предельным переходом при $h\to+0$ получаем существование решения исходной задачи $u \in \widetilde{X}^{2,\alpha-1}_w(\Pi^{\delta,x_0}_{T,L})$ (и обладающего всеми свойствами решения из теоремы 2.2).

Для окончания доказательства теоремы применим лемму 2.4 при $l=2$, $\psi_j(x) \equiv (1+x)^{2\alpha-j}$, $f \equiv -uu_x$. Здесь $\psi_2^2(x)/\psi'_2(x) \sim (1+x)^{2\alpha-1}$. Тогда поскольку $u \in \widetilde{X}^\alpha(\Pi^+_{T,L}) \cap \widetilde{X}^{1,\alpha-1/2}(\Pi^{\delta,+}_{T,L}) \cap \widetilde{X}^{2,\alpha-1}_w(\Pi^{\delta,x_0}_{T,L})$, если $|\nu|=2$, то аналогично (2.46), (2.47)

$$\int_\delta^T\iint_{\Sigma_{L,x_0}}(1+x)^{2\alpha-1}u^2(\partial^\nu u)^2\,dxdy\,dt \leqslant \\ \leqslant T\sup_{\delta\leqslant t\leqslant T}\Bigl\{\sup_{x\geqslant x_0}\bigl[(1+x)u^2\bigr]\iint_{\Sigma_{L,x_0}}(1+x)^{2\alpha-2}(\partial^\nu u)^2\,dxdy\Bigr\} < +\infty, \quad (2.50)$$

а если $|\nu|=1$, то аналогично (2.48)

$$\int_\delta^T\iint_{\Sigma_{L,x_0}}(\partial^\nu u)^4(1+x)^{2\alpha-1}\,dxdy\,dt \leqslant \\ \leqslant T\sup_{\delta\leqslant t\leqslant T}\Bigl\{\iint_{\Sigma_{L,x_0}}(1+x)^{2\alpha-1}|Du|^2\,dxdy\iint_{\Sigma_{L,x_0}}\bigl((1+x)^{2\alpha-2}|D^2u|^2+(1+x)^{2\alpha-1}|Du|^2\bigr)\,dxdy\Bigr\} < +\infty. \\ (2.51)$$

Таким образом, $uu_x \in L_2(\delta,T;H^{1,\psi^2(x)/\psi'(x)}(\Sigma_{L,x_0}))$. Кроме того, в случае a) $(uu_x)\big|_{y=0} = (uu_x)\big|_{y=L} = 0$, в случае c) $(uu_x)\big|_{y=0} = 0$, в случае d) $(uu_x)\big|_{y=0} = (uu_x)\big|_{y=L}$. В итоге, $uu_x \in L_2(\delta,T;\widetilde{H}^{1,\psi_2^2(x)/\psi_2'(x)}(\Sigma_{L,x_0}))$. Тогда согласно лемме 2.4 $u \in \widetilde{X}^{2,\alpha-1}(\Pi^{\delta,x_0}_{T,L})$. □

Доказательство теоремы 2.4. Рассмотрим сначала случай $l=3$. Воспользуемся леммой 2.4 при $l=3$, $\psi_j(x) \equiv \rho_{\alpha-j/2}(x)$, $f \equiv -uu_x$. Заметим, что так как $\rho_{\alpha-3/2}(x) \sim (1+x)^{2\alpha-3}(x)$, $\rho'_{\alpha-3/2}(x) \geqslant c(1+x)^{2\alpha-4-\varepsilon}$, где $\varepsilon=0$ при $\alpha>3/2$, $\varepsilon>0$ произвольно мало при $\alpha=3/2$, то

$$\psi_3^2(x)/\psi_3'(x) \leqslant c(1+x)^{2\alpha-1}. \tag{2.52}$$

Для произвольного мультииндекса ν, $|\nu|=2$,

$$\partial^\nu(uu_x) = u\partial^\nu u_x + \sum_{|\nu_1|=1,|\nu_2|=2} c_{\nu_1,\nu_2}\partial^{\nu_1}u\partial^{\nu_2}u. \tag{2.53}$$

В силу неравенства (1.6) (для $k=2$, $m=0$, $q=+\infty$, $\psi_1(x)\equiv 1+x$, $\psi_2(x)\equiv(1+x)^3$), поскольку $u \in C([0,T],L_2^{3/2}(\Sigma_{L,+}))$, $|D^2u| \in C([\delta,T];L_2^{1/2}(\Sigma_{L,x_0}))$, то

$$\sup_{(t,x)\in\Pi^{\delta,x_0}_{T,L}} \big[(1+x)|u(t,x)|\big] < +\infty; \tag{2.54}$$

тогда, поскольку $\partial^\nu u_x \in L_2(\delta,T;L_2^{\alpha-3/2}(\Sigma_{L,x_0}))$, то

$$\int_\delta^T \iint_{\Sigma_{L,x_0}} u^2(\partial^\nu u_x)^2\frac{\psi_3(x)^2}{\psi_3'(x)}\,dxdy\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \Big(\sup_{(t,x)\in\Pi^{\delta,x_0}_{T,L}}\big[(1+x)|u(t,x)|\big]\Big)^2 \int_\delta^T \iint_{\Sigma_{L,x_0}} (1+x)^{2\alpha-3}(\partial^\nu u_x)^2\,dxdy\,dt < +\infty. \tag{2.55}$$

Далее, так как $2\alpha-1 \leqslant 4\alpha-4$ при $\alpha \geqslant 3/2$, то аналогично (2.43)

$$\int_\delta^T \iint_{\Sigma_{L,x_0}} (\partial^{\nu_1}u)^2(\partial^{\nu_2}u)^2\frac{\psi_3^2(x)}{\psi_3'(x)}\,dxdy\,dt \leqslant$$
$$\leqslant c\int_\delta^T \Big(\iint_{\Sigma_{L,x_0}}(1+x)^{4\alpha-3}(\partial^{\nu_1}u)^4\,dxdy\Big)^{1/2}\Big(\iint_{\Sigma_{L,x_0}}(1+x)^{4\alpha-5}(\partial^{\nu_2}u)^4\,dxdy\Big)^{1/2}dt \leqslant$$
$$\leqslant c_1\sup_{t\in(\delta,T)}\Big(\iint_{\Sigma_{L,x_0}}(1+x)^{2\alpha-1}|Du|^2\,dxdy\Big)\times$$
$$\times\int_\delta^T\iint_{\Sigma_{L,x_0}}\big((1+x)^{2\alpha-3}|D^3u|^2+(1+x)^{2\alpha-1}|Du|^2\big)\,dxdy\,dt < +\infty. \tag{2.56}$$

Таким образом, $uu_x \in L_2(\delta,T;H^{2,\psi_3^2(x)/\psi_3'(x)}(\Sigma_{L,x_0}))$.

Кроме того, в случае a) $(uu_x)\big|_{y=0} = (uu_x)\big|_{y=L} = 0$, в случае b) $(uu_x)_y\big|_{y=0} = (uu_x)_y\big|_{y=L} = 0$, в случае c) $(uu_x)\big|_{y=0} = (uu_x)_y\big|_{y=L} = 0$, в случае d) $(uu_x)\big|_{y=0} = (uu_x)\big|_{y=L}$, $(uu_x)_y\big|_{y=0} = (uu_x)_y\big|_{y=L}$. В итоге, $uu_x \in L_2(\delta,T;\widetilde{H}^{2,\psi_3^2(x)/\psi_3'(x)}(\Sigma_{L,x_0}))$. Применяя лемму 2.4, находим, что $u \in \widetilde{X}^{3,\alpha-3/2}(\Pi^{\delta,x_0}_{T,L})$.

Для $l \geqslant 4$ применим индукцию по l. Пусть сначала рассматривается случай краевых условий b) или d). Используем лемму 2.5 для $\psi_j(x)\equiv\rho_{\alpha-j/2}(x)$, $f\equiv -uu_x$. Аналогично (2.52)

$$\psi_l^2(x)/\psi_l'(x) \leqslant c(1+x)^{2\alpha-l+2}.$$

Для произвольного мультииндекса ν, $|\nu| = l-1$, аналогично (2.53)

$$\partial^\nu(uu_x) = u\partial^\nu u_x + \sum_{|\nu_1|\leqslant|\nu_2|\leqslant l-1, |\nu_1|+|\nu_2|=l} c_{\nu_1,\nu_2}\partial^{\nu_1}u\partial^{\nu_2}u.$$

Используя неравенство (2.54) и индуктивное предположение, находим аналогично (2.55), что

$$\int\limits_\delta^T \iint\limits_{\Sigma_{L,x_0}} u^2(\partial^\nu u_x)^2 \frac{\psi_l^2(x)}{\psi_l'(x)}\,dxdy\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sup_{(t,x)\in\Pi_{T,L}^{\delta,x_0}} \big[(1+x)|u(t,x)|\big]\Big)^2 \int\limits_\delta^T \iint\limits_{\Sigma_{L,x_0}} (1+x)^{2\alpha-l}(\partial^\nu u_x)^2\,dxdy\,dt < +\infty.$$

Кроме того, аналогично (2.56), поскольку $2\alpha - l + 2 \leqslant 4\alpha - l - 1$

$$\int\limits_\delta^T \iint\limits_{\Sigma_{L,x_0}} (\partial^{\nu_1}u)^2(\partial^{\nu_2}u)^2 \frac{\psi_l^2(x)}{\psi_l'(x)}\,dxdy\,dt \leqslant$$

$$\leqslant c\int\limits_\delta^T \Big(\iint\limits_{\Sigma_{L,x_0}} (1+x)^{4\alpha-2|\nu_1|-1}(\partial^{\nu_1}u)^4\,dxdy\Big)^{1/2} \Big(\iint\limits_{\Sigma_{L,x_0}} (1+x)^{4\alpha-2|\nu_2|-1}(\partial^{\nu_2}u)^4\,dxdy\Big)^{1/2}dt \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \sup_{t\in(\delta,T)} \iint\limits_{\Sigma_{L,x_0}} \big((1+x)^{2\alpha-|\nu_1|}(\partial^{\nu_1}u)^2 + \iint\limits_{\Sigma_{L,x_0}} (1+x)^{2\alpha-|\nu_2|}(\partial^{\nu_2}u)^2\big)\,dxdy\times$$

$$\times \int\limits_\delta^T \iint\limits_{\Sigma_{L,x_0}} \big((1+x)^{2\alpha-|\nu_1|-1}|D\partial^{\nu_1}u|^2 + (1+x)^{2\alpha-|\nu_1|}(\partial^{\nu_1}u)^2 + (1+x)^{2\alpha-|\nu_2|-1}|D\partial^{\nu_2}u|^2 +$$

$$+ (1+x)^{2\alpha-|\nu_2|}(\partial^{\nu_2}u)^2\big)\,dxdy\,dt < +\infty.$$

Таким образом, $uu_x \in L_2(\delta,T;H^{l-1,\psi_l^2(x)/\psi_l'(x)}(\Sigma_{L,x_0}))$.

Заметим, что

$$\partial_y^j(uu_x) = \sum_{k=0}^{j} c_{jk}\partial_y^k u\partial_y^{j-k}u_x.$$

Тогда так как в случае b) для нечетных значений $j < l-1$ либо $\partial_y^k u\big|_{y=0} = \partial_y^k u\big|_{y=L}$, либо $\partial_y^{j-k}u_x\big|_{y=0} = \partial_y^{j-k}u_x\big|_{y=L} = 0$, поэтому $\partial_y^j(uu_x)\big|_{y=0} = \partial_y^j(uu_x)\big|_{y=0} = 0$. В случае же d) очевидно, что $\partial_y^j(uu_x)\big|_{y=0} = \partial_y^j(uu_x)\big|_{y=0} = 0$ для всех $j < l-1$. Это означает, что $uu_x \in L_2(\delta,T;\widetilde{H}^{l-1,\psi_l^2(x)/\psi_l'(x)}(\Sigma_{L,x_0}))$. Тогда из леммы 2.4 следует, что $u \in \widetilde{X}^{l,\alpha-l/2}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0})$.

Наконец для $l \geqslant 4$ рассмотрим случай краевых условий a) или c). Выберем мультииндекс $\nu = (n_1,n_2)$, такой что $|\nu| = l-1$, $n_2 \leqslant 2$. Тогда применяя индукцию по l и дословно повторяя выкладки, проведенные для случаев b) и d), находим, что $\partial_x^{l-3}(uu_x) \in L_2(\delta,T;H^{2,\psi_l^2(x)/\psi_l'(x)}(\Sigma_{L,x_0}))$, что аналогично $l=3$ означает, что $\partial_x^{l-3}(uu_x) \in L_2(\delta,T;\widetilde{H}^{2,\psi_l^2(x)/\psi_l'(x)}(\Sigma_{L,x_0}))$. Применение леммы 2.5 приводит к свойству $\partial_x^{l-3}u \in \widetilde{X}^{3,\alpha-l/2}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0})$. □

Доказательство теоремы 2.5. Воспользуемся индукцией по k. Докажем, что если $\partial_x^{j-k+1}\partial_y^{k-1}u \in X^{\alpha-j/2-k+4}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0,y_0})$ при $4 \leqslant j \leqslant l$, $4 \leqslant k \leqslant \min(j,m)$ для любых $\delta \in (0,T)$, $x_0 > 0$, $y_0 \in (0,L/2)$, то $\partial_x^{j-k}\partial_y^k u \in X^{\alpha-j/2-k+3}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0,y_0})$.

Воспользуемся леммой 2.6, в которой положим $\varkappa_{kj}(x) \equiv (1+x)^{2\alpha-j-2k+6}$ (заметим, что $2\alpha - j - 2k + 6 > 0$, $\varkappa_{3j}(x) = (1+x)^{2\alpha-j}$).

Пусть $\nu = (n_1,n_2)$ — мультииндекс, такой что $|\nu| \leqslant j$, $n_2 \leqslant k-1$. Тогда $\partial^\nu u \in X^{\alpha-j/2-k+4}$ и

$$\int_\delta^T \iint_{\Sigma_{L,x_0,y_0}} (1+x)^{4\alpha-2j-4k+15}(\partial^\nu u)^4\,dxdy\,dt \leqslant \sup_{t\in(\delta,T)} \iint_{\Sigma_{L,x_0,y_0}} (1+x)^{2\alpha-j-2k+8}(\partial^\nu u)^2\,dxdy\times$$
$$\times\int_\delta^T \iint_{\Sigma_{L,x_0,y_0}} \big(|D\partial^\nu u|^2(1+x)^{2\alpha-j-2k+7} + (\partial^\nu u)^2(1+x)^{2\alpha-j-2k+8}\big)\,dxdy\,dt < +\infty$$

Это свойство означает, что поскольку $\varkappa'_{(k-1)j}(x) \leqslant c(1+x)^{2\alpha-j-2k+7}$, а $2\alpha-j-2k+7 \leqslant 4\alpha-2j-4k+15$, то

$$\partial_x^{j-k}\partial_y^{k-1}(uu_x) \in L_2(\delta,T; L_2^{\varkappa'_{(k-1)j}(x)}(\Sigma_{L,x_0,y_0})).$$

Тогда из леммы 2.6 следует требуемое свойство.

Осталось заметить, что при $k=4$

$$\partial_x^{j-3}\partial_y^3 u \in X^{\alpha-j/2}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0})$$

по теореме 2.4. □

Доказательство результатов с экспоненциальными весами существенно проще, поскольку если $\psi(x)\equiv e^{2\alpha x}$, то $\psi^{(j)}(x)\sim\psi(x)$ для любого j, в частности, $\psi^2(x)/\psi'(x)\sim\psi(x)$.

Доказательство теоремы 2.6. Искомое решение строим как предел при $h\to+0$ гладких решений $u_h(t,x,y)$ таких же, как в доказательстве теорем 2.1–2.3.

Оценка (2.34) не изменяется. Используя в качестве весовой функции $e^{2\alpha x}$ вместо $\rho_\alpha(x)$ аналогично (2.37) находим, что равномерно по h

$$\|u_h\|_{\widetilde{X}^{\alpha,exp}(\Pi_{T,L}^+)} \leqslant c.$$

Эта оценка позволяет построить решение исходной задачи $u\in\widetilde{X}_w^{\alpha,exp}(\Pi_{T,L}^+)$. Очевидно, что для него автоматически $\lambda^+(|Du|;T,L)<+\infty$. Кроме того, аналогично (2.39)

$$\int_0^T\iint u^4 e^{4\alpha x}\,dxdy\,dt < +\infty,$$

а тогда из леммы 2.2 следует, что $u\in\widetilde{X}^{\alpha,exp}(\Pi_{T,L}^+)$.

Если дополнительно известно, что $\mu\in\widetilde{H}^{2/3,2}(B_{T,L})$, то аналогично (2.41) находим, что равномерно по h

$$\|u_h\|_{\widetilde{X}^{1,\alpha,exp}(\Pi_{T,L}^{\delta,+})} \leqslant c,$$

откуда следует, что $u\in\widetilde{X}_w^{1,\alpha,exp}(\Pi_{T,L}^{\delta,+})$. Кроме того, аналогично (2.43)

$$\int_\delta^T\iint u^2u_x^2 e^{4\alpha x}\,dxdy\,dt < +\infty,$$

а тогда из леммы 2.3 следует, что $u\in\widetilde{X}^{1,\alpha,exp}(\Pi_{T,L}^{\delta,+})$. □

Доказательство теоремы 2.7. Сначала как и при доказательстве теоремы 2.3 устанавливаем аналогично (2.49), что равномерно по h

$$\|u_h\|_{\widetilde{X}^{2,\alpha,exp}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0})} \leqslant c,$$

и предельным переходом при $h\to+0$ получаем, что $u\in\widetilde{X}_w^{2,\alpha,exp}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0})$. Далее, аналогично (2.50) находим, что при $|\nu|=2$

$$\int_\delta^T\iint_{\Sigma_{L,x_0}} u^2(\partial^\nu u)^2 e^{4\alpha x}\,dxdy\,dt < +\infty,$$

а при $|\nu| = 1$, что аналогично (2.51)

$$\int\limits_\delta^T \iint\limits_{\Sigma_{L,x_0}} (\partial^\nu u)^4 e^{4\alpha x}\, dxdy\, dt < +\infty.$$

Это означает, в частности, что $uu_x \in L_2(\delta, T; \widetilde{H}^{1,\alpha,exp}(\Sigma_{L,x_0}))$, а тогда из леммы 2.4 при $l = 2$ следует, что $u \in \widetilde{X}^{2,\alpha,exp}(\Pi^{\delta,x_0}_{T,L})$.

Далее, в случае $l = 3$ используем равенство (2.53) и находим для мультииндекса ν, для которого $|\nu| = 2$, что аналогично (2.55)

$$\int\limits_\delta^T \iint\limits_{\Sigma_{L,x_0}} u^2(\partial^\nu u_x)^2 e^{4\alpha x}\, dxdy\, dt < +\infty,$$

а если $|\nu_1| = 1$, $|\nu_2| = 2$, то аналогично (2.56)

$$\int\limits_\delta^T \iint\limits_{\Sigma_{L,x_0}} (\partial^{\nu_1} u)^2(\partial^{\nu_2} u)^2 e^{4\alpha x}\, dxdy\, dt < +\infty.$$

В итоге, $uu_x \in L_2(\delta, T; \widetilde{H}^{2,\alpha,exp}(\Sigma_{L,x_0}))$ и из леммы 2.4 следует, что $u \in \widetilde{X}^{3,\alpha,exp}(\Pi^{\delta,x_0}_{T,L})$.

Наконец, при $l \geqslant 4$ применяя индукцию по l, находим, что в случаях b) или d) $uu_x \in L_2(\delta, T; \widetilde{H}^{l-1,\alpha,exp}(\Sigma_{L,x_0}))$, а в случаях a) или c), что $\partial_x^{l-3}(uu_x) \in L_2(\delta, T; \widetilde{H}^{2,\alpha,exp}(\Sigma_{L,x_0}))$. Применяя соответственно лемму 2.4 или лемму 2.5, завершаем доказательство теоремы. $\square$

Доказательство теоремы 2.8. Доказательство проводим аналогично теореме 2.5. Пусть $j \geqslant 4$, $4 \leqslant k \leqslant j$. Воспользуемся индукцией по k. Уже известно, что $\partial_x^{j-3}\partial_y^3 u \in X^{\alpha,exp}(\Pi^{\delta,x_0}_{T,L})$.

Предположим, что $\partial_x^{j-k+1}\partial_y^{k-1} u \in X^{\alpha,exp}(\Pi^{\delta,x_0,y_0}_{T,L})$ для любых $\delta \in (0,T)$, $x_0 > 0$, $y_0 \in (0, L/2)$. Воспользуемся леммой 2.6, в которой положим $\varkappa_{kj}(x) \equiv e^{2\alpha x}$. Тогда $\partial_x^{j-k}\partial_y^{k-1}(uu_x) \in L_2(\delta, T; L_2^{\alpha,exp}(\Sigma_{L,x_0,y_0}))$ и в силу указанной леммы $\partial_x^{j-k}\partial_y^k u \in X^{\alpha,exp}(\Pi^{\delta,x_0,y_0}_{T,L})$.

Так как j можно выбрать сколь угодно большим, получаем, что $\partial^\nu u \in X^{\alpha,exp}(\Pi^{\delta,x_0,y_0}_{T,L})$ для любого мультииндекса α, в частности, $\partial^\nu u \in C([\delta, T]; L_2^{\alpha,exp}(\Sigma_{L,x_0,y_0}))$. Применяя само равенство (1.1), чтобы выразить производные решения по t, завершаем доказательство теоремы. $\square$

Замечание 2.5. Первые результаты о существовании и единственности решений начально-краевой задачи для уравнения Захарова—Кузнецова на полуполосе $\Sigma_{L,+}$ были получены в статьях [37, 40]. В них рассматривалась задача с однородным краевым условием (2.2) и однородными условиями Дирихле при $y = 0$ и $y = L$ (случай a) условия (2.3) в терминологии настоящей статьи). В обеих статьях применялись экспоненциальные веса на $+\infty$. В терминологии настоящей статьи можно сказать, что в [40] предполагалось, что $u_0 \in \widetilde{H}^{2,\alpha,exp}(\Sigma_{L,+})$ (и некоторые другие условия), было построено глобальное по времени решение из пространства $\widetilde{X}^{2,\alpha,exp}(\Pi^+_{T,L})$ и доказана его единственность. В [37] предполагалось, что $u_0 \in \widetilde{H}^{1,\alpha,exp}(\Sigma_{L,+})$, было построено глобальное по времени решение из пространства $\widetilde{X}^{1,\alpha,exp}_w(\Pi^+_{T,L})$, под единственностью понималась единственность среди решений, которые являлись пределами регулярных решений.

В статье [22] были рассмотрены начально-краевые задачи для уравнения Захарова—Кузнецова в такой же постановке, что и в настоящей статье (а именно, с неоднородным краевым условием (2.2) и любым из четырех условий (2.3) для произвольных $T > 0$, $L > 0$). В качестве весов $\psi(x)$ могли быть использованы как степенные функции, так и экспоненты. Для начальных функций из пространства $L^{\psi(x)}_{2,+}$ были получены результаты о существовании и единственности слабых решений в пространствах $\widetilde{X}^{\psi(x)}_w(\Pi^+_{T,L})$, которые приведены в настоящей статье (см. теоремы 2.1 и 2.6). Кроме того, были получены результаты о существовании и единственности решений в пространствах $\widetilde{X}^{1,\psi(x)}_w(\Pi^+_{T,L})$ при $u_0 \in \widetilde{H}^{1,\psi(x)}(\Sigma_{L,+})$, $\mu \in \widetilde{H}^{2/3,2}(B_{T,L})$, $u_0(0,y) \equiv \mu(0,y)$ и $\widetilde{X}^{3,\psi(x)}(\Pi^+_{T,L})$ при $u_0 \in \widetilde{H}^{3,\psi(x)}(\Sigma_{L,+})$, $\mu \in \widetilde{H}^{4/3,4}(B_{T,L})$, $u_0(0,y) \equiv \mu(0,y)$.

В статье [23] изучались вопросы о дополнительной регулярности решений из пространства $\widetilde{X}^{3,\psi(x)}(\Pi^+_{T,L})$, построенных в [22]. В случаях краевых условий b) или d) при $u_0 \in \widetilde{H}^{k,\psi(x)}(\Sigma_{L,+})$, $\mu \in \widetilde{H}^{(k+1)/3,k+1}(B_{T,L})$ для $k = 3n$ или $k = 3n+1$, $n \in \mathbb{N}$, и выполнении соответствующих условий согласования граничных данных была установлена глобальная корректность в классах $\widetilde{X}^{k,\psi(x)}(\Pi^+_{T,L})$. В случаях краевых условий a) или c) были получены результаты о внутренней регулярности решений в духе теорем 2.4, 2.5, 2.7 и 2.8, но с регулярностью вплоть до $t = 0$ (при соответствующей гладкости начальной функции).

3. Начально-краевая задача на полуплоскости

В данной части рассматривается начально-краевая задача для уравнения Захарова—Кузнецова в области $\Pi^+_T = (0,T)\times\mathbb{R}^2_+$ ($T>0$ — произвольно) с граничными условиями

$$u(0,x,y) = u_0(x,y), \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2_+, \tag{3.1}$$

$$u(t,0,y) = \mu(t,y), \qquad (t,y)\in B_T = (0,T)\times\mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Проблема выполнения граничных условий типа (2.3) здесь, разумеется, не возникает. Основные результаты данной части получены при $b = 0$.

Определение слабого решения данной задачи аналогично определению 2.1.

Определение 3.1. Пусть $u_0 \in L_2(\mathbb{R}^2_+)$, $\mu \in L_2(B_T)$. Функция $u \in L_\infty(0,T;L_2(\mathbb{R}^2_+))$ называется *слабым решением* задачи (1.1), (3.1), (3.2), если для любой функции $\phi \in L_2(0,T;H^2(\mathbb{R}^2_+))$, для которой $\phi_t, \phi_{xxx}, \phi_{xyy} \in L_2(\Pi^+_T)$, $\phi\big|_{t=T} = 0$, $\phi\big|_{x=0} = \phi_x\big|_{x=0} = 0$, справедливо равенство

$$\iiint_{\Pi^+_T}\Big[u(\phi_t + b\phi_x + \phi_{xxx} + \phi_{xyy}) + \frac12 u^2\phi_x\Big]\,dxdydt + \iint\limits_{\mathbb{R}^2_+} u_0\phi\big|_{t=0}\,dxdy + \iint\limits_{B_T}\mu\phi_{xx}\big|_{x=0}\,dydt = 0. \tag{3.3}$$

Положим для $x_0 \geqslant 0$

$$\mathbb{R}^2_{x_0} = (x_0,+\infty)\times\mathbb{R}$$

(тогда $\mathbb{R}^2_+ = \mathbb{R}^2_0$), для $\delta\in[0,T)$

$$\Pi^{\delta,x_0}_T = (\delta,T)\times\mathbb{R}^2_{x_0}, \qquad \Pi^{\delta,+}_T = \Pi^{\delta,0}_T$$

(тогда $\Pi^+_T = \Pi^{0,+}_T$).

Аналогично разделу 2 введем весовые пространства. Пусть $\psi(x) \not\equiv \mathrm{const}$ — некоторая допустимая весовая функция на $\overline{\mathbb{R}}_+$. Положим для $x_0 \geqslant 0$

$$L_2^{\psi(x)}(\mathbb{R}^2_{x_0}) = \{\varphi(x,y) : \varphi\psi^{1/2}\in L_2(\mathbb{R}^2_{x_0})\}$$

и снабдим это пространство естественной нормой. Для степенных и экспоненциальных весов будем использовать обозначения

$$L_2^{\alpha}(\mathbb{R}^2_{x_0}) = L_2^{(1+x)^{2\alpha}}(\mathbb{R}^2_{x_0}), \qquad L_2^{\alpha,exp}(\mathbb{R}^2_{x_0}) = L_2^{e^{2\alpha x}}(\mathbb{R}^2_{x_0}) \quad \forall\alpha>0,$$

$L_2^0(\mathbb{R}^2_{x_0}) = L_2(\mathbb{R}^2_{x_0})$. Определим пространство

$$H^{k,\psi(x)}(\mathbb{R}^2_{x_0}) = \{\varphi(x,y) : \varphi\psi^{1/2}\in H^k(\mathbb{R}^2_{x_0})\}$$

и снабдим его естественной нормой.

Введем пространства функций, в которых будем рассматривать решения. Пусть производная $\psi'(x)$ также является допустимой весовой функцией. Положим

$$X^{k,\psi(x)}(\Pi^{\delta,x_0}_T) = \{u(t,x,y) : \partial_t^j u \in C([\delta,T];H^{k-3j,\psi(x)}(\mathbb{R}^2_{x_0}))\cap \\ \cap L_2(\delta,T;H^{k-3j+1,\psi'(x)}(\mathbb{R}^2_{x_0})), \quad j\leqslant k/3\},$$

$$X_w^{k,\psi(x)}(\Pi^{\delta,x_0}_T) = \{u(t,x,y) : \partial_t^j u \in C_w([\delta,T];H^{k-3j,\psi(x)}(\mathbb{R}^2_{x_0}))\cap \\ \cap L_2(\delta,T;H^{k-3j+1,\psi'(x)}(\mathbb{R}^2_{x_0})), \quad j\leqslant k/3\}.$$

Пусть

$$X^{k,\alpha}(\Pi^{\delta,x_0}_T) = X^{k,\rho_\alpha(x)}(\Pi^{\delta,x_0}_T), \quad X_w^{k,\alpha}(\Pi^{\delta,x_0}_T) = X_w^{k,\rho_\alpha(x)}(\Pi^{\delta,x_0}_T) \quad \forall\alpha\geqslant 0,$$

$$X^{k,\alpha,exp}(\Pi_T^{\delta,x_0}) = X^{k,e^{2\alpha x}}(\Pi_T^{\delta,x_0}) \quad \forall\alpha > 0.$$

Будем считать, что

$$X^{\psi(x)}(\Pi_T^{\delta,x_0}) = X^{0,\psi(x)}(\Pi_T^{\delta,x_0}), \quad X_w^{\psi(x)}(\Pi_T^{\delta,x_0}) = X_w^{0,\psi(x)}(\Pi_T^{\delta,x_0})$$

(с последующими аналогичными уточнениями обозначений $X^\alpha(\Pi_T^{\delta,x_0})$, $X_w^\alpha(\Pi_T^{\delta,x_0})$ и $X^{\alpha,exp}(\Pi_T^{\delta,x_0})$).

Положим для $\delta \in [0,T)$

$$\lambda^+(u;T,\delta) = \sup_{x_0\geqslant 0} \int\limits_\delta^T \int\limits_{x_0}^{x_0+1} \int\limits_{\mathbb{R}} u^2\,dydxdt, \qquad \lambda^+(u;T) = \lambda^+(u;T,0).$$

Как и в разделе 2, для описания свойств краевой функции μ будем использовать анизотропные пространства Соболева. Положим

$$H^{s/3,s}(\mathbb{R}^2) = \big\{\mu(t,y) : \mathcal{F}^{-1}\big[(1+|\theta|^{2/3}+\xi^2)^{s/2}\widehat{\mu}(\theta,\xi)\big] \in L_2(\mathbb{R}^2)\big\}$$

(здесь прямое и обратное преобразования Фурье производятся по обеим переменным). Известно, что пространство Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ плотно в $H^{s/3,s}(\mathbb{R}^2)$ для любого s. Символ $H^{s/3,s}(B_T)$ как обычно используется для пространства сужений на B_T.

Как и в случае задачи на $\Sigma_{L,+}$ при исследовании данной задачи нам потребуется обнулять краевое условие (3.2). Для этого, следуя [2], рассмотрим алгебраическое уравнение аналогичное (2.8) при $b = 0$:

$$r^3 - \xi^2 r + i\theta = 0. \tag{3.4}$$

При $(\theta,\xi) \neq (0,0)$ уравнение (3.4) имеет единственный корень $r_0 = r_0(\theta,\xi)$ с отрицательной действительной частью.

Для произвольной функции $\mu \in L_2(\mathbb{R}^2)$ положим при $x \geqslant 0$

$$J(t,x,y;\mu) \equiv \mathcal{F}_{t,y}^{-1}\left[e^{r_0(\theta,\xi)x}\widehat{\mu}(\theta,\xi)\right](t,y). \tag{3.5}$$

Как показано в [17, 18] свойства этой функции полностью аналогичны свойствам функции J, введенной формулой (2.9) в части 2 (с естественной заменой $\Sigma_{L,+}$ на $\mathbb{R}^2_+$). В частности, она бесконечно дифференцируема при $x > 0$, удовлетворяет уравнению (2.6) при $b = 0$, $f \equiv 0$, $J(t,0,y;\mu) \equiv \mu(t,y)$ и для нее справедливы соответствующие аналоги оценок (2.10)–(2.13).

Перейдем к результатам для рассматриваемой задачи для уравнения Захарова—Кузнецова. Сначала рассмотрим случай степенных весов.

Теорема 3.1. *Пусть $u_0 \in L_2^\alpha(\mathbb{R}^2_+)$ для некоторого $\alpha \geqslant 0$, $\mu \in H^{s/3,s}(B_T)$ для некоторого $s > 3/2$. Тогда существует слабое решение задачи* (1.1), (3.1), (3.2) *$u \in X_w^\alpha(\Pi_T^+)$, более того, $\lambda^+(|Du|;T) < +\infty$. Если $\alpha \geqslant 1$, то это решение единственно в пространстве $X_w^\alpha(\Pi_T^+)$ и, кроме того, $u \in X^\alpha(\Pi_T^+)$.*

Доказательство. Этот результат фактически был установлен в [18] в случае произвольного b. Рассмотрим некоторые из деталей доказательства существования слабого решения при $b = 0$, в частности, вопрос о построении гладких решений, замыканием множества которых строится слабое решение. Ход доказательства будет отличаться от использованного в [18]. Доказательство же единственности здесь приводить не будем, как и в случае теоремы 2.1.

Без ограничения общности можно считать, что $\mu \in H^{s/3,s}(\mathbb{R}^2)$. Пусть функции $\mu_h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, $h \in (0,1]$, сходятся к функции μ в $H^{s/3,s}(\mathbb{R}^2)$ при $h \to +0$. Положим $g_h(t,x,y) \equiv J(t,x,y;\mu_h)\eta(2-x)$.

Пусть функции $u_0^h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ приближают функцию u_0 в пространстве $L_2^\alpha(\mathbb{R}^2_+)$. Определим функции U_{0h} и u_{0h} по формулам (2.32)

Рассмотрим задачу для уравнения (2.33) с граничными условиями $U\big|_{t=0} = U_{0h}$, $U\big|_{x=0} = 0$. Тогда согласно [2] существует решение $U_h \in X^{k,\beta,\exp}(\Pi_{T,L}^+)$ для любых k и $\beta > 0$.

Дальнейшее доказательство практически дословно повторяет доказательство теоремы 2.1. Для $\alpha \geqslant 1$ вместо леммы 2.2 следует воспользоваться соответствующим результатом из статьи [18]. $\square$

Теорема 3.2. *Пусть $b = 0$, $u_0 \in L_2^\alpha(\mathbb{R}_+^2)$ для некоторого $\alpha \geqslant 1/2$, $\mu \in H^{2/3,2}(B_T)$. Тогда существует слабое решение $u(t,x,y)$ задачи* (1.1), (3.1), (3.2), *обладающее теми же свойствами, что и решение, построенное в теореме* 3.1, *и такое, что*

$$u \in X_w^{1,\alpha-1/2}(\Pi_T^{\delta,+}), \quad \lambda^+(|D^2u|; T, \delta) < +\infty \quad \forall \delta \in (0,T).$$

Если $\alpha > 1/2$, то $u \in X^{\alpha-1/2}(\Pi_T^{\delta,+})$ $\forall \delta \in (0,T)$; если $\alpha \geqslant 1$, то $u \in X^{1,\alpha-1/2}(\Pi_T^{\delta,+})$ $\forall \delta \in (0,T)$.

Доказательство. Эта теорема была фактически установлена в [2]. Ее доказательство аналогично доказательству теоремы 2.2. □

Теорема 3.3. *Пусть условия теоремы* 3.2 *выполнены при $\alpha \geqslant 1$. Тогда слабое решение задачи* (1.1), (3.1), (3.2) *$u(t,x,y)$ из пространства $X_w^\alpha(\Pi_T^+)$ обладает следующим свойством*:

$$u \in X_w^{2,\alpha-1}(\Pi_T^{\delta,x_0}) \quad \forall \delta \in (0,T) \ \forall x_0 > 0.$$

Если $\alpha > 1$, то $u \in X^{2,\alpha-1}(\Pi_T^{\delta,x_0})$ $\forall \delta \in (0,T)$ $\forall x_0 > 0$.

Доказательство. Эта теорема была фактически установлена в [2]. Ее доказательство во многом повторяет доказательство теоремы 2.3. Укажем на основное отличие ее доказательства от теоремы 2.3, которое позволяет распространить результат на случай $\alpha = 1$.

Для этого введем дополнительное пространство

$$K_1(\Pi_T^+) = \{u \in C([0,T]; H^1(\mathbb{R}_+^2)) \cap L_2(0,T; C_b^1(\overline{\mathbb{R}}_+^2)) \cap L_2(\mathbb{R}_+; C_b(\overline{B}_T)),$$
$$\partial_x^j u \in C_b(\overline{\mathbb{R}}_+^x; H^{(2-j)/3,2-j}(B_T)), \quad 0 \leqslant j \leqslant 2\},$$

(символ C_b обозначает пространство непрерывных ограниченных отображений).

В статье [16] (см. также [17]) было доказано, что если $b = 0$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$, $\mu \in H^{2/3,2}(B_T)$, $u_0(0,y) \equiv \mu(0,y)$, то задача (1.1), (3.1), (3.3) корректна в пространстве $K_1(\Pi_T^+)$.

В ходе доказательстве теоремы 3.2 устанавливается, что аналогично (2.41) равномерно по h справедлива следующая оценка:

$$\|u_h\|_{X^{1,\alpha-1/2}(\Pi_T^{\delta,+})} \leqslant c. \tag{3.6}$$

В частности,

$$\|u_h(\delta,\cdot,\cdot)\|_{H^1(\mathbb{R}_+^2)} \leqslant c.$$

Перенеся начало отсчета времени в точку $t = \delta$, получим, что согласно [16] равномерно по h

$$\|u_h\|_{K_1(\Pi_T^{\delta,+})} \leqslant c,$$

в частности,

$$\int_\delta^T \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2} (u_h^2 + |Du_h|^2)\, dt \leqslant c. \tag{3.7}$$

В аналоге равенства (2.44) (здесь интегрирование по пространственным переменным проводится по $\mathbb{R}_+^2$, и пределы интегрирования, как и в разделе 2, опущены) интеграл от нелинейного слагаемого преобразуем по-другому. Воспользуемся равенством (2.53). Имеем:

$$-2\iint u_h \partial^\nu u_{hx} \partial^\nu u_h \rho_{\alpha-1}\eta_{x_0}\varphi_\delta\, dxdy = \iint (\partial^\nu u_h)^2 \big(u_{hx}\rho_{\alpha-1}\eta_{x_0} + u_h(\rho_{\alpha-1}\eta_{x_0})'\big)\varphi_\delta\, dxdy.$$

Тогда если $|\nu_1| = 1$, $|\nu_2| = 2$, то в силу (3.6) и (3.7)

$$\iint |\partial^{\nu_1}u_h \partial^{\nu_2}u_h \partial^\nu u_h| \rho_{\alpha-1}\eta_{x_0}\varphi_\delta\, dxdy \leqslant \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |Du_h|^2 \iint (\partial^\nu u_h)^2 \rho_{\alpha-1}\eta_{x_0}\varphi_\delta\, dxdy +$$
$$+ \iint (\partial^{\nu_2}u_h)^2 \rho_{\alpha-1}\eta_{x_0}\varphi_\delta\, dxdy \equiv \gamma_{1h}(t) \iint (\partial^\nu u_h)^2 \rho_{\alpha-1}\eta_{x_0}\varphi_\delta\, dxdy + \gamma_{2h}(t),$$

где $\|\gamma_{jh}\|_{L_1(0,T)} \leqslant c$. Оставшаяся часть доказательства проводится аналогично теореме 2.3. □

Теорема 3.4. *Пусть условия теоремы* 2.2 *выполнены при* $\alpha \geqslant l/2$ *для некоторого* $l \geqslant 3$. *Тогда слабое решение задачи* (1.1), (3.1), (3.2) $u(t,x,y)$ *из пространства* $X^{\alpha}_w(\Pi^+_T)$ *обладает следующим свойством*:

$$u \in X^{l,\alpha-l/2}(\Pi^{\delta,x_0}_T) \quad \forall \delta \in (0,T)\ \forall x_0 > 0.$$

Доказательство. Теорема фактически доказана в [2], и ее доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 2.4 для случаев b) и d). □

В статье [2] на основе свойств фундаментального решения оператора $\partial_t + \partial^3_x + \partial_x\partial^2_y$, установленных ранее в [1, 24], и идеи обращения линейной части уравнения, впервые примененной в [5] для уравнения Кортевега—де Фриза, доказан также следующий результат о существовании непрерывных производных слабого решения и их оценках в нормах Гельдера.

Теорема 3.5. *Пусть* $b = 0$, $u_0 \in L^{\alpha}_2(\mathbb{R}^2_+)$, $\mu \in H^{2/3,2}(B_T)$ *для некоторого* $\alpha > 3/4$ *такого, что* $(2\alpha - 1/2)$ — *нецелое,* $m = [2\alpha - 1/2]$. *Тогда существует непрерывное в* Π^+_T *слабое решение* $u(t,x,y)$ *задачи* (1.1), (3.1), (3.2) *из пространства* $X^{\alpha}_w(\Pi^+_T)$. *Это решение обладает в* Π^+_T *непрерывными производными* $\partial^\nu u$ *до порядка* $|\nu| \leqslant m-1$. *При этом для любых* $\delta \in (0,T)$ *и* $x_0 > 0$

$$\sup_{(t,x,y)\in\overline{\Pi}^{\delta,x_0}_T} |\partial^\nu u(t,x,y)| < \infty, \quad 0 \leqslant |\nu| \leqslant m-1.$$

Более того, если $|\nu| = m-1$, $\varepsilon = 2\alpha - m - 1/2$, *то для любых* $x_1, x_2 \geqslant x_0$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ *и* $t \in [\delta, T]$

$$|\partial^\nu u(t,x_1,y_1) - \partial^\nu u(t,x_2,y_2)| \leqslant c(|x_1-x_2|^{\varepsilon-\sigma} + |y_1-y_2|^{\varepsilon-\sigma}) \qquad \forall \sigma \in (0,\varepsilon),$$

а если $|\nu| = m-1-j$, $j = 0,1,2$, $\varepsilon = 2\alpha - m - 1/2 + j$, *то для любых* $x \geqslant x_0$, $y \in \mathbb{R}$ *и* $t,\tau \in [\delta,T]$,

$$|\partial^\nu u(t,x,y) - \partial^\nu u(\tau,x,y)| \leqslant c|t-\tau|^{(\varepsilon-\sigma)/3} \qquad \forall \sigma \in (0,\varepsilon),$$

где константы зависят от x_0, δ, σ, α.

Перейдем к экспоненциальным весам.

Теорема 3.6. *Пусть* $u_0 \in L^{\alpha,exp}_2(\mathbb{R}^2_+)$ *для некоторого* $\alpha > 0$, $\mu \in H^{s/3,s}(B_T)$ *для некоторого* $s > 3/2$. *Тогда существует единственное слабое решение задачи* (1.1), (3.1), (3.2) $u \in X^{\alpha,exp}(\Pi^+_T)$. *Если дополнительно известно, что* $b = 0$, $\mu \in H^{2/3,2}(B_T)$, *то*

$$u \in X^{1,\alpha,exp}(\Pi^{\delta,+}_T) \quad \forall \delta \in (0,T).$$

Доказательство. Первая часть теоремы доказана в [18]. При дополнительном условии теорема доказывается полностью аналогично теореме 2.6. □

Теорема 3.7. *Пусть* $b = 0$, $u_0 \in L^{\alpha,exp}_2(\mathbb{R}^2_+)$ *для некоторого* $\alpha > 0$, $\mu \in H^{2/3,2}(B_T)$. *Тогда слабое решение задачи* (1.1), (3.1), (3.2) $u(t,x,y)$ *из пространства* $X^{\alpha,exp}(\Pi^+_T)$ *обладает следующим свойством*: *для любых* j *и мультииндексов* ν

$$\partial^j_t\partial^\nu u \in C([\delta,T]; L^{\alpha,exp}_2(\mathbb{R}^2_{x_0})) \quad \forall \delta \in (0,T)\ \forall x_0 > 0.$$

Доказательство. Доказательство полностью аналогично теореме 2.7. □

Замечание 3.1. Первый результат о существовании и единственности слабого решения задачи (1.1), (3.1), (3.2) из пространства $X^{\alpha}_w(\Pi^+_T)$ при неоптимальных условиях на краевую функцию μ был получен в статье [15]. В виде теоремы 3.1 подобный результат содержится в статье [18]. Глобальная корректность данной задачи при $b = 0$ в классах более гладких функций установлена в [16, 17]. В частности, в статье [17] доказана корректность в классах аналогичных $K_1(\Pi^+_T)$, а именно, при $u_0 \in H^n(\mathbb{R}^+_2)$, $\mu \in H^{(n+1)/3,n+1}(B_T)$ для любого натурального n (и выполнении соответствующих условий согласования граничных данных на прямой $t = 0, x = 0$) в классе $K_n(\Pi^+_T)$:

$$\begin{aligned}
\partial^m_t u &\in C\bigl([0,T]; H^{n-3m}(\mathbb{R}^+_2)\bigr), && m \leqslant n/3,\\
\partial^l_x u &\in C_b\bigl(\overline{\mathbb{R}}_+; H^{(n-l+1)/3,n-l+1}(B_T)\bigr), && l \leqslant n+1,\\
\partial^m_t\partial^l_x\partial^j_y u &\in L_2\bigl(0,T; C_b(\overline{\mathbb{R}}^2_+)\bigr), && 3m+l+j \leqslant n,\\
\partial^m_t\partial^l_x\partial^j_y u &\in L_2\bigl(\mathbb{R}_+; C_b(\overline{B}_T)\bigr), && 3m+l+j \leqslant n-1.
\end{aligned}$$

4. Задача Коши

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1.1) с начальным условием
$$u(0,x,y) = u_0(x,y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{4.1}$$
в области $\Pi_T = (0,T) \times \mathbb{R}^2$ для произвольного $T > 0$. Наличие в данном случае в уравнении слагаемого bu_x не приводит к каким-либо принципиальным сложностям в силу возможности перехода в движущуюся систему координат. Определение слабого решения полностью аналогично определению 3.1 с естественной заменой $\mathbb{R}^2_+$, Π_T^+ на $\mathbb{R}^2$, Π_T, отсутствием в аналоге интегрального тождества (3.3) слагаемого, связанного с μ, и отсутствием условий на пробную функцию ϕ при $x = 0$.

Обозначения из части 3 $\mathbb{R}^2_{x_0}$, Π_T^{δ,x_0} распространяются на любое значение $x_0 \in \mathbb{R}$. Положим для $\alpha \in \mathbb{R}$
$$L_2^\alpha(\mathbb{R}^2) = \{\varphi(x,y) : (1+x_+)^\alpha \varphi \in L_2(\mathbb{R}^2)\},$$
$$L_2^\alpha(\mathbb{R}^2_{x_0}) = \{\varphi(x,y) : (1+(x-x_0))^\alpha \varphi \in L_2(\mathbb{R}^2_{x_0})\},$$
$$H^{k,\alpha}(\mathbb{R}^2_{x_0}) = \{\varphi(x,y) : (1+(x-x_0))^\alpha \varphi \in H^k(\mathbb{R}^2_{x_0})\},$$
$$\lambda(u;T) = \sup_{x_0\in\mathbb{R}} \int\limits_0^T \int\limits_{x_0}^{x_0+1} \int\limits_{\mathbb{R}} u^2\, dydxdt, \quad \lambda^+(u;T,\delta,x_0) = \sup_{x_1 \geqslant x_0} \int\limits_\delta^T \int\limits_{x_1}^{x_1+1} \int\limits_{\mathbb{R}} u^2\, dydxdt.$$
Из результатов статьи [9] (в которой рассматривались уравнения более общего вида) вытекает следующий результат.

Теорема 4.1. *Пусть* $u_0 \in L_2^\alpha(\mathbb{R}^2)$ *для некоторого* $\alpha \geqslant 0$, *тогда существует слабое решение* $u(t,x,y)$ *задачи* (1.1), (4.1), *такое что*
$$u \in C_w([0,T]; L_2^\alpha(\mathbb{R}^2)), \quad \lambda(|Du|;T) < +\infty.$$
Если дополнительно известно, что $\alpha > 0$, *то для любого* $x_0 \in \mathbb{R}$
$$u \in L_2(0,T; H^{1,\alpha-1/2}(\mathbb{R}^2_{x_0})).$$

Вопрос о единственности подобных решений остается открытым.

В статье [24] был рассмотрен вопрос о внутренней регулярности этих решения и доказана следующая теорема.

Теорема 4.2. *Пусть условия теоремы* 4.1 *выполнены для* $\alpha \geqslant 1/2$. *Пусть* $k \leqslant 2\alpha$ *если* $\alpha \neq 1$, $k = 1$ *если* $\alpha = 1$. *Тогда слабое решение, построенное в теореме* 4.1, *обладает следующим свойством*: *для любых* $\delta \in (0,T)$, $x_0 \in \mathbb{R}$
$$u \in C_w([\delta,T]; H^{k,\alpha-k/2}(\mathbb{R}^2_{x_0})), \quad \lambda^+(|D^{k+1}u|;T,\delta,x_0) < +\infty.$$
Если дополнительно известно, что $k < 2\alpha$, *то*
$$u \in L_2(\delta,T; H^{k+1,\alpha-(k+1)/2}(\mathbb{R}^2_{x_0})).$$

Также в статьях [1, 24] был установлен следующий результат о существовании у слабых решений непрерывных производных и их оценках в нормах Гельдера.

Теорема 4.3. *Пусть условия теоремы* 4.1 *выполнены для* $\alpha > 3/4$ *такого, что* $(2\alpha - 1/2)$ — *нецелое,* $m = [2\alpha - 1/2]$. *Тогда слабое решение* $u(t,x,y)$ *задачи* (1.1), (4.1), *построенное в теореме* 4.1, *является непрерывным в* Π_T (*возможно, после изменения на множестве нулевой меры*) *и обладает в* Π_T *непрерывными производными* $\partial^\nu u$ *до порядка* $|\nu| \leqslant m-1$. *При этом для любых* $\delta \in (0,T)$ *и* $x_0 \in \mathbb{R}$
$$\sup_{(t,x,y)\in\overline{\Pi}_T^{\delta,x_0}} |\partial^\nu u(t,x,y)| < \infty, \quad 0 \leqslant |\nu| \leqslant m-1.$$
Более того, если $|\nu| = m-1$, $\varepsilon = 2\alpha - m - 1/2$, *то для любых* $x_1, x_2 \geqslant x_0$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ *и* $t \in [\delta,T]$
$$|\partial^\nu u(t,x_1,y_1) - \partial^\nu u(t,x_2,y_2)| \leqslant c(|x_1-x_2|^{\varepsilon-\sigma} + |y_1-y_2|^{\varepsilon-\sigma}) \qquad \forall \sigma \in (0,\varepsilon),$$

а если $|\nu| = m-1-j$, $j=0,1,2$, $\varepsilon = 2\alpha - m - 1/2 + j$, *то для любых* $x \geqslant x_0$, $y \in \mathbb{R}$ *и* $t,\tau \in [\delta, T]$

$$|\partial^\nu u(t,x,y) - \partial^\nu u(\tau,x,y)| \leqslant c|t-\tau|^{(\varepsilon-\sigma)/3} \qquad \forall \sigma \in (0,\varepsilon),$$

где константы зависят от x_0, δ, σ, α.

Применение экспоненциальных весов приводит к следующему результату о существовании слабых решений, бесконечно гладких при $t > 0$, но вопрос единственности также остается открытым.

Теорема 4.4. *Пусть* $(1+e^{\alpha x})u_0 \in L_2(\mathbb{R}^2)$ *для некоторого* $\alpha > 0$, *тогда существует слабое решение* $u(t,x,y)$ *задачи* (1.1), (4.1), *такое что*

$$(1+e^{\alpha x})u \in C_w([0,T]; L_2(\mathbb{R}^2)), \quad \lambda(|Du|;T) < +\infty,$$

для любого $x_0 \in \mathbb{R}$

$$e^{\alpha x}u \in L_2(0,T; H^1(\mathbb{R}^2_{x_0})),$$

для любых $\delta \in (0,T)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, j *и мультииндексов* ν

$$e^{\alpha x}\partial_t^j \partial^\nu u \in C([\delta,T]; L_2(\mathbb{R}^2_{x_0})).$$

Доказательство. Доказательство теоремы полностью аналогично теоремам 4.1 и 4.2. □

Замечание 4.1. Первый результат о существовании глобального по времени решения задачи Коши для уравнения Захарова—Кузнецова при $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ (без единственности) был получен в статье [50] (на самом деле там рассматривались уравнения более общего вида). Существование слабого решения при начальной функции из пространства $L_2(\mathbb{R}^2)$ с весом установлено в [9] (см. теорему 4.1). Далее в статье [10] (с помощью развития идей из [34] для уравнения Кортевега—де Фриза) были построены классы глобальной корректности задачи (1.1), (4.1) (формально при $b=0$) $K_n(\Pi_T)$ при любом натуральном n (определение этих классов аналогично классам $K_n(\Pi_T^+)$, см. замечание 3.1) при $u_0 \in H^n(\mathbb{R}^2)$. В статье [42] этот результат был распространен на случай нецелых показателей гладкости $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$, $s \geqslant 1$ (при $s \in (3/4, 1)$ была доказана корректность, локальная по времени). В работах [29, 47] локальная корректность была доказана при $s > 1/2$. В недавней статье [51] глобальная по времени корректность была установлена при $s > 11/13$. В весовых пространствах Соболева задача Коши для уравнения (1.1) изучалась в [13].

Вопрос о повышении внутренней гладкости решения задачи Коши для уравнения Захарова—Кузнецова был впервые рассмотрен в статье [41] (там рассматривались уравнения более общие, чем (1.1)). Изначально в [41] предполагалось, что $u_0 \in H^6(\mathbb{R}^2)$. Повышение внутренней гладкости решений задачи (1.1), (4.1) при меньшей гладкости начальной функции изучалось в [1, 24]. Наряду с описанными выше теоремами 4.2, 4.3 рассматривался случай $u_0 \in H^{1,\alpha}(\mathbb{R}^2)$. Тогда аналогичные результаты были получены для решений, входящих в класс корректности $K_1(\Pi_T)$.

Задача Коши для уравнения типа (1.1) с более высокой, чем квадратичная, степенью нелинейности изучалась в статьях [12, 25, 26, 28, 33, 42, 43, 49].

В случае 3-х пространственных переменных задача Коши для уравнения Захарова—Кузнецова рассматривалась в [21, 46–48]. В частности, в статье [47] установлена глобальная корректность при $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^3)$ для $s > 1$. В работе [21] рассмотрена задача Коши для начальной функции из пространств $L_2(\mathbb{R}^3)$ и $H^1(\mathbb{R}^3)$ со степенными весами при $x \to +\infty$ и установлен ряд результатов о существовании и единственности слабых решений (последнее только для H^1).

Результаты о повышении внутренней регулярности решений задачи Коши для уравнения Захарова—Кузнецова в случае трех пространственных переменных (отличные от рассмотренных в настоящей статье) получены в [45]. Некоторые общие свойства регулярности решений задачи Коши для дисперсионных уравнений, в частности, для уравнения Захарова—Кузнецова, содержатся в [14, 35].

5. Начально-краевые задачи на полосе

В области $\Pi_{T,L} = (0,T) \times \Sigma_L$ рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения (1.1) с начальным условием

$$u(0,x,y) = u_0(x,y), \qquad (x,y) \in \Sigma_L, \tag{5.1}$$

и одним из 4-х краевых условий (2.3) при $(t,x) \in \Omega_T = (0,T) \times \mathbb{R}$.

Обозначения из раздела 2 Σ_{L,x_0}, $\Pi^{\delta,x_0}_{T,L}$ распространяются на любое значение $x_0 \in \mathbb{R}$. Положим для $\alpha \in \mathbb{R}$

$$L_2^\alpha(\Sigma_L) = \{\varphi(x,y) : (1+x_+)^\alpha \varphi \in L_2(\Sigma_L)\},$$
$$L_2^\alpha(\Sigma_{L,x_0}) = \{\varphi(x,y) : (1+(x-x_0))^\alpha \varphi \in L_2(\Sigma_{L,x_0})\},$$
$$\widetilde{H}^{k,\alpha}(\Sigma_{L,x_0}) = \{\varphi(x,y) : (1+(x-x_0))^\alpha \varphi \in \widetilde{H}^k(\Sigma_{L,x_0})\},$$
$$\lambda(u;T,L) = \sup_{x_0\in\mathbb{R}} \int\limits_0^T \int\limits_{x_0}^{x_0+1} \int\limits_0^L u^2\,dydxdt, \quad \lambda^+(u;T,L,\delta,x_0) = \sup_{x_1\geqslant x_0} \int\limits_\delta^T \int\limits_{x_1}^{x_1+1} \int\limits_0^L u^2\,dydxdt.$$

Понятие слабого решения рассматриваемой задачи полностью аналогично определению 2.1 с естественной заменой $\Sigma_{L,+}$, $\Pi^+_{T,L}$ на Σ_L, $\Pi_{T,L}$, отсутствием в аналоге интегрального тождества (2.4) слагаемого, связанного с μ, и отсутствием условий на пробную функцию ϕ при $x=0$.

В статье [11] был установлен следующий результат существования слабого решения.

Теорема 5.1. *Пусть $u_0 \in L_2^\alpha(\Sigma_L)$ для некоторого $\alpha \geqslant 0$, тогда существует слабое решение $u(t,x,y)$ задачи* (1.1), (5.1), (2.3), *такое что*

$$u \in C_w([0,T]; L_2^\alpha(\Sigma_L)), \quad \lambda(|Du|;T,L) < +\infty.$$

Если дополнительно известно, что $\alpha > 0$, то для любого $x_0 \in \mathbb{R}$

$$u \in L_2(0,T;\widetilde{H}^{1,\alpha-1/2}(\Sigma_{L,x_0})).$$

Как и случае задачи Коши, единственность построенных решений остается открытой проблемой. Результаты о повышении внутренней гладкости этих решений наиболее скудны из всех рассмотренных в настоящей статье задач.

Теорема 5.2. *Пусть условия теоремы* 5.1 *выполнены для $\alpha \geqslant 1/2$. Тогда слабое решение, построенное в теореме* 5.1, *обладает следующим свойством: для любых $\delta \in (0,T)$, $x_0 \in \mathbb{R}$*

$$u \in C_w([\delta,T];\widetilde{H}^{1,\alpha-1/2}(\Sigma_{L,x_0})), \quad \lambda^+(|D^2u|;T,L,\delta,x_0) < +\infty.$$

Если дополнительно известно, что $\alpha > 1/2$, то

$$u \in L_2(\delta,T;\widetilde{H}^{2,\alpha-1}(\Sigma_{L,x_0})).$$

Доказательство. Доказательство аналогично результату из [11], где рассматривался случай $u_0 \in \widetilde{H}^{1,\alpha}(\Sigma_L)$. □

Применение экспоненциальных весов не меняет ситуацию.

Теорема 5.3. *Пусть $(1+e^{\alpha x})u_0 \in L_2(\Sigma_L)$ для некоторого $\alpha > 0$, тогда существует слабое решение $u(t,x,y)$ задачи* (1.1), (5.1), (2.3), *такое что*

$$(1+e^{\alpha x})u \in C_w([0,T];L_2(\Sigma_L)), \quad \lambda(|Du|;T,L) < +\infty,$$

для любого $x_0 \in \mathbb{R}$

$$e^{\alpha x}u \in L_2(0,T;\widetilde{H}^1(\Sigma_{L,x_0})),$$

для любых $\delta \in (0,T)$, $x_0 \in \mathbb{R}$

$$e^{\alpha x}u \in L_2(\delta,T;\widetilde{H}^2(\Sigma_{L,x_0})).$$

Замечание 5.1. В статье [44] для случая периодических условий (2.3) была установлена локальная по времени корректность при $u_0 \in H^s(\Sigma_L)$, $s > 3/2$. Этот результат был развит в [47], где также в периодическом случае была доказана глобальная корректность при $u_0 \in H^1(\Sigma_L)$.

В работе [11] были рассмотрены любые из краевых условий (2.3) (см. теорему 5.1). Там же в случае $u_0 \in \widetilde{H}^{1,\alpha}(\Sigma_L)$, $\alpha \geqslant 0$, были построены глобальные решения в соответствующих классах, в которых при $\alpha \geqslant 1/2$ была доказана единственность. Случай экспоненциальных весов был рассмотрен в [19].

Начально-краевые задачи на полосе Σ_L для уравнения Захарова—Кузнецова с дополнительной параболической регуляризацией изучались в [19, 20, 38, 39].

В статье [21] начально-краевая задача с однородными краевыми условиями Дирихле для трехмерного уравнения Захарова—Кузнецова рассматривалась на слое $\mathbb{R} \times \Omega$ для некоторой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Были установлены результаты существования и единственности слабых решений в весовых пространствах (как степенных, так и экспоненциальных) при $x \to +\infty$, аналогичные упомянутым выше результатам для двумерного случая из [11, 19].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антонова А. П., Фаминский А. В.* О регулярности решений задачи Коши для уравнения Захарова—Кузнецова в нормах Гельдера// Мат. заметки. — 2015. — *97*, № 1. — С. 13–22.
2. *Антонова А. П., Фаминский А. В.* О регулярности решений начально-краевой задачи для уравнения Захарова—Кузнецова// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *58*. — С. 5–21.
3. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1996.
4. *Захаров В. Е., Кузнецов Е. А.* О трехмерных солитонах// Журн. экспер. теорет. физ. — 1974. — *66*, № 2. — С. 594–597.
5. *Кружков С. Н., Фаминский А. В.* Обобщенные решения задачи Коши для уравнения Кортевега—де Фриза// Мат. сб. — 1983. — *120*, № 3. — С. 396–425.
6. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
7. *Фаминский А. В.* Задача Коши для уравнения Кортевега—де Фриза и его обобщений// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 1988. — *13*. — С. 56–105.
8. *Фаминский А. В.* Смешанная задача в полуполосе для уравнения Кортевега—де Фриза и его обобщений// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1988. — *51*. — С. 54–94.
9. *Фаминский А. В.* Задача Коши для квазилинейных уравнений нечетного порядка// Мат. сб. — 1989. — *180*, № 9. — С. 1183–1210.
10. *Фаминский А. В.* Задача Коши для уравнения Захарова—Кузнецова// Дифф. уравн. — 1995. — *31*, № 6. — С. 1070–1081.
11. *Baykova E. S., Faminskii A. V.* On initial-boundary-value problems in a strip for the generalized two-dimensional Zakharov—Kuznetsov equation// Adv. Differ. Equ. — 2013. — *18*, № 7-8. — С. 663–686.
12. *Biagioni H. A., Linares F.* Well-posedness for the modified Zakharov—Kuznetsov equation// Progr. Nonlinear Differ. Equ. Appl. — 2003. — *54*. — С. 181–189.
13. *Bustamante E., Jimenez Urrea J., Mejia J.* The Zakharov—Kuznetsov equation in weighted Sobolev spaces// J. Math. Anal. Appl. — 2016. — *433*, № 1. — С. 149–175.
14. *Constantin P., Saut J.-C.* Local smoothing properties of dispersive equations// J. Am. Math. Soc. — 1988. — *1*, № 2. — С. 413–446.
15. *Faminskii A. V.* On the mixed problem for quasilinear equations of the third order// J. Math. Sci. — 2002. — *110*, № 2. — С. 2476–2507.
16. *Faminskii A. V.* Nonlocal well-posedness of the mixed problem for the Zakharov—Kuznetsov equation// J. Math. Sci. — 2007. — *147*, № 1. — С. 6524–6537.
17. *Faminskii A. V.* Well posed initial-boundary value problems for the Zakharov—Kuznetsov equation// Electron. J. Differ. Equ. — 2008. — № 1. — С. 1–20.
18. *Faminskii A. V.* Weak solutions to initial-boundary-value problems for quasilinear equations of an odd order// Adv. Differ. Equ. — 2012. — *17*, № 5-6. — С. 421–470.
19. *Faminskii A. V.* An initial-boundary value problem in a strip for two-dimensional equations of Zakharov—Kuznetsov type// Contemp. Math. — 2015. — *653*. — С. 137–162.
20. *Faminskii A. V.* An initial-boundary value problem in a strip for two-dimensional Zakharov—Kuznetsov—Burgers equation// Nonlinear Anal. — 2015. — *116*. — С. 132–144.
21. *Faminskii A. V.* An initial-boundary value problem for three-dimensional Zakharov—Kuznetsov equation// J. Differ. Equ. — 2016. — *260*, № 3. — С. 3029–3055.
22. *Faminskii A. V.* Initial-boundary value problems in a half-strip for two-dimensional Zakharov—Kuznetsov equation// Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. — 2018. — *35*, № 5. — С. 1235–1265.
23. *Faminskii A. V.* Regular solutions to initial-boundary value problems in a half-strip for two-dimensional Zakharov—Kuznetsov equation// arXiv: 1901.04483 [math.AP], 14 Jan. 2019.
24. *Faminskii A. V., Antonova A. P.* On internal regularity of solutions to the initial value problem for the Zakharov—Kuznetsov equation// В сб.: «Progress in partial differential equations». — Cham: Springer, 2013. — С. 53–74.
25. *Farah L. G., Linares F., Pastor A.* A note on the 2D generalized Zakharov—Kuznetsov equation: local, global and scattering results// J. Differ. Equ. — 2012. — *253*, № 8. — С. 2558–2571.

26. *Fonseca G., Panchón M.* Well-posedness for the two dimensional generalized Zakharov—Kuznetsov equation in anisotropic weighted Sobolev spaces// J. Math. Anal. Appl. — 2016. — *443*, № 1. — С. 566–584.
27. *Grünrock A.* Remark on the modified Zakharov—Kuznetsov equation in three space dimensions// Math. Res. Lett. — 2014. — *21*, № 1. — С. 127–131.
28. *Grünrock A.* On the generalized Zakharov—Kuznetsov equation at critical regularity// arXiv: 1509.09146v1 [math.AP], 30 Sep. 2015.
29. *Grünrock A., Herr S.* The Fourier restriction norm method for the Zakharov—Kuznetsov equation// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2014. — *34*, № 5. — С. 2061–2068.
30. *Han-Kwan D.* From Vlasov—Poisson to Korteweg—de Vries and Zakharov—Kuznetsov// Commun. Math. Phys. — 2013. — *324*, № 3. — С. 961–993.
31. *Kato T.* The Cauchy problem for the Korteweg—de Vries equation// В сб.: «Nonlinear partial differential equations and their applications. College de France Seminar. Vol. I». — Boston—London—Melbourne: Pitman, 1981. — С. 293–307.
32. *Kato T.* On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg—de Vries equation// Stud. Appl. Math. — 1983. — *8*. — С. 93–128.
33. *Kato T.* Well-posedness for the generalized Zakharov—Kuznetsov equation in modulation spaces// J. Fourier Anal. Appl. — 2017. — *23*, № 3. — С. 612–655.
34. *Kenig C. E., Ponce G., Vega L.* Well-posedness of the initial value problem for the Korteweg—de Vries equation// J. Am. Math. Soc. — 1991. — *4*, № 2. — С. 323–347.
35. *Kenig C. E., Ponce G., Vega L.* Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations// Indiana Univ. Math. J. — 1991. — *40*, № 1. — С. 33–69.
36. *Lannes D., Linares F., Saut J.-C.* The Cauchy problem for the Euler—Poisson system and derivation of the Zakharov—Kuznetsov equation// Progr. Nonlinear Differ. Equ. Appl. — 2013. — *84*. — С. 183–215.
37. *Larkin N. A.* Exponential decay of the H^1-norm for the 2D Zakharov—Kuznetsov equation on a half-strip// J. Math. Anal. Appl. — 2013. — *405*, № 1. — С. 326–335.
38. *Larkin N. A.* The 2D Zakharov—Kuznetsov—Burgers equation with variable dissipation on a strip// Electron. J. Differ. Equ. — 2015. — *60*. — С. 1–20.
39. *Larkin N. A.* The 2D Zakharov—Kuznetsov—Burgers equation on a strip// Bol. Soc. Parana Mat. (3). — 2016. — *34*, № 1. — С. 151–172.
40. *Larkin N. A., Tronco E.* Regular solutions of the 2D Zakharov—Kuznetsov equation on a half-strip// J. Differ. Equ. — 2013. — *254*, № 1. — С. 81–101.
41. *Levandosky J. L.* Smoothing properties of nonlinear dispersive equations in two spatial dimensions// J. Differ. Equ. — 2001. — *175*, № 2. — С. 275–301.
42. *Linares F., Pastor A.* Well-posedness for the two-dimensional modified Zakharov—Kuznetsov equation// SIAM J. Math. Anal. — 2009. — *41*, № 4. — С. 1323–1339.
43. *Linares F., Pastor A.* Local and global well-posedness for the 2D generalized Zakharov—Kuznetsov equation// J. Funct. Anal. — 2011. — *260*, № 4. — С. 1060–1085.
44. *Linares F., Pastor A., Saut J.-C.* Well-posedness for the Zakharov—Kuznetsov equation in a cylinder and on the background of a KdV soliton// Commun. Part. Differ. Equ. — 2010. — *35*, № 9. — С. 1674–1689.
45. *Linares F., Ponce G.* On special regularity properties of solutions of the Zakharov—Kuznetsov equation// Commun. Pure Appl. Anal. — 2018. — *17*, № 4. — С. 1561–1572.
46. *Linares F., Saut J. C.* The Cauchy problem for the 3D Zakharov—Kuznetsov equation// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2009. — *24*, № 2. — С. 547–565.
47. *Molinet L., Pilod D.* Bilinear Strichartz estimates for the Zakharov—Kuznetsov equation and applications// Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. — 2015. — *32*, № 2. — С. 347–371.
48. *Ribaud F., Vento S.* Well-posedness results for the 3D Zakharov—Kuznetsov equation// SIAM J. Math. Anal. — 2012. — *44*, № 4. — С. 2289–2304.
49. *Ribaud F., Vento S.* A note on the Cauchy problem for the 2D generalized Zakharov—Kuznetsov equation// C. R. Math. Acad. Sci. Paris. — 2012. — *350*, № 9-10. — С. 499–503.
50. *Saut J.-C.* Sur quelques generalizations de l'equation de Korteweg—de Vries// J. Math. Pures Appl. (9). — 1979. — *58*, № 1. — С. 21–61.
51. *Shan M.* Well-posedness for the two-dimensional Zakharov—Kuznetsov equation// arXiv: 1807.10123v2 [math.AP], 15 Aug. 2018.

А. В. Фаминский
Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: afaminskii@sci.pfu.edu.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-3-513-546 UDC 517.958

On Inner Regularity of Solutions of Two-Dimensional Zakharov–Kuznetsov Equation

© 2019 **A. V. Faminskii**

Abstract. In this paper, we consider questions of inner regularity of weak solutions of initial-boundary value problems for the Zakharov–Kuznetsov equation with two spatial variables. The initial function is assumed to be irregular, and the main parameter governing the regularity is the decay rate of the initial function at infinity. The main results of the paper are obtained for the problem on a semistrip. In this problem, different types of initial conditions (e. g., Dirichlet or Neumann conditions) influence the inner regularity. We also give a survey of earlier results for other types of areas: a plane, a half-plane, and a strip.

REFERENCES

1. A. P. Antonova and A. V. Faminskiy, "O regulyarnosti resheniy zadachi Koshi dlya uravneniya Zakharova—Kuznetsova v normakh Gel'dera" [On regularity of solutions of the Cauchy problems for the Zakharov–Kuznetsov equation in Hölder norms], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2015, **97**, No. 1, 13–22 (in Russian).
2. A. P. Antonova and A. V. Faminskiy, "O regulyarnosti resheniy nachal'no-kraevoy zadachi dlya uravneniya Zakharova—Kuznetsova" [On regularity of solutions for initial-boundary value problems for the Zakharov–Kuznetsov equation], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **58**, 5–21 (in Russian).
3. O. V. Besov, V. P. Il'in, and S. M. Nikol'skiy, *Integral'nye predstavleniya funktsiy i teoremy vlozheniya* [Integral Representation of Functions and Embedding Theorems], Nauka, Moscow, 1996 (in Russian).
4. V. E. Zakharov and E. A. Kuznetsov, "O trekhmernykh solitonakh" [On three-dimensional solitons], *Zhurn. eksper. teoret. fiz.* [J. Exper. Theor. Phys.], 1974, **66**, No. 2, 594–597 (in Russian).
5. S. N. Kruzhkov and A. V. Faminskiy, "Obobshchennye resheniya zadachi Koshi dlya uravneniya Kortevega—de Friza" [Generalized solutions of the Cauchy problem for the Korteweg–de Vries equation], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1983, **120**, No. 3, 396–425 (in Russian).
6. O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'tseva, *Lineynye i kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Equation of Parabolic Type], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
7. A. V. Faminskiy, "Zadacha Koshi dlya uravneniya Kortevega—de Friza i ego obobshcheniy" [The Cauchy problem for the Korteweg–de Vries equation and its generalizations], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 1988, **13**, 56–105 (in Russian).
8. A. V. Faminskiy, "Smeshannaya zadacha v polupolose dlya uravneniya Kortevega—de Friza i ego obobshcheniy" [Mixed problem in a half-strip for the Korteweg–de Vries equation and its generalizations], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1988, **51**, 54–94 (in Russian).
9. A. V. Faminskiy, "Zadacha Koshi dlya kvazilineynykh uravneniy nechetnogo poryadka" [The Cauchy problem for quasilinear equations of odd order], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1989, **180**, No. 9, 1183–1210 (in Russian).
10. A. V. Faminskiy, "Zadacha Koshi dlya uravneniya Zakharova—Kuznetsova" [The Cauchy problem for the Zakharov–Kuznetsov equation], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1995, **31**, No. 6, 1070–1081 (in Russian).
11. E. S. Baykova and A. V. Faminskii, "On initial-boundary-value problems in a strip for the generalized two-dimensional Zakharov—Kuznetsov equation," *Adv. Differ. Equ.*, 2013, **18**, No. 7-8, 663–686.
12. H. A. Biagioni and F. Linares, "Well-posedness for the modified Zakharov—Kuznetsov equation," *Progr. Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, 2003, **54**, 181–189.
13. E. Bustamante, J. Jimenez Urrea, and J. Mejia, "The Zakharov—Kuznetsov equation in weighted Sobolev spaces," *J. Math. Anal. Appl.*, 2016, **433**, No. 1, 149–175.
14. P. Constantin and J.-C. Saut, "Local smoothing properties of dispersive equations," *J. Am. Math. Soc.*, 1988, **1**, No. 2, 413–446.
15. A. V. Faminskii, "On the mixed problem for quasilinear equations of the third order," *J. Math. Sci.*, 2002, **110**, No. 2, 2476–2507.

16. A. V. Faminskii, “Nonlocal well-posedness of the mixed problem for the Zakharov—Kuznetsov equation,” *J. Math. Sci.*, 2007, **147**, No. 1, 6524–6537.
17. A. V. Faminskii, “Well posed initial-boundary value problems for the Zakharov—Kuznetsov equation,” *Electron. J. Differ. Equ.*, 2008, No. 1, 1–20.
18. A. V. Faminskii, “Weak solutions to initial-boundary-value problems for quasilinear equations of an odd order,” *Adv. Differ. Equ.*, 2012, **17**, No. 5-6, 421–470.
19. A. V. Faminskii, “An initial-boundary value problem in a strip for two-dimensional equations of Zakharov—Kuznetsov type,” *Contemp. Math.*, 2015, **653**, 137–162.
20. A. V. Faminskii, “An initial-boundary value problem in a strip for two-dimensional Zakharov—Kuznetsov—Burgers equation,” *Nonlinear Anal.*, 2015, **116**, 132–144.
21. A. V. Faminskii, “An initial-boundary value problem for three-dimensional Zakharov—Kuznetsov equation,” *J. Differ. Equ.*, 2016, **260**, No. 3, 3029–3055.
22. A. V. Faminskii, “Initial-boundary value problems in a half-strip for two-dimensional Zakharov—Kuznetsov equation,” *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 2018, **35**, No. 5, 1235–1265.
23. A. V. Faminskii, “Regular solutions to initial-boundary value problems in a half-strip for two-dimensional Zakharov—Kuznetsov equation” [Regular solutions to initial-boundary value problems in a half-strip for two-dimensional Zakharov—Kuznetsov equation], *arXiv*, 1901.04483 [math.AP], 14 Jan. 2019.
24. A. V. Faminskii and A. P. Antonova, “On internal regularity of solutions to the initial value problem for the Zakharov—Kuznetsov equation,” In: *Progress in partial differential equations*, Springer, Cham, 2013, pp. 53–74.
25. L. G. Farah, F. Linares, and A. Pastor, “A note on the 2D generalized Zakharov—Kuznetsov equation: local, global and scattering results,” *J. Differ. Equ.*, 2012, **253**, No. 8, 2558–2571.
26. G. Fonseca and M. Panchón, “Well-posedness for the two dimensional generalized Zakharov—Kuznetsov equation in anisotropic weighted Sobolev spaces,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2016, **443**, No. 1, 566–584.
27. A. Grünrock, “Remark on the modified Zakharov—Kuznetsov equation in three space dimensions,” *Math. Res. Lett.*, 2014, **21**, No. 1, 127–131.
28. A. Grünrock, “On the generalized Zakharov—Kuznetsov equation at critical regularity” [On the generalized Zakharov—Kuznetsov equation at critical regularity], *arXiv*, 1509.09146v1 [math.AP], 30 Sep. 2015.
29. A. Grünrock and S. Herr, “The Fourier restriction norm method for the Zakharov—Kuznetsov equation,” *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2014, **34**, No. 5, 2061–2068.
30. D. Han-Kwan, “From Vlasov—Poisson to Korteweg—de Vries and Zakharov—Kuznetsov,” *Commun. Math. Phys.*, 2013, **324**, No. 3, 961–993.
31. T. Kato, “The Cauchy problem for the Korteweg—de Vries equation,” In: *Nonlinear partial differential equations and their applications. College de France Seminar. Vol. I*, Pitman, Boston–London–Melbourne, 1981, pp. 293–307.
32. T. Kato, “On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg—de Vries equation,” *Stud. Appl. Math.*, 1983, **8**, 93–128.
33. T. Kato, “Well-posedness for the generalized Zakharov—Kuznetsov equation in modulation spaces,” *J. Fourier Anal. Appl.*, 2017, **23**, No. 3, 612–655.
34. C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, “Well-posedness of the initial value problem for the Korteweg—de Vries equation,” *J. Am. Math. Soc.*, 1991, **4**, No. 2, 323–347.
35. C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega, “Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations,” *Indiana Univ. Math. J.*, 1991, **40**, No. 1, 33–69.
36. D. Lannes, F. Linares, and J.-C. Saut, “The Cauchy problem for the Euler—Poisson system and derivation of the Zakharov—Kuznetsov equation,” *Progr. Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, 2013, **84**, 183–215.
37. N. A. Larkin, “Exponential decay of the H^1-norm for the 2D Zakharov—Kuznetsov equation on a half-strip,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2013, **405**, No. 1, 326–335.
38. N. A. Larkin, “The 2D Zakharov—Kuznetsov—Burgers equation with variable dissipation on a strip,” *Electron. J. Differ. Equ.*, 2015, **60**, 1–20.
39. N. A. Larkin, “The 2D Zakharov—Kuznetsov—Burgers equation on a strip,” *Bol. Soc. Parana Mat. (3)*, 2016, **34**, No. 1, 151–172.
40. N. A. Larkin and E. Tronco, “Regular solutions of the 2D Zakharov—Kuznetsov equation on a half-strip,” *J. Differ. Equ.*, 2013, **254**, No. 1, 81–101.
41. J. L. Levandosky, “Smoothing properties of nonlinear dispersive equations in two spatial dimensions,” *J. Differ. Equ.* , 2001, **175**, No. 2, 275–301.
42. F. Linares and A. Pastor, “Well-posedness for the two-dimensional modified Zakharov—Kuznetsov equation,” *SIAM J. Math. Anal.*, 2009, **41**, No. 4, 1323–1339.

43. F. Linares and A. Pastor, “Local and global well-posedness for the 2D generalized Zakharov—Kuznetsov equation,” *J. Funct. Anal.* , 2011, **260**, No. 4, 1060–1085.
44. F. Linares, A. Pastor, and J.-C. Saut, “Well-posedness for the Zakharov—Kuznetsov equation in a cylinder and on the background of a KdV soliton,” *Commun. Part. Differ. Equ.*, 2010, **35**, No. 9, 1674–1689.
45. F. Linares and G. Ponce, “On special regularity properties of solutions of the Zakharov—Kuznetsov equation,” *Commun. Pure Appl. Anal.*, 2018, **17**, No. 4, 1561–1572.
46. F. Linares and J. C. Saut, “The Cauchy problem for the 3D Zakharov—Kuznetsov equation,” *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2009, **24**, No. 2, 547–565.
47. L. Molinet and D. Pilod, “Bilinear Strichartz estimates for the Zakharov—Kuznetsov equation and applications,” *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 2015, **32**, No. 2, 347–371.
48. F. Ribaud and S. Vento, “Well-posedness results for the 3D Zakharov—Kuznetsov equation,” *SIAM J. Math. Anal.*, 2012, **44**, No. 4, 2289–2304.
49. F. Ribaud and S. Vento, “A note on the Cauchy problem for the 2D generalized Zakharov—Kuznetsov equation,” *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 2012, **350**, No. 9-10, 499–503.
50. J.-C. Saut, “Sur quelques generalizations de l’equation de Korteweg—de Vries,” *J. Math. Pures Appl. (9)*, 1979, **58**, No. 1, 21–61.
51. M. Shan, “Well-posedness for the two-dimensional Zakharov—Kuznetsov equation” [Well-posedness for the two-dimensional Zakharov—Kuznetsov equation], *arXiv*, 1807.10123v2 [math.AP], 15 Aug. 2018.

A. V. Faminskii
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: afaminskii@sci.pfu.edu.ru