Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 3 (2019). С. 434–512

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-3-434-512 УДК 517.98, 517.955, 532.5

О КОЛЕБАНИЯХ СОЧЛЕНЕННЫХ МАЯТНИКОВ С ПОЛОСТЯМИ, ЗАПОЛНЕННЫМИ ОДНОРОДНЫМИ ЖИДКОСТЯМИ

© 2019 г. **Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ, В. И. ВОЙТИЦКИЙ**

Аннотация. Рассматривается задача о малых движениях и нормальных (собственных) колебаниях системы из трех сочлененных (прицепленных один к другому) маятников, имеющих полости, заполненные одной или несколькими несмешивающимися однородными жидкостями. Изучен случай частично диссипативной системы, когда полость первого маятника целиком заполнена двумя идеальными жидкостями, второго — тремя вязкими жидкостями, для третьего — одной идеальной жидкостью. Исследование проводится методами функционального анализа. Доказана теорема о корректной разрешимости начально-краевой задачи на произвольном отрезке времени, изучен вариант собственных колебаний консервативной системы, когда все жидкости в полостях маятников идеальные и трение в шарнирах (точках подвеса) не учитывается. Подробно рассмотрены три вспомогательные задачи о малых колебаниях одиночных маятников с тремя указанными выше вариантами заполнения полостей.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

1.1. История вопроса. В данной работе изучается проблема малых колебаний сочлененных тел (маятников) с полостями, заполненными полностью или частично одной либо несколькими однородными несжимаемыми жидкостями или системой таких жидкостей. Предполагается, что эта гидромеханическая система находится в поле сил тяжести (т. е. жидкости являются тяжелыми) и, таким образом, поверхностные силы не учитываются.

Под системой сочлененных тел подразумевают систему маятников, последовательно присоединенных с помощью сферических шарниров один к другому: первый маятник закреплен в неподвижной точке, второй закреплен в некоторой точке первого маятника и т. д.

Первой работой, посвященной задаче о малых колебаниях твердого тела с полостью, заполненной идеальной жидкостью, является работа Н. Е. Жуковского [14]. В ней впервые были введены вспомогательные функции, зависящие только от формы полости, которые сейчас называют потенциалами Жуковского. С их помощью удается задачу динамики тела с полостью, целиком заполненной идеальной жидкостью, заменить на конечномерную задачу о движении эквивалентного твердого тела с видоизмененным тензором инерции.

Если жидкость заполняет полость лишь частично, т. е. имеется ее движущаяся свободная поверхность, то такая гидромеханическая система имеет уже бесконечное число степеней свободы. Эта проблема исследовалась (в связи с развитием космической техники: жидкое топливо в баке

Данная работа выполнена при финансовой поддержке первого из соавторов грантом Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

космической ракеты) весьма интенсивно в пятидесятые-шестидесятые годы прошлого века многими авторами. Среди первых отметим работы Н. Н. Моисеева (1952 г.), затем Г. С. Нариманова, Д. Е. Охоцимского, Б. И. Рабиновича и Л. Н. Сретенского (1956 г.).

Начиная с работ Н. Н. Моисеева и совместной работы С. Г. Крейна и Н. Н. Моисеева [22] (1957 г.), при исследовании этих проблем применяются методы функционального анализа и теории линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Это позволяет в простой и весьма прозрачной форме представить и изучить задачу и установить общие свойства ее решений.

В шестидесятые годы и позже появилось достаточно много монографий, посвященных задаче динамики тела с полостью, содержащей жидкость: Н. Н. Моисеев, В. В. Румянцев [28], Н. Н. Моисеев, А. А. Петров [27], И. М. Рапопорт [32], Г. Н. Микишев, Б. И. Рабинович [25], Ф. Л. Черноусько [35], С. Ф. Фещенко, И. А. Луковский, Б. И. Рабинович, Л. В. Докучаев [33], Г. С. Нариманов, Л. В. Докучаев, И. А. Луковский [30], И. А. Луковский, М. Я. Барняк, А. И. Комаренко [24] и др. Операторные методы исследования задач подобного рода описаны в монографии Н. Д. Копачевского, С. Г. Крейна и Нго Зуй Кана [20], в двухтомной монографии Н. Д. Копачевского, С. Г. Крейна [37,38], см. также монографии А. Д. Мышкиса, Н. Д. Копачевского и др. [4,29,39].

Далее, в работах П. В. Харламова [34] изучались проблемы совместных движений сочлененных твердых тел (маятников), соединенных сферическими шарнирами. Затем Ю. Н. Кононов [15] исследовал вопросы устойчивости и стабилизации движения систем связанных твердых тел с полостями, содержащими жидкость. Наконец, в последние годы Э. И. Батыр и Н. Д. Копачевский [5] изучали проблему малых движений системы сочлененных твердых тел (гиростатов), соединенных сферическими шарнирами и имеющих полости, целиком заполненные идеальной либо вязкой жидкостью.

Отметим еще работу Н. Д. Копачевского [16], где операторными методами изучалась начально-краевая задача о малых движениях маятника с полостью, частично заполненной идеальной жидкостью, статью Н. Д. Копачевского, В. И. Войтицкого и З. З. Ситшаевой [19], где исследованы проблемы малых колебаний сочлененных маятников, частично заполненных идеальной либо вязкой жидкостью, а также последние публикации авторов [7–10], предшествовавшие данной работе.

1.2. О применении операторного подхода. Цель данной работы — реализовать в значительной мере программу исследований (по гранту министерства образования и науки РФ, проект 14.Z50.31.0037, см. [8]) проблемы малых движений и нормальных колебаний сочлененных маятников с полостями, полностью или частично заполненными однородной несжимаемой жидкостью или системой таких несмешивающихся жидкостей.

Желательно изучить широкий класс гидромеханических задач подобного рода и при этом предложить универсальную схему исследования, основанную на использовании операторного подхода, разработанного для близких задач в [20, 37, 38] (см. также [4, 5, 16, 19, 29, 39]). Универсальность схемы исследования, по мнению авторов, состоит в том, что изучение задачи о малых движениях каждой такой гидромеханической системы можно привести к рассмотрению задачи Коши для системы операторных обыкновенных дифференциальных уравнений в ортогональной сумме $H = H_1 \oplus H_2$ гильбертовых пространств:

$$\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & gC_2 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

$$z_1(0) = z_1^0, \quad z_2(0) = z_2^0.$$

Здесь H_1 — гильбертово пространство, связанное с кинетической энергией системы, а H_2 — с потенциальной энергией. Далее, z_1 — набор динамических переменных, z_2 — набор кинематических переменных, описывающих движение системы, а $g > 0$ — ускорение силы тяжести. Операторные коэффициенты в (1.1) имеют отчетливый энергетический смысл. Так, C_1 — оператор кинетической энергии системы, gC_2 — оператор потенциальной энергии, A_1 — оператор диссипации энергии, а

$$B := g \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

— оператор обмена между кинетической и потенциальной энергиями.

В предлагаемую схему попадают следующие классы исследуемых задач:

1°. Консервативные системы: жидкости в полостях маятников идеальные, а трение в шарнирах не учитывается.
2°. Диссипативные системы: жидкости в полостях маятников вязкие, трение в шарнирах учитывается.
3°. Частично диссипативные системы: некоторые жидкости идеальные, некоторые вязкие, трение в одних шарнирах учитывается, а в других нет.

Преимущества рассмотрения этих классов задач в форме (1.1) состоят в следующем.

1°. Оператор кинетической энергии C_1 ограничен и положительно определен в H_1, причем он может быть составлен в виде операторной матрицы блочного типа, где блоки отвечают каждому маятнику и каждой жидкости в полости маятника, и эта структура не зависит от того, являются жидкости идеальными либо вязкими.
2°. Оператор потенциальной энергии gC_2 самосопряжен и ограничен в H_2, причем в состоянии статической устойчивости системы он положительно определен.
3°. Для консервативной системы оператор $A_1 = 0$, а для диссипативной он положительно определен и неограничен в H_1; для частично диссипативной системы $A_1 \geqslant 0$, $\operatorname{Ker} A_1 \neq \{0\}$.
4°. Оператор обмена энергиями B (см. (1.2)) неограничен в H, кососамосопряжен и также не зависит от того, являются жидкости в полостях маятников идеальными либо вязкими.

Эти общие свойства операторов уже доказаны на примере задачи о колебаниях двух сочлененных маятников с полостями, частично заполненными одной идеальной либо вязкой жидкостью (см. [19]). Поэтому далее рассмотрим такой типичный и наиболее сложный вариант, когда гидромеханическая система состоит из трех подсистем (маятников), одна из которых является консервативной, вторая диссипативной, а третья — частично диссипативной. Именно, считаем, что система состоит из трех сочлененных маятников, полости которых заполнены: для первого — системой из двух идеальных жидкостей, причем трение в первом шарнире учитывается; для второго — системой из трех вязких жидкостей, трение во втором шарнире учитывается; для третьего — одной идеальной жидкостью, целиком заполняющей полость, трение в третьем шарнире не учитывается.

Такая гидромеханическая система требует трех разных подходов к ее исследованию. В частности, для третьего маятника (консервативная подсистема) — использование потенциалов и известной теоремы Н. Е. Жуковского; для первого маятника (частично диссипативная подсистема) — разбиение поля скорости в каждой подобласти, занятой одной из идеальных жидкостей, на три взаимно ортогональных поля (в метрике кинетической энергии) и использование метода ортогонального проектирования уравнений движения каждой жидкости на соответствующие подпространства (см. [20,37,38]); для второго маятника (диссипативная подсистема) — также использование метода ортогонального проектирования на два подпространства, связанные как с кинетической энергией, так и с конечной скоростью диссипации энергии в каждой вязкой жидкости (см. также [20,37,38]).

Предварительно в работе эти три разных подхода реализованы на примере задачи о колебаниях одного маятника с указанными выше вариантами заполнения полостей жидкостями (см. пункты 3.1, 3.2, 3.3). Это позволяет далее исследовать общую начально-краевую задачу о колебаниях трех сочлененных маятников, и становится ясно, как проводить рассмотрение проблемы в случае любого количества сочлененных маятников при любых вариантах заполнения их полостей жидкостями.

2. Классическая постановка задачи

2.1. Физическая постановка задачи. Итак, будем считать, что имеется система из трех физических маятников G_k, $k = 1, 2, 3$, которые сочленены друг с другом: маятник G_1 имеет неподвижную точку O_1, а маятники G_2 и G_3 — соответственно точки O_k, соединяющие G_k с $G_{k-1}, k = 2, 3$.

Полагаем, что внутри каждого тела G_k имеется одна полость, заполненная одной либо несколькими несмешивающимися жидкостями. При этом в теле G_1 полость Ω_1 целиком заполнена системой из двух однородных идеальных жидкостей с плотностями $\rho_{11} > \rho_{12}$, занимающих в состоянии равновесия (когда система покоится) области Ω_{11} и Ω_{12} соответственно, разделенных равновесной поверхностью Γ_{11}. В теле G_2 полость Ω_2 целиком заполнена системой из трех однородных вязких несжимаемых жидкостей с плотностями $\rho_{21} > \rho_{22} > \rho_{23}$, занимающих в состоянии равновесия области Ω_{21}, Ω_{22} и Ω_{23} соответственно и разделенных равновесными границами раздела Γ_{21} и

Γ_{22}. Наконец тело G_3 имеет полость Ω_{31}, целиком заполненную однородной идеальной несжимаемой жидкостью с плотностью $\rho_{31} > 0$. Обозначим твердые границы областей Ω_{kj} через S_{kj}, а их подвижные границы раздела — соответственно через $\Gamma_{kj}(t)$ (см. рис. 1).

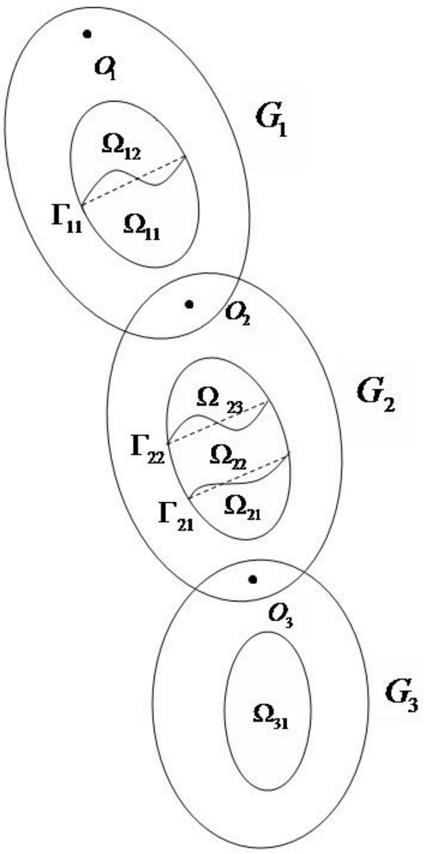

Рис. 1

Будем считать также, что в точках O_k соединения тел имеются сферические шарниры и потому тела могут совершать малые колебания друг относительно друга, причем в каждом шарнире момент силы трения пропорционален разности угловых скоростей примыкающих тел G_k и G_{k-1} с коэффициентом пропорциональности $\alpha_k \geqslant 0$. В данной задаче, как было указано выше, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 = 0$. Однако сначала будем считать, что $\alpha_3 > 0$.

Для описания малых движений данной гидромеханической системы около состояния равновесия введем неподвижную систему координат $O_1x^1x^2x^3$ с ортами $\vec{e}^{\,j}$, $j = 1, 2, 3$, так, чтобы ускорение силы тяжести $\vec{g} = -g\vec{e}^{\,3}$. Выберем также в каждой точке O_k подвижные системы координат $O_kx_k^1x_k^2x_k^3$ с ортами $\vec{e}_k^{\,j}$, $j = 1, 2, 3$, жестко связанные с телами G_k так, чтобы в состоянии покоя $\vec{e}^{\,j} = \vec{e}_1^{\,j} = \vec{e}_2^{\,j} = \vec{e}_3^{\,j}$, $j = 1, 2, 3$. При этом предполагаем, что в указанном состоянии равновесия центры масс C_k тел G_k, а также точки подвеса маятников O_k находятся на одной оси O_1x^3, а равновесные границы Γ_{kj} раздела жидкостей горизонтальны.

Положение подвижной системы координат $O_kx_k^1x_k^2x_k^3$ относительно неподвижной системы $O_1x^1x^2x^3$ в процессе малых движений гидромеханической системы будем задавать малым вектором углового перемещения

$$\vec{\delta}_k(t) = \sum_{j=1}^{3} \delta_k^j(t)\vec{e}_k^{\,j}, \quad k = 1, 2, 3. \tag{2.1}$$

Тогда угловая скорость $\vec{\omega}_k(t)$ тела G_k будет равна $d\vec{\delta}_k/dt$, а угловое ускорение — величине $d^2\vec{\delta}_k/dt^2 = d\vec{\omega}_k/dt$. Малые отклонения искомых границ раздела $\Gamma_{kj}(t)$ от равновесных плоскостей

Γ_{kj} вдоль направленных вверх нормалей $\vec{n}_{kj}$ к Γ_{kj} будем задавать функциями $\zeta_{kj}(t,x)$, $x \in \Gamma_{kj}$. Кроме того, через $\vec{u}_{kj}(t,x)$, $p_{kj}(t,x)$, $x \in \Omega_{kj}$, обозначим поля малых относительных скоростей жидкостей в областях Ω_{kj} и отклонения полей давлений в этих областях от равновесных давлений.

Для удобства дальнейших записей введем также следующие краткие обозначения:

$$\int\limits_{G_1} (..)\, dm_1 := \int\limits_{\Omega_{10}} (..)\rho_{10}\, d\Omega_{01} + \int\limits_{\Omega_{11}} (..)\rho_{11}\, d\Omega_{11} + \int\limits_{\Omega_{12}} (..)\rho_{12}\, d\Omega_{12},$$

$$\int\limits_{G_2} (..)\, dm_2 := \int\limits_{\Omega_{20}} (..)\rho_{20}\, d\Omega_{02} + \sum_{j=1}^{3} \int\limits_{\Omega_{2j}} (..)\rho_{2j}\, d\Omega_{2j}, \quad \int\limits_{G_3} (..)\, dm_3 := \int\limits_{\Omega_{30}} (..)\rho_{30}\, d\Omega_{30} + \int\limits_{\Omega_{31}} (..)\rho_{31}\, d\Omega_{31}, \tag{2.2}$$

где Ω_{k0} — область, занятая твердой частью тела G_k и имеющая плотность $\rho_{k0} > 0$, $k = 1, 2, 3$.

В процессе малых движений будем считать, что на данную систему маятников действует возмущенное силовое поле $\vec{F} := \vec{g} + \vec{f}(t,x)$, где $\vec{f}(t,x)$ — малая динамическая добавка к однородному гравитационному полю $\vec{g} = -g\vec{e}^3$. Тогда через $\vec{f}_k$ и $\vec{f}_{kj}$ далее будем обозначать поля, действующие в областях G_k и Ω_{kj} соответственно: $\vec{f}_k = \vec{f}\big|_{G_k}$, $\vec{f}_{kj} = \vec{f}\big|_{\Omega_{kj}}$.

2.2. Математическая постановка начально-краевой задачи. Сформулируем полную постановку линеаризованной задачи математической физики о малых движениях системы из трех сочлененных маятников. Она состоит из нескольких групп уравнений, а также кинематических, динамических и начальных условий.

Прежде всего, это уравнения изменения кинетических моментов системы тел относительно точек O_k подвеса маятников, $k = 1, 2, 3$. Эти уравнения, как хорошо известно из механики, обладают следующими свойствами (см., например [5, с. 10, 76–83]): левые и правые части последующего уравнения (при переходе от уравнения относительно O_1 к уравнению относительно O_2, а также для соответствующих уравнений относительно O_2 и O_3) целиком входят в левые и правые части предыдущего уравнения. Тогда, беря соответствующие разности левых и правых частей, а также последнее уравнение (т. е. относительно O_3), получаем следующее преобразованные уравнения моментов количества движения сочлененных маятников (см. вывод в [7]).

Первое уравнение (с учетом обозначений (2.2)):

$$\int\limits_{G_1} \vec{r}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1\right) dm_1 + \rho_{11} \int\limits_{\Omega_{11}} \vec{r}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_{11}}{\partial t}\, d\Omega_{11} + \rho_{12} \int\limits_{\Omega_{12}} \vec{r}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_{12}}{\partial t}\, d\Omega_{12} +$$
$$+ \int\limits_{G_2} \vec{h}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2\right) dm_2 + \int\limits_{G_3} \vec{h}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3\right) dm_3 +$$
$$+ \sum_{j=1}^{3} \rho_{2j} \int\limits_{\Omega_{2j}} \vec{h}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_{2j}}{\partial t}\, d\Omega_{2j} + \rho_3 \int\limits_{\Omega_{31}} \vec{h}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t}\, d\Omega_{31} +$$
$$+ \alpha_1 \vec{\omega}_1 - \alpha_2(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) + g(m_1 l_1 + h_1 m_2 + h_1 m_3) P_2 \vec{\delta}_1 - g(\rho_{11} - \rho_{12}) \int\limits_{\Gamma_{11}} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_1)\zeta_{11}\, d\Gamma_{11} =$$
$$= \int\limits_{G_1} \vec{r}_1 \times \vec{f}_1\, dm_1 + \sum_{k=2}^{3} \int\limits_{G_k} \vec{h}_1 \times \vec{f}_k\, dm_k =: \vec{M}_1(t). \tag{2.3}$$

Второе уравнение:

$$\int\limits_{G_2} \vec{r}_2 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2\right) dm_2 + \sum_{j=1}^{3} \rho_{2j} \int\limits_{\Omega_{2j}} \vec{r}_2 \times \frac{\partial \vec{u}_{2j}}{\partial t}\, d\Omega_{2j} +$$
$$+ \int\limits_{G_3} \vec{h}_2 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3\right) dm_3 + \rho_{31} \int\limits_{\Omega_{31}} \vec{h}_2 \times \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t}\, d\Omega_{31} +$$

$$+\alpha_2(\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1)-\alpha_3(\vec{\omega}_3-\vec{\omega}_2)+g(m_2l_2+h_2m_3)P_2\vec{\delta}_2-g\sum_{j=1}^{2}(\rho_{2j}-\rho_{2,j+1})\int\limits_{\Gamma_{2j}}(\vec{e}_2^{\,3}\times\vec{r}_2)\zeta_{2j}\,d\Gamma_{2j}=$$
$$=\int\limits_{G_2}\vec{r}_2\times\vec{f}_2\,dm_2+\int\limits_{G_3}\vec{h}_2\times\vec{f}_3\,dm_3=:\vec{M}_2(t),\quad(2.4)$$

Третье уравнение:

$$\int\limits_{G_3}\vec{r}_3\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)dm_3+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}\vec{r}_3\times\frac{\partial\vec{u}_3}{\partial t}\,d\Omega_{31}+$$
$$+\alpha_3(\vec{\omega}_3-\vec{\omega}_2)+gm_3l_3P_2\vec{\delta}_3=\int\limits_{G_3}\vec{r}_3\times\vec{f}_3\,dm_3=:\vec{M}_3(t).\quad(2.5)$$

В уравнениях (2.3)–(2.5) введены следующие обозначения. Через $m_k>0$ обозначены массы маятников, через $\vec{r}_k$ — радиус-вектор произвольной точки тела G_k, исходящий из точки O_k, $\vec{h}_k:=\overrightarrow{O_kO_{k+1}}$, $h_k:=|\vec{h}_k|$, $P_2\vec{\delta}_k=\sum\limits_{j=1}^{2}\delta_k^j\vec{e}_k^{\,j}$ — проектор на плоскость $O_kx_k^1x_k^2$, $l_k=|\overrightarrow{O_kC_k}|$ — расстояние от точки подвеса маятника G_k до его центра масс C_k (в состоянии покоя).

Вторая группа уравнений в формулируемой задаче — это линеаризованные уравнения движения и уравнения неразрывности каждой жидкости в полостях маятников, записанные в подвижной системе координат, жестко связанной с соответствующим маятником (см. [5, с. 12]).

Для первого маятника имеем уравнения Эйлера (идеальные жидкости) в областях Ω_{11} и Ω_{12}:

$$\frac{\partial\vec{u}_{1j}}{\partial t}+\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1=-\rho_{1j}^{-1}\nabla p_{1j}+\vec{f}_{1j},\quad \operatorname{div}\vec{u}_{1j}=0\quad(\text{в }\Omega_{1j}),\quad j=1,2.\quad(2.6)$$

Для второго маятника имеем линеаризованные уравнения Навье—Стокса (вязкие жидкости) в областях Ω_{21}, Ω_{22} и Ω_{23} (см., например, [20, с. 124]):

$$\frac{\partial\vec{u}_{2j}}{\partial t}+\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2=-\rho_{2j}^{-1}\nabla p_{2j}+\nu_{2j}\Delta\vec{u}_{2j}+\vec{f}_{2j},\ \operatorname{div}\vec{u}_{2j}=0\quad(\text{в }\Omega_{2j}),\quad j=1,2,3,\quad(2.7)$$

где $\nu_{2j}:=\mu_{2j}/\rho_{2j}>0$ — кинематические вязкости жидкостей.

Для третьего маятника имеем одно линеаризованное уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial\vec{u}_{31}}{\partial t}+\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3=-\rho_{31}^{-1}\nabla p_{31}+\vec{f}_{31},\ \operatorname{div}\vec{u}_{31}=0\quad(\text{в }\Omega_{31}).\quad(2.8)$$

Выпишем теперь граничные условия на твердых стенках полостей, занятых жидкостями. Для идеальных жидкостей это условия непротекания, а для вязких — условия прилипания. Имеем

$$\vec{u}_{11}\cdot\vec{n}=0\quad(\text{на }S_{11}),\qquad \vec{u}_{12}\cdot\vec{n}=0\quad(\text{на }S_{12});\quad(2.9)$$
$$\vec{u}_{2j}=\vec{0}\quad(\text{на }S_{2j}),\quad j=1,2,3;\quad(2.10)$$
$$\vec{u}_{31}\cdot\vec{n}_{31}=0\quad(\text{на }S_{31}),\quad(2.11)$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к твердой стенке.

Следующая группа условий — это кинематические и динамические связи на границах раздела жидкостей в полостях маятников. Кинематические условия имеют вид:

$$\frac{\partial\zeta_{j1}}{\partial t}=\vec{u}_{j1}\cdot\vec{n}_{j1}=\vec{u}_{12}\cdot\vec{n}_{j1}\quad(\text{на }\Gamma_{j1}),\quad j=1,2,\quad(2.12)$$
$$\frac{\partial\zeta_{22}}{\partial t}=\vec{u}_{22}\cdot\vec{n}_{22}=\vec{u}_{23}\cdot\vec{n}_{22}\quad(\text{на }\Gamma_{22}).\quad(2.13)$$

Динамические условия на равновесных границах раздела выражают тот факт, что разность напряжений для соприкасающихся жидкостей равна гравитационному скачку давлений. Имеем

$$-p_{11}+p_{12}=-(\rho_{11}-\rho_{12})g(\zeta_{11}+(P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3})\quad(\text{на }\Gamma_{11});\quad(2.14)$$
$$\mu_{21}\tau_{j3}(\vec{u}_{21})=\mu_{22}\tau_{j3}(\vec{u}_{22})\ (\text{на }\Gamma_{21}),\quad \mu_{22}\tau_{j3}(\vec{u}_{22})=\mu_{23}\tau_{j3}(\vec{u}_{23})\ (\text{на }\Gamma_{22}),\quad j=1,2;\quad(2.15)$$

$$\left[-p_{21}+2\mu_{21}\frac{\partial u_{21}^3}{\partial x_1^3}\right]-\left[-p_{22}+2\mu_{22}\frac{\partial u_{22}^3}{\partial x_1^3}\right]=-(\rho_{21}-\rho_{22})g(\zeta_{21}+(P_2\vec{\delta}_2\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}_2^{\,3})\quad(\text{на }\Gamma_{21}),$$
$$\left[-p_{22}+2\mu_{22}\frac{\partial u_{22}^3}{\partial x_2^3}\right]-\left[-p_{23}+2\mu_{23}\frac{\partial u_{23}^3}{\partial x_2^3}\right]=-(\rho_{22}-\rho_{23})g(\zeta_{22}+(P_2\vec{\delta}_2\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}_2^{\,3})\quad(\text{на }\Gamma_{22}).\tag{2.16}$$

Здесь

$$\tau_{jk}(\vec{u}_{2l}):=\frac{\partial u_{2l}^k}{\partial x_2^j}+\frac{\partial u_{2l}^j}{\partial x_2^k},\quad l=1,2,\ j,k=1,2,3,\tag{2.17}$$

— тензор деформаций, отвечающий полю $\vec{u}_{2l}(t,x)$.

В процессе колебаний однородных жидкостей объем каждой жидкости сохраняется. Этот факт в рассматриваемой линейной задаче приводит к соотношениям

$$\int\limits_{\Gamma_1}\zeta_{11}\,d\Gamma_{11}=0,\quad\int\limits_{\Gamma_{2j}}\zeta_{2j}\,d\Gamma_{2j}=0,\quad j=1,2.\tag{2.18}$$

Для полной постановки формулируемой начально-краевой задачи необходимо задать еще механические условия связи

$$\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_k=P_2\vec{\omega}_k,\quad\frac{d}{dt}\vec{\delta}_k^{\,3}=\vec{\omega}_k^{\,3},\quad k=1,2,3,\tag{2.19}$$

а также начальные условия для искомых функций:

$$\vec{u}_{kj}(0,x)=\vec{u}_{kj}^{\,0}(x),\ x\in\Omega_{kj},\quad\zeta_{kj}(0,x)=\zeta_{kj}^0(x),\ x\in\Gamma_{kj},\quad\vec{\omega}_k(0)=\vec{\omega}_k^{\,0},\quad\vec{\delta}_k(0)=\vec{\delta}_k^{\,0}.\tag{2.20}$$

Таким образом, задача о малых движениях трех сочлененных маятников с выбранным вариантом заполнения полостей жидкостями состоит в нахождении искомых функций, удовлетворяющих уравнениям движения (2.3)–(2.5) системы маятников, уравнениям (2.6)–(2.8) движения каждой жидкости в полостях маятников, уравнениям (2.9)–(2.11) непротекания и прилипания жидкостей на твердых стенках, кинематическим условиям (2.12)–(2.13) на границах раздела жидких сред, а также динамическим условиям (2.14)–(2.16) на этих границах. Наконец, должны выполняться условия (2.18) сохранения объемов жидкостей, механические условия связи (2.19) для угловых скоростей и угловых перемещений маятников, а также начальные условия (2.20).

Закон баланса полной энергии данной гидромеханической системы получен в работе [7]. Приведем здесь лишь его формулировку и физический смысл:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Bigg\{\rho_{10}\int\limits_{\Omega_{10}}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1|^2\,d\Omega_{10}+\sum_{j=1}^{2}\rho_{1j}\int\limits_{\Omega_{1j}}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1+\vec{u}_{1j}|^2\,d\Omega_{1j}+$$
$$+\rho_{20}\int\limits_{\Omega_{20}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2|^2\,d\Omega_{20}+\sum_{j=1}^{3}\rho_{1j}\int\limits_{\Omega_{2j}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2+\vec{u}_{2j}|^2\,d\Omega_{2j}+$$
$$+\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2+\vec{\omega}_3\times\vec{r}_3|^2\,d\Omega_{30}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2+\vec{\omega}_3\times\vec{r}_3+\vec{u}_{31}|^2\,d\Omega_{31}\Bigg\}+$$
$$+\frac{g}{2}\frac{d}{dt}\Bigg\{(\rho_{11}-\rho_{12})\int\limits_{\Gamma_{11}}\Big[|\zeta_{11}+\theta_{11}((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3})|^2-|\theta_{11}((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3})|^2\Big]\,d\Gamma_{11}+$$
$$+\sum_{j=1}^{2}(\rho_{2j}-\rho_{2,j+1})\int\limits_{\Gamma_{2j}}\Big[|\zeta_{2j}+\theta_{2j}((P_2\vec{\delta}_2\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}_2^{\,3})|^2-|\theta_{2j}((P_2\vec{\delta}_2\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}_2^{\,3})|^2\Big]\,d\Gamma_{2j}+$$
$$+(m_1l_1+(m_2+m_3)h_1)|P_2\vec{\delta}_1|^2+(m_2l_2+m_3h_2)|P_2\vec{\delta}_2|^2+m_3l_3|P_2\vec{\delta}_3|^2\Bigg\}=$$

$$= -\left\{\sum_{j=1}^{3}\mu_{2j}E_{2j}(\vec{u}_{2j},\vec{u}_{2j}) + \alpha_1|\vec{\omega}_1|^2 + \alpha_2|\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1|^2 + \alpha_3|\vec{\omega}_3-\vec{\omega}_2|^2\right\}+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\rho_{1j}\int\limits_{\Omega_{1j}}\vec{f}_{1j}\cdot\vec{u}_{1j}\,d\Omega_{1j} + \sum_{j=1}^{2}\rho_{2j}\int\limits_{\Omega_{2j}}\vec{f}_{2j}\cdot\vec{u}_{2j}\,d\Omega_{2j} + \rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}\vec{f}_{31}\cdot\vec{u}_{31}\,d\Omega_{31} + \sum_{j=1}^{3}\vec{M}_j\cdot\vec{\omega}_j. \quad (2.21)$$

Первое выражение, стоящее слева в фигурных скобках, есть удвоенная кинетическая энергия гидромеханической системы. Соответственно второе выражение в фигурных скобках — удвоенная потенциальная энергия, отвечающая перемещениям системы на углы $\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_2,\vec{\delta}_3$ и одновременном смещении границ раздела жидкостей, отвечающих отклонениям ζ_{11}, ζ_{21} и ζ_{22}. При этом выражение $\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1$ — абсолютная скорость частиц твердой части Ω_{10} первого маятника, $\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1+\vec{u}_{1j}$ — абсолютные скорости жидкости в областях Ω_{1j}, $j=1,2$ (первый маятник), а выражения $\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2$ и $\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2+\vec{u}_{2j}$, а также $\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2+\vec{\omega}_3\times\vec{r}_3$ и $\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2+\vec{\omega}_3\times\vec{r}_3+\vec{u}_{31}$ — аналогичные выражения для абсолютной скорости частиц из различных слоев жидкости во втором и третьем маятниках.

Далее, выражение для потенциальной энергии системы (вторая фигурная скобка) состоит из двух групп слагаемых. Первая группа, содержащая интегралы, отвечает изменению потенциальной энергии при изменении границ раздела между жидкостями при фиксированных углах поворота, а вторая группа — изменению потенциальной энергии при наличии углов поворота $\vec{\delta}_1$, $\vec{\delta}_2$ и $\vec{\delta}_3$ и отсутствии возмущений границ раздела. Через θ_{kj} здесь и далее обозначен ортопроектор из $L_2(\Gamma_{kj})$ на $L_{2,\Gamma_{kj}} := L_2(\Gamma_{kj})\ominus\{1_{\Gamma_{kj}}\}$.

Наконец, справа в (2.21) стоит мощность внутренних и внешних сил, состоящая из мощности сил вязкости (второй маятник) и сил трения в шарнирах, а также мощности малых внешних сил, наложенных на гравитационное поле. Проинтегрировав тождество (2.21) по t в пределах от 0 до T и воспользовавшись начальными условиями (2.20), получим закон баланса полной энергии в интегральной форме, который означает, что изменение полной энергии системы за время T равно работе внутренних и внешних сил, проведенных над системой за этот промежуток.

3. О трех вспомогательных начально-краевых задачах гидромеханики

Как уже упоминалось в пункте 1.2, исследование задачи (2.3)–(2.20) требует использования трех разных операторных подходов к каждому маятнику системы. Поэтому целесообразно предварительно рассмотреть три задачи о колебаниях одного маятника с различными вариантами заполнения полостей.

3.1. Колебания маятника с полостью, целиком заполненной идеальной жидкостью. Эта задача известна как проблема Н. Е. Жуковского (см. [14]). Здесь она будет рассмотрена на базе того операторного подхода, который будет использован далее в работе применительно к другим вспомогательным задачам и общей исследуемой проблеме (2.3)–(2.20).

Итак, рассмотрим пространственный маятник G_1, закрепленный в точке O_1 с помощью сферического шарнира. Маятник имеет полость Ω_1, целиком заполненную идеальной несжимаемой жидкостью плотности $\rho_1>0$ с границей $S_1=\partial\Omega_1$. Считаем также, что твердое тело маятника Ω_0 имеет плотность $\rho_0>0$.

Введем, как и выше, неподвижную декартову систему координат $O_1x^1x^2x^3$, а также подвижную систему $O_1x_1^1x_1^2x_1^3$, жестко связанную с телом G_1. При этом считаем, что в состоянии покоя на систему действует сила тяжести $\vec{g}=-g\vec{e}^{\,3}$, а $\vec{e}^{\,k}=\vec{e}^{\,k}_1$, $k=1,2,3$.

Задача о малых движениях маятника с полостью, содержащей жидкость, отвечающая внешнему полю $\vec{F}=-g\vec{e}^{\,3}+\vec{f}$ с малой добавкой $\vec{f}$, формулируется следующим образом.

Уравнение моментов количества движения маятника:

$$\rho_0\int\limits_{\Omega_0}\vec{r}_0\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_0\right)d\Omega_0 + \rho_1\int\limits_{\Omega_1}\vec{r}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1+\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t}\right)d\Omega_1 + \alpha\vec{\omega}_1 + gm_1l_1P_2\vec{\delta} =$$

$$= \rho_0 \int\limits_{\Omega_0} \left(\vec{r}_0 \times \vec{f}_0\right) d\Omega_0 + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \left(\vec{r}_1 \times \vec{f}_1\right) d\Omega_1 =: \vec{M}_1(t), \quad \vec{f}_k := \vec{f}\big|_{\Omega_k},\ k = 0, 1. \tag{3.1}$$

Уравнение движения жидкости в полости:

$$\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 + \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} = -\rho_1^{-1} \nabla p_1 + \vec{f}_1, \quad \operatorname{div} \vec{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1)\,. \tag{3.2}$$

Кинематическое условие непротекания:

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 = 0 \quad (\text{на } \Omega_1)\,. \tag{3.3}$$

Также имеем очевидную связь $\dfrac{d\vec{\delta}_1}{dt} = \vec{\omega}_1$, эквивалентную тому, что

$$\frac{d}{dt} P_2 \vec{\delta}_1 = P_2 \vec{\omega}_1, \quad \frac{d}{dt} \vec{\delta}_1^{\,3} = \vec{\omega}_1^{\,3}, \tag{3.4}$$

и начальные условия

$$\vec{u}_1(0, x) = \vec{u}_1^{\,0}(x), \quad x \in \Omega_1, \qquad \vec{\omega}_1(0) = \vec{\omega}_1^{\,0}, \quad \vec{\delta}_1(0) = \vec{\delta}_1^{\,0}. \tag{3.5}$$

Здесь, как и выше, $\alpha_1 > 0$ — коэффициент трения в шарнире O_1, $\vec{u}_1$ — поле относительной скорости в Ω_1, p_1 — отклонение давления от равновесного, $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\delta}_1$ — угловая скорость и угловое перемещение маятника, m_1 — масса маятника с жидкостью, l_1 — расстояние от O_1 до центра масс маятника. Отметим, что в процессе движения центр масс маятника в системе $O_1 x_1^1 x_1^2 x_1^3$ неподвижен и потому такую систему называют *гиростатом*. Заметим также, что при $\alpha_1 > 0$ данная гидромеханическая система частично диссипативна, а при $\alpha_1 = 0$ — консервативна.

Для классических решений задачи (3.1)–(3.5) легко вывести закон баланса полной энергии:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left[\rho_0 \int\limits_{\Omega_0} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_0|^2\, d\Omega_0 + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{u}_1|^2\, d\Omega_1\right] + g m_1 l_1 |P_2 \vec{\delta}_1|^2\right\} =$$

$$= -\alpha_1 |\vec{\omega}_1|^2 + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \vec{f}_1 \cdot \vec{u}_1\, d\Omega_1 + \vec{M}_1(t) \cdot \vec{\omega}_1. \tag{3.6}$$

Опираясь на это тождество, будем при исследовании задачи (3.1)–(3.5) методами функционального анализа считать, что поле скоростей идеальной жидкости в полости Ω_1 является при любом $t \geqslant 0$ элементом комплексного гильбертова пространства $\vec{L}_2(\Omega_1)$ со скалярным произведением

$$(\vec{u}_1, \vec{v}_1)_{\vec{L}_2(\Omega_1)} := \int\limits_{\Omega} \vec{u}_1 \cdot \overline{\vec{v}_1}\ d\Omega_1 \tag{3.7}$$

и соответствующей нормой. Более того, учитывая свойство соленоидальности и условие непротекания (см. (3.2), (3.3)), следует считать поле $\vec{u}_1$ элементом подпространства

$$\vec{J}_0(\Omega_1) := \left\{\vec{u}_1 \in \vec{L}_2(\Omega_1) : \quad \operatorname{div} \vec{u}_1 = 0 \ (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 = 0 \ (\text{на } S_1)\right\} \tag{3.8}$$

(операции $\operatorname{div} \vec{u}_1$ и $\vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1$ понимаются в виде обобщенных функций, см., например, [20, с. 100–102]). Как известно, ортогональным дополнением к $\vec{J}_0(\Omega_1)$ в $\vec{L}_2(\Omega_1)$ является подпространство потенциальных полей:

$$\vec{L}_2(\Omega_1) = \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}(\Omega_1), \tag{3.9}$$

$$\vec{G}(\Omega_1) := \bigl\{\vec{v}_1 = \nabla p_1 \in \vec{L}_2(\Omega_1) : \int\limits_{S_1} p_1\, dS_1 = 0\bigr\}. \tag{3.10}$$

Опираясь на разложение (3.9), введем ортопроекторы

$$P_0 : \vec{L}_2(\Omega_1) \to \vec{J}_0(\Omega_1), \quad P_G : \vec{L}_2(\Omega_1) \to \vec{G}(\Omega_1), \tag{3.11}$$

и подействуем ими на обе части уравнения движения жидкости (3.2). Будем иметь соотношения

$$\frac{d\vec{u}_1}{dt} + P_0\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1\right) = P_0\vec{f}_1, \tag{3.12}$$

$$P_G\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1\right) = -\rho_1^{-1}\nabla p_1 + P_G\vec{f}_1, \tag{3.13}$$

где $\vec{u}_1(t)$ и $\nabla p_1(t)$ считаются функциями переменной t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega_1)$ и потому производные $\partial/\partial t$ заменены на d/dt.

Соотношение (3.13) определяет поле ∇p_1 по заданной функции $\vec{f}_1(t)$ и найденной $\vec{\omega}_1(t)$, причем это потенциальное поле не входит в уравнения (3.1) и (3.4), где искомыми являются функции $\vec{\omega}_1(t)$ и $\vec{\delta}_1(t)$, а $d\vec{u}_1/dt$ через них выражается посредством соотношения (3.12).

В итоге исходная задача (3.1)–(3.5) заменяется на задачу Коши в пространстве $\mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^5$ относительно $\vec{\omega}_1(t)$ и $P_2\vec{\delta}_1(t)$:

$$\begin{aligned} \left(\vec{J}_1 + \vec{J}_{\text{пр}}\right)\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} + \alpha_1\vec{\omega}_1 + gm_1l_1P_2\vec{\delta}_1 = \vec{M}_{1,\text{пр}}(t), \qquad \vec{\omega}_1(0) = \vec{\omega}_1^0, \\ gm_1l_1\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_1 - gm_1l_1P_2\vec{\omega}_1 = \vec{0}, \qquad P_2\vec{\delta}_1(0) = P_2\vec{\delta}_1^0, \end{aligned} \tag{3.14}$$

а также тривиальную связь (см. (3.5))

$$\frac{d}{dt}\vec{\delta}_1^3 = \vec{\omega}_1^3, \quad \vec{\delta}_1(0) = \vec{\delta}_1^0. \tag{3.15}$$

В уравнениях (3.14) введены обозначения

$$\vec{J}_1\vec{\omega}_1 := \rho_0\int\limits_{\Omega_0}\vec{r}_0 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_0)\, d\Omega_0, \quad \vec{J}_{\text{пр}}\vec{\omega}_1 := \rho_1\int\limits_{\Omega_1}\vec{r}_1 \times P_G\left(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1\right)\, d\Omega_1, \tag{3.16}$$

где $\vec{J}_1$ — момент инерции твердой части маятника, $\vec{J}_{\text{пр}}$ — приведенный момент инерции, учитывающий движение жидкости в полости, а

$$\vec{M}_{1,\text{пр}}(t) := \rho_1\int\limits_{\Omega_1}\vec{r}_1 \times P_G\vec{f}_1\, d\Omega_1 + \rho_0\int\limits_{\Omega_0}\vec{r}_0 \times \vec{f}_0\, d\Omega_0 \tag{3.17}$$

— приведенный момент малых внешних сил, действующих на систему. В частности, если силы $\vec{f}_1$ потенциальны, то $\vec{M}_{1,\text{пр}}(t) \equiv \vec{M}_1(t)$ (см. (3.1)).

Таким образом, исходная задача о движении маятника с полостью, целиком заполненной однородной идеальной жидкостью, равносильна конечномерной задаче (3.14), (3.16), (3.17) в пространстве $\mathbb{C}^5$, а также тривиальной проблеме (3.15). Этот общий вывод получил Н. Е. Жуковский (см. [14]).

Продолжим далее рассмотрение задачи (3.1)–(3.5). Прежде всего, система уравнений (3.14) имеет вид (1.1) и отвечает случаю, когда $H_1 = \mathbb{C}^3, H_2 = \mathbb{C}^2$,

$$C_1 := \vec{J}_{\text{т}} + \vec{J}_{\text{пр}}, \quad C_2 := m_1l_1, \quad A_1 := \alpha_1, \quad B_{12} = -B_{21}^* = m_1l_1P_2. \tag{3.18}$$

При этом C_1 — ограниченный и положительно определенный оператор кинетической энергии системы, C_2 (оператор потенциальной энергии) также ограничен и положительно определен, A_1 (оператор диссипации) ограничен и положительно определен, B_{12} и B_{21} — ограниченные кососамосопряженные операторы.

Далее для всех исследуемых проблем о колебаниях маятников либо системы маятников наряду с соответствующими начально-краевыми задачами будем исследовать также задачи о нормальных (собственных) колебаниях. Для задачи (3.14), (3.15) — это решения однородной проблемы, зависящие от времени по закону $\exp(-\lambda t)$, где λ — комплексный декремент затухания колебаний:

$$\vec{\omega}_1(t) = \vec{\omega}_1\exp(-\lambda t), \quad \vec{\delta}_1(t) = \vec{\delta}_1\exp(-\lambda t), \quad \vec{\omega}_1,\ \vec{\delta}_1 \in \mathbb{C}^3. \tag{3.19}$$

Для амплитудных элементов $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\delta}_1$ возникает спектральная задача

$$\begin{gathered} -\lambda\left(\vec{J}_{\text{т}}+\vec{J}_{\text{пр}}\right)\vec{\omega}_1+\alpha_1\vec{\omega}_1+gm_1l_1P_2\vec{\delta}_1=\vec{0}, \\ -\lambda P_2\vec{\delta}_1+P_2\vec{\omega}_1=\vec{0}, \quad -\lambda\delta_1^3=\omega_1^3. \end{gathered} \tag{3.20}$$

Отсюда следует, что при $\lambda=0$ будет $\omega_1=0$, $P_2\vec{\delta}_1=0$, $\forall\delta_1^3\in\mathbb{C}$, что соответствует произвольному повороту маятника вокруг вертикальной оси и новому состоянию покоя системы. Далее, при $\lambda\neq 0$ приходим к соотношению

$$-\lambda\left((\vec{J}_{\text{т}}+\vec{J}_{\text{пр}})\vec{\omega}_1\right)\cdot\vec{\omega}_1+\alpha_1|\vec{\omega}_1|^2+gm_1l_2\lambda^{-1}|P_2\vec{\omega}_1|^2=0, \quad \alpha_1>0, \tag{3.21}$$

откуда получаем, что $\operatorname{Re}\lambda>0$, т. е. все собственные значения λ расположены в правой полуплоскости и нормальные режимы движений системы — апериодически затухающие. При отсутствии трения в шарнире собственные значения расположены на мнимой оси, т. е. собственные режимы колебаний периодические.

Рассмотрим несколько подробнее случай консервативной системы, когда трение в шарнире отсутствует, т. е. $\alpha_1=0$. В этом варианте получаем, что числа $-\lambda^2=:\mu$ составляют спектр вариационного отношения

$$\mu \;\mapsto\; gm_1l_1|P_2\vec{\omega}_1|^2/\left((\vec{J}_{\text{т}}+\vec{J}_{\text{пр}})\vec{\omega}_1\right)\cdot\vec{\omega}_1>0, \quad P_2\vec{\omega}_1\neq 0, \tag{3.22}$$

т. е. собственные значения λ задачи (3.20) чисто мнимые и образуют три пары комплексно сопряженных чисел.

Для вычисления знаменателя в (3.22) можно использовать так называемые потенциалы Н. Е. Жуковского (см. [14]), зависящие лишь от формы полости Ω_1. Именно, так как $\operatorname{div}(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1)=0$, то поле $\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1$ принадлежит подпространству

$$\vec{J}(\Omega_1):=\left\{\vec{v}_1\in\vec{L}_2(\Omega_1):\ \operatorname{div}\vec{v}_1=0\right\}\supset\vec{J}_0(\Omega_1), \tag{3.23}$$

причем имеет место следующее ортогональное разложение Г. Вейля (см., например, [20, с. 103]):

$$\vec{L}_2(\Omega_1)=\vec{G}_0(\Omega_1)\oplus\vec{G}_h(\Omega_1)\oplus\vec{J}_0(\Omega_1)=\vec{G}_0(\Omega_1)\oplus\vec{J}(\Omega_1), \tag{3.24}$$

где

$$\vec{G}_h(\Omega_1):=\{\vec{w}_1=\nabla\psi:\ \Delta\psi=0\ (\text{в }\Omega_1)\} \tag{3.25}$$

— подпространство потенциально-гармонических полей, а

$$\vec{G}_0(\Omega_1):=\{\vec{v}_1=\nabla\varphi:\ \varphi=0\ (\text{на }S_1)\}\subset\vec{G}(\Omega_1). \tag{3.26}$$

В силу определения приведенного тензора инерции $\vec{J}_{\text{пр}}$ (см. (3.16)) имеем

$$(I-P_0)(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1)=P_G(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1)=\nabla\psi\in\vec{G}_h(\Omega_1), \tag{3.27}$$

$$\Delta\psi=0\ (\text{в }\Omega_1), \quad \frac{\partial\psi}{\partial n_1}=(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1)\cdot\vec{n}_1\ (\text{на }S_1), \quad \int\limits_{S_1}\psi\,dS_1=0, \tag{3.28}$$

так как в подпространстве $\vec{J}_0(\Omega_1)$, куда действует ортопроектор P_0, нормальные компоненты поля равны нулю на границе S_1.

Нетрудно видеть, что решение задачи (3.28) можно представить в виде

$$\psi=\sum_{k=1}^{3}\omega_1^3\psi_k, \tag{3.29}$$

где функции ψ_k (потенциалы Н. Е. Жуковского) являются решениями задач

$$\Delta\psi_k=0 \quad (\text{в }\Omega_1), \quad \frac{\partial\psi_k}{\partial n}=(\vec{e}_1^{\,k}\times\vec{r}_1)\cdot\vec{n}_1\ (\text{на }S_1), \quad \int\limits_{S_1}\psi_j\,dS_1=0, \quad k=\overline{1,3}, \tag{3.30}$$

и зависят лишь от формы полости Ω_1.

Тогда квадратичную форму $(\vec{J}_{\text{пр}}\vec{\omega}_1)\cdot\vec{\omega}_1$ в (3.22) можно выразить через потенциалы Жуковского, и возникает вариационное отношение

$$\mu \quad\mapsto\quad gm_1l_1|P_2\vec{\omega}_1|^2/\{\rho_0\int\limits_{\Omega_0}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_0|^2\,d\Omega_0+\rho_1\int\limits_{\Omega_1}|\sum_{k=1}^{3}\omega_1^k\nabla\psi_k|^2\,d\Omega_1\}, \tag{3.31}$$

из которого можно вычислить собственные значения $\mu_j=-\lambda_j^2, j=1,2,3$.

Приведенные рассмотрения показывают, что маятник с полостью, полностью заполненной однородной идеальной жидкостью, движется в произвольном малом поле внешних сил, наложенных на гравитационное поле $\vec{g}=-g\vec{e}^{\,3}$, так же, как маятник в виде твердого тела с видоизмененными характеристиками и в видоизмененном поле малых внешних сил. В частности, если малое поле внешних сил потенциально, то изменяются лишь характеристики тела посредством введения потенциалов Жуковского.

3.2. О колебаниях маятника с полостью, заполненной двумя несмешивающимися идеальными жидкостями. Эта вспомогательная задача имеет и самостоятельный интерес и является неисследованной до настоящего времени. Случай одной жидкости, частично заполняющей полость маятника, изучены в ряде работ (см. в частности [16], [3, п. 1.3]).

3.2.1. К постановке задачи. Рассмотрим, как и в пункте 3.1, маятник G_1, закрепленный в точке O_1 и имеющий полость Ω_1, которая теперь заполнена не одной, а двумя несжимаемыми однородными жидкостями. Считаем, что в состоянии покоя граница раздела Γ_1 между областью Ω_{11} с плотностью жидкости ρ_1 и областью Ω_{12} с плотностью ρ_2 горизонтальна и $\rho_1>\rho_2$.

Приведем постановку задачи о малых движениях такой гидромеханической системы. Уравнение движения маятника с полостью, заполненной двумя жидкостями, имеет вид

$$\rho_0\int\limits_{\Omega_0}\vec{r}_0\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_0\right)d\Omega_0+\rho_1\int\limits_{\Omega_{11}}\vec{r}_{11}\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_{11}+\frac{\partial\vec{u}_{11}}{\partial t}\right)d\Omega_{11}+$$

$$+\rho_2\int\limits_{\Omega_{12}}\vec{r}_{12}\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_{12}+\frac{\partial\vec{u}_{12}}{\partial t}\right)d\Omega_{12}+\alpha_1\vec{\omega}_1+gm_1l_1P_2\vec{\delta}_1-g\,(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\zeta_1\,d\Gamma_1=$$

$$=\rho_0\int\limits_{\Omega_0}(\vec{r}_0\times\vec{f}_0)\,d\Omega_0+\sum_{k=1}^{2}\rho_k\int\limits_{\Omega_{1k}}(\vec{r}_{1k}\times\vec{f}_{1k})\,d\Omega_{1k}=:\vec{M}_1(t), \tag{3.32}$$

Здесь приняты те же обозначения, что и в пункте 3.1, $m_1l_1=m_0l_0+m_{11}l_{11}+m_{12}l_{12}$, $\vec{f}_0:=\vec{f}|_{\Omega_0}$, $\vec{f}_{1k}:=\vec{f}|_{\Omega_{1k}}$. Кроме того, неизвестной функцией является отклонение ζ_1 вдоль нормали $\vec{n}_1=\vec{e}_1^{\,3}$ подвижной границы раздела $\Gamma_1(t)$ от равновесной поверхности Γ_1.

Уравнения движения жидкостей в областях Ω_{1k}, $k=1,2$, а также условия непротекания на твердых стенках S_{1k} имеют вид

$$\frac{\partial\vec{u}_{1k}}{\partial t}+\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_{1k}=-\rho_k{}^{-1}\nabla p_{1k}+\vec{f}_{1k},\quad \operatorname{div}\vec{u}_{1k}=0\quad(\text{в }\Omega_k)\,, \tag{3.33}$$

$$\vec{u}_{1k}\cdot\vec{n}_{1k}=0\quad(\text{на }S_{1k})\,,\quad k=1,2. \tag{3.34}$$

Кинематические условия на границе разделе таковы:

$$\frac{\partial\zeta_1}{\partial t}=\vec{u}_{11}\cdot\vec{n}_{11}=\vec{u}_{12}\cdot\vec{n}_{11}=0\quad(\text{на }\Gamma_1)\,,\quad \vec{n}_{11}=\vec{e}_1^{\,3}, \tag{3.35}$$

а условие сохранения объема каждой из жидкостей и механическое кинематическое условие имеет вид

$$\int\limits_{\Gamma_1}\zeta_1\,d\Gamma_1=0,\qquad \frac{d\vec{\delta}_1}{dt}=\vec{\omega}_1. \tag{3.36}$$

Далее, динамическое условие на равновесной поверхности выглядит следующим образом:

$$-p_{11}+p_{12}=-g(\rho_1-\rho_2)(\zeta_1+\theta_1(P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\quad(\text{на }\Gamma_1)\,, \tag{3.37}$$

где $\theta_1 : L_2(\Gamma_1) \to L_{2,\Gamma_1}$ — ортопроектор на подпространство функций из $L_2(\Gamma_1)$, ортогональных к функции, тождественно равной единице на Γ_1 (см. первое условие (3.36)).

Наконец, для формулируемой начально-краевой задачи должны выполняться также начальные условия:

$$\begin{aligned} &\vec{u}_{1k}(0,x) = \vec{u}_{1k}^0(x), \quad x \in \Omega_{1k}, \quad k = 1,2; \\ &\zeta_1(0,x) = \zeta_1^0(x), \quad x \in \Gamma_1, \quad \vec{\omega}_1(0) = \vec{\omega}_1^0, \quad \vec{\delta}_1(0) = \vec{\delta}_1^0. \end{aligned} \tag{3.38}$$

3.2.2. Закон баланса полной энергии. Будем считать, что задача (3.32)–(3.38) имеет классическое решение, и выведем закон баланса полной энергии для этой проблемы, используя обычные методы векторного анализа и классические формулы Грина для смешанных краевых задач. В дифференциальной форме этот закон баланса имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{\rho_0 \int\limits_{\Omega_0} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_0|^2\, d\Omega_0 + \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k} + \vec{u}_{1k}|^2\, d\Omega_{1k}\Big\} + \\ &\quad + \frac{1}{2} g \frac{d}{dt}\Big\{(\rho_1 - \rho_2)\Big[\int\limits_{\Gamma_1} |\zeta_1 + \theta_1((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3})|^2\, d\Gamma_1 - \int\limits_{\Gamma_1} |\theta_1(P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3}|^2\, d\Gamma_1\Big] + \\ &\quad + m_1 l_1 |P_2\vec{\delta}_1|^2\Big\} = -\alpha_1 |\vec{\omega}_1|^2 + \vec{M}_1(t) \cdot \vec{\omega}_1 + \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} \vec{f}_{1k} \cdot \vec{u}_{1k}\, d\Omega_{1k}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Здесь, как и выше в формулах (2.21) и (3.6), слева в первых фигурных скобках стоит удвоенная кинетическая энергия системы, во вторых скобках — потенциальная энергия, состоящая из отклонения потенциальной энергии за счет возмущения границы раздела жидкостей и за счет поворота системы на некоторый угол. Справа в (3.39) стоит мощность сил диссипации (трение в шарнирах) и мощность малых внешних сил, действующих на гидромеханическую систему.

3.2.3. Выбор функциональных подпространств. Будем считать, что область Ω_1, заполненная двумя жидкостями, имеет липшицеву границу, в частности, ее составляющие подобласти Ω_{11} и Ω_{12} имеет липшицевы границы, разбитые на липшицевы куски S_{11} и Γ_1, а также S_{12} и Γ_1 соответственно (см. рис. 1). Для такого класса областей справедливы так называемые обобщенные формулы Грина для оператора Лапласа, которые далее будут использоваться (см. [9]).

Формула (3.39) показывает, что поля скоростей $\vec{u}_{11}$ и $\vec{u}_{12}$ должны иметь конечную кинетическую энергию. Поэтому набор таких полей $\vec{u}_1 = \{\vec{u}_{1k}\}_{k=1}^2$ следует считать элементом гильбертова пространства

$$\vec{L}_2(\Omega_1) = \vec{L}_2(\Omega_{11}) \oplus \vec{L}_2(\Omega_{12}), \tag{3.40}$$

в котором скалярное произведение введено по закону

$$(\vec{u}_1, \vec{v}_1)_{\vec{L}_2(\Omega_1)} := \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} \vec{u}_{1k} \cdot \overline{\vec{v}_{1k}}\, d\Omega_{1k}. \tag{3.41}$$

Из разложения (3.9) и из (3.8), (3.10) следует, что $\vec{L}_2(\Omega_1)$ допускает ортогональное разложение в виде

$$\begin{aligned} &\vec{L}_2(\Omega_1) = \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}(\Omega_1), \\ &\vec{J}_0(\Omega_1) := \vec{J}_0(\Omega_{11}) \oplus \vec{J}_0(\Omega_{12}), \quad \vec{G}(\Omega_1) := \vec{G}(\Omega_{11}) \oplus \vec{G}(\Omega_{12}). \end{aligned} \tag{3.42}$$

Элементы из $\vec{J}_0(\Omega_1)$ имеют нормальные компоненты поля, равные нулю на всей границе, т. е. на $\partial\Omega_{11}$ и $\partial\Omega_{12}$, в частности, на Γ_1. Однако кинематическое условие (3.35) на границе раздела Γ_1 показывает, что для набора полей $\vec{u}_1 = \{\vec{u}_{1k}\}_{k=1}^2$ эти нормальные компоненты должны лишь совпадать. В связи с этим введем пространство потенциальных элементов

$$\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) := \Big\{ \big\{\rho_k^{-1}\nabla\Phi_k\big\}_{k=1}^2 : \Delta\Phi_k = 0 \ (\text{в } \Omega_k),\ \frac{\partial\Phi_k}{\partial n} = 0 \ (\text{на } S_{1k}),\ k = 1,2,$$

$$\rho_1^{-1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial n_1} = \rho_2^{-1}\frac{\partial\Phi_2}{\partial n_1}\ (\text{на } \Gamma_1),\ \vec{n}_1 := \vec{e}_1^{\,3}\Big\}, \quad (3.43)$$

которое следует добавить для полного описания полей скоростей в исследуемой проблеме.

Предварительно отметим, что между потенциальными полями $\vec{u}_{1k} = \rho_k^{-1}\nabla\Phi_k \in \vec{G}_{h,S_{1k}}(\Omega_{1k})$ и гармоническими потенциалами Φ_{1k} из подпространства

$$H^1_{h,\Gamma_1}(\Omega_{1k}) := \Big\{\Phi_{1k} \in H^1(\Omega_{1k}) : \Delta\Phi_{1k} = 0\ \ (\text{в } \Omega_k),\ \frac{\partial\Phi_{1k}}{\partial n} = 0\ \ (\text{на } S_{1k}),\ \int\limits_{\Gamma_1}\Phi_{1k}\,d\Gamma_1 = 0\Big\} \quad (3.44)$$

имеет место взаимно однозначное соответствие и даже изометрия, если

$$\|\Phi_{1k}\|^2_{H^1_{h,\Gamma_1}(\Omega_{1k})} := \int\limits_{\Omega_{1k}} \rho_k^{-2}|\nabla\Phi_{1k}|^2\,d\Omega_{1k}. \quad (3.45)$$

Отметим еще, что следы функций из $H^1_{\Gamma_{1k}}(\Omega_{1k})$ на границе $\partial\Omega_{1k}$ принадлежат пространству $H^{1/2}(\partial\Omega_{1k})$, а производные по нормали сопряженному пространству $H^{-1/2}(\partial\Omega_{1k})$ (см. [1, 17, 18, 23, 36]).

Что касается следов таких функций и их производных по нормали на липшицевом куске Γ_1, то здесь положение следующее (см. [17, 18]). Будем говорить, что функция $\varphi(x)$ $(x \in \Gamma_1)$ принадлежит классу $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1)$, если она продолжима нулем на всю границу (в данном случае на всю $\partial\Omega_{1k}$) в классе $H^{1/2}_{\partial\Omega_{1k}}$. При этом $(\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1))^* = H^{-1/2}(\Gamma_1)$. Аналогично будем говорить, что $(\partial\varphi/\partial n)_{\Gamma_1}$ принадлежит классу $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$, если она продолжима нулем на всю $\partial\Omega_{1k}$ в классе $H^{-1/2}(\partial\Omega_{1k})$. Здесь также $(H^{1/2}(\Gamma_1))^* = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$. Подробно эти факты и соответствующие обобщенные формулы Грина изложены в [18].

В частности, для функций из $H^1_{\Gamma_1}(\Omega_{1k})$ с нормой Дирихле (см. (3.45)) имеют место следующие формулы Грина:

$$\int\limits_{\Omega_{1k}} \nabla\Psi_{1k}\cdot\overline{\nabla\Phi_{1k}}\,d\Omega_{1k} = \langle\Psi_{1k}, -\Delta\Phi_{1k}\rangle_{L_2(\Omega_{1k})} + \langle\gamma_{S_{1k}}\Psi_{1k}, \frac{\partial\Phi_{1k}}{\partial n}\rangle_{L_2(S_{1k})} -$$

$$-(-1)^k\langle\gamma_{\Gamma_1}\Psi_{1k}, \frac{\partial\Phi_{1k}}{\partial n_1}\rangle_{L_2(\Gamma_1)}, \quad k = 1, 2, \quad (3.46)$$

где $\gamma_{S_{1k}}\Psi_{1k}$ — след функции Ψ_{1k} на S_{1k}, $\gamma_{\Gamma_1}\Psi_{1k}$ — след Ψ_{1k} на Γ_1, а $\vec{n}$ — внешняя нормаль. При этом косыми скобками обозначены значения функционалов, стоящих на втором месте в соответствующих полуторалинейных формах, на элементах, стоящих на первом месте. В частности, для гармонических функций Φ_{1k} с однородным условием Неймана на S_{1k} имеется два варианта: либо $\gamma_{\Gamma_1}\Psi_{1k} \in \widetilde{H}^{1/2}_{\Gamma_1} = \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1)\cap L_2(\Gamma_1)$, и тогда $\frac{\partial\Phi_{1k}}{\partial n_1}\big|_{\Gamma_1} \in H^{-1/2}_{\Gamma_1} = (\widetilde{H}^{1/2}_{\Gamma_1})^*$, либо $\gamma_{\Gamma_1}\Psi_{1k} \in H^{1/2}_{\Gamma_1} = H^{1/2}(\Gamma_1)\cap L_2(\Gamma_1)$, и тогда $\frac{\partial\Phi_{1k}}{\partial n_1}\big|_{\Gamma_1} \in \widetilde{H}^{-1/2}_{\Gamma_1} = (H^{1/2}_{\Gamma_1})^*$.

Лемма 3.1. *Ортогональным дополнением к подпространству $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ в подпространстве $\vec{G}(\Omega_1)$ (см. (3.42)) является подпространство*

$$\vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1) := \Big\{\ \big\{\rho_k^{-1}\nabla\psi_k\big\}_{k=1}^2 \in \vec{L}_2(\Omega_1) : \psi_1 - \psi_2 = 0\ \ (\textit{на } \Gamma_1)\ \Big\}. \quad (3.47)$$

Доказательство. Заметим сначала, что $\vec{G}(\Omega_1)$ состоит из наборов $\big\{\rho_k^{-1}\nabla\psi_k\big\}_{k=1}^2$ потенциальных полей из пространства $\vec{L}_2(\Omega_1)$.

Пусть теперь $\big\{\rho_k^{-1}\nabla\varphi_k\big\}_{k=1}^2$ — произвольный элемент из $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$, а $\big\{\rho_k^{-1}\nabla\psi_k\big\}_{k=1}^2$ — элемент из $\vec{G}(\Omega_1)$, ортогональный к $\big\{\rho_k^{-1}\nabla\varphi_k\big\}_{k=1}^2$. Тогда

$$\Big(\big\{\rho_k^{-1}\nabla\psi_k\big\}_{k=1}^2, \big\{\rho_k^{-1}\nabla\varphi_k\big\}_{k=1}^2\Big)_{\vec{L}_2(\Omega_1)} = \rho_1\int\limits_{\Omega_{11}}\rho_1^{-1}\nabla\psi_1\cdot\rho_1^{-1}\nabla\varphi_1\,d\Omega_{11} + \rho_2\int\limits_{\Omega_{12}}\rho_2^{-1}\nabla\psi_2\cdot\rho_2^{-1}\nabla\varphi_2\,d\Omega_{12} = 0.$$

Отсюда, пользуясь формулами Грина (3.46) для областей Ω_{11} и Ω_{12} и вспоминая определение (3.43) элементов из $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$, приходим к выводу, что

$$\langle \psi_1 - \psi_2, \rho_1^{-1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \rangle_{L_2(\Gamma_1)} = 0, \quad \forall \rho_1^{-1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\big|_{\Gamma_1} \in \widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2},$$

отсюда следует, что $\psi_1 - \psi_2 = \text{const} = 0$ (на Γ_1), причем последнее свойство — в силу двух последних условий нормировки из (3.44). □

3.2.4. Проектирование уравнений движения жидкостей на взаимно ортогональные подпространства. Итак, пространство $\vec{L}_2(\Omega_1)$ пар векторных полей $\vec{u}_1 = \{\vec{u}_{1k}\}_{k=1}^2$, как следует из леммы 3.1 и из (3.42), (3.43), допускает ортогональное расположение

$$\vec{L}_2(\Omega_1) = \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1), \tag{3.48}$$

аналогично такому же разложению в случае, когда полость Ω_1 частично заполнена лишь одной жидкостью (см. [20, с. 106]). При этом набор полей скоростей принадлежит ортогональной сумме подпространств $\vec{J}_0(\Omega_1)$ и $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$, а набор пар потенциальных полей — ортогональной сумме подпространств $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ и $\vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1)$.

Опираясь на эти факты, перепишем уравнения движения жидкостей (3.33) в виде пары соотношений

$$\left\{\frac{\partial \vec{u}_{1k}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_{1k}\right\}_{k=1}^2 = -\left\{\rho_k^{-1}\nabla p_{1k}\right\}_{k=1}^2 + \left\{\vec{f}_{1k}\right\}_{k=1}^2 \tag{3.49}$$

и будем разыскивать наборы $\{\vec{u}_{1k}\}_{k=1}^2$ и $\left\{\rho_k^{-1}\nabla p_{1k}\right\}_{k=1}^2$ неизвестных функций в виде, отвечающем разложению (3.48):

$$\{\vec{u}_{1k}\}_{k=1}^2 = \{\vec{w}_{1k} + \rho_k^{-1}\nabla\Phi_{1k}\}_{k=1}^2, \quad \vec{w}_1 := \{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^2 \in \vec{J}_0(\Omega_1), \quad \{\rho_k^{-1}\nabla\Phi_{1k}\}_{k=1}^2 \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1), \tag{3.50}$$

$$\begin{gathered}\left\{\rho_k^{-1}\nabla p_{1k}\right\}_{k=1}^2 = \left\{\rho_k^{-1}\nabla\varphi_k\right\}_{k=1}^2 + \left\{\rho_k^{-1}\nabla\psi_k\right\}_{k=1}^2, \\ \left\{\rho_k^{-1}\nabla\varphi_k\right\}_{k=1}^2 \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1), \quad \left\{\rho_k^{-1}\nabla\psi_k\right\}_{k=1}^2 \in \vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1).\end{gathered} \tag{3.51}$$

Введем теперь ортопроекторы

$$P_0 : \vec{L}_2(\Omega_1) \to \vec{J}_0(\Omega_1), \quad P_{h,S_1} : \vec{L}_2(\Omega_1) \to \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1), \quad P_{0,\Gamma_1} : \vec{L}_2(\Omega_1) \to \vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1) \tag{3.52}$$

на подпространстве (3.48), подставим представления (3.50), (3.51) для наборов полей скоростей и градиентов давлений в уравнения (3.49) и спроектируем обе части этого уравнения на подпространства (3.48). При этом, как и ранее (см. пункт 3.1), будем считать искомые наборы векторных полей функциями переменной t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega_1)$. В итоге получим соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^2 + \frac{\partial}{\partial t}P_0\{\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}\}_{k=1}^2 = P_0\{\vec{f}_{1k}\}^2 \quad (\text{в } \vec{J}_0(\Omega_1)); \tag{3.53}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\rho_k^{-1}\nabla\Phi_{1k}\}_{k=1}^2 + \frac{\partial}{\partial t}P_{h,S_1}\{\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}\}_{k=1}^2 = -\{\rho_k^{-1}\nabla\varphi_k\}_{k=1}^2 + P_{h,S_1}\{\vec{f}_{1k}\}_{k=1}^2 \quad (\text{в } \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)); \tag{3.54}$$

$$\vec{0} + \frac{\partial}{\partial t}P_{0,\Gamma_1}\{\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}\}_{k=1}^2 = -\{\rho_k^{-1}\nabla\psi_k\}_{k=1}^2 + P_{0,\Gamma_1}\{\vec{f}_{1k}\}_{k=1}^2 \quad (\text{в } \vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1)). \tag{3.55}$$

Заметим теперь, что с учетом разложения (3.51) и определения (3.47) подпространства $\vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1)$ динамическое граничное условие (3.37) переписывается в виде

$$-p_{11} + p_{12} = (-\varphi_1 + \varphi_2) + (-\psi_1 + \psi_2) = -\varphi_1 + \varphi_2 = -g(\rho_1 - \rho_2)(\zeta_1 + \theta_1((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3})) \quad (\text{на } \Gamma_1) \tag{3.56}$$

Отсюда и из (3.55) следует, что набор полей $\{\rho_k^{-1}\nabla\psi_k\}_{k=1}^2$ непосредственно вычисляется по известному решению $\vec{\omega}_1(t)$ и набору $\{\vec{f}_{1k}\}_{k=1}^2$, и поэтому далее следует рассматривать лишь уравнение движения маятника (3.32), уравнения движения жидкостей (3.53) и (3.54), а также граничные условия, где в силу (3.56) функции φ_k не входят.

Наша ближайшая цель сейчас — преобразовать указанную группу динамических уравнений в первое уравнение вида (1.1), ввести соответствующие операторы и изучить их свойства. Для этого в исследуемой задаче введем следующие динамические и кинематические переменные (как функции t со значениями в соответствующих пространствах).

$$\begin{gathered} z_1 := \left(\{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^2;\ \{\rho_k^{-1}\nabla\Phi_{1k}\}_{k=1}^2;\ \vec{\omega}_1\right)^\tau, \quad z_2 := (\zeta_1; P_2\vec{\delta}_1)^\tau, \\ \{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^2 \in \vec{J}_0(\Omega_1), \quad \{\rho_k^{-1}\nabla\Phi_{1k}\}_{k=1}^2 \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1), \quad \vec{\omega}_1 \in \mathbb{C}^3, \quad \zeta_1 \in L_{2,\Gamma_1}, \quad P_2\vec{\delta}_1 \in \mathbb{C}^2. \end{gathered} \tag{3.57}$$

С этой целью сначала представим слагаемые $\{\rho_k^{-1}\nabla\varphi_k\}_{k=1}^2$ из (3.54) в виде действия вспомогательного оператора на кинематические переменные ζ_1 и $P_2\vec{\delta}_1$. Именно, рассмотрим следующую вспомогательную краевую задачу сопряжения:

$$\begin{gathered} \Delta\varphi_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_{1k}), \quad \rho_k^{-1}\frac{\partial\varphi_k}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_{1k}), \quad \int\limits_{\Gamma_1}\varphi_k\,d\Gamma_1 = 0, \quad k = 1,2, \\ \rho_1^{-1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \rho_2^{-1}\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}, \quad \vec{n} = \vec{e}_1^{\,3} \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \varphi_1 - \varphi_2 = (\rho_1 - \rho_2)\zeta_1 \quad (\text{на } \Gamma_1). \end{gathered} \tag{3.58}$$

(Согласно классификации смешанных краевых задач сопряжения (см. [18, п. 5.2]), это задача Стеклова, отвечающая конфигурации, названной в [18] «разрезанный банан».)

Лемма 3.2. *При любой* $\zeta_1 \in H_{\Gamma_1}^{1/2}$ *существует единственное решение вспомогательной задачи* (3.57):

$$Q\zeta_1 := \{\rho_k^{-1}\nabla\varphi_k\}_{k=1}^2 \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1), \quad Q \in \mathcal{L}(H_{\Gamma_1}^{1/2}; \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)). \tag{3.59}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение слабые решения двух вспомогательных краевых задач из (3.58), отвечающих заданным функциям $\rho_k^{-1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = \xi_1 \in \widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}$ на Γ_1. Например для области Ω_{11} имеем задачу

$$\begin{gathered} \Delta\varphi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_{11}), \quad \rho_1^{-1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_{11}), \\ \rho_1^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \xi_1 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \int\limits_{\Gamma_1}\varphi_1\,d\Gamma_1 = 0. \end{gathered} \tag{3.60}$$

Слабые решения этой задачи (в области Ω_{11} с липшицевой границей $\partial\Omega_{11}$, разбитой на липшицевы куски S_{11} и Γ_1) определяется из тождества, следующего из формулы Грина (3.15):

$$\int\limits_{\Omega_{11}}\nabla\psi_1\cdot\overline{\nabla\varphi_1}\,d\Omega_{11} = \langle\gamma_1\psi_1, \rho_1\xi_1\rangle_{L_{2,\Gamma_1}}, \quad \forall\psi \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1), \ \gamma_1\varphi_1 := \psi_1|_{\Gamma_1}. \tag{3.61}$$

Так как здесь по предположению $\xi_1 \in \widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}$, то правая часть в тождестве (3.61) является линейным ограниченным функционалом в пространстве $H_{\Gamma_1}^1(\Omega_{11})$ поскольку по теореме Гальярдо (см. [36])

$$\|\gamma_1\varphi_1\|_{H_{\Gamma_1}^{1/2}} \leqslant c_1\|\varphi_1\|_{H_{\Gamma_1}^1(\Omega_{11})}. \tag{3.62}$$

Отсюда следует, что существует единственное слабое решение

$$\varphi_1 = \rho V_1\xi_1 \in H_{h,\Gamma_1}^1(\Omega_{11}), \quad V_1 \in \mathcal{L}(\widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}; H_{h,\Gamma_1}^1(\Omega_{11})). \tag{3.63}$$

Аналогично устанавливается, что существует единственное слабое решение второй задачи в области Ω_{12} с той же заданной функцией $\xi_1 \in \widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}$:

$$\varphi_2 = -\rho_2 V_2\xi_1 \in H_{h,\Gamma_1}^1(\Omega_{12}), \quad V_2 \in \mathcal{L}(\widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}; H_{h,\Gamma_1}^1(\Omega_{12})). \tag{3.64}$$

Подставляя теперь представления (3.63) и (3.64) в выражение для разности следов на Γ_1 (см. (3.58)), приходим к соотношению

$$\gamma_1\varphi_1 - \gamma_2\varphi_2 = (\rho_1\gamma_1 V_1 + \rho_2\gamma_2 V_2)\xi_1 =: (\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2)\xi_1 = (\rho_1 - \rho_2)\zeta_1, \tag{3.65}$$

из которого можно найти ξ_1. В самом деле, можно доказать, опираясь на тождество (3.61) и аналогичное тождество в Ω_{12}, что оператор

$$\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2 \in \mathcal{L}(\widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}; H_{\Gamma_1}^{1/2}) \tag{3.66}$$

является положительным и имеет обратный оператор

$$(\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2)^{-1} \in \mathcal{L}(H_{\Gamma_1}^{1/2}; \widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}). \tag{3.67}$$

Поэтому из (3.64) имеем $\xi_1 \in (\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2)^{-1}\zeta_1 \in \widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}$, и тогда решение вспомогательной задачи (3.58) таково:

$$\begin{aligned} \varphi_1|_{\Omega_{11}} &= \rho_1(\rho_1 - \rho_2)V_1(\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2)^{-1}\zeta_1 \in H^1_{h,\Gamma_1}(\Omega_{11}), \\ \varphi_2|_{\Omega_{12}} &= -\rho_2(\rho_1 - \rho_2)V_2(\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2)^{-1}\zeta_1 \in H^1_{h,\Gamma_1}(\Omega_{12}). \end{aligned} \tag{3.68}$$

Введем теперь по решениям (3.68) оператор Q согласно формуле (см. (3.64))

$$Q\zeta_1 := (\rho_1 - \rho_2)\big\{\nabla\left(V_1(\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2)^{-1}\zeta_1\right); -\nabla\left(V_2(\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2)^{-1}\zeta_1\right)\big\}. \tag{3.69}$$

Из проведенных построений ясно, что $Q \in \mathcal{L}(H_{\Gamma_1}^{1/2}; \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1))$, и лемма доказана. □

Введем еще оператор нормальной компоненты поля скоростей для элементов из $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ по закону

$$\widehat{\gamma}_n\{\rho_k^{-1}\nabla\varphi_k\} = \widehat{\gamma}_n\{\vec{u}_k\}_{k=1}^2 := \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 = \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_1 = \widehat{\gamma}_n \vec{u}, \quad \widehat{\gamma}_n \in \mathcal{L}\left(\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1); \widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}\right). \tag{3.70}$$

Лемма 3.3. *Имеет место соотношение*

$$Q^* = (\rho_1 - \rho_2)\widehat{\gamma}_n, \tag{3.71}$$

где Q — оператор вспомогательной задачи (3.58).

Доказательство. Оно основано на использовании обобщенных формул Грина (3.46) для областей Ω_{1k}, $k = 1, 2$. При любых $\zeta_1 \in H_{\Gamma_1}^{1/2}$, $\{\rho_k^{-1}\nabla\psi_k\}_{k=1}^2 \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ имеем (см. (3.69), (3.58), (3.70), (3.61)):

$$\begin{aligned} (Q\zeta_1, \{\rho_k^{-1}\nabla\psi_k\}_{k=1}^2)_{\vec{L}_2(\Omega)} &= \sum_{k=1}^2 \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} \rho_k^{-1}\nabla\varphi_k \cdot \rho_k^{-1}\overline{\nabla\psi_k}\, d\Omega_{1k} = \ldots = \\ &= \langle \gamma_{11}\varphi_1, \rho_1^{-1}\frac{\partial\psi_1}{\partial n}\rangle_{L_2(\Gamma_1)} - \langle \gamma_{12}\varphi_2, \rho_2^{-1}\frac{\partial\psi_2}{\partial n}\rangle_{L_2(\Gamma_1)} = \\ = \langle \gamma_{11}\varphi_1 - \gamma_{12}\varphi_2, \rho_1^{-1}\frac{\partial\psi_1}{\partial n}\rangle_{L_2(\Gamma_1)} &= \langle(\rho_1 - \rho_2)\zeta_1, \widehat{\gamma}_n\{\rho_k^{-1}\nabla\psi_k\}\rangle = \langle\zeta_1, (\rho_1 - \rho_2)\widehat{\gamma}_n\{\rho_k^{-1}\nabla\psi_k\}_{k=1}^2\rangle, \end{aligned} \tag{3.72}$$

откуда и следует свойство (3.71). □

С помощью введенного оператора Q уравнение (3.54) теперь можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\{\rho_k^{-1}\nabla\Phi_k\}_{k=1}^2 + \frac{d}{dt}P_{h,S_1}\{(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k})\}_{k=1}^2 + gQ(\zeta_1 + \theta_1((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{1k}) \cdot \vec{e}_1^{\,3})) = P_{h,S_1}\{\vec{f}_{1k}\}_{k=1}^2. \tag{3.73}$$

3.2.5. Переход к первой (*динамической*) *группе дифференциально-операторных уравнений.* Полученные уравнения (3.53), (3.73) и (3.31), т. е. уравнения движения наборов жидкостей в двух подпространствах и уравнение движения маятника с жидким заполнителем, перепишем в виде одного векторно-матричного соотношения для искомых динамических и кинематических переменных (см. (3.57)). Будем иметь связь (см. (1.1)):

$$C_1\frac{dz_1}{dt} + A_1 z_1 + gB_{12}z_2 = f_1(t), \quad z_1(0) = z_1^0, \tag{3.74}$$

$$C_1 z_1 := \begin{pmatrix} \{\vec{w}_k\}_{k=1}^2 + P_0\{\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}\}_{k=1}^2 \\ \{\rho_k^{-1}\nabla\Phi_k\}_{k=1}^2 + P_{h,S_1}\{\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{k=1}\}_{k=1}^2 \\ \vec{J}\vec{\omega}_1 + \sum\limits_{k=1}^2 \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} (\vec{r}_{1k} \times (\vec{w}_k + \rho_k^{-1}\nabla\Phi_k))\, d\Omega_{1k} \end{pmatrix}, \tag{3.75}$$

$$A_1 z_1 := (0;\ 0;\ \alpha_1\vec{\omega}_1)^\tau, \tag{3.76}$$

$$B_{12}z_2 := \begin{pmatrix} \vec{0} \\ Q(\zeta_1 + \theta_1((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3})) \\ -(\rho_1 - \rho_2)\int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_{11})\zeta_1 \, d\Gamma_1 + m_1 l_1 P_2 \vec{\delta}_1 \end{pmatrix}, \tag{3.77}$$

$$f_1(t) := (P_0\{\vec{f}_{1k}\}_{k=1}^2;\ P_{h,S_1}\{\vec{f}_{1k}\}_{k=1}^2;\ \vec{M}_1(t))^\tau, \tag{3.78}$$

$$\vec{J}\vec{\omega}_1 := \rho_0 \int\limits_{\Omega_0} (\vec{r}_0 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_0))\, d\Omega_0 + \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} (\vec{r}_{1k} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}))\, d\Omega_{1k}. \tag{3.79}$$

Здесь $\vec{J}$ — тензор инерции тела-маятника с затвердевшей жидкостью.

Напомним (см. (3.57)), что динамическими переменными считаются в данной задаче наборы полей скоростей из соответствующих подпространств, а также угловая скорость маятника, а кинематическими переменными — отклонение границы раздела между жидкостями в полости маятника и проекция углового перемещения на равновесную границу раздела.

Изучим свойства операторных коэффициентов, т. е. соответствующих операторных матриц (3.75)–(3.77), входящих в уравнение (3.74). Заметим прежде всего, что матрица A_1 является ограниченным неотрицательным оператором, действующим в пространстве

$$\mathcal{H}_1 := \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3.$$

Дальнейшие свойства операторных матриц из (3.74) представим в виде отдельных лемм.

Лемма 3.4. *Операторная матрица C_1 является ограниченным положительно определенным оператором, действующим в пространстве $\mathcal{H}_1$. Ее квадратичная форма равна удвоенной кинетической энергии малых движений гидромеханической системы, т. е. $C_1 : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ есть оператор кинетической энергии.*

Доказательство. Вычислим квадратичную форму оператора C_1 в пространстве $\mathcal{H}_1$, используя представление ортопроектора P_{h,S_1} в виде $\{(P_{h,S_1})_k\}_{k=1}^2$. Будем иметь, расписывая выражение для $\vec{J}\vec{\omega}_1$ в виде трех слагаемых:

$$\begin{aligned}
(C_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}} &= \rho_1 \int\limits_{\Omega_{11}} (\vec{w}_1 + P_{0,1}(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11})) \cdot \overline{\vec{w}_1}\, d\Omega_{11} + \rho_2 \int\limits_{\Omega_{12}} (\vec{w}_2 + P_{0,2}(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{12})) \cdot \overline{\vec{w}_2}\, d\Omega_{12} + \\
&+ \rho_1 \int\limits_{\Omega_{11}} (\rho_1^{-1}\nabla\Phi_1 + (P_{h,S_1})_1(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11})) \cdot \rho_1^{-1}\overline{\nabla\Phi_1}\, d\Omega_{11} + \\
&+ \rho_2 \int\limits_{\Omega_{12}} (\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2 + (P_{h,S_1})_2(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{12})) \cdot \rho_2^{-1}\overline{\nabla\Phi_2}\, d\Omega_{12} + \rho_1 \int\limits_{\Omega_{11}} (\vec{r}_{11} \times (\vec{w}_1 + \rho_1^{-1}\nabla\Phi_2))\, d\Omega_{11} \cdot \overline{\vec{\omega}_1} + \\
&+ \rho_2 \int\limits_{\Omega_{12}} (\vec{r}_{12} \times (\vec{w}_2 + \rho_2^{-1}\nabla\Phi_2))\, d\Omega_{12} \cdot \overline{\vec{\omega}_2} + \rho_0 \int\limits_{\Omega_0} (\vec{r}_0 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_0))\, d\Omega_0 \cdot \overline{\vec{\omega}_1} + \\
&+ \rho_1 \int\limits_{\Omega_{11}} (\vec{r}_{11} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11}))\, d\Omega_{11} \cdot \overline{\vec{\omega}_1} + \rho_2 \int\limits_{\Omega_{12}} (\vec{r}_{12} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{12}))\, d\Omega_{12} \cdot \overline{\vec{\omega}_1}.
\end{aligned} \tag{3.80}$$

Здесь, в силу ортогонального разложения (3.48), первые два слагаемых преобразуются к виду

$$\rho_1 \int\limits_{\Omega_{11}} (|\vec{w}_1|^2 + (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \overline{\vec{w}_1})\, d\Omega_{11} + \rho_2 \int\limits_{\Omega_{22}} (|\vec{w}_2|^2 + (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{12}) \cdot \overline{\vec{w}_2})\, d\Omega_{12}. \tag{3.81}$$

Аналогично преобразуются третье и четвертое слагаемые, в частности,

$$\rho_1 \int\limits_{\Omega_{11}} (P_{h,S_1})_1(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \rho_1^{-1}\overline{\nabla\Phi_1}\, d\Omega_{11} + \rho_2 \int\limits_{\Omega_{12}} (P_{h,S_1})_2(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{12}) \cdot \rho_2^{-1}\overline{\nabla\Phi_2}\, d\Omega_{12} =$$

$$= \Big(\{(P_{h,S_1})_k(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k})\}_{k=1}^2, \{\rho_k^{-1}\nabla\Phi_k\}_{k=1}^2\Big)_{\vec{L}_2(\Omega_1)} = \Big(P_{h,S_1}\{\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}\}_{k=1}^2, \{\rho_k^{-1}\nabla\Phi_k\}_{k=1}^2\Big)_{\vec{L}_2(\Omega_1)} =$$
$$= \Big(\{\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}\}_{k=1}^2, \{\rho_k^{-1}\nabla\Phi_k\}_{k=1}^2\Big) = \rho_1 \int\limits_{\Omega_{11}} (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{11}) \cdot \rho_1^{-1}\overline{\nabla\Phi_1}\, d\Omega_{11} + \rho_2 \int\limits_{\Omega_{12}} (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{12}) \cdot \rho_2^{-1}\overline{\nabla\Phi_2}\, d\Omega_{12}. \quad (3.82)$$

Поэтому упомянутая сумма третьего и четверного слагаемых из (3.82) равна

$$\rho_1 \int\limits_{\Omega_{11}} (|\rho_1^{-1}\nabla\Phi_1|^2 + (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \rho_1^{-1}\overline{\nabla\Phi_1})\, d\Omega_{11} + \rho_2 \int\limits_{\Omega_{12}} (|\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2|^2 + (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{12}) \cdot \rho_2^{-1}\overline{\nabla\Phi_2})\, d\Omega_{12}. \quad (3.83)$$

Учитывая соотношения (3.82), (3.83), преобразуя аналогичным образом другие группы слагаемых в (3.80), а также учитывая тот факт, что $\vec{w}_k \perp \rho_k^{-1}\nabla\Phi_k$ в $\vec{L}_2(\Omega_{1k})$, $k = 1,2$, получим после сворачивания слагаемых при ρ_0, ρ_1 и ρ_2, формулу

$$\begin{aligned}
(C_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} &= \rho_0 \int\limits_{\Omega_0} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_0|^2\, d\Omega + \\
&+ \rho_1 \int\limits_{\Omega_{11}} \Big\{|\vec{w}_1|^2 + |\rho_1^{-1}\nabla\Phi_1|^2 + |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11}|^2 + 2\mathrm{Re}\,\big[(P_{h,S_1})_1(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \rho_1^{-1}\overline{\nabla\Phi_1}\big] + \\
&+ 2\mathrm{Re}\,\big[(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \overline{\vec{w}_1}\big]\Big\}\, d\Omega_{11} + \rho_2 \int\limits_{\Omega_{12}} \Big\{|\vec{w}_2|^2 + |\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2|^2 + |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{12}|^2 + \\
&+ 2\mathrm{Re}\,\big[(P_{h,S_1})_2(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{12}) \cdot \rho_2^{-1}\overline{\nabla\Phi_2}\big] + 2\mathrm{Re}\,\big[(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{12}) \cdot \overline{\vec{w}_2}\big]\Big\}\, d\Omega_{12} = \\
&= \rho_0 \int\limits_{\Omega_0} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_0|^2\, d\Omega_0 + \rho_1 \int\limits_{\Omega_{11}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11} + \vec{w}_1 + \rho_1^{-1}\nabla\Phi_1|^2\, d\Omega_{11} + \\
&+ \rho_2 \int\limits_{\Omega_{12}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{12} + \vec{w}_2 + \rho_2^{-1}\nabla\Phi_2|^2\, d\Omega_{12}.
\end{aligned} \quad (3.84)$$

Из этой формулы получаем следующие выводы. Оператор C_1 неотрицателен в $\mathcal{H}_1$. Кроме того, он ограничен (см. (3.75)). Если $(C_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} = 0$, то $\vec{\omega}_1 = \vec{0}$, а потому и $\vec{w}_k$, $\rho_k^{-1}\nabla\Phi_k$ — нулевые поля в Ω_{1k}, $k = 1,2$. Значит C_1 — положительный оператор, действующий в $\mathcal{H}$. Далее, так как C_1 допускает представление

$$C_1 = C_{10} + C_{11}, \quad C_{10} := \mathrm{diag}\,(\{I_k\}_{k=1}^2;\ \{I_k\}_{k=1}^2;\ \vec{J}) \gg 0 \quad (3.85)$$

(оператор $\vec{J}$ положительно определен в $\mathbb{C}^3$), а C_{11} — конечномерный ограниченный оператор, действующий в $\mathcal{H}_1$, то $C_1 \gg 0$, что и доказывает утверждение леммы. □

Свойство оператора B_{12} из (3.74) выясним позднее.

3.2.6. Переход ко второй (кинематической) группе дифференциально-операторных уравнений. Перепишем кинематические условия (3.35), (3.36) (без тривиальных связей) в виде

$$\frac{d\zeta_1}{dt} = \gamma_{n,1}\vec{u}_1 = \gamma_{n,1}(\rho_1^{-1}\nabla\Phi_1) = \gamma_{n,1}(\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2) = \gamma_{n,1}\vec{u}_2 =: \widehat{\gamma}_n\vec{u}, \quad \frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_1 - P_2\vec{\omega}_1 = \vec{0}, \quad (3.86)$$

где $\gamma_{n,1}$ — оператор взятия нормальной компоненты поля на границе Γ_1,

$$\gamma_{n,1}\vec{u}_1 := (\vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1)_{\Gamma_1}, \quad \vec{n}_1 = \vec{e}_1^{\,3}. \quad (3.87)$$

Эти кинематические условия при некоторых дополнительных ограничениях (см. ниже) можно переписать в эквивалентной форме, позволяющей ввести в рассмотрение оператор потенциальной энергии системы и получить вторую (кинематическую) группу дифференциальных уравнений (см. (1.1)), отвечающую эволюции системы. Проведем эти построения. Если выполнены условия (3.86), то выполнены также следующие соотношения:

$$\begin{gathered}(\rho_1-\rho_2)\left[\frac{d}{dt}(\zeta_1+\theta_1((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3}))-(\gamma_{n,1}(\rho_1^{-1}\nabla\Phi_1)+\theta_1((P_2\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3}))\right]=0,\\ -(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\left(\frac{d\zeta_1}{dt}-\gamma_{n,1}(\rho_1^{-1}\nabla\Phi_1)\right)d\Gamma_1+m_1l_1\left(\frac{d}{dt}(P_2\vec{\delta}_1)-P_2\vec{\omega}_1\right)=\vec{0}.\end{gathered}\tag{3.88}$$

Коротко эту систему можно записать в виде

$$gC_2\frac{dz_2}{dt}+gB_{21}z_1=0,\quad z_1:=\left(\{\vec{w}_k\}_{k=1}^2;\ \{\rho^{-1}\nabla\Phi_k\}_{k=1}^2;\ \vec{\omega}_1\right)^\tau,\quad z_2=(\zeta_1;P_2\vec{\delta}_1)^\tau.\tag{3.89}$$

$$C_2z_2:=\begin{pmatrix}(\rho_1-\rho_2)\left[\zeta_1+\theta_1((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\right]\\ -(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\zeta_1\,d\Gamma_1+m_1l_1P_2\vec{\delta}_1\end{pmatrix},\tag{3.90}$$

$$B_{12}z_2:=\begin{pmatrix}-(\rho_1-\rho_2)\left[\gamma_{n,1}(\rho_1^{-1}\nabla\Phi_1)+\theta_1((P_2\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\right]\\ (\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\gamma_{n,1}(\rho_1^{-1}\nabla\Phi_1)\,d\Gamma_1-m_1l_1P_2\vec{\omega}_1\end{pmatrix}.\tag{3.91}$$

Лемма 3.5. *Введем коэффициенты*

$$\beta_{jl}:=\int\limits_{\Gamma_1}x_1^j(\theta_1x_1^l)\,d\Gamma_1=\beta_{lj},\quad j,l=1,2,\tag{3.92}$$

имеющие смысл осевых моментов инерции поверхности Γ_1 *для исследуемой гидромеханической системы. Введем также определитель*

$$\Delta_2:=det\begin{pmatrix}m_1l_1-(\rho_1-\rho_2)\beta_{22} & (\rho_1-\rho_2)\beta_{21}\\ (\rho_1-\rho_2)\beta_{12} & m_1l_1-(\rho_1-\rho_2)\beta_{11}\end{pmatrix}.\tag{3.93}$$

Если выполнено условие общего положения

$$\Delta_2\neq0,\tag{3.94}$$

то соотношения (3.86) *и* (3.88) *эквивалентны.*

Доказательство. Достаточно проверить, что из условий (3.88) при выполнении (3.94) следуют условия (3.86). Перепишем (3.88) в виде

$$\varphi+\theta_1((\vec{\psi}\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})=0,\quad -(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\varphi\,d\Gamma_1+m_1l_1\vec{\psi}=\vec{0},\tag{3.95}$$

$$\varphi:=\frac{d\zeta_1}{dt}-\gamma_{n,1}(\rho_1^{-1}\nabla\Phi_1),\quad \vec{\psi}:=\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_1-P_2\vec{\omega}_1,\tag{3.96}$$

и докажем, что из условия $\Delta_2\neq0$ следует, что задача (3.95) имеет лишь тривиальное решение.

Подставляя выражение для φ из первого уравнения (3.95) во второе, приходим к векторному уравнению в $\mathbb{C}^2$:

$$m_1l_1\vec{\psi}+(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\left[\theta_1((\vec{\psi}\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\right]d\Gamma_1=\vec{0}.\tag{3.97}$$

Разложим $\vec{\psi}$ по ортам: $\vec{\psi}=\sum\limits_{k=1}^2\psi_j\vec{e}_1^{\,j}$. Тогда

$$\theta_1((\vec{\psi}\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})=\psi_1(\theta_1x_1^2)-\psi_2(\theta_1x_1^1),\quad \vec{r}_{11}=\sum_{j=1}^2x_1^j\vec{e}_1^{\,j},\tag{3.98}$$

и из (3.97) приходим к системе двух скалярных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&m_1 l_1 \psi_1 - (\rho_1 - \rho_2) \int\limits_{\Gamma_1} x_1^2 (\psi_1(\theta_1 x_1^2) - \psi_2(\theta_1 x_1^1))\, d\Gamma_1 = 0,\\
&m_1 l_1 \psi_2 - (\rho_1 - \rho_2) \int\limits_{\Gamma_1} x_1^1 (\psi_1(\theta_1 x_1^2) - \psi_2(\theta_1 x_1^1))\, d\Gamma_1 = 0.
\end{aligned}
\tag{3.99}
$$

Нетрудно видеть, что определитель этой однородной системы уравнений относительно ψ_1 и ψ_2 равен Δ_2 и потому в силу условия (3.94) он ненулевой. Отсюда следует, что $\vec{\psi} = \sum\limits_{j=1}^{2} \psi_j \vec{e}_1^{\,j} = \vec{0}$, а потому и $\varphi = 0$. □

Опираясь на эту лемму, изучим свойства оператора C_2 из (3.90).

Лемма 3.6. *Оператор $C_2 : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ является оператором потенциальной энергии гидромеханической системы. Он ограничен и при условии* (3.94) *имеет ограниченный обратный.*

Доказательство. Как следует из определения (3.90) оператор $C_2 : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ ограничен и самосопряжен в $\mathcal{H}_2 = L_{2.\Gamma_1} \oplus \mathbb{C}^2$. Его квадратичная форма равна

$$
(C_2 z_2, z_2) = (\rho_1 - \rho_2) \int\limits_{\Gamma_1} [\zeta_1 + \theta_1((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3})] \overline{\zeta_1}\, d\Gamma_1 - (\rho_1 - \rho_2) \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_{11}) \zeta_1 \, d\Gamma_1 \cdot \overline{P_2 \vec{\delta}_1} + m_1 l_1 |P_2 \vec{\delta}_1|^2 =
$$

$$
= (\rho_1 - \rho_2) \left\{ \int\limits_{\Gamma_1} \left[|\zeta_1|^2 + \theta_1((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3}) \overline{\zeta_1} + \overline{((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3})} \cdot \zeta_1 \right] d\Gamma_1 \right\} + m_1 l_1 |P_2 \vec{\delta}_1|^2 =
$$

$$
= (\rho_1 - \rho_2) \int\limits_{\Gamma_1} \left[|\zeta_1|^2 + 2\mathrm{Re}\,((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3}) \overline{\zeta_1} \right] d\Gamma_1 + m_1 l_1 |P_2 \vec{\delta}_1|^2 =
$$

$$
= (\rho_1 - \rho_2) \int\limits_{\Gamma_1} \left[|\zeta_1 + \theta_1((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3})|^2 - |\theta_1((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3})|^2 \right] d\Gamma_1 + m_1 l_1 |P_2 \vec{\delta}_1|^2. \tag{3.100}
$$

Отсюда следует, что C_2 самосопряжен в $\mathcal{H}_2$, причем его квадратичная форма совпадает с удвоенной потенциальной энергией гидромеханической системы (см. (3.39)).

Далее, условие $C_2 z_2 = 0$ приводит к задаче (3.95) при $\varphi = \zeta_1$, $\vec{\psi} = P_2 \vec{\delta}_1$, и потому по лемме 3.5 получаем, что $(\zeta_1;\, P_2\vec{\delta}_1)^\tau = z_2 = 0$, т. е. оператор C_2 обратим. Наконец из соответствующей неоднородной задачи, отвечающей системе (3.95), следует, что $C_2^{-1} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ — ограниченный оператор, и лемма доказана. □

Отметим еще другие свойства оператора C_2.

Лемма 3.7. *Разложим пространство $\mathcal{H}_2$ на два подпространства*:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_{21} \oplus \mathcal{H}_{22}, \quad \mathcal{H}_{21} := \{(\zeta_1; 0)^\tau := \int\limits_{\Gamma_1} \zeta_1 x_1^j \, d\Gamma_1 = 0,\ j = 1, 2\},\\
&\mathcal{H}_{22} := \mathrm{Lin}\,\{(0, \vec{e}_1^{\,1})^\tau,\ (0; \vec{e}_1^{\,2})^\tau,\ (\theta_1 x_1^1; 0)^\tau,\ (\theta_1 x_1^2; 0)^\tau\},
\end{aligned}
\tag{3.101}
$$

где Lin — *обозначение линейной оболочки. Тогда имеют место следующие свойства*:

1°. *На подпространстве $\mathcal{H}_{21}$ оператор C_2, как легко видеть, действует по закону $C_2 z_{21} = (\rho_1 - \rho_2) z_{21}$ и потому положительно определен.*

2°. *На подпространстве $\mathcal{H}_{22}$ оператор C_2 неотрицателен тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$
\Delta_1 := m_1 l_1 - (\rho_1 - \rho_2) \beta_{11}^{(1)} \geqslant 0, \quad \Delta_2 \geqslant 0, \tag{3.102}
$$

и положительно определен, если и только если

$$
\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0. \tag{3.103}
$$

Доказательство. Отметим сначала, что C_2 самосопряжен и $\mathcal{H}_{21}$ инвариантно относительно него, поэтому $\mathcal{H}_{22}$ — также инвариантное подпространство для C_2.

На четырехмерном подпространстве $\mathcal{H}_{22}$ оператор C_2, очевидно, ограничен снизу. Выясним, когда он будет неотрицательным на $\mathcal{H}_{22}$.

Представим произвольный элемент $z_2 = (\zeta_1;\, P_2\vec{\delta}_1)^\tau$ из $\mathcal{H}_2$ в виде

$$\begin{aligned} z_2 = z_{21} + z_{22}, \quad z_{21} = (\zeta_{11}; 0)^\tau, \quad \zeta_{11} := \zeta_1 + \theta_1((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3}), \\ z_{22} = (-\theta_1((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3});\; P_2\vec{\delta}_1)^\tau. \end{aligned} \tag{3.104}$$

Тогда (см. (3.90))

$$C_2 z_{21} = (\rho_1 - \rho_2)(\zeta_{11}; -(\rho_1 - \rho_2)\int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_{11})\zeta_{11}\, d\Gamma_1)^\tau,$$

$$C_2 z_{22} = \Big(0;\; m_1 l_1 P_2\vec{\delta}_1 + (\rho_1 - \rho_2)\int\limits_{\Gamma_1} \theta_1(\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_{11})\overline{((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3})}\, d\Gamma_1\Big)^\tau.$$

Отсюда получаем, что

$$(z_{21}, C_2 z_{22})_{\mathcal{H}_2} = (C_2 z_{21}, z_{22})_{\mathcal{H}_2} = 0,$$

так как пространства $\mathcal{H}_{21}$ и $\mathcal{H}_{22}$ инвариантны для C_2, а также свойство

$$(C_2 z_2, z_2)_{\mathcal{H}_{21}} = (C_2 z_{21}, z_{21})_{\mathcal{H}_{21}} + (C_2 z_{22}, z_{22})_{\mathcal{H}_{22}} = (\rho_1 - \rho_2)\int\limits_{\Gamma_1} |\zeta_{11}|^2\, d\Gamma_1 + (C_2 z_{22}, z_{22})_{\mathcal{H}_{22}}.$$

Значит, C_2 будет неотрицательным на $\mathcal{H}_2$ тогда и только тогда, когда при некотором $c \geqslant 0$ будет выполнено неравенство

$$(C_2 z_{22}, z_{22})_{\mathcal{H}_{22}} \geqslant c\|z_{22}\|^2_{\mathcal{H}_{22}} \quad \forall z_{22} \in \mathcal{H}_{22}. \tag{3.105}$$

Из (3.90), (3.104), (3.105) имеем, используя представление (3.92),

$$\begin{aligned} (C_2 z_{22}, z_{22})_{\mathcal{H}_{22}} = (m_1 l_1)|P_2\vec{\delta}_1|^2 - (\rho_1 - \rho_2)\int\limits_{\Gamma_1} |\theta_1(\delta_{1,2}x_1^1 - \delta_{1,1}x_1^2)|^2\, d\Gamma_1 = \\ = (m_1 l_1 - (\rho_1 - \rho_2)\beta_{22}^{(1)})|\delta_{1,1}|^2 + 2(\rho_1 - \rho_2)\beta_{21}^{(1)}\mathrm{Re}\,(\delta_{1,1}\overline{\delta_{1,2}}) + (m_1 l_1 - (\rho_1 - \rho_2)\beta_{11}^{(1)})|\delta_{1,2}|^2, \end{aligned} \tag{3.106}$$

где $P_2\vec{\delta}_1 = \sum\limits_{j=1}^{2} \delta_{1,j}\vec{e}_1^{\,j}$. Отсюда, используя критерий Сильвестра, получаем, что для неотрицательности оператора C_2 на подпространстве $\mathcal{H}_{22}$, а значит и на всем пространстве $\mathcal{H}_2$, необходимо и достаточно выполнения условий (3.102). Соответственно для положительной определенности C_2 на $\mathcal{H}_{22}$ требуется выполнение условий (3.103). □

Из доказательства леммы 3.7 следует, что ранг индефинитности квадратичной формы $(C_2 z_2, z_2)_{\mathcal{H}_2}$, т. е. количество ее отрицательных квадратов, не может превышать $\kappa = 4$, следовательно в $\mathcal{H}_2$ может быть не более чем четырехмерное подпространство элементов, на котором эта форма принимает отрицательные значения.

Определение 3.1. Будем говорить, что изучаемая гидромеханическая система *статически устойчива по линейному приближению*, если оператор C_2 потенциальной энергии системы положительно определен, и тогда выполнены условия (3.103).

Формулы (3.92), (3.93), (3.102), определяющие Δ_1 и Δ_2, показывают, что условия статической устойчивости системы выполнены для тела достаточно большой массы с расположенным достаточно далеко от точки подвеса центром масс этого тела-маятника.

3.2.7. О свойствах оператора обмена энергий. Перейдем теперь к изучению свойств операторных матриц B_{12} из (3.76) и B_{22} из (3.89), а также составленной из них операторной матрицы

$$B := \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.107}$$

Прежде всего, из определения B_{12} следует, что областью значений должно быть множество таких элементов, для которых $Q\zeta_1 \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ (см. (3.59)). Поэтому по лемме 3.2 получаем, что оператор $B_{12} : \mathcal{H}_2 = L_{2,\Gamma_1} \oplus \mathbb{C}^2 \to \mathcal{H}_1 = \vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3$ должен быть задан на области определения

$$\mathcal{D}(B_{12}) = H^{1/2}_{\Gamma_1} \oplus \mathbb{C}^2, \tag{3.108}$$

плотной в $\mathcal{H}_2$.

Что касается оператора B_{21}, то он также неограничен, и для элементов из области его значений должно выполняться условие $\gamma_{n,1}(\rho_1^{-1}\nabla\Phi_1) = \gamma_{n,1}(\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2) \in L_{2,\Gamma_1}$. Поэтому

$$\mathcal{D}(B_{21}) = \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \mathcal{D}(\gamma_{n,1}) \oplus \mathbb{C}^3, \tag{3.109}$$

$$\mathcal{D}(\gamma_{n,1}) = \big\{\{\rho_k^{-1}\nabla\Phi_k\}_{k=1}^2 : \gamma_{n,1}(\rho_1^{-1}\nabla\Phi_1) \in L_{2,\Gamma_1}\big\}. \tag{3.110}$$

Здесь $\mathcal{D}(\gamma_{n,1})$ — это суждение оператора $\widehat{\gamma}_n$ (см. (3.70)) на плотное множество $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ тех элементов, для которых область значений оператора $\gamma_{n,1} = \widehat{\gamma}_n|_{\mathcal{D}(\gamma_{n,1})}$ совпадает со всем L_{2,Γ_1}.

Лемма 3.8. *Операторы* B_{12} *и* B_{21}*, заданные на своих областях определения* (3.108) *и* (3.109)*,* (3.110)*, являются кососамосопряженными, т. е.*

$$B_{21}^* = -B_{12} \quad \Leftrightarrow \quad (B_{12}z_2, z_1)_{\mathcal{H}_1} = -(z_2, B_{21}z_1)_{\mathcal{H}_2}, \quad \forall z_1 \in \mathcal{D}(B_{21}),\ \forall z_2 \in \mathcal{D}(B_{12}). \tag{3.111}$$

Доказательство. Достаточно проверить свойства (3.111) на соответствующих элементах операторных матриц B_{21} и B_{12}.

1°. Пусть $z_1 = \Big(\{\vec{w}_k\}_{k=1}^2; \{\rho^{-1}\nabla\Phi_k\}_{k=1}^2; \vec{0}\Big)^\tau \in \mathcal{D}(B_{21}) \subset \mathcal{H}_1$, $z_2 = (\zeta_1; \vec{0})^\tau \in \mathcal{D}(B_{12}) \subset \mathcal{H}_2$. Тогда (см. (3.77) и (3.91))

$$B_{21}z_1 = \begin{pmatrix} -(\rho_1-\rho_2)\gamma_{n,1}(\rho_1^{-1}\nabla\Phi_1) \\ (\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\gamma_{n,1}(\rho_1^{-1}\nabla\Phi_1)\,d\Gamma_1 \end{pmatrix}, \quad B_{12}z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ Q\zeta_1 \\ -(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\zeta_1\,d\Gamma_1 \end{pmatrix}.$$

Имеем в силу определения Q (см. (3.58), (3.59), (3.69)):

$$(B_{12}z_2, z_1)_{\mathcal{H}_1} = \big(\{\rho_k^{-1}\nabla\varphi_k\}_{k=1}^2, \{\rho_k^{-1}\nabla\Phi_k\}_{k=1}^2\big)_{\vec{L}_2(\Omega_1)} = \sum_{k=1}^2 \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} (\rho_k^{-1}\nabla\varphi_k)\cdot(\rho_k^{-1}\overline{\nabla\Phi_k})\,d\Omega_{1k}.$$

Далее,

$$(z_2, B_{21}z_1)_{\mathcal{H}_2} = -(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}\zeta_1\gamma_{n,1}(\rho_1^{-1}\overline{\nabla\Phi_1})\,d\Gamma_1 = -\int\limits_{\Gamma_1}(\varphi_1-\varphi_2)\gamma_{n,1}(\rho_1^{-1}\overline{\nabla\Phi_1})\,d\Gamma_1 =$$

$$= -\int\limits_{\Gamma_1}\varphi_1\gamma_{n,1}(\rho_1^{-1}\overline{\nabla\Phi_1})\,d\Gamma_1 + \int\limits_{\Gamma_2}\varphi_2\gamma_{n,1}(\rho_2^{-1}\overline{\nabla\Phi_2})\,d\Gamma_2 = \ldots =$$

$$= -\Big\{\rho_1\int\limits_{\Omega_{11}}(\rho_1^{-1}\nabla\varphi_1)\cdot(\rho_1^{-1}\overline{\nabla\Phi_1})\,d\Omega_{11} + \rho_2\int\limits_{\Omega_{12}}(\rho_2^{-1}\nabla\varphi_2)\cdot(\rho_2^{-1}\overline{\nabla\Phi_2})\,d\Omega_{12}\Big\} = -(B_{12}z_2, z_1)_{\mathcal{H}_1}. \tag{3.112}$$

2°. Если $z_2 = (0; P_2\vec{\delta}_1)^\tau$, а z_1 тот же, что и в 1°, то аналогично получаем связь вида (3.112), если провести формальную замену $\zeta_1 \mapsto \theta_1\big((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3}\big)$ и использовать связь

$$Q\theta_1((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3}) = \{\rho_k^{-1}\nabla\psi_k\}_{k=1}^2,$$

а также соотношения (3.58) для функций $\psi_k,\ k=1,2$.

3°. Пусть теперь $z_2 = (\zeta_1; \vec{0})^\tau,\ z_1 = (0; 0; \vec{\omega}_1)^\tau$. Тогда

$$B_{21}z_1 = \big(-(\rho_1-\rho_2)\theta_1\left((P_2\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3}\right); -m_1 l_1 P_2\vec{\omega}_1\big)^\tau,$$

$$B_{12}z_2 = (\vec{0};\ Q\zeta_1; -(\rho_1-\rho_2)\int_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\zeta_1\,d\Gamma_1)^\tau.$$

Имеем

$$(B_{12}z_2, z_1)_{\mathcal{H}_1} = -(\rho_1-\rho_2)\int_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\zeta_1\,d\Gamma_1\cdot\overline{\vec{\omega}_1} = |\zeta_1 = \theta_1\zeta_1| =$$

$$= (\rho_1-\rho_2)\int_{\Gamma_1}\theta_1\left((\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3}\right)\zeta_1\,d\Gamma_1 = (\rho_1-\rho_2)\int_{\Gamma_1}\zeta_1\theta_1\left((\overline{P_2\vec{\omega}_1}\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3}\right)\,d\Gamma_1,$$

$$(z_2, B_{21}z_1)_{\mathcal{H}_2} = \int_{\Gamma_1}\zeta_1\left[-(\rho_1-\rho_2)\theta_1\left((\overline{P_2\vec{\omega}_1}\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3}\right)\right]\,d\Gamma_1 =$$

$$= -(\rho_1-\rho_2)\int_{\Gamma_1}\zeta_1\theta_1\left((\overline{P_2\vec{\omega}_1}\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3}\right)\,d\Gamma_1 = -(B_{12}z_2, z_1)_{\mathcal{H}_1}.$$

4°. Последний вариант тривиально проверяется: $z_2 = (0; P_2\vec{\delta}_1)^\tau,\ z_1 = (0;0;\vec{\omega}_1)$,

$$B_{12}z_2 = \left(\vec{0};\ \theta_1\left((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3}\right);\ m_1l_1P_2\vec{\delta}_1\right)^\tau,$$

$$B_{21}z_1 = \left(-(\rho_1-\rho_2)\theta_1\left((P_2\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3}\right); -m_1l_1P_2\vec{\omega}_1\right)^\tau,$$

$$(B_{12}z_2, z_1)_{\mathcal{H}_1} = m_1l_1P_2\vec{\delta}_1\cdot\overline{\vec{\omega}_1} = m_1l_1P_2\vec{\delta}_1\cdot\overline{P_2\vec{\omega}_1},$$

$$(z_2, B_{21}z_1)_{\mathcal{H}_2} = P_2\vec{\delta}_1\cdot\left(-m_1l_1\overline{P_2\vec{\omega}_1}\right) = -m_1l_1P_2\vec{\delta}_1\cdot\overline{P_2\vec{\omega}_1}.$$

□

Проведенные рассмотрения приводят к следующему итоговому заключению.

Теорема 3.1. *Исходная начально-краевая задача* (3.32)–(3.38) *о малых движениях маятника с полостью, заполненной двумя несмешивающимися идеальными жидкостями, равносильна совокупности тривиального соотношения* (3.55), *соотношения* (*см.* (3.36))

$$\frac{d}{dt}\delta_1^3 = \omega_1^3, \tag{3.113}$$

а также задаче Коши

$$\begin{aligned} C_1\frac{dz_1}{dt} + A_1z_1 + gB_{12}z_2 = f_1(t), \quad z_1(0) = z_1^0,\\ gC_2\frac{dz_2}{dt} + gB_{21}z_1 = 0, \quad z_2(0) = z_2^0, \end{aligned} \tag{3.114}$$

рассматриваемой в гильбертовом пространстве

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2 = \left(\vec{J}_0(\Omega_1)\oplus\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)\oplus\mathbb{C}^3\right)\oplus\left(L_{2,\Gamma_1}\oplus\mathbb{C}^2\right).$$

Свойства операторных коэффициентов описаны в леммах 3.4–3.8.

Теорема о разрешимости задачи Коши (3.114), а также других изученных на базе операторного подхода задач, будет приведен ниже.

3.2.8. Проблема собственных колебаний (случай консервативной системы). Будем считать, что трение в шарнире подвеса маятника отсутствует ($\alpha_1 = 0$), и рассмотрим решения однородной задачи (3.113), (3.114), зависящие от t по закону $\exp(i\lambda t)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$ — частота собственных колебаний гидромеханической системы. Тогда для амплитудных элементов из (3.114) приходим к спектральной проблеме

$$i\lambda C_1 z_1 + gB_{12}z_2 = 0, \quad i\lambda C_2 z_2 + B_{21}z_1 = 0, \quad i\lambda\delta_1^3 = \omega_1^3. \tag{3.115}$$

Изучим свойства спектра и собственных элементов этой задачи.

Лемма 3.9. *Число $\lambda = \lambda_0 = 0$ является бесконечнократным собственным значением задачи* (3.115). *Ему отвечают собственные элементы*

$$z_1^0 = \left(\{\vec{w}_k^0\}_{k=1}^2;\ \vec{0};\ \vec{0}\right)^\tau, \quad \forall \vec{w}_k^0 \in \vec{J}_0(\Omega_k), \quad k = 1,2, \qquad z_2^0 = (0;\vec{0})^\tau, \quad \forall (\delta_1^3)^0 \in \mathbb{C}. \tag{3.116}$$

Этим решениям соответствует поворот системы вокруг вертикальной оси на произвольный угол $(\delta_1^3)^0$, а также произвольные движения жидкостей в областях $\Omega_{1k},\ k = 1,2$, с произвольными полями скоростей $\vec{w}_k \in \vec{J}_0(\Omega_k)$, т. е. без отклонения границы раздела Γ_1.

Доказательство. Заметим сначала, что в силу леммы 3.5 (см. (3.94)) второе уравнение в (3.115) равносильно условиям

$$i\lambda\zeta_1 = \gamma_{n,1}(\rho_1^{-1}\nabla\Phi_2) = \gamma_{n,1}(\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2), \quad i\lambda P_2\vec{\delta_1} = P_2\vec{\omega}_1. \tag{3.117}$$

Отсюда и из последнего условия (3.115) при $\lambda = \lambda_0 = 0$ получаем, что $\vec{\omega}_1 = \vec{0}$, а также условие $\gamma_{n,1}(\rho_1^{-1}\nabla\Phi_1) = \gamma_{n,1}(\rho_1^{-1}\nabla\Phi_2) = 0$. Поэтому, рассматривая вспомогательную задачу (3.58) при $\varphi_k = \Phi_k,\ k = 1,2$, приходим к следующим выводам. Во-первых, $\rho_k^{-1}\nabla\Phi_k = \vec{0},\ k = 1,2$, а во-вторых, $\zeta_1 = 0$. Далее, из первого уравнения (3.115) и определения (3.77) оператора B_{12}, получаем, что $P_2\vec{\delta_1} = \vec{0}$. Остальных ограничений при $\lambda = \lambda_0 = 0$ не оказывается, и поэтому нетривиальные решения задачи (3.115) имеют вид (3.116). □

Рассмотрим теперь свойства решений задачи (3.115), отвечающие ненулевым частотам колебаний системы. Здесь, как и в пункте 3.1, понадобится ввести потенциалы Жуковского для каждой из областей $\Omega_{1k},\ k = 1,2$.

Прежде всего, из определений операторов C_{11} и B_{12} (см. (3.75), (3.77)) получаем связь

$$i\lambda\left(\{\vec{w}_k\}_{k=1}^2 + P_0\{\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}\}_{k=1}^2\right) = \vec{0},$$

где $P_0 = \operatorname{diag}(P_{0,1}; P_{0,2})$ — оператор проектирования на $\vec{J}_0(\Omega_1) = \vec{J}_0(\Omega_{11}) \oplus \vec{J}_0(\Omega_{12})$. Отсюда следует, что

$$\vec{w}_k + P_{0,k}(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}) = \vec{0}, \quad k = 1,2. \tag{3.118}$$

Далее, из первого уравнения (3.115) имеем, с учетом леммы 3.8, соотношение

$$i\lambda(C_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} + g(B_{12}z_2, z_1)_{\mathcal{H}_1} = i\lambda(C_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} - g(z_2, B_{21}z_1)_{\mathcal{H}_1} = 0. \tag{3.119}$$

Вычислим отдельное слагаемое из правой части этого выражения с учетом связей (3.118), а также (3.117), т. е. на элементах

$$\begin{aligned} z_1 = \widetilde{z}_1 &:= \left(-\{P_{0,k}(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k})\}_{k=1}^2;\ \{\rho_k^{-1}\nabla\Phi_k\}_{k=1}^2;\ P_2\vec{\omega}_1\right)^\tau, \\ z_2 = \widetilde{z}_2 &:= (\gamma_{n,1}\rho_1^{-1}\nabla\Phi_1;\ P_2\vec{\omega}_1)^\tau. \end{aligned} \tag{3.120}$$

Для квадратичного функционала $(C_1\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_1}$ по формуле (3.84) имеем

$$\begin{aligned} (C_1\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_2} &= \rho_0 \int_{\Omega_0} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_0|^2\, d\Omega_0 + \sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_{1k}} \left|(I_k - P_{0,k})(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}) + \rho_k^{-1}\nabla\Phi_k\right|^2\, d\Omega_{1k} = \\ &= \rho_0 \int_{\Omega_0} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_0|^2\, d\Omega_0 + \sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_{1k}} \left|\rho_k^{-1}\nabla\Phi_k + P_{G,k}(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k})\right|^2\, d\Omega_{1k}, \\ &\{P_{G,k}(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k})\}_{k=1}^2 := P_G\{\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}\}_{k=1}^2. \end{aligned} \tag{3.121}$$

Введем теперь, как и в пункте 3.1, потенциалы Жуковского для областей Ω_{1k}:

$$\begin{aligned} &\{(I_k - P_{0,k})(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k})\}_{k=1}^2 = \{(P_{G,k})(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k})\}_{k=1}^2 = \{\nabla\psi_k\}_{k=1}^2 \in \vec{G}_h(\Omega_1), \\ &\Delta\psi_k = 0 \text{ (в } \Omega_{1k}), \quad \frac{\partial\psi_k}{\partial n} = (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}) \cdot \vec{n}_{1k} \text{ (на } \partial\Omega_{1k}), \\ &\int\limits_{\partial\Omega_{1k}} \psi_k \, d(\partial\Omega_{1k}) = 0, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \tag{3.122}$$

Представляя ψ_k в виде $\psi_k = \sum\limits_{j=1}^{3} \omega_1^j \psi_{kj}$, где

$$\begin{gathered} \Delta\psi_{kj} = 0 \text{ (в } \Omega_{1k}), \quad \frac{\partial\psi_{kj}}{\partial n} = (\vec{e}_1^{\,k} \times \vec{r}_{1j}) \cdot \vec{n}_{1,k} \text{ (на } \partial\Omega_{1k}), \\ \int\limits_{\partial\Omega_{1k}} \psi_{kj} d(\partial\Omega_{1k}) = 0, \quad k = 1, 2, \ j = 1, 2, 3, \end{gathered} \tag{3.123}$$

и подставляя введенные функции ψ_k (потенциалы Жуковского) в (3.121), получим окончательно выражение

$$(C_1\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_1} = \rho_0 \int\limits_{\Omega_0} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_0|^2 \, d\Omega_0 + \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} |\rho_k^{-1}\nabla\Phi_k + \sum_{j=1}^{3} \omega_1^j \psi_{kj}|^2 \, d\Omega_{1k}. \tag{3.124}$$

Вычислим теперь второй функционал в (3.119), учитывая, в силу (3.117), что

$$z_2 = (i\lambda)^{-1}\widetilde{z}_2. \tag{3.125}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &(z_2, B_{21}\widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_2} = (i\lambda)^{-1}(\widetilde{z}_2, B_{21}\widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_2} = \\ &= (i\lambda)^{-1} g\Big(m_1 l_1 |P_2\vec{\omega}_1|^2 + (\rho_1 - \rho_2) \int\limits_{\Gamma_1} \Big[|\rho_1^{-1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} + \theta_1((P_2\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3})|^2 - |\theta_1((P_2\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3})|^2\Big] \, d\Gamma_1\Big) = \\ &= (i\lambda)^{-1} g (C_2\widetilde{z}_2, \widetilde{z}_2)_{\mathcal{H}_2} \end{aligned} \tag{3.126}$$

(последняя связь проверяется непосредственно).

Из (3.124)–(3.126) и (3.119) получаем, что

$$-\lambda^2/g = \frac{(C_2\widetilde{z}_2, \widetilde{z}_2)_{\mathcal{H}_2}}{(C_1\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_1}}. \tag{3.127}$$

При этом для потенциалов скоростей выполнены связи (3.58):

$$\begin{aligned} &\Delta\Phi_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_{1k}), \quad \rho_k^{-1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_{1k}), \qquad \int\limits_{\Gamma_1} \Phi_k d\Gamma_1 = 0, \quad k = 1, 2, \\ &\rho_1^{-1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \rho_2^{-1}\frac{\partial\Phi_2}{\partial n} =: \xi_1 \in L_{2,\gamma_1}, \quad \vec{n} = \vec{e}_1^{\,3}. \end{aligned} \tag{3.128}$$

Из (3.128), в частности, следует, что ненулевые квадраты частот собственных колебаний при условии статистической устойчивости по линейному приближению положительны.

Теорема 3.2. *Пусть выполнено условие статической устойчивости по линейному приближению, т. е. оператор $C_2 : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ положительно определен. Тогда спектральная задача* (3.115) *имеет бесконечнократное нулевое собственное значение, которому отвечает собственные элементы вида* (3.116)*, а остальной спектр задачи дискретен, расположен на мнимой оси симметрично относительно вещественной оси и имеет в качестве предельной бесконечно удаленную точку. При этом собственные элементы вида* (3.120) *и квадраты частот колебаний системы находятся из вариационного отношения* (3.127) (*см. также* (3.124), (3.126)) *при вычислении его последовательных минимумов в классе функций* (3.120) *с условиями* (3.128).

Доказательство. Свойства решений спектральной задачи при $\lambda = \lambda_0 = 0$ уже описано в лемме 3.9.

При $\lambda \neq 0$, как уже установлено выше, решения $z_1 = \widetilde{z}_1$ имеют вид (3.120) (первая формула), а элементы $z_2 = (i\lambda)^{-1}\widetilde{z}_2$ (см. (3.124)), где $\widetilde{z}_2$ выражается второй формулой (3.120). При этом для квадратов частот колебаний возникает вариационное отношение, выражаемое правой частью (3.127).

Покажем, что этому отношению отвечает дискретный положительный спектр. состоящий из конечнократных собственных значений с предельной точкой $+\infty$.

В самом деле, квадратичные функционалы в (3.127) лишь конечномерными добавками отличаются от функционалов в пространстве $L_{2,\Gamma}$ и $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ соответственно, задающих вариационное отношение

$$(\rho_1 - \rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}\left|\rho_1^{-1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}\right|^2 d\Gamma_1 \;/\; \sum_{k=1}^{2}\rho_k^{-1}\int\limits_{\Omega_{1k}}|\nabla\Phi_k|^2\,d\Omega_{1k}, \tag{3.129}$$

если его рассматривать в классе функций (3.128). Однако, как следует из доказательства леммы 3.2, при условиях (3.128) справедлива формула

$$\sum_{k=1}^{2}\rho_k^{-1}\int\limits_{\Omega_{1k}}|\nabla\Phi_k|^2\,d\Omega_{1k} = \big((\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2)\xi_1, \xi_1\big)_{L_{2,\Gamma_1}} =: (C_\rho\xi_1, \xi_1)_{L_{2,\Gamma_1}}, \tag{3.130}$$

$$\xi_1 = \rho_1^{-1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \rho_2^{-1}\frac{\partial\Phi_2}{\partial n} \in L_{2,\Gamma_1},$$

где оператор C_ρ является компактным и положительным в L_{2,Γ_1}, так как область значений $\mathcal{R}(C_\rho) = H_{\Gamma_1}^{1/2}$ компактно вложена в L_{2,Γ_1} (теорема Гальярдо).

Отсюда следует, что вариационное отношение (3.129) при условиях (3.128) соответствует спектральной задаче

$$\mu C_\rho \xi_1 = \xi_1, \quad 0 < C_\rho \in \mathfrak{S}_\infty(L_{2,\Gamma_1}), \tag{3.131}$$

которая, очевидно, имеет дискретный положительный спектр с предельной точкой $+\infty$. Из этих свойств по теореме М. Ш. Бирмана (см. [6, 12]) получаем, что и исходная задача о нахождении спектра вариационного отношения (3.127), (3.128) также имеет дискретный положительный спектр с предельной точкой $+\infty$, причем асимптотика при $j \to \infty$ совпадает с асимптотикой собственных значений μ_j^2/g второй задачи, т. е. задачи (3.129), (3.128). $\square$

3.3. О малых движениях маятника с полостью, заполненной системой из трех однородных несмешивающихся вязких жидкостей. Рассмотрим третью вспомогательную задачу о малых движениях маятника с полостью, заполненной системой из трех вязких жидкостей. Отметим, что данная задача изучалась ранее в работе авторов [10].

3.3.1. Постановка начально-краевой задачи. Закон баланса полной энергии. Будем считать, что маятник G_1 закреплен в точке подвеса O_1 и совершает малые движения в поле сил тяжести. Маятник имеет полость Ω_1, целиком заполненную тремя вязкими однородными несмешивающимися жидкостями (см. рис 2).

Считаем, что плотности жидкостей удовлетворяют условиям $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$, где ρ_k — плотность, отвечающая области Ω_{1k}, $k = 1, 2, 3$. В состоянии покоя границы раздела жидкостей Γ_j, $j = 1, 2$, горизонтальны, причем границы областей Ω_{1k} состоят соответственно из частей: $\partial\Omega_{11} = S_{11} \cup \Gamma_1$ (Γ_1 — граница между Ω_{11} и Ω_{12}), $\partial\Omega_{12} = S_{12} \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (Γ_2 — граница между Ω_{12} и Ω_{13}), $\partial\Omega_{13} = S_{13} \cup \Gamma_2$, где S_{1k} — соответствующие твердые стенки. Как и ранее, будем считать, что в процессе малых движений на данную гидромеханическую систему действует внешнее поле сил $\vec{F} = \vec{g} + \vec{f}(t, x)$, где $\vec{f}$ — малая динамическая добавка к гравитационному полю.

Далее для описания малых движений системы введем неподвижную систему декартовых координат $O_1x^1x^2x^3$ с ортами $\vec{e}^{\,j}$, $j = 1, 2, 3$, так, чтобы $\vec{g} = -g\vec{e}^{\,3}$, а также подвижную систему $O_1x_1^1x_1^2x_1^3$, жестко связанную с телом, с ортами $\vec{e}_1^{\,j}$, $j = 1, 2, 3$, причем в состоянии покоя полагаем, что $\vec{e}_1^{\,j} = \vec{e}^{\,j}$, а центр масс системы находится на оси $O_1x_1^3 = O_1x^3$ в точке C_1.

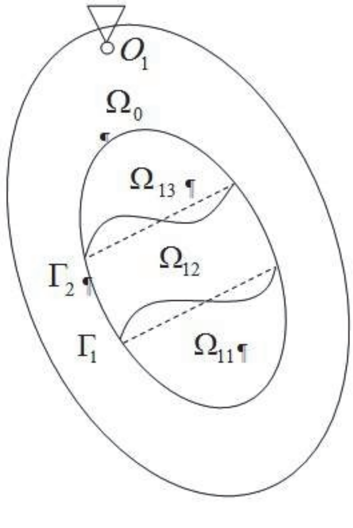

Рис. 2

Введем также малый вектор углового перемещения системы $\vec{\delta}_1(t) = \sum\limits_{j=1}^{3} \delta_1^j(t)\vec{e}_1^{\,j}$ и будем использовать обозначение

$$\int\limits_{G_1} (\ldots)\, dG_1 := \int\limits_{\Omega_0} (\ldots)\rho_0\, d\Omega_0 + \sum_{k=1}^{3} \int\limits_{\Omega_{1k}} (\ldots)\rho_{1k}\, d\Omega_{1k},$$

где Ω_0 — область, занятая твердым телом плотности $\rho_0 > 0$.

Будем считать, что момент силы трения в сферическом шарнире пропорционален угловой скорости $\vec{\omega}_1 = d\vec{\delta}_1/dt$ с коэффициентом $\alpha_1 > 0$. Тогда, вычисляя кинетический момент гидромеханической системы относительно O_1 и сумму моментов всех сил, приложенных к телу, после линеаризации в подвижной системе координат приходит к уравнению изменения кинетического момента системы:

$$\left[\rho_0 \int\limits_{\Omega_0} \vec{r}_0 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_0\right) d\Omega_0 + \sum_{k=1}^{3} \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} \vec{r}_k \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_{1k} + \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t}\right) d\Omega_{1k}\right] +$$
$$+ \alpha\vec{\omega}_1 + g m_1 l_1 P_2 \vec{\delta}_1 - g(\rho_1 - \rho_2) \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_{11})\zeta_1\, d\Gamma_1 - g(\rho_2 - \rho_3) \int\limits_{\Gamma_2} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_{12})\zeta_2\, d\Gamma_2 =$$
$$= \rho_0 \int\limits_{\Omega_0} \vec{r}_0 \times \vec{f}_0\, d\Omega_0 + \sum_{k=1}^{3} \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} \vec{r}_{1k} \times \vec{f}_k\, d\Omega_{1k} =: \vec{M}_1(t). \quad (3.132)$$

Здесь первое слагаемое, т. е. выражение в квадратных скобках, равно $\vec{J}_1\vec{\omega}_1$, где $\vec{J}_1$ — тензор инерции твердого тела и жидкостей относительно O_1. Далее, через $\zeta_j(t,x)$, $x \in \Gamma_j$, обозначены функции, описывающие малые отклонения границ раздела между жидкостями вдоль нормалей к Γ_j, направленных вверх. Из условия сохранения объемов жидкостей получаем, что

$$\int\limits_{\Gamma_j} \zeta_j\, d\Gamma_j = 0, \quad j = 1, 2. \quad (3.133)$$

Как и ранее, здесь использованы также обозначения: $l_1 := |\overrightarrow{O_1C_1}|$, $P_2\vec{\delta}_1 := \sum\limits_{j=1}^{2} \delta_1^j \vec{e}_1^{\,j}$, $\vec{f}_k := \vec{f}|_{\Omega_k}$, $k = 1, 2, 3$, $\vec{f}_0 := \vec{f}|_{\Omega_0}$.

Приведем теперь линеаризованные уравнения движения вязких жидкостей в подвижной системе координат, а также соответствующие краевые и начальные условия. Имеем линеаризованные уравнения Навье—Стокса

$$\rho_k \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_{1k} + \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} \right) = -\nabla p_k + \mu_k \Delta \vec{u}_k + \rho_k \vec{f}_k, \quad \operatorname{div} \vec{u}_k = 0 \text{ (в } \Omega_{1k}), \quad k = 1,2,3, \tag{3.134}$$

где p_k — поля динамических давлений, $\mu_k > 0$ — динамические вязкости жидкостей.

Что касается граничных условий, то для вязких жидкостей на твердых стенках S_{1k} должно выполняться условие прилипания:

$$\vec{u}_k = \vec{0} \quad (\text{на } S_{1k}), \tag{3.135}$$

а на границах раздела Γ_j $(j = 1, 2)$ — кинематические и динамические условия. Кинематические условия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} &= \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 = \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_1,\ \vec{n}_1 = \vec{e}_1^{\,3}, \quad \gamma_{11}\vec{u}_1 = \gamma_{12}\vec{u}_2 \quad (\text{на } \Gamma_1), \\ \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} &= \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2 = \vec{u}_3 \cdot \vec{n}_2,\ \vec{n}_2 = \vec{e}_1^{\,3}, \quad \gamma_{22}\vec{u}_2 = \gamma_{23}\vec{u}_3 \quad (\text{на } \Gamma_2). \end{aligned} \tag{3.136}$$

Здесь и далее через $\gamma_{jk}\vec{u}_k$ $(k = 1,2,3,\ j = 1,2)$ обозначен след поля скорости $\vec{u}_k$ на поверхности Γ_j. Кроме того, должны выполняться кинематические условия связи

$$\frac{d}{dt} P_2 \vec{\delta}_1 = P_2 \vec{\omega}_1, \quad \frac{d}{dt} \delta_1^3 = \omega_1^3. \tag{3.137}$$

На границах раздела Γ_j должны выполняться динамические условия: равенство касательных напряжений при переходе из одной жидкой среды в другую, т. е.

$$\begin{aligned} \mu_1 \tau_{j3}(\vec{u}_1) - \mu_2 \tau_{j3}(\vec{u}_2) = 0, \quad j = 1,2 \quad (\text{на } \Gamma_1), \\ \mu_2 \tau_{j3}(\vec{u}_2) - \mu_3 \tau_{j3}(\vec{u}_3) = 0, \quad j = 1,2 \quad (\text{на } \Gamma_2), \end{aligned} \tag{3.138}$$

$$\tau_{jk}(\vec{u}_l) := \partial u_l^k / \partial x_l^j + \partial u_l^j / \partial x_l^k,$$

а также тот факт, что разность нормальных напряжений на границах раздела равна гравитационному скачку давлений:

$$\begin{aligned} [-p_1 + \mu_1 \tau_{33}(\vec{u}_1)] - [-p_2 + \mu_2 \tau_{33}(\vec{u}_2)] &= -g(\rho_1 - \rho_2) \left[\zeta_1 + \theta_1 \left((P_2 \vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3} \right) \right] \quad (\text{на } \Gamma_1), \\ [-p_2 + \mu_2 \tau_{33}(\vec{u}_2)] - [-p_3 + \mu_3 \tau_{33}(\vec{u}_3)] &= -g(\rho_2 - \rho_3) \left[\zeta_2 + \theta_2 \left((P_2 \vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{12}) \cdot \vec{e}_1^{\,3} \right) \right] \quad (\text{на } \Gamma_2), \end{aligned} \tag{3.139}$$

где $\theta_j : L_2(\Gamma_j) \to L_{2,\Gamma_j}$ — ортопроектор на $L_{2,\Gamma_j} := L_2(\Gamma_j) \ominus \{1|_{\Gamma_j}\}$. Для полной постановки задачи необходимо также задать начальные условия:

$$\begin{gathered} \vec{u}_k(0,x) = \vec{u}_k^{\,0}(x),\ x \in \Omega_{1k},\ k = 1,2,3, \quad \zeta_j(0,x) = \zeta_j^0(x),\ x \in \Gamma_j,\ j = 1,2, \\ \vec{\omega}_1(0) = \vec{\omega}_1^{\,0}, \quad \vec{\delta}_2(0) = \vec{\delta}_1^{\,0}. \end{gathered} \tag{3.140}$$

Перед исследованием поставленной задачи (3.132)–(3.140) запишем закон баланса полной энергии для ее классического решения. Аналогично выводу формулы (2.21) (см. также [10]) для исследуемой сейчас задачи получаем тождество, являющееся законом баланса полной энергии в дифференциальной форме:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \left\{ \rho_0 \int\limits_{\Omega_0} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_0|^2 \, d\Omega_0 + \sum_{k=1}^{3} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k} + \vec{u}_k|^2 \, d\Omega_{1k} \right\} +$$

$$+\frac{1}{2} g \frac{d}{dt} \Bigg\{ (\rho_1 - \rho_2) \int\limits_{\Gamma_1} \left[\left| \zeta_1 + \theta_1 \left((P_2 \vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3} \right) \right|^2 - \left| \theta_1 \left((P_2 \vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3} \right) \right|^2 \right] d\Gamma_1 +$$

$$+(\rho_2 - \rho_3) \int\limits_{\Gamma_2} \left[\left| \zeta_2 + \theta_2 \left((P_2 \vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{12}) \cdot \vec{e}_1^{\,3} \right) \right|^2 - \left| \theta_2 \left((P_2 \vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{12}) \cdot \vec{e}_1^{\,3} \right) \right|^2 \right] d\Gamma_2 \Bigg\} +$$

$$+m_1 l_1 \left| P_2 \vec{\delta}_1 \right|^2 = -\left\{ \alpha_1 |\vec{\omega}_1|^2 + \sum_{k=1}^{3} \mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{u}_k) \right\} + \sum_{k=1}^{3} \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} \vec{f}_k \cdot \vec{u}_k \, d\Omega_{1k} + \vec{M}_1(t) \cdot \vec{\omega}_1, \qquad (3.141)$$

$$E_k(\vec{u}_k, \vec{u}_k) := \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{1k}} \sum_{j,l=1}^{3} |\tau_{jl}(\vec{u}_k)|^2 \, d\Omega_{1k}.$$

3.3.2. Выбор функциональных пространств. Будем описывать, как и в пункте 3.2, движение системы жидкостей в полости в виде набора полей скоростей и градиентов давлений, заданных в областях Ω_{1k}: $\vec{u} := \{\vec{u}_k\}_{k=1}^3$, $\{\nabla p_k\}_{k=1}^3$.

Тогда в силу (3.141) получаем, что эти наборы следует считать элементами гильбертова пространства $\vec{L}_2(\Omega_1)$ со скалярным произведением

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\vec{L}_2 \Omega_1} := \sum_{k=1}^{3} \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} \vec{u}_k \cdot \overline{\vec{v}_k} \, d\Omega_k, \quad \Omega_1 := \bigcup_{k=1}^{3} \Omega_{1k},$$

определяющим конечную кинетическую энергию для системы несмешивающихся жидкостей. Из условий (3.135), (3.136), а также условия соленоидальности полей $\vec{u}_k(t,x)$, см. (3.134), следует, что эти поля должны быть функциями переменной t со значениями в

$$\vec{J}_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k}) := \left\{ \vec{u}_k \in \vec{L}_2(\Omega_{1k}) : \quad \operatorname{div} \vec{u}_k = 0 \ (\text{в } \Omega_{1k}), \quad \gamma_{n,k} \vec{u}_{1k} := \vec{u}_{1k} \cdot \vec{n}_{1k} = 0 \ (\text{на } S_{1k}) \right\}, \qquad (3.142)$$

где $\vec{n}_{1k}$ — внешняя нормаль к S_{1k}.

Как это было уже использовано выше (см. пункт 3.2.3), имеет место следующее ортогональное разложение

$$\vec{L}_2(\Omega_{1k}) = \vec{J}_{0,S_{1k}} \oplus \vec{G}_{0,\widetilde{\Gamma}_k}(\Omega_{1k}), \quad (\vec{u}_k, \vec{v}_k)_{\vec{L}_2(\Omega_{1k})} = \int\limits_{\Omega_{1k}} \vec{u}_k \cdot \overline{\vec{v}_k} \, d\Omega_{1k}, \qquad (3.143)$$

$$\vec{G}_{0,\widetilde{\Gamma}_k}(\Omega_{1k}) := \left\{ \nabla \psi_k \in \vec{L}_2(\Omega_{1k}) : \psi_k = 0 \quad (\text{на } \widetilde{\Gamma}_k) \right\}, \ k = 1, 2, 3, \qquad (3.144)$$

$$\widetilde{\Gamma}_1 = \Gamma_1, \quad \widetilde{\Gamma}_2 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad \widetilde{\Gamma}_3 = \Gamma_2.$$

Отсюда приходим к выводу, что имеет место ортогональное разложение

$$\vec{L}_2(\Omega_1) = \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{0,\widetilde{\Gamma}}(\Omega_1), \qquad (3.145)$$

$$\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) = \left\{ \{\vec{u}_k\}_{k=1}^3 : \vec{u}_k \in \vec{J}_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k}) \right\}, \qquad (3.146)$$

$$\vec{G}_{0,\widetilde{\Gamma}}(\Omega_1) := \bigoplus_{k=1}^{3} \vec{G}_{0,\widetilde{\Gamma}_k}(\Omega_{1k}). \qquad (3.147)$$

Введем теперь гильбертово пространство, связанное с диссипацией энергии в исследуемой проблеме. Как следует из (3.141), для решений задачи наряду со свойством конечности кинетической энергии гидромеханической системы в любой момент времени должны выполняться свойства конечности скорости диссипации энергии каждой из жидкостей, заполняющей полость маятника:

$$E_k(\vec{u}_k, \vec{u}_k) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{1k}} \sum_{j,l=1}^{3} |\tau_{jl}(\vec{u}_k)|^2 \ d\Omega_{1k} < \infty.$$

Опираясь на этот факт, введем в пространстве $\vec{H}^1(\Omega_{1k})$ подпространство соленоидальных полей, удовлетворяющих условию на твердой стенке:

$$\vec{J}^1_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k}) := \left\{ \vec{u}_k \in \vec{H}^1(\Omega_{1k}) : \operatorname{div} \vec{u}_k = 0 \ (\text{в } \Omega_{1k}), \ \vec{u}_k = \vec{0} \ (\text{на } S_{1k}) \right\}, \quad k = 1, 2, 3. \qquad (3.148)$$

Скалярное произведение в $\vec{J}^1_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})$ определим по закону

$$(\vec{u}_k, \vec{v}_k)_{\vec{J}^1_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})} := E_k(\vec{u}_k, \vec{v}_k) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{1k}} \sum_{j,l=1}^{3} \tau_{jl}(\vec{u}_k) \overline{\tau_{jl}(\vec{v}_k)} \, d\Omega_{1k}. \qquad (3.149)$$

В силу неравенства Корна (см. [20, с. 111])

$$\|\vec{u}_k\|^2_{\vec{J}^1_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})} = E_k(\vec{u}_k,\vec{u}_k) \geqslant \widetilde{c}_k \|\vec{u}_k\|^2_{\vec{H}^1(\Omega_{1k})}, \quad \widetilde{c}_k > 0, \tag{3.150}$$

норма, порожденная скалярным произведением (3.149), эквивалентна норме пространства $\vec{H}^1(\Omega_{1k}) := \oplus_{j=1}^3 H^1_j(\Omega_{1k})$, $H^1_j(\Omega_{1k}) = H^1(\Omega_{1k})$ (неравенство противоположного смысла очевидно).

Отсюда и из теоремы вложения С. Л. Соболева (см. [20, с. 113]) следует компактное вложение

$$\vec{J}^1_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k}) \hookrightarrow\hookrightarrow \vec{J}_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k}), \quad k = 1,2,3. \tag{3.151}$$

Введем теперь по аналогии с (3.145)–(3.147) пространство

$$\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1) = \bigoplus_{k=1}^3 \vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_{1k}), \quad (\vec{u},\vec{v})_{\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_{1k})} := \sum_{k=1}^3 \mu_k E_k(\vec{u}_k,\vec{v}_k), \tag{3.152}$$

$$\vec{u} = \{\vec{u}_k\}_{k=1}^3, \quad \vec{v} = \{\vec{v}_k\}_{k=1}^3 \in \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1),$$

отвечающее набору полей скоростей вязких жидкостей в трех областях. Из (3.151) следует, что $\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)$ компактно вложено в $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$:

$$\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1) \hookrightarrow\hookrightarrow \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1). \tag{3.153}$$

Поэтому они образуют гильбертову пару пространств, как и пространства $\vec{J}_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})$ и $\vec{J}^1_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})$. При этом оператор A_k гильбертовой пары $(\vec{J}_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k}), \vec{J}_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k}))$ определяется из тождества

$$(\vec{u}_k,\vec{v}_k)_{\vec{J}^1_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})} = \left(A_k^{1/2}\vec{u}_k, A_k^{1/2}\vec{v}_k\right)_{\vec{J}_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})} = \langle \vec{u}_k, A_k\vec{v}_k\rangle_{\vec{J}_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})}, \quad \forall \vec{u}_k,\vec{v}_k \in \vec{J}^1_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k}), \tag{3.154}$$

где косыми скобками обозначено значение функционала $A_k\vec{v}_k \in \left(\vec{J}^1_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})\right)^*$ на элементе $\vec{u}_k \in \vec{J}^1_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})$. Таким образом, возникает оснащенное гильбертово пространство $\vec{J}_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})$, т. е.

$$\vec{J}^1_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k}) \hookrightarrow\hookrightarrow \vec{J}_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k}) \hookrightarrow\hookrightarrow \left(\vec{J}^1_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})\right)^*, \tag{3.155}$$

причем

$$A_k^{1/2} \in \mathcal{L}\left(\vec{J}^1_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k}); \vec{J}_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})\right), \quad A_k^{1/2} \in \mathcal{L}\left(\vec{J}_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k}); (\vec{J}^1_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k}))^*\right). \tag{3.156}$$

Аналогичными свойствами обладает и оператор A гильбертовой пары $\left(\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1); \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)\right)$, для него выполнено тождество

$$(\vec{u}_k,\vec{v}_k)_{\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)} = \left(A_k^{1/2}\vec{u}_k, A_k^{1/2}\right)_{\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)} = \sum_{k=1}^3 \mu_k E_k(\vec{u}_k,\vec{v}_k) = \sum_{k=1}^3 \mu_k\rho_k^{-1}(A_k^{1/2}\vec{u}_k, A_k^{1/2})_{\vec{J}_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})} =$$

$$= \langle \vec{u}, A\vec{v}\rangle_{\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)} = \sum_{k=1}^3 \left\langle \vec{u}_k, \mu_k\rho_k^{-1}A_k^{1/2}\vec{v}_k\right\rangle_{\vec{J}_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})}, \quad \forall \vec{u},\vec{v} \in \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1). \tag{3.157}$$

Отсюда, в частности, следует, что $A = \operatorname{diag}(\mu_k\rho_k^{-1}A_k)_{k=1}^3$.

Введем, наконец, те функциональные гильбертовы пространства, которые непосредственно связаны с исследуемой задачей (3.132)–(3.140). Это, во-первых, тот же набор полей скоростей $\vec{u} = \{\vec{u}_k\}_{k=1}^3$ из $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$, для которых выполнены первые условия связи полей на Γ_1 и Γ_2, т. е. первые условия (3.136). Совокупность таких наборов представляет собой подпространство

$$\vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1) := \Big\{ \vec{u} = \{\vec{u}_k\}_{k=1}^3 \in \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) : \gamma_{n,1}\vec{u}_1 := \vec{u}_1\cdot\vec{n}_1 = \vec{u}_2\cdot\vec{n}_1 =: \gamma_{n,1}\vec{u}_2 \ (\text{на } \Gamma_1),$$

$$\gamma_{n,2}\vec{u}_2 := \vec{u}_2\cdot\vec{n}_2 = \vec{u}_3\cdot\vec{n}_2 =: \gamma_{n,2}\vec{u}_3 \ (\text{на } \Gamma_2),\ \vec{n}_1 = \vec{n}_2 = \vec{e}_1^{\,3} \Big\} \subset \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1). \tag{3.158}$$

Во-вторых, это набор полей скоростей из $\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)$, для которого выполнены условия связи полей на Γ_1 и Γ_2 не только для нормальных компонент, но и для полей целиком, см. также (3.136):

$$\vec{J}^1_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1) := \{\vec{u} = \{\vec{u}_k\}_{k=1}^3 \in \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1) : \gamma_{11}\vec{u}_1 = \gamma_{12}\vec{u}_2 \text{ (на } \Gamma_1),$$
$$\gamma_{22}\vec{u}_2 = \gamma_{23}\vec{u}_3 \text{ (на } \Gamma_2)\} \subset \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1). \tag{3.159}$$

Эти два пространства далее играют основную роль в исследуемой проблеме. В частности, они образуют гильбертову пару пространств $(\vec{J}^1_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1); \vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1))$; порождающий оператор $\widetilde{A}$ этой пары является сужением оператора A (см. (3.158)) гильбертовой пары $(\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1); \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1))$ на такие наборы полей, для которых выполнены кинетические условия прилипания из (3.158), (3.159). Для оператора $\widetilde{A}$, как и выше (см. (3.154), (3.155)), выполнены тождества

$$(\vec{u},\vec{v})_{\vec{J}^1_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1)} = (\widetilde{A}^{1/2}\vec{u}, \widetilde{A}^{1/2}\vec{v})_{\vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1)} = \sum_{k=1}^3 \mu_k E_k(\vec{u},\vec{v}) = \left\langle \vec{u}, \widetilde{A}\vec{v}\right\rangle_{\vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1)} \quad \forall \vec{u},\, \vec{v} \in \vec{J}^1_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1). \tag{3.160}$$

3.3.3. Формулы действия ортопроекторов. В этом пункте приведем формулы действия ортопроектора

$$P_0 := P_{0,S_1,\Gamma} : \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \to \vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1) \tag{3.161}$$

(см. (3.146), (3.158)), а также соответствующего ортопроектора

$$P_1 := P^1_{0,S_1,\Gamma} : \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1) \to \vec{J}^1_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1) \tag{3.162}$$

(см. (3.148), (3.159)).

Для получения закона действия ортопроектора P_0 выясним сначала, каково ортогональное дополнение в $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ к подпространству $\vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1)$. Учтем структуру пространства $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$:

$$\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) = \bigoplus_{k=1}^3 (\vec{J}_0(\Omega_{1k}) \bigoplus \vec{G}_{h,S_{1k}}(\Omega_{1k})). \tag{3.163}$$

Напомним, что для элементов из $\vec{J}_0(\Omega_{1k})$ нормальные компоненты полей равны нулю на $\partial\Omega_{1k}$, $k = 1,2,3$. Отсюда получаем, что $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ имеет структуру

$$\vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1) = \left(\bigoplus_{k=1}^3 \vec{J}_0(\Omega_{1k})\right) \bigoplus \vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1), \tag{3.164}$$

$$\vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1) := \{\vec{u} = \{\vec{u}_k\}_{k=1}^3 : \vec{u}_k = \rho_k^{-1}\nabla\varphi_k, \quad \Delta\varphi_k = 0 \text{ (в } \Omega_k),$$
$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_{1k}), \quad \rho_1^{-1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \rho_2^{-1}\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \text{ (на } \Gamma_1), \quad \rho_2^{-1}\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \rho_3^{-1}\frac{\partial\varphi_3}{\partial n} \text{ (на } \Gamma_2)\}. \tag{3.165}$$

Лемма 3.10. *Элементы из* $(\vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1))^\perp$, *т. е. подпространства из пространства* $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) = \oplus_{k=1}^3 \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_{1k})$, *ортогонального к* $\vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1)$, *образуют множество*

$$(\vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1))^\perp = \big\{\{\nabla\psi_k\}_{k=1}^3 : \Delta\psi_k = 0 \text{ (в } \Omega_k), \quad \frac{\partial\psi_k}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_{1k})$$
$$\rho_1\psi_1 - \rho_2\psi_2 = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \quad \rho_2\psi_2 - \rho_3\psi_3 = 0 \text{ (на } \Gamma_3), \quad \vec{n}_1 = \vec{n}_2 = \vec{e}_1^{\,3}\big\}. \tag{3.166}$$

(Это простое утверждение доказывается с использованием обобщенной формулы Грина для оператора Лапласа применительно к областям Ω_k, $k = 1,2,3$.)

Опираясь на представление (3.166), получим закон действия P_0 из (3.161). Для любого $\vec{u} = \{\vec{u}_k\} \in \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ должно быть

$$P_0\vec{u} = P_0\{\vec{u}_k\}_{k=1}^3 = \{\vec{u}_k\}_{k=1}^3 - \{\nabla\psi_k\}_{k=1}^3 \in \vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1). \tag{3.167}$$

Для отыскания $\{\nabla\psi_k\}_{k=1}^3$ рассмотрим следующую вспомогательную задачу сопряжения для элементов из $(\vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1))^\perp$:

$$\Delta\psi_k = 0 \text{ (в } \Omega_{1k}), \quad \frac{\partial\psi_k}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_{1k}),$$

$$\rho_1\gamma_{11}\psi_1 = \rho_2\gamma_{12}\psi_2 =: \widetilde{\chi}_1 \text{ (на } \Gamma_1),$$
$$\rho_2\gamma_{22}\psi_2 = \rho_3\gamma_{23}\psi_3 =: \widetilde{\chi}_2 \text{ (на } \Gamma_2), \quad \gamma_{jk}\psi_k := \psi_k|_{\Gamma_j}, \tag{3.168}$$

где $\widetilde{\chi}_k$ считаем заданными функциями.

Будет рассматривать проблему (3.168) как задачу Зарембы для каждой из областей Ω_{1k}. Тогда задача

$$\Delta\psi_1 = 0 \text{ (в } \Omega_{11}), \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_{11}), \quad \gamma_{11}\psi_1 = \rho_1^{-1}\widetilde{\chi}_1 \text{ (на } \Gamma_1), \quad \int_{\Gamma_1}\widetilde{\chi}_1\,d\Gamma_1 = 0 \tag{3.169}$$

при условии $\widetilde{\chi}_1 \in H^{1/2}_{\Gamma_1}$ имеет единственное слабое решение

$$\nabla\psi_1 := Q_{11}(\rho_1^{-1}\widetilde{\chi}_1), \quad Q_{11} \in \mathcal{L}(H^{1/2}_{\Gamma_1}; \vec{G}_{h,S_{11}}(\Omega_{11})). \tag{3.170}$$

Аналогично для задачи

$$\Delta\psi_3 = 0 \text{ (в } \Omega_{13}), \quad \frac{\partial\psi_3}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_{13})$$
$$\gamma_{33}\psi_3 = \rho_3^{-1}\widetilde{\chi}_2 \text{ (на } \Gamma_2), \quad \int_{\Gamma_2}\widetilde{\chi}_2\,d\Gamma_2 = 0, \quad \vec{n} = \vec{e}_1^{\,3}, \tag{3.171}$$

при условии $\widetilde{\chi}_2 \in H^{1/2}_{\Gamma_2}$ имеем единственное слабое решение

$$\nabla\psi_3 := -Q_{33}(\rho_3^{-1}\widetilde{\chi}_2), \quad Q_{33} \in \mathcal{L}(H^{1/2}_{\Gamma_2}; \vec{G}_{h,S_{33}}(\Omega_{13})). \tag{3.172}$$

В области Ω_{12} решение будем разыскивать в виде суммы:

$$\psi_2 = \psi_{21} + \psi_{22},$$

где ψ_{21} и ψ_{22} — слабые решения следующих задач:

$$\Delta\psi_{21} = 0 \text{ (в } \Omega_{12}), \quad \frac{\partial\psi_{21}}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_{12}), \quad \gamma_{21}\psi_{21} = \rho_2^{-1}\widetilde{\chi}_1 \text{ (на } \Gamma_1), \quad \gamma_{22}\psi_{21} = 0 \text{ (на } \Gamma_2); \tag{3.173}$$

$$\Delta\psi_{22} = 0 \text{ (в } \Omega_{12}), \quad \frac{\partial\psi_{22}}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_{12}), \quad \gamma_{12}\psi_{22} = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \quad \gamma_{22}\psi_{22} = \rho_2^{-1}\widetilde{\chi}_2 \text{ (на } \Gamma_2). \tag{3.174}$$

Тогда аналогично предыдущему получаем

$$\nabla\psi_{21} = -Q_{21}(\rho_2^{-1}\widetilde{\chi}_1), \quad \nabla\psi_{22} = Q_{22}(\rho_2^{-1}\widetilde{\chi}_2), \tag{3.175}$$

$$Q_{21} \in \mathcal{L}(H^{1/2}_{\Gamma_1}; \vec{G}_{h,S_{12}}(\Omega_{12})), \quad Q_{22} \in \mathcal{L}(H^{1/2}_{\Gamma_2}; \vec{G}_{h,S_{12}}(\Omega_{12})). \tag{3.176}$$

Из (3.167) и (3.158) приходим к условиям

$$\gamma_{n,1}(P_0\vec{u})_1 = \gamma_{n,1}(P_0\vec{u})_2 \quad \text{(на } \Gamma_1), \quad \gamma_{n,2}(P_0\vec{u})_2 = \gamma_{n,2}(P_0\vec{u})_3 \quad \text{(на } \Gamma_2),$$

из которых следует, что

$$\gamma_{n,1}\nabla\psi_1 - \gamma_{n,1}\nabla\psi_2 = \gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \gamma_{n,2}\vec{u}_2 \quad \text{(на } \Gamma_1)$$
$$\gamma_{n,2}\nabla\psi_2 - \gamma_{n,2}\nabla\psi_3 = \gamma_{n,2}\vec{u}_2 - \gamma_{n,2}\vec{u}_3 \quad \text{(на } \Gamma_2). \tag{3.177}$$

Подставляя решения (3.170), (3.171) и (3.175) в эти условия и считая функции $\gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \gamma_{n,1}\vec{u}_2$ и $\gamma_{n,2}\vec{u}_2 - \gamma_{n,2}\vec{u}_3$ заданными, получим систему уравнений относительно $\widetilde{\chi}_1$ и $\widetilde{\chi}_2$:

$$(\rho_1^{-1}\gamma_{n,1}Q_{11} + \rho_2^{-1}\gamma_{n,1}Q_{21})\widetilde{\chi}_1 - \rho_2^{-1}\gamma_{n,1}Q_{22}\widetilde{\chi}_2 = \gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \gamma_{n,1}\vec{u}_2,$$
$$-\rho_2^{-1}\gamma_{n,2}Q_{21}\widetilde{\chi}_1 + (\rho_2^{-1}\gamma_{n,2}Q_{22} + \rho_3^{-1}\gamma_{n,2}Q_{33})\widetilde{\chi}_2 = \gamma_{n,2}\vec{u}_2 - \gamma_{n,3}\vec{u}_3. \tag{3.178}$$

Здесь операторная матрица

$$Q := \begin{pmatrix} (\rho_1^{-1}\gamma_{n,1}Q_{11} + \rho_2^{-1}\gamma_{n,1}Q_{21}) & \rho_2^{-1}\gamma_{n,1}Q_{22} \\ -\rho_2^{-1}\gamma_{n,2}Q_{21} & (\rho_2^{-1}\gamma_{n,2}Q_{22} + \rho_3^{-1}\gamma_{n,2}Q_{33}) \end{pmatrix} \tag{3.179}$$

— линейный ограниченный оператор, действующий из пространства $H^{1/2}_{\Gamma_1} \times H^{1/2}_{\Gamma_2}$ в пространство $\widetilde{H}^{-1/2}_{\Gamma_1} \times \widetilde{H}^{-1/2}_{\Gamma_2}$. Более того, можно доказать, что Q является положительным оператором, т. е.

$$\langle(\widetilde{\chi}_1; \widetilde{\chi}_2)^\tau, Q(\widetilde{\chi}_1; \widetilde{\chi}_2)^\tau\rangle_{L_{2,\Gamma_1}\oplus L_{2,\Gamma_2}} > 0, \quad 0 \neq (\widetilde{\chi}_1; \widetilde{\chi}_2)^\tau \in H^{1/2}_{\Gamma_1} \times H^{1/2}_{\Gamma_2}, \tag{3.180}$$

и отображает $H^{1/2}_{\Gamma_1} \times H^{1/2}_{\Gamma_2}$ на все $\widetilde{H}^{-1/2}_{\Gamma_1} \times \widetilde{H}^{-1/2}_{\Gamma_2}$. Отсюда по теореме Банаха получаем, что существует обратный оператор

$$Q^{-1} \in \mathcal{L}(\widetilde{H}^{-1/2}_{\Gamma_1} \times \widetilde{H}^{-1/2}_{\Gamma_2}; H^{1/2}_{\Gamma_1} \times H^{1/2}_{\Gamma_2}). \tag{3.181}$$

Следствием проведенного рассмотрения вспомогательной задачи является такое утверждение.

Лемма 3.11. *Ортопроектор $P_0 := P_{0,S_1,\Gamma} : \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \to \vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1)$ действует по закону*

$$\begin{aligned} P_0\vec{u} = \vec{u} - \big\{&\rho_1^{-1}Q_{11}p_1Q^{-1}(\gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \gamma_{n,1}\vec{u}_2; \gamma_{n,2}\vec{u}_2 - \gamma_{n,2}\vec{u}_3)^\tau; \\ &-\rho_2^{-1}Q_{21}p_1Q^{-1}(\gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \gamma_{n,1}\vec{u}_2; \gamma_{n,2}\vec{u}_2 - \gamma_{n,2}\vec{u}_3)^\tau \\ &\rho_2^{-1}Q_{22}p_2Q^{-1}(\gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \gamma_{n,1}\vec{u}_2; \gamma_{n,2}\vec{u}_2 - \gamma_{n,2}\vec{u}_3)^\tau; \\ &\rho_3^{-1}Q_{33}p_2Q^{-1}(\gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \gamma_{n,1}\vec{u}_2; \gamma_{n,2}\vec{u}_2 - \gamma_{n,2}\vec{u}_3)^\tau\big\}, \end{aligned} \tag{3.182}$$

где Q_{kj} — операторы вспомогательных задач Зарембы (см. (3.170), (3.172), (3.175)–(3.176)*), Q — операторная матрица* (3.179) *со свойствами* (3.181)*, а $p_k(\psi_1; \psi_2)^\tau := \psi_k$, $k = 1, 2,$ — операторы взятия k-той компоненты.*

Получим теперь формулу действия другого ортопроектора

$$P_1 := P^1_{0,S_1,\Gamma} : \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1) \to \vec{J}^1_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1).$$

При этом будем действовать по тому же плану, что и в начале этого пункта, но теперь применительно к пространству $\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)$.

Используя определение скалярного произведения в пространстве $\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)$ и соответствующие обобщенные формулы Грина для пространств $\vec{J}^1_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})$, приходим к следующему утверждению.

Лемма 3.12. *Ортогональное дополнение $(\vec{J}^1_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_2))^\perp$ к подпространству $(\vec{J}^1_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1))$ в пространстве $\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)$ состоит из слабых решений $\vec{v} = \{\vec{v}_k\}_{k=1}^3 \in \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)$ краевых задач*

$$\begin{gathered} P_{0,S_{1k}}(-\mu_k\Delta\vec{v}_k) + \nabla\widetilde{p}_k = \vec{0}, \quad \operatorname{div}\vec{v}_k = 0 \ (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{v}_k = \vec{0} \ (\text{на } S_{1k}), \quad k = 1, 2, 3; \\ -\widetilde{p}_1\delta_{j3} + \mu_1\tau_{j3}(\vec{v}_1) = -\widetilde{p}_2\delta_{j3} + \mu_2\tau_{j3}(\vec{v}_2), \quad j = 1, 2, 3 \quad (\text{на } \Gamma_1), \\ -\widetilde{p}_2\delta_{j3} + \mu_2\tau_{j3}(\vec{v}_2) = -\widetilde{p}_3\delta_{j3} + \mu_3\tau_{j3}(\vec{v}_2), \quad j = 1, 2, 3 \quad (\text{на } \Gamma_2), \end{gathered} \tag{3.183}$$

где $P_{0,S_{1k}}$ — ортогональные проекторы на $\vec{J}_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})$, а $\nabla\widetilde{p}_k := P_{0,S_{1k}}\nabla p_k \in \vec{G}_{h,S_{1k}}(\Omega_{1k})$.

Опираясь на последние уравнения, приходим к выводу, что

$$P_1\vec{u} = P_1\{\vec{u}\}_{k=1}^3 = \{\vec{u}\}_{k=1}^3 - \{\vec{v}\}_{k=1}^3 \in \vec{J}^1_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1), \tag{3.184}$$

где $\{\vec{v}\}_{k=1}^3$ — некоторое решение задачи (3.183).

Для нахождения соответствующего набора $\{\vec{v}_k\}_{k=1}^3$ сформулируем с учетом (3.183) следующие вспомогательные краевые задачи (их называют вспомогательными задачами С. Г. Крейна) для каждой из областей Ω_{1k}, $k = 1, 2, 3$:

$$\begin{gathered} P_{0,S_{11}}(-\mu_1\Delta\vec{v}_1) + \nabla\widetilde{p}_1 = \vec{0}, \quad \operatorname{div}\vec{v}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_{11}), \quad \vec{v}_1 = \vec{0} \quad (\text{на } S_{11}), \\ -\widetilde{p}_1\delta_{j3} + \mu_1\tau_{j3}(\vec{v}_1) = \chi_{1j} \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad j = 1, 2, 3; \end{gathered} \tag{3.185}$$

$$\begin{gathered} P_{0,S_{13}}(-\mu_3\Delta\vec{v}_3) + \nabla\widetilde{p}_3 = \vec{0}, \quad \operatorname{div}\vec{v}_3 = 0 \quad (\text{в } \Omega_{13}), \quad \vec{v}_3 = \vec{0} \quad (\text{в } S_{13}), \\ -\widetilde{p}_3\delta_{j3} + \mu_3\tau_{j3}(\vec{v}_3) = \chi_{2j} \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad j = 1, 2, 3; \end{gathered} \tag{3.186}$$

$$\begin{gathered} P_{0,S_{12}}(-\mu_2\Delta\vec{v}_2) + \nabla\widetilde{p}_2 = \vec{0}, \quad \operatorname{div}\vec{v}_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_{12}), \quad \vec{u}_2 = \vec{0} \quad (\text{в } S_{12}), \\ -\widetilde{p}_2\delta_{j2} + \mu_2\tau_{j3}(\vec{v}_2) = \chi_{1j} \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad -\widetilde{p}_2\delta_{j3} + \mu_2\tau_{j3}(\vec{v}_2) = \chi_{2j} \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad j = 1, 2, 3. \end{gathered} \tag{3.187}$$

Здесь χ_{1j} и χ_{2j} — соответствующие компоненты заданных векторов $\vec{\chi}_1$ и $\vec{\chi}_2$ следующего вида:

$$\begin{aligned} \vec{\chi}_1|_{\Gamma_1} &:= \{-\widetilde{p}_1\delta_{j3} + \mu_1\tau_{j3}(\vec{v}_1)\}_{j=1}^3 = \{-\widetilde{p}_2\delta_{j3} + \mu_2\tau_{j3}(\vec{v}_2)\}_{j=1}^3 \in \\ &\in H^{-1/2}_{\Gamma_1} \times H^{-1/2}_{\Gamma_1} \times H^{-1/2}_{\Gamma_1} = (\widetilde{H}^{1/2}_{\Gamma_1} \times \widetilde{H}^{1/2}_{\Gamma_1} \times \widetilde{H}^{1/2}_{\Gamma_1})^*; \\ \vec{\chi}_2|_{\Gamma_1} &:= \{-\widetilde{p}_2\delta_{j3} + \mu_2\tau_{j3}(\vec{v}_2)\}_{j=1}^3 = \{-\widetilde{p}_3\delta_{j3} + \mu_3\tau_{j3}(\vec{v}_3)\}_{j=1}^3 \in \\ &\in H^{-1/2}_{\Gamma_2} \times H^{-1/2}_{\Gamma_2} \times H^{-1/2}_{\Gamma_2} = (\widetilde{H}^{1/2}_{\Gamma_2} \times \widetilde{H}^{1/2}_{\Gamma_2} \times \widetilde{H}^{1/2}_{\Gamma_2})^*. \end{aligned} \tag{3.188}$$

Замечание 3.1. Здесь и далее символом “$\sim$” обозначен класс функций, продолжимых нулем на всю границу $\partial\Omega_{1k}$ до элементов класса $H^{1/2}(\partial\Omega_{1k})$, при этом $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1) = (H^{-1/2}(\Gamma_1))^*$, $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_2) = (H^{-1/2}(\Gamma_2))^*$, см. [17, 18].

Опираясь на обобщенные формулы Грина для соленоидальных векторных полей применительно к областям Ω_{1k}, можно установить, что задача (3.185) имеет слабое решение

$$\begin{gathered}\vec{v}_1 = \mu_1^{-1} V_{11} \vec{\chi}_1, \quad V_{11} \in \mathcal{L}(\vec{H}^{-1/2}(\Gamma_1);\ \vec{J}^1_{0,S_{11}}(\Omega_{11})),\\ \vec{H}^{-1/2}(\Gamma_1) := H^{-1/2}(\Gamma_1) \times H^{-1/2}(\Gamma_1) \times H^{-1/2}(\Gamma_1) =: (\vec{H}^{1/2}(\Gamma_1))^*.\end{gathered} \tag{3.189}$$

Аналогично задача (3.186) имеет слабое решение

$$\begin{gathered}\vec{v}_3 = -\mu_3^{-1} V_{32} \vec{\chi}_2, \quad V_{32} \in \mathcal{L}(\vec{H}^{-1/2}(\Gamma_2);\ \vec{J}^1_{0,S_{13}}(\Omega_{13})),\\ \vec{H}^{-1/2}(\Gamma_2) := H^{-1/2}(\Gamma_2) \times H^{-1/2}(\Gamma_2) \times H^{-1/2}(\Gamma_2) =: (\vec{H}^{1/2}(\Gamma_2))^*.\end{gathered} \tag{3.190}$$

Для задачи (3.187) будем искать решение в виде суммы:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{21} + \vec{v}_{22}, \quad \nabla\widetilde{p}_2 = \nabla\widetilde{p}_{21} + \nabla\widetilde{p}_{22}, \tag{3.191}$$

где $\vec{v}_{21}$ и $\nabla\widetilde{p}_{21}$ — искомые функции краевой задачи

$$\begin{gathered}P_{0,S_{12}}(-\mu_2\Delta\vec{v}_{21}) + \nabla\widetilde{p}_{21} = \vec{0}, \quad \operatorname{div}\vec{v}_{21} = 0 \quad (\text{в } \Omega_{12}), \quad \vec{v}_{21} = \vec{0} \quad (\text{на } S_{12}),\\ -\widetilde{p}_{21}\delta_{j3} + \mu_2\tau_{j3}(\vec{v}_{21}) = \chi_{1j} \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad -\widetilde{p}_{21}\delta_{j3} + \mu_2\tau_{j3}(\vec{v}_{21}) = 0 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad j = 1, 2, 3,\end{gathered} \tag{3.192}$$

а $\vec{v}_{22}$ и $\nabla\widetilde{p}_{22}$ — искомые функции задачи

$$\begin{gathered}P_{0,S_{12}}(-\mu_2\Delta\vec{v}_{22}) + \nabla\widetilde{p}_{22} = \vec{0}, \quad \operatorname{div}\vec{v}_{22} = 0 \quad (\text{в } \Omega_{12}), \quad \vec{v}_{22} = \vec{0} \quad (\text{на } S_{12})\\ -\widetilde{p}_{22}\delta_{j3} + \mu_2\tau_{j3}(\vec{v}_{22}) = 0 \quad (\text{на } \Gamma_1),\\ -\widetilde{p}_{22}\delta_{j3} + \mu_2\tau_{j3}(\vec{v}_{22}) = \chi_{2j} \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad j = 1, 2, 3.\end{gathered} \tag{3.193}$$

Тогда аналогично предыдущему имеем слабое решение

$$\begin{gathered}\vec{v}_2 = \vec{v}_{21} + \vec{v}_{22} = \mu_2^{-1}(-V_{21}\vec{\chi}_1 + V_{22}\vec{\chi}_2),\\ V_{21} \in \mathcal{L}\left((\vec{H}^{1/2}(\Gamma_1))^*;\ \vec{J}^1_{0,S_{12},\Gamma_1}(\Omega_{12})\right), \quad V_{22} \in \mathcal{L}\left((\vec{H}^{1/2}(\Gamma_2))^*;\ \vec{J}^1_{0,S_{12},\Gamma_2}(\Omega_{12})\right).\end{gathered} \tag{3.194}$$

Из представления (3.184) и определения (3.159) пространства $\vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega_1)$ получаем условия

$$\begin{gathered}\gamma_{11}\vec{v}_1 - \gamma_{12}\vec{v}_2 = \gamma_{11}\vec{u}_1 - \gamma_{12}\vec{u}_2 \quad (\text{на } \Gamma_1),\\ \gamma_{22}\vec{v}_2 - \gamma_{23}\vec{v}_3 = \gamma_{22}\vec{u}_2 - \gamma_{23}\vec{u}_3 \quad (\text{на } \Gamma_2).\end{gathered} \tag{3.195}$$

Считая здесь правые части заданными и используя представления решений в виде (3.189), (3.190), (3.194), приходим к системе линейных уравнений относительно $\vec{\chi}_1$ и $\vec{\chi}_2$:

$$\begin{gathered}(\mu_1^{-1}\gamma_{11}V_{11} + \mu_2^{-1}\gamma_{12}V_{21})\vec{\chi}_1 - \mu_2^{-1}\gamma_{12}V_{12}\vec{\chi}_2 = \gamma_{11}\vec{u}_1 - \gamma_{12}\vec{u}_2,\\ -\mu_2^{-1}\gamma_{22}V_{21}\vec{\chi}_1 + (\mu_2^{-1}\gamma_{22}V_{22} + \mu_3^{-1}\gamma_{23}V_{32})\vec{\chi}_2 = \gamma_{22}\vec{u}_2 - \gamma_{23}\vec{u}_3.\end{gathered} \tag{3.196}$$

Опираясь на свойства взаимной сопряженности операторов γ_{jk} и V_{kj}, которое имеет место для слабых решений вспомогательных краевых задач, можно проверить, что операторная матрица системы (3.196), т. е.

$$C := \begin{pmatrix} (\mu_1^{-1}\gamma_{11}V_{11} + \mu_2^{-1}\gamma_{12}V_{21}) & -\mu_2^{-1}\gamma_{12}V_{12}\\ -\mu_2^{-1}\gamma_{22}V_{21} & (\mu_2^{-1}\gamma_{22}V_{22} + \mu_3^{-1}\gamma_{23}V_{32})\end{pmatrix} \tag{3.197}$$

принадлежит пространству $\mathcal{L}\left((\vec{H}^{1/2}(\Gamma_1) \times \vec{H}^{1/2}(\Gamma_2))^*; \vec{H}^{1/2}(\Gamma_1) \times \vec{H}^{1/2}(\Gamma_2)\right)$, является положительной и отображает первое пространство на второе. Отсюда по теореме Банаха получаем, что существует

$$C^{-1} \in \mathcal{L}\left(\vec{H}^{1/2}(\Gamma_1) \times \vec{H}^{1/2}(\Gamma_2); (\vec{H}^{1/2}(\Gamma_1) \times \vec{H}^{1/2}(\Gamma_2))^*\right), \tag{3.198}$$

и поэтому система уравнений имеет единственное решение $\{\vec{\chi}_1; \vec{\chi}_2\}$, принадлежащее пространству $\vec{H}^{1/2}(\Gamma_1) \times \vec{H}^{1/2}(\Gamma_2)$.

Лемма 3.13. *Оператор* $P_1 = P^1_{0,S_1,\Gamma} : \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1) \to \vec{J}^1_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1)$ *действует по закону*

$$P_1\vec{u} = \vec{u} - \Big(\mu_1^{-1}V_{11}p_1C^{-1}(\gamma_{11}\vec{u}_1 - \gamma_{12}\vec{u}_2; \gamma_{22}\vec{u}_2 - \gamma_{23}\vec{u}_3)^\tau;$$

$$-\mu_2^{-1}V_{21}p_1C^{-1}(\gamma_{11}\vec{u}_1 - \gamma_{12}\vec{u}_2; \gamma_{22}\vec{u}_2 - \gamma_{23}\vec{u}_3)^\tau + \mu_2^{-1}V_{22}p_2C^{-1}(\gamma_{11}\vec{u}_1 - \gamma_{12}\vec{u}_2; \gamma_{22}\vec{u}_2 - \gamma_{23}\vec{u}_3)^\tau; \quad (3.199)$$

$$-\mu_3^{-1}V_{32}p_2C^{-1}(\gamma_{11}\vec{u}_1 - \gamma_{12}\vec{u}_2; \gamma_{22}\vec{u}_2 - \gamma_{23}\vec{u}_3)^\tau\Big),$$

где $C > 0$ — *операторная матрица* (3.197), V_{jk} — *операторы сформулированных выше вспомогательных краевых задач, а* $p_k(\vec{\psi}_1; \vec{\psi}_2)^\tau =: \vec{\psi}_k$, $k = 1, 2,$ — *операторы взятия* k*-той компоненты столбца.*

3.3.4. Применение операторного подхода. Преобразование уравнения движения жидкостей. Преобразуем уравнение движения жидкостей в полости маятника (см. (3.134)) с учетом граничных условий к дифференциально-операторному уравнению в гильбертовом пространстве. Будем считать, что все функции, зависящие от времени, суть функции переменной t со значениями в соответствующем гильбертовом пространстве.

Будем считать, что каждое слагаемое в k-том уравнении движения является элементом пространства $\vec{L}_2(\Omega_{1k})$. Действуя ортопроектором $P_{0,S_{1k}} : \vec{L}_2(\Omega_{1k}) \to \vec{J}_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})$ и объединяя эти уравнения в виде одного набора, будем иметь

$$\left\{\frac{d\vec{u}_k}{dt}\right\}_{k=1}^3 + \left\{P_{0,S_{1k}}(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_{1k})\right\}_{k=1}^3 + \{P_{0,S_{1k}}(\rho_k^{-1}\nabla p_k)\}_{k=1}^3 - \{\mu_k\rho_k^{-1}P_{0,S_{1k}}\Delta\vec{u}_k\}_{k=1}^3 = \{P_{0,S_{2k}}\vec{f}\}_{k=1}^3. \quad (3.200)$$

Действуя еще ортопроектором $P_0 : \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \ \to \ \vec{J}_{0,S_1\Gamma}(\Omega_2)$, придем к уравнению

$$\begin{aligned} &\frac{d\vec{u}}{dt} + P_0\{P_{0,S_{1k}}(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_{1k})\}_{k=1}^3 + P_0\{\rho_k^{-1}\nabla\widetilde{p}_k\}_{k=1}^3 - \\ &- P_0\{\mu_k\rho_k^{-1}P_{0,S_{1k}}(\Delta\vec{u}_k)\}_{k=1}^3 = P_0\{P_{0,S_{1k}}\vec{f}_k\} = P_0\{\vec{f}_k\}_{k=1}^3, \end{aligned} \quad (3.201)$$

$$\rho_k^{-1}\nabla\widetilde{p}_k := P_{0,S_{1k}}(\rho_k^{-1}\nabla p_k).$$

(Проектирование с помощью оператора $I_0 - P_0$ дает лишь тривиальные связи и не учитывается в дальнейшем.)

Все слагаемые в (3.134) теперь являются элементами из $\vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1)$. Преобразуем это уравнение с учетом граничных условий, введя оператор $\widetilde{A}$ гильбертовой пары $(\vec{J}^1_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1);\ \vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1))$. С этой целью представим набор $P_0\{\rho_k^{-1}\nabla\widetilde{p}_k\}_{k=1}^3$ в виде

$$P_0\{\rho_k^{-1}\nabla\widetilde{p}_k\}_{k=1}^3 = \{\rho_k^{-1}\nabla p_{1k}\}_{k=1}^3 + P_0\{\rho_k^{-1}\nabla p_{2k}\}_{k=1}^3$$

и будем считать, что наборы

$$\{\vec{u}_k\}_{k=1}^3, \quad \{\rho_k^{-1}\nabla p_{1k}\}_{k=1}^3$$

являются решениями *первой вспомогательной задачи*

$$-P_0\big\{\mu_k\rho_k^{-1}P_{0,S_{1k}}(\Delta\vec{u}_k)\big\}_{k=1}^3 + \{\rho_k^{-1}\nabla p_{1k}\}_{k=1}^3 =$$

$$= -\frac{d\vec{u}}{dt} - P_0\big\{P_{0,S_{1k}}(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_{1k})\big\}_{k=1}^3 - \{\rho_k^{-1}\nabla p_{2k}\}_{k=1}^3 + P_0\{\vec{f}_k\}_{k=1}^3,$$

$$\vec{u}_k = \vec{0} \quad (\text{на } S_{1k}), \quad k = 1, 2, 3, \quad (3.202)$$

$$\mu_1\tau_{j3}(\vec{u}_1) - \mu_2\tau_{j3}(\vec{u}_2) = 0 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \mu_2\tau_{j3}(\vec{u}_2) - \mu_3\tau_{j3}(\vec{u}_3) = 0 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad j = 1, 2,$$

$$[-p_{11} + \mu_1\tau_{33}(\vec{u}_1)] - [-p_{12} + \mu_2\tau_{33}(\vec{u}_2)] = 0 \quad (\text{на } \Gamma_1),$$

$$[-p_{12} + \mu_2\tau_{j3}(\vec{u}_2)] - [-p_{13} + \mu_3\tau_{j3}(\vec{u}_2)] = 0 \quad (\text{на } \Gamma_2).$$

При этом второй набор $\{\rho_k^{-1}\nabla p_{2k}\}_{k=1}^3$ является решением *второй вспомогательной задачи* для потенциалов (задачи Стеклова):

$$
\begin{aligned}
\Delta p_{2k} = 0 \quad (\text{в } \Omega_{1k}), \quad \frac{\partial p_{2k}}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_{1k}), \quad k = 1,2,3,\\
\rho_1^{-1}\frac{\partial p_{21}}{\partial n} = \rho_2^{-1}\frac{\partial p_{22}}{\partial n} =: \xi_1 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \vec{n} = \vec{e}_1^{\,3};\\
\rho_2^{-1}\frac{\partial p_{22}}{\partial n} = \rho_3^{-1}\frac{\partial p_{23}}{\partial n} =: \xi_2 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad \vec{n} = \vec{e}_1^{\,3};\\
p_{21} - p_{22} = (\rho_1 - \rho_2)\widehat{\zeta}_1 := g(\rho_1 - \rho_2)[\zeta_1 + \theta_1((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11})\cdot \vec{e}_1^{\,3})] \quad (\text{на } \Gamma_1),\\
p_{22} - p_{23} = (\rho_2 - \rho_3)\widehat{\zeta}_2 := g(\rho_2 - \rho_3)[\zeta_2 + \theta_2((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{12})\cdot \vec{e}_1^{\,3})] \quad (\text{на } \Gamma_2).
\end{aligned}
\tag{3.203}
$$

(Нетрудно проверить, что сумма решений первой и второй вспомогательных задач дает решение исходной задачи.)

Рассмотрим сначала вторую вспомогательную задачу. Пусть элементы ξ_j известны. Тогда для слабых решений из пространства $H^1(\Omega_{1k})$ и из граничных условий на S_{1k} получаем, что ξ_j должны принадлежать классам

$$
\widetilde{H}_{\Gamma_j}^{-1/2} = (H_{\Gamma_j}^{1/2})^* = (H_{\Gamma_j}^{1/2} \cap L_{2,\Gamma_j})^*, \quad j = 1,2. \tag{3.204}
$$

Здесь для нахождения функции p_{2k} возникают три вспомогательные задачи Неймана. Для их слабых решений, аналогично ходу доказательства леммы 3.2, будем иметь

$$
\begin{aligned}
p_{12}|_{\Omega_{11}} = \rho_1 V_{11}\xi_1 + c_1, \quad p_{23}|_{\Omega_{13}} = -\rho_3 V_{32}\xi_2 + c_2, \quad \int\limits_{\Gamma_1} p_{21}\,d\Gamma_1 = 0, \quad \int\limits_{\Gamma_2} p_{23}\,d\Gamma_2 = 0,\\
p_{22}|_{\Omega_{12}} = \rho_2 V_{22}\xi_2 - \rho_2 V_{21}\xi_1, \quad \int\limits_{\Gamma_2} (V_{22}\xi_2)\,d\Gamma_2 = 0, \quad \int\limits_{\Gamma_1} (V_{21}\xi_1)\,d\Gamma_1 = 0,
\end{aligned}
\tag{3.205}
$$

где c_j — константы. Из того представления получаем, что последние граничные условия из (3.203) можно переписать в виде матричного соотношения

$$
\begin{pmatrix} \rho_1\gamma_{11}V_{11} + \rho_2\gamma_{12}V_{21} & -\rho_2\theta_1(\gamma_{12}V_{22}) \\ -\rho_2\theta_2(\gamma_{22}V_{21}) & \rho_2\gamma_{22}V_{22} + \rho_3\gamma_{23}V_{32} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \xi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} (\rho_1 - \rho_2)\widehat{\zeta}_1 \\ (\rho_2 - \rho_3)\widehat{\zeta}_2 \end{pmatrix}. \tag{3.206}
$$

Здесь, как и выше (см. (3.197)), операторная матрица

$$
C = \begin{pmatrix} \rho_1\gamma_{11}V_{11} + \rho_2\gamma_{12}V_{21} & -\rho_2\theta_1(\gamma_{12}V_{22}) \\ -\rho_2\theta_2(\gamma_{22}V_{21}) & \rho_2\gamma_{22}V_{22} + \rho_3\gamma_{23}V_{32} \end{pmatrix} \tag{3.207}
$$

является положительной, действующей из $\widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2} \times \widetilde{H}_{\Gamma_2}^{-1/2}$ на сопряженное пространство $H_{\Gamma_1}^{1/2} \times H_{\Gamma_2}^{1/2}$. Отсюда получаем, что существует обратная операторная матрица

$$
C^{-1} \in \mathcal{L}(H_{\Gamma_1}^{1/2} \times H_{\Gamma_2}^{1/2};\ \widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2} \times \widetilde{H}_{\Gamma_2}^{-1/2}). \tag{3.208}
$$

Поэтому слабое решение второй вспомогательной задачи (3.203) находится однозначно и имеет вид

$$
\begin{aligned}
\{\rho_k^{-1}\nabla p_{2k}\}_{k=1}^3 = gQ\{\widehat{\zeta}_j\}_{j=1}^2 = gQ\{\zeta_j + \theta_j((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{1j})\cdot \vec{e}_1^{\,3})\}_{j=1}^2,\\
Q \in \mathcal{L}(H_{\Gamma_1}^{1/2} \times H_{\Gamma_2}^{1/2};\ \vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1)), \quad \vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1) \subset \vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1).
\end{aligned}
\tag{3.209}
$$

Введем теперь оператор нормального следа на границах раздела жидкостей:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\gamma}_n\vec{u} := \{\gamma_{n,1}\vec{u}_1; \gamma_{n,2}\vec{u}_2\} = \{(\vec{u}_j \cdot \vec{e}_j^{\,3})|_{\Gamma_j}\}_{j=1}^2, \quad \vec{u} = \{\vec{u}_k\}_{k=1}^3 \in \vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1),\\
\widehat{\gamma}_n \in \mathcal{L}(\vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1);\ \widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2} \times \widetilde{H}_{\Gamma_2}^{-1/2}).
\end{aligned}
\tag{3.210}
$$

Лемма 3.14. *Имеет место соотношение*

$$
Q^* = \{(\rho_j - \rho_{j+1})\}_{j=1}^2\widehat{\gamma}_n. \tag{3.211}
$$

Доказательство. Пусть $\zeta := \{\zeta_j\}_{j=1}^2 \in H_{\Gamma_1}^{1/2} \times H_{\Gamma_2}^{1/2}$, $Q\zeta = \{\rho_k^{-1}\nabla\varphi_k\}_{k=1}^3 \in \vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1)$, $\vec{\eta} = \{\vec{\eta}_k\}_{k=1}^3 \in \vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1)$. Тогда с учетом обобщенной формулы Грина для негладких полей (см., например, [18])

$$(\nabla\varphi_k, \vec{\eta}_k)_{\vec{L}_2(\Omega_{1k})} + \langle\varphi_k, \operatorname{div}\vec{\eta}_k\rangle_{\vec{L}_2(\Omega_{1k})} = \langle\gamma\varphi_k, \vec{\eta}_k\cdot\vec{n}\rangle_{\vec{L}_2(\partial\Omega_{1k})}, \quad \forall\vec{\eta}_k \in \vec{L}_2(\Omega_{1k}),\ \varphi_k \in H^1(\Omega_{1k}), \tag{3.212}$$

где оператор γ — оператор следа на $\partial\Omega_{1k}$ получаем, что для выбранных выше элементов выполнено равенство

$$\begin{aligned}(Q\zeta, \vec{\eta})_{\vec{L}_2(\Omega_{1k})} &= \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_{1k}} \rho_k^{-1}\nabla\varphi_k \cdot \overline{\vec{\eta}_k}\, d\Omega_{1k} = \\
&= [\langle\gamma_{11}\varphi_1, \gamma_{n,1}\vec{\eta}_1\rangle_{L_2(\Gamma_1)} - \langle\gamma_{12}\varphi_2, \gamma_{n,1}\vec{\eta}_2\rangle_{L_2(\Gamma_1)}] + [\langle\gamma_{22}\varphi_2, \gamma_{n,2}\vec{\eta}_2\rangle_{L_2(\Gamma_2)} - \langle\gamma_{23}\varphi_3, \gamma_{n,2}\vec{\eta}_3\rangle_{L_2(\Gamma_2)}] = \\
&= \langle\gamma_{11}\varphi_1 - \gamma_{12}\varphi_2, \gamma_{n,1}\vec{\eta}_1\rangle_{L_2(\Gamma_1)} + \langle\gamma_{22}\varphi_2 - \gamma_{23}\varphi_3, \gamma_{n,2}\vec{\eta}_2\rangle_{L_2(\Gamma_2)} = \\
&= (\rho_1 - \rho_2)\langle\zeta_1, \gamma_{n,1}\vec{\eta}_1\rangle_{L_2(\Gamma_1)} + (\rho_2 - \rho_3)\langle\zeta_2, \gamma_{n,2}\vec{\eta}_2\rangle_{L_2(\Gamma_2)} =: \langle\zeta, Q^*\vec{\eta}\rangle_{L_2(\Gamma)}.\end{aligned} \tag{3.213}$$

□

Вопрос о разрешимости первой вспомогательной задачи (3.202) рассмотрим позже.

3.3.5. Преобразование кинематических граничных условий. Здесь рассуждения подобны тем, которые были проделаны в пункте 3.2.6 для случая двух несмешивающихся жидкостей.

Если выполнены кинематические условия (3.136), (3.137), т. е.

$$\begin{aligned}&\frac{d\zeta_1}{dt} - \gamma_{n,1}\vec{u}_1 = 0 \quad (\text{на } \Gamma_1), \qquad \frac{d\zeta_2}{dt} - \gamma_{n,2}\vec{u}_2 = 0 \quad (\text{на } \Gamma_2),\\
&\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_1 - P_2\vec{\omega}_1 = 0,\end{aligned} \tag{3.214}$$

то выполнены также условия

$$\begin{aligned}&[\rho_1 - \rho_2]\left\{\left[\frac{d\zeta_1}{dt} - \gamma_{n,1}\vec{u}_1\right] + \left[\frac{d}{dt}\theta_1((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3}) - \theta_1((P_2\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\right]\right\} = 0,\\
&[\rho_2 - \rho_3]\left\{\left[\frac{d\zeta_2}{dt} - \gamma_{n,2}\vec{u}_2\right] + \left[\frac{d}{dt}\theta_2((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{12})\cdot\vec{e}_1^{\,3}) - \theta_2((P_2\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{12})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\right]\right\} = 0,\\
&-(\rho_1 - \rho_2)\int_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_{11})\left[\frac{d\zeta_1}{dt} - \gamma_{n,1}\vec{u}_2\right] d\Gamma_1 -\\
&-(\rho_2 - \rho_3)\int_{\Gamma_2}(\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_{12})\left[\frac{d\zeta_2}{dt} - \gamma_{n,2}\vec{u}_2\right] d\Gamma_2 + m_1 l_1\left[\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_1 - P_2\vec{\omega}_1\right] = \vec{0}.\end{aligned} \tag{3.215}$$

Введем, как и в пункте 3.2.6, осевые моменты инерции границ раздела Γ_1 и Γ_2:

$$\beta_{jl}^{(k)} = \beta_{lj}^{(k)} := \int_{\Gamma_k} x_k^j \theta_k(x_k^l)\, d\Gamma_k, \quad j, l = 1, 2, \quad k = 1, 2.$$

Лемма 3.15. *Если выполнено условие*

$$\Delta_2 := \det\begin{pmatrix} m_1 l_1 - [(\rho_1 - \rho_2)\beta_{22}^{(1)} + (\rho_2 - \rho_3)\beta_{22}^{(2)}] & (\rho_1 - \rho_2)\beta_{21}^{(1)} + (\rho_2 - \rho_3)\beta_{21}^{(2)} \\ (\rho_1 - \rho_2)\beta_{12}^{(1)} + (\rho_2 - \rho_3)\beta_{12}^{(2)} & m_1 l_1 - [(\rho_1 - \rho_2)\beta_{11}^{(1)} + (\rho_2 - \rho_3)\beta_{11}^{(2)}] \end{pmatrix} \neq 0, \tag{3.216}$$

то условия (3.214) *и* (3.215) *равносильны.*

Доказательство. В правую сторону импликация (3.214) ⇒(3.215) уже проведена. Проверим ее в левую сторону. Для этого обозначим

$$\varphi_1 := \frac{d\zeta_1}{dt} - \gamma_{n,1}\vec{u}_1, \quad \varphi_2 := \frac{d\zeta_2}{dt} - \gamma_{n,2}\vec{u}_2, \quad \vec{\psi}_1 := \frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_1 - P_2\vec{\omega}_1. \tag{3.217}$$

Тогда из (3.215) получаем однородную систему уравнений

$$\begin{gathered}\varphi_1+\theta_1((\vec{\psi}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})=0,\quad \varphi_2+\theta_2((\vec{\psi}_1\times\vec{r}_{12})\cdot\vec{e}_1^{\,3})=0,\\ -(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\varphi_1\,d\Gamma_1-(\rho_2-\rho_3)\int\limits_{\Gamma_2}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{12})\varphi_2\,d\Gamma_2+m_1l_1\vec{\psi}_1=\vec{0}.\end{gathered}\tag{3.218}$$

Отсюда приходим к уравнению для $\vec{\psi}_1$:

$$\begin{gathered}m_1l_1\vec{\psi}_1+(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\left[\theta_1((\vec{\psi}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\right]\,d\Gamma_1+\\ +(\rho_2-\rho_3)\int\limits_{\Gamma_2}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{12})\left[\theta_2((\vec{\psi}_1\times\vec{r}_{12})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\right]\,d\Gamma_2=\vec{0}.\end{gathered}\tag{3.219}$$

Представим $\vec{\psi}_1$ в виде $\vec{\psi}_1=\sum\limits_{j=1}^{2}\psi_{1j}\vec{e}_1^{\,j}$ и учтем, что

$$\begin{gathered}\vec{r}_{1j}\times\vec{e}_1^{\,3}=x_j^2\vec{e}_1^{\,1}-x_j^1\vec{e}_1^{\,2},\quad \theta_1((\vec{\psi}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})=\psi_{11}(\theta_1x_1^2)-\psi_{12}(\theta_1x_1^1),\\ \theta_2((\vec{\psi}_1\times\vec{r}_{12})\cdot\vec{e}_1^{\,3})=\psi_{11}(\theta_2x_2^2)-\psi_{12}(\theta_2x_2^1).\end{gathered}\tag{3.220}$$

Тогда проекции векторного соотношения (3.219) дают однородную систему уравнений относительно ψ_{11} и ψ_{12} с определителем $\Delta_2\neq0$. Отсюда получаем, что $\vec{\psi}_1=\vec{0}$, $\varphi_1=\varphi_2=0$. □

Введем теперь, опираясь на новые кинематические соотношения (3.215), оператор потенциальной энергии системы, который на кинематических переменных

$$z_2:=(\{\zeta_j\}_{j=1}^2;\ P_2\vec{\omega}_1)^\tau\in\mathcal{H}_2=(L_{2,\Gamma_1}\oplus L_{2,\Gamma_2})\oplus\mathbb{C}^2\tag{3.221}$$

действует по закону

$$C_2z_2:=\begin{pmatrix}\left\{(\rho_j-\rho_{j+1})[\zeta_j+\theta_j((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{1j})\cdot\vec{e}_1^{\,3})]\right\}_{j=1}^2\\ -(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\zeta_1\,d\Gamma_1-(\rho_2-\rho_3)\int\limits_{\Gamma_2}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{12})\zeta_2\,d\Gamma_2+m_1l_1P_2\vec{\delta}_1\end{pmatrix}.\tag{3.222}$$

Лемма 3.16. *Оператор потенциальной энергии* (3.222) *ограничен и самосопряжен в* $\mathcal{H}_2$; *при условии* (3.216) *он имеет ограниченный обратный.*

Доказательство. Ограниченность C_2 следует из его определения, а ограниченная обратимость — из условия (3.216). Проверим свойство его самосопряженности:

$$\begin{gathered}(C_2z_2,z_2)_{\mathcal{H}_2}=(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}\left[\zeta_1+\theta_1((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\right]\overline{\zeta_1}\,d\Gamma_1+\\ +(\rho_2-\rho_3)\int\limits_{\Gamma_2}\left[\zeta_2+\theta_2((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{12})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\right]\overline{\zeta_2}\,d\Gamma_2-\\ -(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\zeta_1\,d\Gamma_1\cdot\overline{P_2\vec{\delta}_1}-(\rho_2-\rho_3)\int\limits_{\Gamma_2}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{12})\zeta_2\,d\Gamma_2\cdot\overline{P_2\vec{\delta}_1}+m_1l_1|P_2\vec{\delta}_1|^2=\\ =(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}\left[|\zeta_1|^2+2\mathrm{Re}\,(\overline{\zeta_1}\theta_1((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3}))\right]\,d\Gamma_1+\\ +(\rho_2-\rho_3)\int\limits_{\Gamma_2}\left[|\zeta_2|^2+2\mathrm{Re}\,(\overline{\zeta_2}\theta_2((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{12})\cdot\vec{e}_1^{\,3}))\right]\,d\Gamma_2+m_1l_1|P_2\vec{\delta}_1|^2=\\ =(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}\left[|\zeta_1+\theta_1((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{11})|^2-|\theta_1((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{11})\vec{e}_1^{\,3})|^2\right]\,d\Gamma_1+\end{gathered}$$

$$+ (\rho_2 - \rho_3) \int\limits_{\Gamma_2} \Big[|\zeta_2 + \theta_2((P_2\vec{\delta}_1 \vec{r}_{12}) \cdot \vec{e}_1^{\,3})|^2 - |\theta_2((P_2\vec{\delta}_1 \vec{r}_{12}) \cdot \vec{e}_1^{\,3})|^2 \Big] \, d\Gamma_2 + m_1 l_1 |P_2 \vec{\delta}_1|^2 \in \mathbb{R}. \quad (3.223)$$

□

Лемма 3.17. *Для того, чтобы оператор потенциальной энергии C_2 был неотрицателен, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\Delta_1 := m_1 l_1 - [(\rho_1 - \rho_2)\beta_{11}^1 + (\rho_2 - \rho_3)\beta_{11}^2] \geqslant 0, \quad \Delta_2 \geqslant 0. \quad (3.224)$$

Для положительной определенности оператора C_2 необходимо и достаточно выполнение условий

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0. \quad (3.225)$$

Доказательство. Оно проводится по тому же плану, что и в лемме 3.7, с некоторыми заменами обозначений. □

Возвращаясь к эквивалентным кинематическим условиям (3.215), приходим к выводу, что эти условия дают операторное уравнение

$$gC_2 \frac{dz_2}{dt} + gB_{21} z_1 = 0 \quad (3.226)$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_2$. При этом

$$z_1 := \big(\{\vec{u}_k\}_{k=1}^3; \ \vec{\omega}_1\big)^\tau \in \mathcal{H}_1 = \vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3 \quad (3.227)$$

— динамические переменные системы, а

$$B_{21} z_1 := \begin{pmatrix} \Big\{ -(\rho_j - \rho_{j+1})[\gamma_{n,j}\vec{u}_j + \theta_j((P_2\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1j}) \cdot \vec{e}_j^{\,3})] \Big\}_{j=1}^2 \\ \sum\limits_{j=1}^2 (\rho_j - \rho_{j+1}) \int\limits_{\Gamma_j} \big(\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_{1j}\big) \gamma_{n,j}\vec{u}_j \, d\Gamma_j - m_1 l_1 P_2 \vec{\omega}_1 \end{pmatrix}, \quad (3.228)$$

$$\mathcal{D}(B_{21}) := \Big\{ z_1 = \{\vec{u}; \vec{\omega}_1\}^\tau \in \mathcal{H}_1 : \vec{u} = \{\vec{u}_k\}_{k=1}^3 \in \vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1), \quad \gamma_{n,j}\vec{u}_j \in L_{2,\Gamma_j}, \ j = 1, 2 \Big\}. \quad (3.229)$$

Оператор $B_{21} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ является элементом оператора обмена энергией изучаемой гидромеханической системы; вместе с оператором $B_{12} : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ он составит в дальнейшем весь оператор обмена между кинетической и потенциальной энергиями (см. ниже, а также пункт 3.2.7).

3.3.6. Переход к задаче Коши для системы дифференциально-операторных уравнений первого порядка. Вернемся теперь к рассмотрению первой вспомогательной задачи, т. е. задачи (3.202), считая, что первая часть $\vec{h}$ в уравнении является элементом пространства $\vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1)$. Покажем, что эту задачу можно кратко переписать в виде

$$\widetilde{A}\vec{u} = \vec{h}, \quad \vec{u} \in \mathcal{D}(\widetilde{A}), \quad \vec{h} \in \vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1), \quad (3.230)$$

где $\widetilde{A}$ — оператор гильбертовой пары $(\vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1); \ \vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1))$, (см. (3.157), (3.158)).

С этой целью воспользуемся формулами Грина (см. [18, с. 81]) для векторного оператора Лапласа применительно к областям Ω_{1k} (с липшицевыми границами, разбитыми на липшицевые куски).

Имеем для соленоидальных полей:

$$\mu_1 E_1(\vec{\eta}_1, \vec{u}_1) = \langle \vec{\eta}_1, -\mu_1 P_{0,S_{11}}(\Delta\vec{u}_1) + \nabla\widetilde{p}_{11} \rangle_{\vec{L}_2(\Omega_{11})} + \\ + \sum_{j=1}^3 \langle \gamma_{S_{11}} \eta_{1j}, \ \sum_{k=1}^3 (\mu_1 \tau_{jk}(\vec{u}_1) - \widetilde{p}_{11}\delta_{jk}) \cos(\vec{n}, \widehat{\ } \vec{e}_1^{\,k}) \rangle_{L_2(S_{11})} + \\ + \sum_{j=1}^3 \langle \gamma_{\Gamma_1} \eta_{1j}, \ \sum_{k=1}^3 (\mu_1 \tau_{jk}(\vec{u}_1) - \widetilde{p}_{11}\delta_{jk}) \cos(\vec{n}, \widehat{\ } \vec{e}_1^{\,k}) \rangle_{L_2(\Gamma_1)}; \quad (3.231)$$

$$\mu_2 E_2(\vec{\eta}_2, \vec{u}_2) = \langle \vec{\eta}_2, -\mu_2 P_{0,S_{12}}(\Delta\vec{u}_2) + \nabla\widetilde{p}_{12} \rangle_{\vec{L}_2(\Omega_{12})} +$$

$$+\sum_{j=1}^{3}\langle\gamma_{S_{12}}\eta_{2j},\ \sum_{k=1}^{3}(\mu_2\tau_{jk}(\vec{u}_2)-\widetilde{p}_{12}\delta_{jk})\cos(\vec{n},\hat{}\ \vec{e}_1^{\,k})\rangle_{L_2(S_{12})}+$$
$$+\sum_{j=1}^{3}\langle\gamma_{\Gamma_2}\eta_{2j},\ \sum_{k=1}^{3}(\mu_2\tau_{jk}(\vec{u}_2)-\widetilde{p}_{12}\delta_{jk})\cos(\vec{n},\hat{}\ \vec{e}_1^{\,k})\rangle_{L_2(\Gamma_2)}-$$
$$-\sum_{j=1}^{3}\langle\gamma_{\Gamma_1}\eta_{2j},\ \sum_{k=1}^{3}(\mu_2\tau_{jk}(\vec{u}_2)-\widetilde{p}_{12}\delta_{jk})\cos(\vec{n},\hat{}\ \vec{e}_1^{\,k})\rangle_{L_2(\Gamma_1)};\quad(3.232)$$

$$\mu_3E_3(\vec{\eta}_3,\vec{u}_3)=\langle\vec{\eta}_3,-\mu_3P_{0,S_{13}}(\Delta\vec{u}_3)+\nabla\widetilde{p}_{13}\rangle_{\vec{L}_2(\Omega_{13})}+$$
$$+\sum_{j=1}^{3}\langle\gamma_{S_{13}}\eta_{3j},\ \sum_{k=1}^{3}(\mu_3\tau_{jk}(\vec{u}_3)-\widetilde{p}_{13}\delta_{jk})\cos(\vec{n},\hat{}\ \vec{e}_1^{\,k})\rangle_{L_2(S_{13})}-$$
$$-\sum_{j=1}^{3}\langle\gamma_{\Gamma_2}\eta_{3j},\ \sum_{k=1}^{3}(\mu_3\tau_{jk}(\vec{u}_3)-\widetilde{p}_{13}\delta_{jk})\cos(\vec{n},\hat{}\ \vec{e}_1^{\,k})\rangle_{L_2(\Gamma_2)}.\quad(3.233)$$

Из этих формул следует, что для полей $\vec{u}=\{\vec{u}_k\}_{k=1}^3\in\vec{J}^1_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1)$ справедлива формула Грина

$$\sum_{k=1}^{3}\mu_kE_k(\vec{\eta}_k,\vec{u}_k)=\sum_{k=1}^{3}\langle\vec{\eta}_k,-\mu_kP_{0,S_{1k}}(\Delta\vec{u}_k)+\nabla\widetilde{p}_{1k}\rangle_{\vec{L}_2(\Omega_{1k})}+$$
$$+\sum_{j=1}^{3}\langle\gamma_{\Gamma_1}\eta_{1j},\ \sum_{k=1}^{3}\{(\mu_1\tau_{jk}(\vec{u}_1)-\widetilde{p}_{11}\delta_{jk})-(\mu_2\tau_{jk}(\vec{u}_2)-\widetilde{p}_{12}\delta_{jk})\}\cos(\vec{n},\hat{}\ \vec{e}_1^{\,k})\rangle_{L_2(\Gamma_1)}+\quad(3.234)$$
$$+\sum_{j=1}^{3}\langle\gamma_{\Gamma_2}\eta_{2j},\ \sum_{k=1}^{3}\{(\mu_2\tau_{jk}(\vec{u}_2)-\widetilde{p}_{12}\delta_{jk})-(\mu_3\tau_{jk}(\vec{u}_3)-\widetilde{p}_{13}\delta_{jk})\}\cos(\vec{n},\hat{}\ \vec{e}_1^{\,k})\rangle_{L_2(\Gamma_2)}.$$

Отсюда, а также из формулировки задачи (3.202) и определения обобщенного решения краевых задач на основе гильбертовой пары пространств получаем, что для задачи (3.202) обобщенное решение при

$$\vec{h}:=-\frac{d\vec{u}}{dt}-P_0\left\{P_{0,S_{1k}}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_{1k}\right)\right\}_{k=1}^{3}-\{p_k^{-1}\nabla p_{2k}\}_{k=1}^{3}+P_0\left\{\vec{f}_k\right\}_{k=1}^{3}\in\vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1)\quad(3.235)$$

определяется из тождества

$$\sum_{k=1}^{3}\mu_kE_k(\vec{\eta}_k,\vec{u}_k)=\sum_{k=1}^{3}\rho_k(\vec{\eta}_k,\vec{h}_k)_{\vec{L}_2(\Omega_{1k})}=(\vec{\eta},\vec{h})_{\vec{L}_2(\Omega_1)},\quad\forall\vec{\eta}\in\vec{J}^1_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1).\quad(3.236)$$

В силу (3.160) здесь левая часть для $\vec{u}\in\mathcal{D}(\widetilde{A})$ равна

$$(\vec{\eta},\vec{u})_{\vec{J}^1_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1)}=(\widetilde{A}^{1/2}\vec{\eta},\widetilde{A}^{1/2}\vec{u})_{\vec{J}^1_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1)}=(\vec{\eta},\widetilde{A}\vec{u})_{\vec{J}^1_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1)}.\quad(3.237)$$

Таким образом, первая вспомогательная задача (3.202) равносильна соотношению (3.230) при $\vec{h}$ из (3.235). Вспоминая еще представление (3.209) для решения второй вспомогательной задачи (3.203), приходим к выводу, что уравнения движения системы из трех вязких жидкостей в полости маятника приводятся к дифференциальному уравнению

$$\frac{d\vec{u}}{dt}+\widetilde{A}\vec{u}+P_0\left\{P_{0,S_{1k}}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_{1k}\right)\right\}_{k=1}^{3}+gQ\left\{\zeta_j+\theta_j((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{1j})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\right\}_{j=1}^{2}=P_0\left\{\vec{f}_k\right\}_{k=1}^{3}.\quad(3.238)$$

Вместе с уравнением движения маятника (см. (3.132)), т. е. соотношением

$$\begin{aligned}&\vec{J}_1\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}+\sum_{k=1}^{3}\rho_k\int\limits_{\Omega_{1k}}\left(\vec{r}_{1k}\times\frac{d\vec{u}_k}{dt}\right)d\Omega_{1k}+\alpha_1\vec{\omega}_1+gm_1l_1P_2\vec{\delta}_1-\\&-\sum_{j=1}^{2}(\rho_j-\rho_{j+1})\int\limits_{\Gamma_j}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{1j})\zeta_j d\Gamma_j=\vec{M}_1(t),\end{aligned}\tag{3.239}$$

можно эти оба соотношения кратко записать в виде операторного уравнения

$$C_1\frac{dz_1}{dt}+A_1z_1+gB_{12}z_2=f_1(t),\quad z_1(0)=z_1^0.\tag{3.240}$$

Здесь $z_1:=(\vec{u};\ \vec{\omega}_1)^\tau\in\mathcal{H}_1=\vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1)\oplus\mathbb{C}^3$ — динамическая переменная изучаемой системы, $z_2:=\left(\{\zeta_j\}_{j=1}^2;\ P_2\vec{\delta}_1\right)^\tau\in\mathcal{H}_2=(\oplus_{j=1}^2L_{2,\Gamma_j})\oplus\mathbb{C}^2$ — кинематическая переменная, а

$$f_1(t):=\left(P_0\left\{\vec{f}_k\right\}_{k=1}^3;\ \vec{M}_1(t)\right)^\tau\tag{3.241}$$

— заданная функция времени со значениями в $\mathcal{H}_1$. Далее, операторные коэффициенты из (3.240) задаются формулами (см. также (3.209))

$$C_1z_1:=\begin{pmatrix}\{\vec{u}_k\}_{k=1}^3+P_0\left\{P_{0,S_{1k}}(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{1k})\right\}_{k=1}^3\\ \vec{J}_1\vec{\omega}_1+\sum\limits_{k=1}^{3}\rho_k\int\limits_{\Omega_{1k}}(\vec{r}_{1k}\times\vec{u}_k)\,d\Omega_{1k}\end{pmatrix},\tag{3.242}$$

$$A_1:=\mathrm{diag}\,(\widetilde{A};\alpha_1),\quad\mathcal{D}(A_1)=\mathcal{D}(\widetilde{A})\oplus\mathbb{C}^3,\tag{3.243}$$

$$B_{12}z_2:=\begin{pmatrix}Q\left\{\zeta_j+\theta_j((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{1j})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\right\}_{j=1}^2\\ -\sum\limits_{j=1}^{2}(\rho_j-\rho_{j+1})\int\limits_{\Gamma_j}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{1j})\zeta_j\,d\Gamma_j+m_1l_1P_2\vec{\delta}_1\end{pmatrix},\tag{3.244}$$

$$\mathcal{D}(B_{12})=\mathcal{D}(Q)\oplus\mathbb{C}^2=(H_{\Gamma_1}^{1/2}\times H_{\Gamma_2}^{1/2})\oplus\mathbb{C}^2.\tag{3.245}$$

Напомним, что символом $\vec{J}_1$ в (3.239) обозначен тензор инерции (относительно точки подвеса O_1) тела с жидкостями в состоянии равновесия, см. (3.132).

3.3.7. Итоговая формулировка задачи Коши. Свойства операторных коэффициентов. Изучим сначала свойства операторных коэффициентов в уравнении (3.240).

Лемма 3.18. *Оператор C_1 из* (3.242) *является оператором кинетической энергии гидромеханической системы. Он ограничен, самосопряжен и положительно определен в $\mathcal{H}_1=\vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1)\oplus\mathbb{C}^3$.*

Доказательство. Ограниченность C_1 в $\mathcal{H}_1$ следует из его определения. Проверим другие сформулированные свойства.

Используя равенство (см. (3.132))

$$\left(\vec{J}_1\vec{\omega}_1\right)\cdot\overline{\vec{\omega}_1}=\rho_0\int\limits_{\Omega_0}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_0|^2\,d\Omega_0+\sum_{k=1}^{3}\rho_k\int\limits_{\Omega_{1k}}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{1k}|^2\,d\Omega_{1k},\tag{3.246}$$

вычислим квадратичную форму оператора C_1. Имеем

$$\begin{gathered}(C_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} = \sum_{k=1}^{3} \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} |\vec{u}_k|^2 d\Omega_{1k} + \sum_{k=1}^{3} \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} \left(P_{0,S_{1k}}\left(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}\right)\right) \cdot \overline{\vec{u}_k}\, d\Omega_{1k} + \\ + \left(\vec{J}_1 \vec{\omega}_1\right) \cdot \overline{\vec{\omega}_1} + \sum_{k=1}^{3} \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} \left(\vec{r}_{1k} \times \vec{u}_k\right) d\Omega_{1k} \cdot \overline{\vec{\omega}_1} = \ldots = \rho_0 \int\limits_{\Omega_0} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_0|^2\, d\Omega_0 + \\ + \sum_{k=1}^{3} \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} \left\{|\vec{u}_k|^2 + (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}) \cdot \overline{\vec{u}_k} + (\vec{r}_{1k} \times \vec{u}_k) \cdot \overline{\vec{\omega}_1} + |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}|^2\right\} d\Omega_{1k} = \\ = \rho_0 \int\limits_{\Omega_0} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_0|^2\, d\Omega_0 + \sum_{k=1}^{3} \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} |\vec{u}_k + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}|^2\, d\Omega_{1k} \geqslant 0.\end{gathered} \tag{3.247}$$

Отсюда при условии $(C_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} = 0$ получаем, что $\vec{\omega}_1 = \vec{0}$, $\vec{u}_k \equiv \vec{0}$ $(k = 1, 2, 3)$, т. е. $z_1 = 0$. Значит, C_1 — положительный оператор. Так как он имеет структуру $C_1 = C_{10} + C_{11}$, $C_{10} = \operatorname{diag}\left(\{I_k\}_{k=1}^{3}; \vec{J}_1\right) \gg 0$ (поскольку $\vec{J}_1 \gg 0$ в $\mathbb{C}^3$), а C_{11} — конечномерный оператор, то $C_1 \gg 0$ в $\mathcal{H}_1$.

Отметим, наконец, что квадратичная форма (3.247) равна удвоенной кинетической энергии системы, т. е. C_1 действительно является оператором кинетической энергии. □

Лемма 3.19. *Оператор A_1 из* (3.243) *является оператором диссипации энергии системы. Он неограничен, самосопряжен и положительно определен в $\mathcal{H}_1$, а его обратный оператор положителен и компактен в $\mathcal{H}_1$.*

Доказательство. Свойства оператора A_1 следуют из свойств оператора $\widetilde{A}$ (см. пункт 3.3.2) и того, что $\alpha_1 > 0$.

Его квадратичная форма

$$(A_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} = \sum_{k=1}^{3} \mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{u}_k) + \alpha_1 |\vec{\omega}_1|^2 \tag{3.248}$$

равна скорости диссипации энергии в системе. □

Лемма 3.20. *Операторы $B_{12} : \mathcal{D}(B_{12}) \subset \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ и $B_{21} : \mathcal{D}(B_{21}) \subset \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, заданные формулами* (3.244), (3.245) *и* (3.228), (3.229) *соответственно, являются кососамосопряженными*:

$$(z_1, B_{12} z_2)_{\mathcal{H}_1} = -(B_{21} z_1, z_2)_{\mathcal{H}_2}, \quad \forall z_1 \in \mathcal{D}(B_{21}), \quad \forall z_2 \in \mathcal{D}(B_{12}). \tag{3.249}$$

Доказательство. Проверим это свойство поэлементно.

1°. Пусть $z_1 = \left(\{\vec{u}_k\}_{k=1}^{3}; \vec{0}\right)^{\tau} \in \mathcal{D}(B_{21})$, $z_2 = \left(\left\{\vec{\zeta}_j\right\}_{j=1}^{2}; \vec{0}\right)^{\tau} \in \mathcal{D}(B_{12})$, тогда $Q\{\zeta_j\}_{j=1}^{2} = \left\{\rho_k^{-1} \nabla \varphi_k\right\}_{k=1}^{3}$ — решение вспомогательной задачи (3.203) (см. (3.209)). Имеем

$$\begin{gathered}(z_1, B_{12} z_2)_{\mathcal{H}_1} = \left(\{\vec{u}_k\}_{k=1}^{3}; Q\{\zeta_j\}_{j=1}^{2}\right)_{\vec{L}_2(\Omega_1)} = \sum_{k=1}^{3} \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} \vec{u}_k \cdot (\rho_k^{-1} \overline{\nabla \varphi_k})\, d\Omega_{1k} = \ldots = \\ = \left[(\gamma_{n,1} \vec{u}_1, \gamma_{11} \varphi_1)_{L_2(\Gamma_1)} - (\gamma_{n,1} \vec{u}_2, \gamma_{12} \varphi_2)_{L_2(\Gamma_1)}\right] + \left[(\gamma_{n,2} \vec{u}_2, \gamma_{22} \varphi_2)_{L_2(\Gamma_2)} - (\gamma_{n,2} \vec{u}_3, \gamma_{23} \varphi_3)_{L_2(\Gamma_2)}\right] = \\ = (\gamma_{n,1} \vec{u}_1, (\rho_1 - \rho_2) \zeta_1)_{L_2(\Gamma_1)} + (\gamma_{n,2} \vec{u}_2, (\rho_2 - \rho_3) \zeta_2)_{L_2(\Gamma_2)} = \sum_{j=1}^{2} (\rho_j - \rho_{j+1}) \left(\gamma_{n,j} \vec{u}_j, \zeta_j\right)_{L_2(\Gamma_j)}.\end{gathered}$$

С другой стороны,

$$(B_{21}z_1, z_2)_{\mathcal{H}_2} = \Big(-\big\{(\rho_j - \rho_{j+1})\gamma_{n,j}\vec{u}_k\big\}_{j=1}^2, \{\zeta_j\}_{j=1}^2\Big)_{L_2(\Gamma_1)\oplus L_2(\Gamma_2)} =$$
$$= -(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}(\gamma_{n,1}\vec{u}_1)\overline{\zeta_1}\,d\Gamma_1 - (\rho_2-\rho_3)\int\limits_{\Gamma_2}(\gamma_{n,2}\vec{u}_2)\overline{\zeta_2}\,d\Gamma_2 =$$
$$= -\sum_{j=1}^2(\rho_j-\rho_{j+1})\,(\gamma_{n,j}\vec{u}_j,\zeta_j)_{L_2(\Gamma_j)} = -(z_1, B_{12}z_2)_{\mathcal{H}_1}.$$

2°. Пусть теперь $z_1 = \Big(\{\vec{u}_k\}_{k=1}^3; \vec{0}\Big)^\tau$, $z_2 = \Big(0;\ P_2\vec{\delta}_1\Big)^\tau$. Тогда с учетом соотношения $Q\{\theta_j((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{1j})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\}_{j=1}^2 = \{\rho_k^{-1}\nabla\psi_k\}_{k=1}^3$, где $\Delta\psi_k = 0$ (в Ω_k), $\rho_k^{-1}\dfrac{\partial\psi_k}{\partial n} = 0$ (на S_{1k}), $\rho_1^{-1}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial n} = \rho_2^{-1}\dfrac{\partial\psi_2}{\partial n}$ (на Γ_1), $\rho_2^{-1}\dfrac{\partial\psi_2}{\partial n} = \rho_3^{-1}\dfrac{\partial\psi_3}{\partial n}$ (на Γ_2), $\vec{n} = \vec{e}_1^{\,3}$, $\psi_1-\psi_2 = (\rho_1-\rho_2)\theta_1((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})$ (на Γ_1), $\psi_2-\psi_3 = (\rho_2-\rho_3)\theta_2((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{12})\cdot\vec{e}_1^{\,3})$ (на Γ_2), имеем

$$(z_1, B_{12}z_2)_{\mathcal{H}_1} = \Big(\{\vec{u}_k\}_{k=1}^3; Q\{\theta_j((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{1j})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\}_{j=1}^2\Big)_{\vec{L}_2(\Omega_1)} =$$
$$= \sum_{j=1}^2(\rho_j-\rho_{j+1})\Big(\gamma_{n,j}\vec{u}_j, \theta_j(P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{1j})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\Big)_{L_2(\Gamma_j)}.$$

Далее,

$$(B_{21}z_1, z_2)_{\mathcal{H}_2} = (\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\gamma_{n,1}\vec{u}_1 d\Gamma_1\cdot\overline{P_2\vec{\delta}_1} + (\rho_2-\rho_3)\int\limits_{\Gamma_2}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{12})\gamma_{n,2}\vec{u}_2 d\Gamma_2\cdot\overline{P_2\vec{\delta}_2} = \ldots =$$
$$= -\sum_{j=1}^2(\rho_j-\rho_{j+1})\Big(\gamma_{n,j}\vec{u}_j, \theta_j(P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{1j})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\Big)_{L_2(\Gamma_j)} = -(z_1, B_{12}z_2)_{\mathcal{H}_1}.$$

3°. Рассмотрим вариант $z_1 = (\vec{0}, \vec{\omega}_1)^\tau$, $z_2 = (\{\zeta_j\}_{j=1}^2; \vec{0})^\tau$. Тогда

$$(z_1, B_{12}z_2)_{\mathcal{H}_1} = \vec{\omega}_1\cdot\big[-(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\overline{\zeta_1}\,d\Gamma_1 - (\rho_2-\rho_3)\int\limits_{\Gamma_2}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{12})\overline{\zeta_2}\,d\Gamma_2\big] =$$
$$= (\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}\theta_1((P_2\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\overline{\zeta_1}\,d\Gamma_1 + (\rho_2-\rho_3)\int\limits_{\Gamma_2}\theta_2((P_2\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{12})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\overline{\zeta_2}\,d\Gamma_2 =$$
$$= \sum_{j=1}^2(\rho_j-\rho_{j+1})\,\big(\theta_j((P_2\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{1j})\cdot\vec{e}_1^{\,3}),\zeta_j\big)_{L_2(\Gamma_j)};$$

$$(B_{21}z_1, z_2)_{\mathcal{H}_2} = -\Big(\big\{(\rho_j-\rho_{j+1})\theta_j((P_2\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{1j})\cdot\vec{e}_1^{\,3}),\zeta_j\big)_{L_2(\Gamma_j)}, \{\zeta_j\}_{j=1}^2\Big)_{L_2(\Gamma_1)\oplus L_2(\Gamma_2)} =$$
$$= -(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}\theta_1((P_2\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\overline{\zeta_1}\,d\Gamma_1 - (\rho_2-\rho_3)\int\limits_{\Gamma_2}\theta_2((P_2\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{12})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\overline{\zeta_1}\,d\Gamma_2 =$$
$$= -\sum_{j=1}^2(\rho_j-\rho_{j+1})\,\big(\theta_j((P_2\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{1j})\cdot\vec{e}_1^{\,3}),\zeta_j\big)_{L_2(\Gamma_j)} = -(z_1, B_{12}z_2)_{\mathcal{H}_1}.$$

4°. Последний вариант: $z_1 = (\vec{0}; \vec{\omega}_1)^\tau$, $z_2 = (\vec{0}, P_2\vec{\delta}_1)^\tau$. Имеем

$$(z_1, B_{12}z_2)_{\mathcal{H}_1} = \vec{\omega}_1\cdot m_1 l_1\overline{P_2\vec{\delta}_1} = m_1 l_1 P_2\vec{\omega}_1\cdot\overline{P_2\vec{\delta}_1}, \quad (B_{21}z_1, z_2)_{\mathcal{H}_2} = -m_1 l_1 P_2\vec{\omega}_1\cdot\overline{P_2\vec{\delta}_1}.$$

□

Опираясь на доказанные утверждения в виде предыдущих лемм, сформулируем итоговый вывод рассмотрения начально-краевой задачи о малых движениях маятника с полостью, заполненной тремя несмешивающимися вязкими жидкостями.

Теорема 3.3. *Задача* (3.132)–(3.140) *равносильна задаче Коши для системы дифференциальных уравнений*

$$\begin{aligned} &C_1\frac{dz_1}{dt} + A_1 z_1 + gB_{12}z_2 = f_1(t), \quad z_1(0) = z_1^0, \\ &gC_2\frac{dz_2}{dt} + gB_{21}z_1 = 0, \quad z_2(0) = z_2^0, \end{aligned} \tag{3.250}$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, *а также тривиальной связи*

$$\frac{d}{dt}\delta_1^3(t) = \omega_1^3(t), \quad \delta_1^3(0) = (\delta_1^3)^0. \tag{3.251}$$

Операторные коэффициенты в (3.250) *имеют отчетливый физический смысл*: C_1 — *оператор кинетической энергии,* C_2 — *оператор потенциальной энергии,* A_1 — *оператор диссипации энергии.*

Коротко задачу (3.250) можно переписать в виде

$$C\frac{dz}{dt} + Az + gBz = f(t), \quad z(0) = z^0, \tag{3.252}$$

$$z = (z_1; z_2)^\tau \in H = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2, \quad f(t) = (f_1(t); 0)^\tau, \tag{3.253}$$

$$C := \operatorname{diag}(C_1; gC_2), \quad A := \operatorname{diag}(A_1; 0), \quad B = -B^* = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.254}$$

При этом C — оператор полной энергии системы, A — оператор диссипации энергии, а оператор

$$B : \mathcal{D}(B_{21}) \oplus \mathcal{D}(B_{12}) \subset \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 = \mathcal{H} \to \mathcal{H} \tag{3.255}$$

можно назвать оператором обмена между кинетической и потенциальной энергиями.

Подводя итоги рассмотрения трех вспомогательных начально-краевых задач этого пункта, приходим к следующему выводу. Каждая из этих задач приводится к исследованию задачи Коши вида (3.250) в соответственно подобранном гильбертовом пространстве: задача (3.1)–(3.5) о малых движениях маятника с полостью, целиком заполненной однородной идеальной жидкостью — к задаче Коши (3.14), задача (3.32)–(3.38) о малых движениях маятника с полостью, заполненной двумя несмешивающимися идеальными жидкостями — к задаче Коши (3.114), а задача (3.132)–(3.140) о малых движениях маятника с полостью, заполненной тремя несмешивающимися вязкими жидкостями — к задаче Коши (3.250). Кроме того, в каждой из этих задач дополнительно рассматривается кинематическая связь вида (3.251).

Далее будет показано, что и общая исходная задача (2.3)–(2.20) о малых движениях трех сочлененных маятников с полостями, заполненными одной или несколькими идеальными либо вязкими жидкостями, также приводится к задаче Коши вида (3.250) с аналогичными свойствами операторных коэффициентов.

4. Исследование общей начально-краевой задачи о колебаниях системы из трех сочлененных маятников

Перейдем теперь к изучению исходной начально-краевой задачи (2.3)–(2.20), опираясь на построения, проведенные выше для соответствующих вспомогательных задач для одиночных маятников.

4.1. Применение метода ортогонального проектирования. Рассмотрим сначала наиболее простую проблему: уравнение движения идеальной жидкости в полости третьего маятника и уравнение движения этого маятника (см. (2.8), (2.5)). Имеем

$$\frac{d\vec{u}_{31}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_{31} + \rho_{31}^{-1}\nabla p_{31} = \vec{f}_{31} \quad (\text{в } \Omega_{31}), \tag{4.1}$$

$$\begin{gathered}\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}\vec{r}_{30}\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_{30}\right)d\Omega_{30}+\\+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}\vec{r}_{31}\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_{31}\right)d\Omega_{31}+\\+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}\vec{r}_{31}\times\frac{d\vec{u}_{31}}{dt}\,d\Omega_{31}+\alpha(\vec{\omega}_3-\vec{\omega}_2)+gm_3l_3P_2\vec{\delta}_3=\\+\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}(\vec{r}_{30}\times\vec{f}_{30})\,d\Omega_{30}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}(\vec{r}_{31}\times\vec{f}_{31})\,d\Omega_{31}=:\vec{M}_3(t).\end{gathered}\tag{4.2}$$

Введем, опираясь на ортогональное разложение

$$\vec{L}_2(\Omega_{31})=\vec{J}_0(\Omega_{31})\oplus\vec{G}(\Omega_{31}),\tag{4.3}$$

$$\vec{J}_0(\Omega_{31})=\left\{\vec{u}_{31}\in\vec{L}_2(\Omega_{31}):\operatorname{div}\vec{u}_{31}=0\ (\text{в }\Omega_{31}),\quad\vec{u}_{31}\cdot\vec{n}_{31}=0\ (\text{на }S_{31}=\partial\Omega_{31})\right\},\tag{4.4}$$

$$\vec{G}(\Omega_{31})=\left\{\nabla p_{31}\in\vec{L}_2(\Omega_{31}):\int\limits_{S_{31}}p_{31}\,dS_{31}=0\right\},\tag{4.5}$$

(см. (3.9), (3.10)), ортопроекторы

$$P_{0,3}:\vec{L}_2(\Omega_{31})\to\vec{J}_0(\Omega_{31}),\quad P_{G,3}:\vec{L}_2(\Omega_{31})\to\vec{G}(\Omega_{31}),\tag{4.6}$$

и напомним, что по постановке задачи (см. (2.8), (2.11)) $\vec{u}_{31}$ является функцией переменной t со значениями в $\vec{J}_0(\Omega_{31})$, а ∇p_{31} — функция t со значениями в $\vec{G}(\Omega_{31})$.

Применяя операторы $P_{0,3}$ и $P_{G,3}$ к обеим частям уравнения (4.1), получим соотношения

$$\frac{d\vec{u}_{31}}{dt}+P_{0,3}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_{31}\right)=P_{0,3}\vec{f}_{31},\tag{4.7}$$

$$P_{G,3}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_{31}\right)+\rho_{31}^{-1}\nabla p_{31}=P_{G,3}\vec{f}_{31}.\tag{4.8}$$

Из (4.7) получаем поле скоростей в области Ω_{31}:

$$\frac{d\vec{u}_{31}}{dt}=-P_{0,3}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_{31}\right)+P_{0,3}\vec{f}_{31},\tag{4.9}$$

а из (4.8) — поле давлений, если известны угловые скорости в каждом маятнике. Подставляя (4.9) в (4.2), приходим к уравнению движения третьего маятника в следующем виде (см. (3.14)):

$$\begin{gathered}\left(\vec{J}_{\text{т},3}+\vec{J}_{\text{пр},3}\right)\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}+\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}\left(\vec{r}_{30}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2\right)\right)d\Omega_{30}+\\+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}\left(\vec{r}_{31}\times P_{G,3}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2\right)\right)d\Omega_{31}+\alpha_3(\vec{\omega}_3-\vec{\omega}_2)+gm_3l_3P_2\vec{\delta}_3=\\=\vec{M}_{3,\text{пр}}(t):=\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}(\vec{r}_{30}\times\vec{f}_{30})\,d\Omega_{30}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}(\vec{r}_{31}\times P_{G,3}\vec{f}_{31})\,d\Omega_{31},\end{gathered}\tag{4.10}$$

$$\vec{J}_{\text{т},3}\vec{\omega}_3:=\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}(\vec{r}_{30}\times(\vec{\omega}_3\times\vec{r}_{30}))\,d\Omega_{30},\quad\vec{J}_{\text{пр},3}\vec{\omega}_3:=\rho_{31}\int\limits_{\Omega_3}(\vec{r}_{31}\times P_{G,3}(\vec{\omega}_3-\vec{\omega}_2))\,d\Omega_{31},\tag{4.11}$$

где $\vec{J}_{\text{т},3}$ — момент инерции третьего маятника, отвечающий его твердой части Ω_{30}, а $\vec{J}_{\text{пр},3}$ — приведенный момент инерции, отвечающий его жидкой части Ω_{31}.

Таким образом, движение третьего маятника с жидкостью при полном заполнении области Ω_{31} приводится к его движению как твердого тела с видоизмененными характеристиками: приведенному моменту инерции $\vec{J}_{\text{пр},3}$ и приведенному внешнему полю $\vec{M}_{3,\text{пр}}(t)$.

Перейдем теперь к рассмотрению уравнений движения жидкостей в первом маятнике и уравнению движения этого маятника (см. (2.6), (2.3)). Имеем:

$$\frac{d}{dt}\left\{\vec{u}_{1k}\right\}_{k=1}^{2}+\left\{\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_{1k}\right\}_{k=1}^{2}+\left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla p_{1k}\right\}_{k=1}^{2}=\left\{\vec{f}_{1k}\right\}_{k=1}^{2}, \tag{4.12}$$

$$\begin{gathered}
\rho_{10}\int\limits_{\Omega_{10}}\left(\vec{r}_{10}\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_{10}\right)\right)d\Omega_{10}+\sum_{k=1}^{2}\rho_{1k}\int\limits_{\Omega_{1k}}\left(\vec{r}_{1k}\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_{1k}\right)\right)d\Omega_{1k}+\\
+\sum_{k=1}^{2}\rho_{1k}\int\limits_{\Omega_{1k}}\left(\vec{r}_{1k}\times\frac{d\vec{u}_{1k}}{dt}\right)d\Omega_{1k}+\rho_{20}\int\limits_{\Omega_{20}}\left(\vec{h}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2\right)\right)d\Omega_{20}+\\
+\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}\left(\vec{h}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_{2k}\right)\right)d\Omega_{2k}+\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}\left(\vec{h}_1\times\frac{d\vec{u}_{2k}}{dt}\right)d\Omega_{2k}+\\
+\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}\left(\vec{h}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_{30}\right)\right)d\Omega_{30}+\\
+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}\left(\vec{h}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_{31}\right)\right)d\Omega_{31}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}\left(\vec{h}_1\times\frac{d\vec{u}_{31}}{dt}\right)d\Omega_{31}+\\
+\alpha_1\vec{\omega}_1-\alpha_2(\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1)+g(m_1l_1+h_1(m_2+m_3))P_2\vec{\delta}_1-g(\rho_{11}-\rho_{12})\int\limits_{\Gamma_{11}}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\zeta_{11}\,d\Gamma_{11}=\\
=\int\limits_{G_1}(\vec{r}_1\times\vec{f}_1)\,dm_1+\int\limits_{G_2}(\vec{h}_1\times\vec{f}_2)\,dm_2+\int\limits_{G_3}(\vec{h}_1\times\vec{f}_3)\,dm_3=:\vec{M}_1(t).
\end{gathered} \tag{4.13}$$

Здесь $\{\vec{u}_{1k}\}_{k=1}^{2}$ — наборы полей скоростей жидкости в областях Ω_{1k}, $k=1,2$, $\left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla p_{1k}\right\}_{k=1}^{2}$ — соответствующие наборы для давлений. Напомним (см. пункт 3.2.3), что в пространстве $\vec{L}_2(\Omega_1)=\vec{L}_2(\Omega_{11})\oplus\vec{L}_2(\Omega_{12})$ со скалярным произведением (3.41), т. е.

$$(\vec{u}_1,\vec{v}_1)_{\vec{L}_2(\Omega_1)}:=\sum_{k=1}^{2}\rho_{1k}\int\limits_{\Omega_{1k}}\vec{u}_{1k}\cdot\overline{\vec{v}_{1k}}\,d\Omega_{1k},\quad \vec{u}_1=\{\vec{u}_{1k}\}_{k=1}^{2},\ \vec{v}_1=\{\vec{v}_{1k}\}_{k=1}^{2}, \tag{4.14}$$

имеет место ортогональное разложение (3.42), (3.48):

$$\vec{L}_2(\Omega_1)=\vec{J}_0(\Omega_1)\oplus\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)\oplus\vec{G}_{0,\Gamma_{11}}, \tag{4.15}$$

$$\vec{J}_0(\Omega_1)=\vec{J}_0(\Omega_{11})\oplus\vec{J}_0(\Omega_{12}), \tag{4.16}$$

$$\begin{gathered}
\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1):=\Big\{\left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}\right\}_{k=1}^{2}:\quad \Delta\Phi_{1k}=0\ (\text{в }\Omega_{1k}),\quad \frac{\partial\Phi_{1k}}{\partial n}=0\ (\text{на }S_{1k}),\\
\rho_{11}^{-1}\frac{\partial\Phi_{11}}{\partial n_{11}}=\rho_{12}^{-1}\frac{\partial\Phi_{12}}{\partial n_{11}},\quad \vec{n}_{11}=\vec{e}_1^{\,3}\ (\text{на }\Gamma_{11}),\quad \int\limits_{\Gamma_{11}}\Phi_{1k}d\Gamma_{11}=0,\quad k=1,2\Big\},
\end{gathered} \tag{4.17}$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1):=\Big\{\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\psi_{1k}\}_{k=1}^{2}\in\vec{L}_2(\Omega_1):\psi_{11}-\psi_{12}=0\quad(\text{на }\Gamma_{11})\Big\}. \tag{4.18}$$

По постановке задачи набор полей скоростей в первом маятнике, т. е. $\{\vec{u}_{1k}\}_{k=1}^{2}$, является функцией t со значениями в $\vec{J}_0(\Omega_1)\oplus\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$, а набор полей давлений — функцией t со значениями в $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)\oplus\vec{G}_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1)$. Поэтому, как в пункте 3.2.4, будем искать эти поля в виде (3.50), (3.51), т. е.

$$\{\vec{u}_{1k}\}_{k=1}^{2}=\{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^{2}+\left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}\right\}_{k=1}^{2},\quad \{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^{2}\in\vec{J}_0(\Omega_1),\quad \left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}\right\}_{k=1}^{2}\in\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1), \tag{4.19}$$

$$\begin{gathered}
\left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla p_{1k}\right\}_{k=1}^{2}=\left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\varphi_{1k}\right\}_{k=1}^{2}+\left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\psi_{1k}\right\}_{k=1}^{2},\\
\left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\varphi_{1k}\right\}_{k=1}^{2}\in\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1),\quad \left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\psi_{1k}\right\}_{k=1}^{2}\in\vec{G}_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1).
\end{gathered} \tag{4.20}$$

Введем теперь, как в пункте 3.2.4, ортопроекторы

$$P_{0,1} : \vec{L}_2(\Omega_1) \to \vec{J}_0(\Omega_1), \quad P_{h,S_1} : \vec{L}_2(\Omega_1) \to \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1), \quad P_{0,\Gamma_{11}} : \vec{L}_2(\Omega_1) \to \vec{G}_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1), \tag{4.21}$$

отвечающие разложению (4.15)–(4.18), и подействуем ими на обе части уравнения (4.12). Будем иметь соотношения

$$\frac{d}{dt}\left\{\vec{w}_{1k}\right\}_{k=1}^2 + P_{0,1}\left\{\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_{1k}\right\}_{k=1}^2 = P_{0,1}\left\{\vec{f}_{1k}\right\}_{k=1}^2, \tag{4.22}$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}\right\}_{k=1}^2 + P_{h,S_1}\left\{\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_{1k}\right\}_{k=1}^2 + \left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\varphi_{1k}\right\}_{k=1}^2 = P_{h,S_1}\left\{\vec{f}_{1k}\right\}_{k=1}^2, \tag{4.23}$$

$$P_{0,\Gamma_{11}}\left\{\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_{1k}\right\}_{k=1}^2 + \left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\psi_{1k}\right\}_{k=1}^2 = P_{0,\Gamma_{11}}\left\{\vec{f}_{1k}\right\}_{k=1}^2. \tag{4.24}$$

Снова видим, что поле $\left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\psi_{1k}\right\}_{k=1}^2$ находится из (4.24) по известному полю скорости $\vec{\omega}_1$ и полю внешних сил $\vec{f}_1$. Поэтому далее рассматриваем лишь соотношения (4.22)-(4.23).

Подставляя еще выражение для $d\vec{u}_3/dt$ из (4.9) в (4.13) и используя определение момента инерции для первого маятника, т. е. выражение

$$\vec{J}_1\vec{\omega}_1 := \rho_{10}\int\limits_{\Omega_{10}}(\vec{r}_{10}\times(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{10}))\,d\Omega_{10} + \sum_{k=1}^2\rho_{1k}\int\limits_{\Omega_{1k}}(\vec{r}_{1k}\times(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{1k}))\,d\Omega_{1k}, \tag{4.25}$$

получим преобразованное уравнение движения первого маятника:

$$\begin{gathered}
\vec{J}_1\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} + \sum_{k=1}^2\rho_{1k}\int\limits_{\Omega_{1k}}(\vec{r}_{1k}\times\frac{d}{dt}(\vec{w}_{1k}+\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}))\,d\Omega_{1k} + \int\limits_{G_2}(\vec{h}_1\times(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2))\,dm_2 + \\
+\sum_{k=1}^3\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}(\vec{h}_1\times\frac{d\vec{\omega}_{2k}}{dt})\,d\Omega_{2k} + \rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}(\vec{h}_1\times(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_{30}))\,d\Omega_{30} + \\
+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}(\vec{h}_1\times P_{G,3}(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_{31}))d\Omega_{31} + \alpha_1\vec{\omega}_1 - \alpha_2(\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1) + \\
+g(m_1l_1+(m_2+m_3)h_1)P_2\vec{\delta}_1 - g(\rho_{11}-\rho_{12})\int\limits_{\Gamma_{11}}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\zeta_{11}\,d\Gamma_{11} = \int\limits_{G_1}(\vec{r}_1\times\vec{f}_1)\,dm_1 + \\
+\int\limits_{G_2}(\vec{h}_1\times\vec{f}_2)\,dm_2 + \rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}(\vec{h}_1\times\vec{f}_{30})\,d\Omega_{30} + \rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}(\vec{h}_1\times P_{G,3}\vec{f}_{31})\,d\Omega_{31} =: \vec{M}_{1,\text{пр}}(t).
\end{gathered} \tag{4.26}$$

Таким образом, преобразованные уравнения движения жидкостей в полости первого маятника и уравнение движения этого маятника — это уравнения (4.22), (4.23) и (4.26).

Перейдем теперь к соответствующим преобразованиям уравнений движения жидкостей во втором маятнике и его уравнения движения (см. (2.7), (2.4)). Уравнения движения жидкостей из (2.7), как и в пункте 3.3.4, перепишем в виде одного соотношения для набора полей скоростей и давлений:

$$\left\{\frac{d\vec{u}_{2k}}{dt}\right\}_{k=1}^3 + \{\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1\}_{k=1}^3 + \{\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_{2k}\}_{k=1}^3 + \{\rho_{2k}^{-1}\nabla p_{2k}\}_{k=1}^3 - \{\mu_{2k}\rho_{2k}^{-1}\Delta\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^3 = \{\vec{f}_{2k}\}_{k=1}^3. \tag{4.27}$$

Далее, считая, что поля $\vec{u}_{2k}\in\vec{J}_{0,S_{2k}}(\Omega_{2k})$,

$$\vec{J}_{0,S_{2k}}(\Omega_{2k}) := \left\{\vec{u}_{2k}\in\vec{L}_2(\Omega_{2k}) : \operatorname{div}\vec{u}_{2k}=0 \ (\text{в } \Omega_{2k}),\ \gamma_{n,2k}\vec{u}_{2k} := \vec{u}_{2k}\cdot\vec{n}_{2k} = 0 \ (\text{на } S_{2k})\right\}, \tag{4.28}$$

где $\vec{n}_{2k}$ — внешняя нормаль к S_{2k}, введем ортопроекторы

$$P_{0,S_{2k}} : \vec{L}_2(\Omega_{2k}) \to \vec{J}_{0,S_{2k}}(\Omega_{2k}). \tag{4.29}$$

Затем подействуем ими на каждую компоненту в (4.27) и получим уравнение в пространстве

$$\vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2) := \bigoplus_{k=1}^{3} \vec{J}_{0,S_{2k}}(\Omega_{2k}) \subset \vec{L}_2(\Omega_2); \tag{4.30}$$

это уравнение таково:

$$\begin{gathered}\left\{\frac{d\vec{u}_{2k}}{dt}\right\}_{k=1}^{3} + \left\{P_{0,S_{2k}}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1\right)\right\}_{k=1}^{3} + \left\{P_{0,S_{2k}}\left(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_{2k}\right)\right\}_{k=1}^{3} + \left\{\rho_{2k}^{-1}\nabla\widetilde{p}_{2k}\right\}_{k=1}^{3} - \\ - \left\{\mu_{2k}\rho_{2k}^{-1}P_{0,S_{2k}}\Delta\vec{u}_{2k}\right\}_{k=1}^{3} = \left\{P_{0,S_{2k}}\vec{f}_{2k}\right\}_{k=1}^{3}, \quad \rho_{2k}^{-1}\nabla\widetilde{p}_{2k} := \rho_{2k}^{-1}P_{0,S_{2k}}\nabla\widetilde{p}_{2k}, \quad k=1,2,3.\end{gathered} \tag{4.31}$$

Однако, как показано в пункте 3.3.2, набор полей скоростей $\{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^{3}$ должен принадлежать подпространству (см. (3.158))

$$\begin{gathered}\vec{J}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2) := \Big\{\vec{u}_2 = \{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^{3} \in \vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2): \quad \vec{u}_{21}\cdot\vec{n}_{21} = \vec{u}_{22}\cdot\vec{n}_{21} =: \gamma_{n,2}\vec{u}_{22} \ (\text{на } \Gamma_{21}), \\ \vec{u}_{22}\cdot\vec{n}_{22} = \vec{u}_{23}\cdot\vec{n}_{22} =: \gamma_{n,22}\vec{u}_{23} \ (\text{на } \Gamma_{23}), \ \vec{n}_{21} = \vec{n}_{22} = \vec{e}_1^{\,3}\Big\} \subset \vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2).\end{gathered} \tag{4.32}$$

При этом действие ортопроектора

$$P_0 := \vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2) \to \vec{J}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2) \tag{4.33}$$

описано в пункте 3.3.3 (см. леммы 3.10, 3.11). Действуя теперь оператором P_0 на обе части (4.31), приходим к следующему уравнению в пространстве $\vec{J}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2)$:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^{3} + P_0\left\{P_{0,S_{2k}}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1\right)\right\}_{k=1}^{3} + P_0\left\{P_{0,S_{2k}}\left(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_{2k}\right)\right\}_{k=1}^{3} + \\ + P_0\left\{\rho_{2k}^{-1}\nabla\widetilde{p}_{2k}\right\}_{k=1}^{3} - P_0\left\{\mu_{2k}\rho_{2k}^{-1}P_{0,S_{2k}}(\Delta\vec{u}_{2k})\right\}_{k=1}^{3} = P_0\left\{P_{0,S_{2k}}\vec{f}_{2k}\right\}_{k=1}^{3}.\end{gathered} \tag{4.34}$$

Далее осуществим те же преобразования, которые в пункте 3.3.4 были проделаны для случая колебаний одного маятника с полостью, заполненной тремя вязкими жидкостями. Именно, вводим пространство $\vec{J}^{1}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2)$ наборов полей скоростей с конечной скоростью диссипации энергии (см. (3.159)):

$$\vec{J}^{1}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2) := \Big\{\vec{u}_2 = \{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^{3} \in \vec{J}^{1}_{0,S_2}(\Omega_2): \gamma_{11}\vec{u}_{21} := \gamma_{12}\vec{u}_{22} \ (\text{на } \Gamma_{11}), \ \gamma_{22}\vec{u}_{22} := \gamma_{23}\vec{u}_{23} \ (\text{на } \Gamma_{22})\Big\}, \tag{4.35}$$

$$\vec{J}^{1}_{0,S_2}(\Omega_2) := \bigoplus_{k=1}^{3}\vec{J}^{1}_{0,S_{2k}}(\Omega_{2k}), \quad (\vec{u}_2,\vec{v}_2)_{\vec{J}^{1}_{0,S_2}(\Omega_2)} := \sum_{k=1}^{3}\mu_k E_k(\vec{u}_{2k},\vec{v}_{2k}), \tag{4.36}$$

$$\vec{J}^{1}_{0,S_{2k}}(\Omega_{2k}) := \Big\{\vec{u}_{2k}\in\vec{H}^1(\Omega_{2k}): \operatorname{div}\vec{u}_{2k} = 0 \ (\text{в } \Omega_{2k}), \ \vec{u}_{2k} = \vec{0} \ (\text{на } S_{2k})\Big\}, \quad k=1,2,3, \tag{4.37}$$

гильбертову пару пространств

$$\Big(\vec{J}^{1}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2); \ \vec{J}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2)\Big) \tag{4.38}$$

и оператор $\widetilde{A}_2$ этой пары (см. (3.160)):

$$\begin{gathered}(\vec{u}_2,\vec{v}_2)_{\vec{J}^{1}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2)} = \Big(\widetilde{A}_2^{1/2}\vec{u}_2, \widetilde{A}_2^{1/2}\vec{v}_2\Big)_{\vec{J}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2)} = \sum_{k=1}^{3}\mu_k E_k(\vec{u}_{2k},\vec{v}_{2k}) = \\ = \langle\vec{u}_2, \widetilde{A}_2\vec{u}_2\rangle_{\vec{J}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2)}, \quad \forall\,\vec{u}_2 = \{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^{3}, \ \vec{v}_2 = \{\vec{v}_{2k}\}_{k=1}^{3} \in \vec{J}^{1}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2).\end{gathered} \tag{4.39}$$

Тогда так же, как в пунктах 3.3.4 и 3.3.6, можно установить, что уравнение (4.31) приводится к дифференциальному уравнению (см. (3.238))

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^{3} + \widetilde{A_2}\{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^{3} + P_0\left\{P_{0,S_{2k}}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1\right)\right\}_{k=1}^{3} + P_0\left\{P_{0,S_{2k}}\left(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_{2k}\right)\right\}_{k=1}^{3} + \\ + gQ_2\left\{\zeta_j + \theta_{2j}((P_2\vec{\delta}_2\times\vec{r}_{2j})\cdot\vec{e}_2^{\,3})\right\}_{j=1}^{2} = P_0\left\{P_{0,S_{2k}}\vec{f}_{2k}\right\}_{k=1}^{3},\end{gathered} \tag{4.40}$$

где Q_2 — оператор вспомогательной задачи (3.203) применительно к области $\Omega_2 = \cup_{k=1}^3 \Omega_{2k}$:

$$
\begin{gathered}
\Delta p_{2k} = 0 \text{ (в } \Omega_{2k}), \quad \frac{\partial p_{2k}}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_{2k}), \quad k = 1,2,3, \\
\rho_{21}^{-1}\frac{\partial p_{21}}{\partial n} = \rho_{22}^{-1}\frac{\partial p_{22}}{\partial n} \text{ (на } \Gamma_{21}), \quad \vec{n} = \vec{e}_2^{\,3}, \quad \rho_{22}^{-1}\frac{\partial p_{22}}{\partial n} = \rho_{23}^{-1}\frac{\partial p_{23}}{\partial n} \text{ (на } \Gamma_{22}), \quad \vec{n} = \vec{e}_1^{\,3}, \\
p_{21} - p_{22} = (\rho_{21} - \rho_{22})\hat{\zeta}_{21} := g(\rho_{21} - \rho_{22})\left[\zeta_{21} + \theta_{21}((P_2\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_{21}) \cdot \vec{e}_1^{\,3})\right] \text{ (на } \Gamma_{21}), \\
p_{22} - p_{23} = (\rho_{22} - \rho_{23})\hat{\zeta}_{22} := g(\rho_{22} - \rho_{23})\left[\zeta_{22} + \theta_{22}((P_2\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_{22}) \cdot \vec{e}_2^{\,3})\right] \text{ (на } \Gamma_{22}),
\end{gathered} \tag{4.41}
$$

$$
\begin{gathered}
Q_2 \in \mathcal{L}(H_{\Gamma_{21}}^{1/2} \times H_{\Gamma_{22}}^{1/2};\ \vec{G}_{h,S_2,\Gamma}(\Omega_2)), \\
\vec{G}_{h,S_2,\Gamma}(\Omega_2) := \Big\{\vec{u}_2 = \{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^3 : \quad \vec{u}_{2k} = \rho_{2k}^{-1}\nabla\varphi_{2k}, \quad \Delta\varphi_{2k} = 0 \text{ (в } \Omega_{2k}), \\
\frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_{2k}),\ \rho_{21}^{-1}\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial n} = \rho_{22}^{-1}\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial n} \text{ (на } \Gamma_{21}),\ \rho_{22}^{-1}\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial n} = \rho_{23}^{-1}\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial n} \text{ (на } \Gamma_{22}),\ \vec{n} = \vec{e}_2^{\,3}\Big\},
\end{gathered} \tag{4.42}
$$

$$
\{\rho_{2k}^{-1}\nabla p_{2k}\}_{k=1}^3 := gQ_2\left\{\hat{\zeta}_{2j}\right\}_{j=1}^2. \tag{4.43}
$$

Преобразуем теперь уравнение движения второго маятника (см. (2.4)), раскрывая смысл обозначений $\int\limits_{G_k}(\ldots)\,dm_k$ и используя формулу (4.9). Это приводит к соотношению

$$
\begin{gathered}
\vec{J}_2\frac{d\omega_2}{dt} + \int\limits_{G_2}(\vec{r}_2 \times (\frac{d\omega_1}{dt} \times \vec{h}_1))\,dm_2 + \sum_{k=1}^3 \rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}(\vec{r}_{2k} \times \frac{d\vec{u}_{2k}}{dt})\,d\Omega_{2k} + \\
+ \rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}(\vec{h}_2 \times (\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_{30}))\,d\Omega_{30} + \\
+ \rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}(\vec{h}_2 \times P_{G,3}(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_{31}))\,d\Omega_{31} + \alpha_2(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) - \\
- \alpha_3(\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2) + g(m_2 l_2 + m_3 h_2)P_2\vec{\delta}_2 - g\sum_{j=1}^2(\rho_{2,j} - \rho_{2,j+1})\int\limits_{\Gamma_2}(\vec{e}_2^{\,3} \times \vec{r}_{2j})\zeta_{2j}\,d\Gamma_{2j} = \\
= \int\limits_{G_2}(\vec{r}_2 \times \vec{f}_2)\,dm_2 + \rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}(\vec{r}_{30} \times \vec{f}_{30})\,d\Omega_{30} + \rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}(\vec{h}_2 \times P_{G,3}\vec{f}_{31})\,d\Omega_{31} =: \vec{M}_{2,\text{пр}}(t).
\end{gathered} \tag{4.44}
$$

Таким образом, поле проектирования уравнений движения жидкостей в полостях маятников и преобразования уравнений движения маятников приходим к системе обыкновенных дифференциально-операторных уравнений первого порядка (4.12), (4.23), (4.26) (первый маятник), (4.34), (4.44) (второй маятник), (4.7), (4.10) (третий маятник), к которым следует еще добавить соответствующие начальные условия.

4.2. Об операторе кинетической энергии системы и его свойствах. Наша цель сейчас — представить выведенную систему уравнений в виде первого дифференциального уравнения вида (1.1) в некотором гильбертовом пространстве с операторными коэффициентами, имеющими отчетливый физический смысл для изучаемой гидромеханической системы из трех сочлененных маятников с жидким наполнением.

Введем сначала совокупность динамических и кинематических переменных таких систем, отвечающих каждому маятнику и всей системы в целом. Именно, будем считать, что искомыми динамическими переменными являются вектор-столбцы

$$
\begin{gathered}
z_1 := (z_{11}; z_{12}; z_{13})^\tau \in \mathcal{H}_1 := \mathcal{H}_{11} \oplus \mathcal{H}_{12} \oplus \mathcal{H}_{13}, \\
z_{11} := \left(\{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^2 ; \left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}\right\}_{k=1}^2 ; \vec{\omega}_1\right) \in \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3 = \mathcal{H}_{11}, \\
z_{12} := \left(\{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^2 ;\ \vec{\omega}_2\right) \in \vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2) \oplus \mathbb{C}^3 =: \mathcal{H}_{12}, \quad z_{13} := \vec{\omega}_3 \in \mathbb{C}^3 =: \mathcal{H}_{13}.
\end{gathered} \tag{4.45}
$$

Соответственно кинематическими переменными будем считать

$$
\begin{aligned}
&z_2 := (z_{21}; z_{22}; z_{23})^\tau \in \mathcal{H}_2 := \mathcal{H}_{21} \oplus \mathcal{H}_{22} \oplus \mathcal{H}_{23},\\
&z_{21} := \left(\zeta_{11}; P_2\vec{\delta}_1\right) \in L_{2,\Gamma_{11}} \oplus \mathbb{C}^2 =: \mathcal{H}_{21},\\
&z_{22} := \left(\{\zeta_{2j}\}_{j=1}^2; P_2\vec{\delta}_2\right) \in \left(\oplus_{j=1}^2 L_{2,\Gamma_{2j}}\right) \oplus \mathbb{C}^2 =: \mathcal{H}_{22}, \quad z_{23} := P_2\vec{\delta}_3 \in \mathbb{C}^2 =: \mathcal{H}_{23}.
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

Далее, представим совокупность слагаемых в (4.12), (4.29), (4.26), (4.34), (4.44), (4.7), (4.10), содержащих производные по t от динамических переменных, в векторно-матричной форме с помощью операторной матрицы $C^{(1)}$ структурой 3×3, отвечающей ортогональному разложению $\mathcal{H}_1 = \bigoplus\limits_{k=1}^{3} \mathcal{H}_{1k}$. Тогда эти слагаемые будут иметь вид $C^{(1)}dz_1/dt$, причем

$$
C^{(1)}z_1 = \begin{pmatrix} C_{11}z_{11} + C_{12}z_{12} + C_{13}z_{13}\\ C_{21}z_{11} + C_{22}z_{12} + C_{23}z_{13}\\ C_{31}z_{11} + C_{32}z_{12} + C_{33}z_{13}\end{pmatrix}. \tag{4.47}
$$

Указанная процедура приводит к следующим соотношениям:

$$
\begin{aligned}
&C_{11}z_{11} = \Big(\{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^2 + P_{0,1}\{\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}\}_{k=1}^2;\ \{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}\}_{k=1}^2 + P_{h,S_1}\{\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}\}_{k=1}^2;\\
&\vec{J}_1\vec{\omega}_1 + \sum_{k=1}^2 \rho_{1k}\int\limits_{\Omega_{1k}} ((\vec{r}_{1k} + \rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}))\,d\Omega_{1k} + \int\limits_{G_2} (\vec{h}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_2))\,dm_2 +\\
&+ \rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}} (\vec{h}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1))d\Omega_{30} + \rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}} (\vec{h}_1 \times P_{G,3}(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1))\,d\Omega_{31}\Big);
\end{aligned}
\tag{4.48}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{12}z_{12} = \Big(\vec{0};\ \vec{0};\ &\int\limits_{G_2} (\vec{h}_1 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2))\,dm_2 + \sum_{k=1}^3 \rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}} (\vec{h}_1 \times \vec{u}_{2k})d\Omega_{2k} +\\
&+ \rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}} (\vec{h}_1 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2))\,d\Omega_{30} + \rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}} (\vec{h}_1 \times P_{G,3}(\vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2))\,d\Omega_{31}\Big);
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

$$
C_{13}z_{13} = \Big(\vec{0};\ \vec{0};\ \rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}} (\vec{h}_1 \times (\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{30}))\,d\Omega_{30} + \rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}} (\vec{h}_1 \times P_{G,3}(\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{31}))\,d\Omega_{31}\Big); \tag{4.50}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{21}z_{11} = \Big(P_0\Big\{P_{0,S_{2k}}\Big(\omega_1 \times \vec{h}_1\Big)\Big\}_{k=1}^3;\ &\int\limits_{G_2} \Big(\vec{r}_2 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1)\Big)\,dm_2 +\\
&+ \rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}} (\vec{h}_2 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1))\,d\Omega_{30} + \rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}} (\vec{h}_2 \times P_{G,3}(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1))\,d\Omega_{31}\Big);
\end{aligned}
\tag{4.51}
$$

$$
\begin{aligned}
&C_{22}z_{12} = \Big(\{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^3 + P_0\{P_{0,S_{2k}}(\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{2k})\}_{k=1}^3;\quad \vec{J}_2\vec{\omega}_2 + \sum_{k=1}^3 \rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}} (\vec{r}_{2k} \times \vec{u}_{2k})\,d\Omega_{2k} +\\
&+ \rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}} (\vec{h}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2))d\Omega_{30} + \rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}} (\vec{h}_2 \times P_{G,3}(\vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2))\,d\Omega_{31}\Big);
\end{aligned}
\tag{4.52}
$$

$$
C_{23}z_{13} = \Big(\vec{0};\ \rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}} (\vec{h}_2 \times (\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{30}))d\Omega_{30} + \rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}} (\vec{h}_2 \times P_{G,3}(\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{31}))\,d\Omega_{31}\Big); \tag{4.53}
$$

$$
C_{31}z_{11} = \rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}} (\vec{r}_{30} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1))\,d\Omega_{30} + \rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}} (\vec{r}_{31} \times P_{G,3}(\vec{\omega}_3 \times \vec{h}_1))\,d\Omega_{31}; \tag{4.54}
$$

$$
C_{32}z_{12} = \rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}} (\vec{r}_{30} \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2))d\Omega_{30} + \rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}} (\vec{r}_{31} \times P_{G,3}(\vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2))\,d\Omega_{31}; \tag{4.55}
$$

$$C_{33}z_{13} = \left(\vec{J}_{\text{т},3} + \vec{J}_{\text{пр},3}\right)\vec{\omega}_3. \tag{4.56}$$

Опираясь на связи (4.48)–(4.56), установим один из центральных фактов в исследуемой проблеме.

Теорема 4.1. *Оператор* $C^{(1)} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$, *построенный по схеме* (4.47)–(4.56)*, является оператором кинетической энергии исследуемой гидромеханической системы. Он ограничен, самосопряжен и положительно определен в пространстве* $\mathcal{H}_1$.

Доказательство. Оно основано на прямом вычислении выражения

$$\begin{aligned}(C^{(1)}z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} &= (C_{11}z_{11}, z_{11})_{\mathcal{H}_{11}} + (C_{12}z_{12}, z_{11})_{\mathcal{H}_{11}} + (C_{13}z_{13}, z_{11})_{\mathcal{H}_{11}} + \\ &+ (C_{21}z_{11}, z_{12})_{\mathcal{H}_{12}} + (C_{22}z_{12}, z_{12})_{\mathcal{H}_{12}} + (C_{23}z_{13}, z_{12})_{\mathcal{H}_{12}} + \\ &+ (C_{31}z_{11}, z_{13})_{\mathcal{H}_{13}} + (C_{32}z_{12}, z_{13})_{\mathcal{H}_{13}} + (C_{33}z_{13}, z_{13})_{\mathcal{H}_{13}}.\end{aligned} \tag{4.57}$$

Перебрасывая ортопроекторы с одного множителя на другой и убирая эти ортопроекторы там, где они совпадают с тождественным оператором в подпространстве, получаем следующие соотношения.

1) $$\begin{aligned}(C_{11}z_1, z_1)_{\mathcal{H}_{11}} &= \left(\{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^2 + P_{0,1}\{\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1\}_{k=1}^2,\ \{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^2\right)_{\vec{J}_0(\Omega_1)} + \\ &+ \left(\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}\}_{k=1}^2 + P_{h,S_1}\{\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}\}_{k=1}^2,\ \{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}\}_{k=1}^2\right)_{\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)} + \\ &+ \Bigg(\vec{J}_1\vec{\omega}_1 + \sum_{k=1}^2 \rho_{1k}\int\limits_{\Omega_{1k}} (\vec{r}_{1k} \times (\vec{w}_{1k} + \rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}))\, d\Omega_{1k} + \int\limits_{G_2} (\vec{h}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1))\, dm_2 + \\ &+ \rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}} (\vec{h}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1))\, d\Omega_{30} + \rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}} (\vec{h}_1 \times P_{G,3}(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1))\, d\Omega_{31}\Bigg) \cdot \overline{\vec{\omega}_1} = \\ &= \Bigg[\rho_{11}\int\limits_{\Omega_{11}} (|\vec{w}_1|^2 + (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \overline{\vec{w}_1})\, d\Omega_{11} + \rho_{12}\int\limits_{\Omega_{12}} (|\vec{w}_{12}|^2 + (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{12}) \cdot \overline{\vec{w}_{12}})\, d\Omega_{12}\Bigg] + \\ &+ \Bigg[\rho_{11}\int\limits_{\Omega_{11}} (|\rho_{11}^{-1}\nabla\Phi_{11}|^2 + (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \overline{(\rho_{11}^{-1}\nabla\Phi_{11})})\, d\Omega_{11} + \\ &+ \rho_{12}\int\limits_{\Omega_{12}} (|\rho_{12}^{-1}\nabla\Phi_{12}|^2 + (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{12}) \cdot \overline{(\rho_{12}^{-1}\nabla\Phi_{12})})\, d\Omega_{12}\Bigg] + \\ &+ \rho_{10}\int\limits_{\Omega_{10}} (\vec{r}_{10} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{10})) \cdot \overline{\vec{\omega}_1}\, d\Omega_{10} + \rho_{11}\int\limits_{\Omega_{11}} (\vec{r}_{11} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11})) \cdot \overline{\vec{\omega}_1}\, d\Omega_{11} + \\ &+ \rho_{12}\int\limits_{\Omega_{12}} (\vec{r}_{12} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{12})) \cdot \overline{\vec{\omega}_1}\, d\Omega_{12} + \sum_{k=1}^2 \rho_{1k}\int\limits_{\Omega_{1k}} (\vec{r}_{1k} \times (\vec{w}_{1k} + \rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k})) \cdot \overline{\vec{\omega}_1}\, d\Omega_{1k} + \\ &+ \rho_{20}\int\limits_{\Omega_{20}} (\vec{h}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1)) \cdot \overline{\vec{\omega}_1}\, d\Omega_{20} + \sum_{k=1}^3 \rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}} (\vec{h}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1)) \cdot \overline{\vec{\omega}_1}\, d\Omega_{2k} + \\ &+ \rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}} (\vec{h}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1)) \cdot \overline{\vec{\omega}_1}\, d\Omega_{30} + \rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}} (\vec{h}_1 \times P_{G,3}(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1)) \cdot \overline{\vec{\omega}_1}\, d\Omega_{31} = \\ &= \rho_{10}\int\limits_{\Omega_{10}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{10}|^2\, d\Omega_{10} + \rho_{11}\int\limits_{\Omega_{11}} \Big[|\vec{w}_{11}|^2 + (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \overline{\vec{w}_{11}} + |\rho_{11}^{-1}\nabla\Phi_{11}|^2 + \\ &+ (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \overline{(\rho_{11}^{-1}\nabla\Phi_{11})} + |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11}|^2 + \overline{(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11})} \cdot (\vec{w}_{11} + \rho_{11}^{-1}\nabla\Phi_{11})\Big]\, d\Omega_{11} +\end{aligned}$$

$$+\rho_{12}\int\limits_{\Omega_{12}}\Big[|\vec{w}_{12}|^2+(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{12})\cdot\overline{\vec{w}_{12}}+|\rho_{12}^{-1}\nabla\Phi_{12}|^2+(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{12})\cdot\overline{(\rho_{12}^{-1}\nabla\Phi_{12})}+|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{12}|^2+$$

$$+\overline{(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{12})}\cdot(\vec{w}_{12}+\rho_{12}^{-1}\nabla\Phi_{12})\Big]\,d\Omega_{12}+\rho_{20}\int\limits_{\Omega_{20}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1|^2\,d\Omega_{20}+\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1|^2\,d\Omega_{2k}+$$

$$+\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1|^2\,d\Omega_{30}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}\overline{(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)}\cdot P_{G,3}(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)\,d\Omega_{31}=$$

$$=\left[\rho_{10}\int\limits_{\Omega_{10}}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{10}|^2\,d\Omega_{10}+\sum_{k=1}^{2}\rho_{1k}\int\limits_{\Omega_{1k}}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{11}+\vec{u}_{11}|^2\,d\Omega_{1k}\right]+$$

$$+\left[\rho_{20}\int\limits_{\Omega_{20}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1|^2\,d\Omega_{20}+\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1|^2\,d\Omega_{2k}\right]+$$

$$+\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1|^2\,d\Omega_{30}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}|P_{G,3}(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)|^2\,d\Omega_{31}=\int\limits_{G_1}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1+\vec{u}_{11}|^2\,dm_1+$$

$$+\int\limits_{G_2}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1|^2\,dm_2+\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1|^2\,d\Omega_{30}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}|P_{G,3}(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)|^2\,d\Omega_{31};$$

$$2)\ (C_{12}z_{12},z_{11})_{\mathcal{H}_1}=\left(\int\limits_{G_2}(\vec{h}_1\times(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2))dm_2+\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}(\vec{h}_1\times\vec{u}_{2k})\,d\Omega_{2k}+\right.$$

$$\left.+\ \rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}(\vec{h}_1\times(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2))\,d\Omega_{30}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}(\vec{h}_1\times P_{G,3}(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2))\,d\Omega_{31}\right)\cdot\overline{\vec{\omega}_1}=$$

$$=\left[\rho_{20}\int\limits_{\Omega_{20}}\overline{(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)}\cdot(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2)\,d\Omega_{20}+\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}\overline{(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)}\cdot(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{2k})\,d\Omega_{2k}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}\overline{(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)}\cdot\vec{u}_{2k}\,d\Omega_{2k}\right]+\left[\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}\overline{(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)}\cdot(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2)\,d\Omega_{30}+\right.$$

$$\left.+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}\overline{(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)}\cdot P_{G,3}(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2)\,d\Omega_{31}\right];$$

$$3)\ (C_{13}z_{13},z_{11})_{\mathcal{H}_1}=\left(\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}(\vec{h}_1\times(\vec{\omega}_3\times\vec{r}_{30}))\,d\Omega_{30}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}(\vec{h}_1\times P_{G,3}(\vec{\omega}_3\times\vec{r}_{31}))\,d\Omega_{31}\right)\cdot\overline{\vec{\omega}_1}=$$

$$=\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}\overline{(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)}\cdot(\vec{\omega}_3\times\vec{r}_{30})\,d\Omega_{30}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}\overline{(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)}\cdot P_{G,3}(\vec{\omega}_3\times\vec{r}_{31})\,d\Omega_{31};$$

$$4)\ (C_{21}z_{11},z_{12})_{\mathcal{H}_{12}}=\left(P_0\left\{P_{0,S_{2k}}(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)\right\}_{k=1}^{3},\ \{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^{3}\right)_{\vec{J}_{0,S_2,\Gamma_2}(\Omega_2)}+\Big(\int\limits_{G_2}(\vec{r}_2\times(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1))\,dm_2+$$

$$+\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}(\vec{h}_2\times(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1))\,d\Omega_{30}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}(\vec{h}_2\times P_{G,3}(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1))\,d\Omega_{31}\Big)\cdot\overline{\vec{\omega}_2}=$$

$$=\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}(P_{0,S_{2k}}(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1))\cdot\vec{u}_{2k}\,d\Omega_{2k}+\rho_{20}\int\limits_{\Omega_{20}}\overline{(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{20})}\cdot(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)\,d\Omega_{20}+$$

$$+\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}(\overline{(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{2k})}\cdot(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)\,d\Omega_{2k}+\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}\overline{(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2)}\cdot(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)\,d\Omega_{30}+$$

$$+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}\overline{(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2)}\cdot(P_{G,3}(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1))\,d\Omega_{31}=$$

$$=\rho_{20}\int\limits_{\Omega_{20}}\overline{(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{20})}\cdot(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)\,d\Omega_{20}+\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)\cdot\overline{(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{2k}+\vec{u}_{2k})}\,d\Omega_{2k}+$$

$$+\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}\overline{(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2)}\cdot(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)\,d\Omega_{30}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}\overline{(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2)}\cdot(P_{G,3}(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1))\,d\Omega_{31};$$

5) $$(C_{22}z_{12},z_{12})_{\mathcal{H}_{12}}=\Big(\{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^{3}+P_0\,\{P_{0,S_{2k}}(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{2k})\}_{k=1}^{3},\ \{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^{3}\Big)_{\vec{J}_{0,S_2,\Gamma_2}(\Omega_2)}+$$

$$+\Bigg(\vec{J}_2\vec{\omega}_2+\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}(\vec{r}_{2k}\times\vec{u}_{2k})\,d\Omega_{2k}+\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}(\vec{h}_2\times(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2))\,d\Omega_{30}+$$

$$+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}(\vec{h}_2\times P_{G,3}(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2))\,d\Omega_{31}\Bigg)\cdot\overline{\vec{\omega}_2}=$$

$$=\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}(\vec{u}_{2k}+(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{2k}))\cdot\overline{\vec{u}_{2k}}\,d\Omega_{2k}+\Bigg[\rho_{20}\int\limits_{\Omega_{20}}(\vec{r}_{20}\times(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{20}))\,d\Omega_{20}\cdot\overline{\vec{\omega}_2}+$$

$$+\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}(\vec{r}_{2k}\times(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{2k}))\,d\Omega_{2k}\cdot\overline{\vec{\omega}_2}+\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}\overline{(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{2k})}\cdot\vec{u}_{2k}\,d\Omega_{2k}\Bigg]+$$

$$+\Bigg[\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}(\vec{h}_2\times(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2))\,d\Omega_{30}\cdot\overline{\vec{\omega}_2}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}(\vec{h}_2\times P_{G,3}(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2))\,d\Omega_{31}\cdot\overline{\vec{\omega}_2}\Bigg]=$$

$$=\rho_{20}\int\limits_{\Omega_{20}}|\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{20}|^2\,d\Omega_{20}+\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}|\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{2k}+\vec{u}_{2k}|^2\,d\Omega_{2k}+$$

$$+\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}|\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2|^2\,d\Omega_{30}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}|P_{G,3}(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2)|\,d\Omega_{31};$$

6) $$(C_{23}z_{13},z_{12})_{\mathcal{H}_{12}}=\Bigg(\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}(\vec{h}_2\times(\vec{\omega}_3\times\vec{r}_{30}))\,d\Omega_{30}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}(\vec{h}_2\times P_{G,3}(\vec{\omega}_3\times\vec{r}_{31}))\,d\Omega_{31}\Bigg)\cdot\overline{\vec{\omega}_2}=$$

$$=\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}\overline{(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2)}\cdot(\vec{\omega}_3\times\vec{r}_{30})\,d\Omega_{30}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}\overline{(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2)}\cdot P_{G,3}(\vec{\omega}_3\times\vec{r}_{31})\,d\Omega_{31};$$

7) $$(C_{31}z_{11}, z_{13})_{\mathcal{H}_{13}} = \left(\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}} (\vec{r}_{30}\times(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1))\,d\Omega_{30} + \rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}} (\vec{r}_{31}\times P_{G,3}(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1))\,d\Omega_{31}\right)\cdot\overline{\vec{\omega}_3} =$$
$$= \rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}} \overline{(\vec{\omega}_3\times\vec{r}_{30})}\cdot(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)\,d\Omega_{30} + \rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}} \overline{(\vec{\omega}_3\times\vec{r}_{31})}\cdot P_{G,3}(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)\,d\Omega_{31};$$

8) $$(C_{32}z_{12}, z_{13})_{\mathcal{H}_{13}} = \left(\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}} (\vec{r}_{30}\times(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2))\,d\Omega_{30} + \rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}} (\vec{r}_{31}\times P_{G,3}(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2))\,d\Omega_{31}\right)\cdot\overline{\vec{\omega}_3} =$$
$$= \rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}} \overline{(\vec{\omega}_3\times\vec{r}_{30})}\cdot(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2)\,d\Omega_{30} + \rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}} \overline{(\vec{\omega}_3\times\vec{r}_{31})}\cdot P_{G,3}(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2)\,d\Omega_{31};$$

9) $$(C_{33}z_{13}, z_{13})_{\mathcal{H}_{13}} = (\vec{J}_{\text{т},3} + \vec{J}_{\text{пр},3})\vec{\omega}_3\cdot\overline{\vec{\omega}_3} = \Bigg(\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}} (\vec{r}_{30}\times(\vec{\omega}_3\times\vec{r}_{30}))\,d\Omega_{30} +$$
$$+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}} (\vec{r}_{31}\times P_{G,3}(\vec{\omega}_3\times\vec{r}_{31}))\,d\Omega_{31}\Bigg)\cdot\overline{\vec{\omega}_3} =$$
$$= \rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}} |\vec{\omega}_3\times\vec{r}_{30}|^2\,d\Omega_{30} + \rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}} |P_{G,3}(\vec{\omega}_3\times\vec{r}_{31})|^2\,d\Omega_{31}.$$

Складывая теперь левые и правые части соотношений 1)–9) и пользуясь формулой (4.57), получаем, что

$$(C^{(1)}z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} = \left\{\rho_{10}\int\limits_{\Omega_{10}} |\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{10}|^2\,d\Omega_{10} + \sum_{k=1}^{2}\rho_{1k}\int\limits_{\Omega_{1k}} |\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{1k} + \vec{u}_{1k}|^2\,d\Omega_{1k}\right\} +$$
$$+\left\{\rho_{20}\int\limits_{\Omega_{20}} |\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1 + \vec{\omega}_2\times\vec{r}_{20}|^2\,d\Omega_{20} + \sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}} |\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1 + \vec{\omega}_2\times\vec{r}_{2k} + \vec{u}_{2k}|^2\,d\Omega_{2k}\right\} +$$
$$+\Bigg\{\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}} |\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1 + \vec{\omega}_2\times\vec{h}_2 + \vec{\omega}_3\times\vec{r}_{30}|^2\,d\Omega_{30} +$$
$$+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}} |P_{G,3}(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1 + \vec{\omega}_2\times\vec{h}_2 + \vec{\omega}_3\times\vec{r}_{31})|^2\,d\Omega_{31}\Bigg\}. \qquad (4.58)$$

Отсюда приходим к выводу, что оператор $C^{(1)} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ ограничен и неотрицателен в $\mathcal{H}_1$. Далее, равенство $(C^{(1)}z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} = 0$ имеет место лишь при $z_1 = 0$, и поэтому $C^{(1)}$ — положительный оператор. Наконец, поскольку он равен сумме положительно определенного и конечномерного операторов, то $C^{(1)} \gg 0$, что доказывает утверждение теоремы. □

Замечание 4.1. Так как векторы $\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1$ и $\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2$ потенциальные, т. е.

$$(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1) = \nabla((\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)\cdot\vec{r}_{31}), \quad (\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2) = \nabla((\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2)\cdot\vec{r}_{31}),$$

то подынтегральное выражение в последнем слагаемом из (4.58) можно переписать в виде

$$|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1 + \vec{\omega}_2\times\vec{h}_2 + P_{G,3}(\vec{\omega}_3\times\vec{r}_{31})|^2.$$

Замечание 4.2. Квадратичный функционал (4.58) равен удвоенной кинетической энергии приведенной гидромеханической системы, когда движение жидкости в третьем маятнике с полостью Ω_{31}, целиком заполненной идеальной жидкостью, описывается лишь угловой скоростью $\vec{\omega}_3$, а поле скорости в Ω_{31} выражается через потенциалы Жуковского.

4.2.1. Эквивалентные кинематические условия. Введение оператора потенциальной энергии. Напомним сначала, что исходные кинематические условия в исследуемой проблеме имеют вид (см. (2.12)–(2.13), (2.19)): для первого маятника

$$\begin{aligned}
&\frac{d\zeta_{11}}{dt} = \gamma_{n,11}\vec{u}_{11} := \vec{u}_{11}\cdot\vec{n}_{11} = \vec{u}_{12}\cdot\vec{n}_{11} =: \gamma_{n,11}\vec{u}_{12} \quad (\text{на } \Gamma_{11}),\\
&\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_1 = P_2\vec{\omega}_1, \quad \vec{n}_{11} = \vec{e}_1^{\,3};
\end{aligned} \tag{4.59}$$

для второго маятника

$$\begin{aligned}
&\frac{d\zeta_{21}}{dt} = \gamma_{n,21}\vec{u}_{21} := \vec{u}_{21}\cdot\vec{n}_{21} = \vec{u}_{22}\cdot\vec{n}_{21} =: \gamma_{n,21}\vec{u}_{22} \quad (\text{на } \Gamma_{12}),\\
&\frac{d\zeta_{22}}{dt} = \gamma_{n,22}\vec{u}_{22} := \vec{u}_{22}\cdot\vec{n}_{22} = \vec{u}_{23}\cdot\vec{n}_{22} =: \gamma_{n,22}\vec{u}_{23} \quad (\text{на } \Gamma_{21}),\\
&\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_2 = P_2\vec{\omega}_2, \quad \vec{n}_{21} = \vec{n}_{22} = \vec{e}_2^{\,3};
\end{aligned} \tag{4.60}$$

для третьего маятника

$$\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_3 = P_2\vec{\omega}_3. \tag{4.61}$$

Перепишем теперь, как это уже встречалось выше в пунктах 3.2.6 и 3.3.5, кинематические условия (4.59)–(4.61) в эквивалентной форме, введя оператор потенциальной энергии системы.

Если выполнены условия (4.59)–(4.61), то выполнены также следующие соотношения: для первого маятника

$$\begin{aligned}
&(\rho_{11}-\rho_{12})\left[\frac{d}{dt}\big(\zeta_{11}+\theta_{11}(P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{11})\big) - \gamma_{n,11}\big(\rho_{11}^{-1}\nabla\Phi_{11}+\theta_{11}((P_2\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\big)\right] = 0,\\
&-(\rho_{11}-\rho_{12})\int\limits_{\Gamma_{11}}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\Big(\frac{d\zeta_{11}}{dt}-\gamma_{n,11}(\rho_{11}^{-1}\nabla\Phi_{11})\Big)\,d\Gamma_{11}+\\
&+(m_1l_1+(m_2+m_3)h_1)\Big(\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_1-P_2\vec{\omega}_1\Big) = 0;
\end{aligned} \tag{4.62}$$

для второго маятника

$$\begin{aligned}
&\Big\{(\rho_{2,j}-\rho_{2,j+1})\left[\Big(\frac{d\zeta_{2j}}{dt}-\gamma_{n,2j}(\rho_{2j}^{-1}\nabla\Phi_{2j})\Big)+\frac{d}{dt}\theta_{2j}((P_2\vec{\delta}_2\times\vec{r}_{2j})\cdot\vec{e}_2^{\,3})-\right.\\
&\left.-\theta_{2j}((P_2\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{2j})\cdot\vec{e}_2^{\,3})\right]\Big\}_{j=1}^{2} = 0,\\
&-\sum_{j=1}^{2}(\rho_{2j}-\rho_{2,j+1})\int\limits_{\Gamma_{2j}}(\vec{e}_2^{\,3}\times\vec{r}_{2j})\Big(\frac{d\zeta_{2j}}{dt}-\gamma_{n,2j}(\rho_{2j}^{-1}\nabla\Phi_{2j})\Big)\,d\Gamma_{2j}+\\
&+(m_2l_2+m_3h_2)\Big(\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_2-P_2\vec{\omega}_2\Big) = \vec{0};
\end{aligned} \tag{4.63}$$

для третьего маятника

$$m_3l_3\left(\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_3-P_2\vec{\omega}_3\right) = \vec{0}. \tag{4.64}$$

(Здесь учтено, что $\gamma_{n,11}\vec{u}_{11} = \gamma_{n,11}\vec{w}_{11}+\gamma_{n,11}(\rho_{11}^{-1}\nabla\Phi_{11}) = \gamma_{n,11}(\rho_{11}^{-1}\nabla\Phi_{11})$, а также аналогичные соотношения в (4.60).)

Введем, как и в пунктах 3.2.6 и 3.3.5, осевые моменты инерции, отвечающие границам раздела жидкостей в полостях первого и второго маятников:

$$\begin{aligned} \beta_{jl}^{(11)} &:= \int\limits_{\Gamma_{11}} x_1^j(\theta_{11}x_1^l)\,d\Gamma_{11}, \quad j,l=1,2; \\ \beta_{jl}^{(2k)} &:= \int\limits_{\Gamma_{2k}} x_2^j(\theta_{2k}x_2^l)\,d\Gamma_{2k}, \quad j,l=1,2, \quad k=1,2. \end{aligned} \tag{4.65}$$

Лемма 4.1. *Введем матрицы*

$$U_1 := \begin{pmatrix} (m_1l_1+(m_2+m_3)h_1)-(\rho_{11}-\rho_{22})\beta_{22}^{(11)} & (\rho_{11}-\rho_{12})\beta_{21}^{(11)} \\ (\rho_{11}-\rho_{12})\beta_{12}^{(11)} & (m_1l_1+(m_2+m_3)h_1)-(\rho_{11}-\rho_{22})\beta_{11}^{(11)} \end{pmatrix},$$

$$U_2 := \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix},$$

где $u_{11}=(m_2l_2+m_3h_2)-\left[(\rho_{21}-\rho_{22})\beta_{22}^{(21)}+(\rho_{22}-\rho_{23})\beta_{22}^{(22)}\right]$, $u_{12}=(\rho_{21}-\rho_{22})\beta_{21}^{(21)}+(\rho_{22}-\rho_{23})\beta_{21}^{(22)}$, $u_{21}=(\rho_{21}-\rho_{22})\beta_{12}^{(21)}+(\rho_{22}-\rho_{23})\beta_{12}^{(22)}$, $u_{22}=(m_2l_2+m_3h_2)-\left[(\rho_{21}-\rho_{22})\beta_{11}^{(21)}+(\rho_{22}-\rho_{23})\beta_{11}^{(22)}\right]$. *Если выполнены свойства*

$$\Delta_2^{(11)} := \det U_1 \neq 0, \qquad \Delta_2^{(22)} := \det U_2 \neq 0, \tag{4.66}$$

то условия (4.59) *эквивалентны условиям* (4.62), *а условия* (4.60) *эквивалентны условиям* (4.63).

Доказательство. Для выполнения эквивалентности условий (4.59) и (4.62) следует повторить доказательство леммы 3.5 с заменой m_1l_1 на $m_1l_1+(m_2+m_3)h_2$ и некоторых обозначений. Для установления эквивалентности условий (4.60) и условий (4.63) следует повторить доказательства леммы 3.17 с заменой m_1l_1 на $m_2l_2+m_3h_2$ и некоторых других обозначений. □

Замечание 4.3. Эквивалентность условий (4.61) и (4.64) очевидна.

Введем теперь, опираясь на соотношения (4.62)–(4.64), операторную матрицу

$$C^{(2)} := \operatorname{diag}\left(C_{11}^{(2)};\ C_{22}^{(2)};\ C_{33}^{(2)}\right), \tag{4.67}$$

действующую на кинематические переменные

$$z_2=(z_{21},z_{22},z_{23})^\tau, \quad z_{21}=(\zeta_{11};P_2\vec{\delta}_1), \quad z_{22}=(\{\zeta_{2j}\}_{j=1}^2;P_2\vec{\delta}_2), \quad z_{23}=P_2\vec{\delta}_3,$$

согласно следующим формулам:

$$\begin{aligned} C_{11}^{(2)}z_{21} &:= \Big((\rho_{11}-\rho_{12})\left[\zeta_{11}+\theta_{11}((P_1\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\right]; \\ &-(\rho_{11}-\rho_{12})\int\limits_{\Gamma_{11}}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\zeta_{11}\,d\Gamma_{11}+(m_1l_1+(m_2+m_3)h_2)P_2\vec{\delta}_1\Big); \end{aligned} \tag{4.68}$$

$$\begin{aligned} C_{22}^{(2)}z_{22} &:= \Big(\left\{(\rho_{2j}-\rho_{2,j+1})(\zeta_{2j}+\theta_{2j}((P_2\vec{\delta}_2\times\vec{r}_{2j})\cdot\vec{e}_2^{\,3}))\right\}_{j=1}^2; \\ &-\sum_{j=1}^2(\rho_{2j}-\rho_{2,j+1})\int\limits_{\Gamma_{2j}}(\vec{e}_2^{\,3}\times\vec{r}_{2j})\zeta_{2j}\,d\Gamma_{2j}+(m_2l_2+m_3h_2)P_2\vec{\delta}_2\Big); \end{aligned} \tag{4.69}$$

$$C_{23}^{(2)}z_{23} := m_3l_3P_2\vec{\delta}_3. \tag{4.70}$$

Лемма 4.2. *Операторная матрица* $C^{(2)}:\mathcal{H}_2\to\mathcal{H}_2$ *является ограниченным самосопряженным оператором потенциальной энергии гидромеханической системы.*

Доказательство. Ограниченность $C^{(2)}$ следует из ее определения (см. (4.68)–(4.70)). Проверим, что $C^{(2)}$ — самосопряженная операторная матрица, вычислив ее квадратичную форму. Имеем

$$(C_{11}^{(2)}z_{21}, z_{21})_{\mathcal{H}_{21}} = \Big((\rho_{11}-\rho_{12})(\zeta_{11}+\theta_{11}((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})), \zeta_{11}\Big)_{L_{2,\Gamma_{11}}} +$$
$$+\left[-(\rho_{11}-\rho_{12})\int\limits_{\Gamma_{11}}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{21})\zeta_{11}\,d\Gamma_{11} + (m_1l_1+(m_2+m_3)h_1)P_2\vec{\delta}_1\right]\cdot\overline{P_2\vec{\delta}_1} =$$
$$=(\rho_{11}-\rho_{12})\int\limits_{\Gamma_{11}}\left[|\zeta_{11}|^2+\theta_{11}((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\overline{\zeta_{11}}\right]d\Gamma_{11}+$$
$$+(\rho_{11}-\rho_{12})\int\limits_{\Gamma_{11}}((\overline{P_2\vec{\delta}_1}\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\zeta_{11}\,d\Gamma_{11}+(m_1l_1+(m_2+m_3)h_1)|P_2\vec{\delta}_1|^2 =$$
$$=(\rho_{11}-\rho_{12})\int\limits_{\Gamma_{11}}\left[|\zeta_{11}|^2+2\mathrm{Re}\left(\theta_{11}((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\overline{\zeta_{11}}\right)\right]d\Gamma_{11}+(m_1l_1+(m_2+m_3)h_1)|P_2\vec{\delta}_1|^2 =$$
$$=(\rho_{11}-\rho_{12})\int\limits_{\Gamma_{11}}\left[|\zeta_{11}+\theta_{11}((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})|^2-|\theta_{11}((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})|^2\right]d\Gamma_{11}+$$
$$+(m_1l_1+(m_2+m_3)h_1)|P_2\vec{\delta}_1|^2; \quad (4.71)$$

$$(C_{22}^{(2)}z_{22}, z_{22})_{\mathcal{H}_{22}} = \left(\Big\{(\rho_{2j}-\rho_{2,j+1})(\zeta_{2j}+\theta_{2j}((P_2\vec{\delta}_2\times\vec{r}_{2j})\cdot\vec{e}_2^{\,3}))\Big\}_{j=1}^2, \{\zeta_{2j}\}_{j=1}^2\right)_{L_{2,\Gamma_{21}}\oplus L_{2,\Gamma_{22}}} -$$
$$-\left(\sum_{j=1}^2(\rho_{2j}-\rho_{2,j+1})\int\limits_{\Gamma_{2j}}(\vec{e}_2^{\,3}\times\vec{r}_{2j})\zeta_{2j}\,d\Gamma_{2j}\right)\cdot\overline{P_2\vec{\delta}_2}+(m_2l_2+m_3h_2)|P_2\vec{\delta}_2|^2 =$$
$$=\sum_{j=1}^2(\rho_{2j}-\rho_{2,j+1})\int\limits_{\Gamma_{2j}}\left(|\zeta_{2j}|^2+2\mathrm{Re}\left(\theta_{2j}((P_2\vec{\delta}_2\times\vec{r}_{2j})\cdot\vec{e}_2^{\,3})\right)\overline{\zeta_{2j}}\right)d\Gamma_{2j}+$$
$$+(m_2l_2+m_3h_2)|P_2\vec{\delta}_2|^2=\sum_{j=1}^2(\rho_{2j}-\rho_{2,j+1})\int\limits_{\Gamma_{2j}}\left[|\zeta_{2j}+\theta_{2j}((P_2\vec{\delta}_2\times\vec{r}_{2j})\cdot\vec{e}_2^{\,3})|^2-\right.$$
$$\left.-|\theta_{2j}((P_2\vec{\delta}_2\times\vec{r}_{2j})\cdot\vec{e}_2^{\,3})|^2\right]d\Gamma_{2j}+(m_2l_2+m_3h_2)|P_2\vec{\delta}_2|^2; \quad (4.72)$$

$$(C_{33}^{(2)}z_{23}, z_{23})_{\mathcal{H}_{23}} = m_3l_3|P_2\vec{\delta}_3|^2. \quad (4.73)$$

Складывая левые и правые части (4.71)–(4.73) и сравнивая с выражением во второй фигурной скобке слева в (2.21), приходим к выводу, что $C^{(2)}:\mathcal{H}_2\to\mathcal{H}_2$ — оператор потенциальной энергии системы. Отсюда же следует и его самосопряженность. □

Введем теперь следующие величины (см. (4.66)):

$$\begin{aligned}\Delta_1^{(11)} &:= (m_1l_1+(m_2+m_3)h_2)-(\rho_{11}-\rho_{12})\beta_{11}^{(11)},\\ \Delta_1^{(22)} &:= (m_2l_2+m_3h_2)-\left[(\rho_{21}-\rho_{22})\beta_{11}^{(21)}+(\rho_{22}-\rho_{23})\beta_{11}^{(22)}\right].\end{aligned} \quad (4.74)$$

Лемма 4.3. *Оператор $C^{(2)}:\mathcal{H}_2\to\mathcal{H}_2$ неотрицателен тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\Delta_1^{(11)}\geqslant 0,\quad \Delta_2^{(11)}\geqslant 0,\quad \Delta_1^{(22)}\geqslant 0,\quad \Delta_2^{(22)}\geqslant 0, \quad (4.75)$$

и положительно определен, если и только если

$$\Delta_1^{(11)}> 0,\quad \Delta_2^{(11)}> 0,\quad \Delta_1^{(22)}> 0,\quad \Delta_2^{(22)}> 0. \quad (4.76)$$

Доказательство. Оно повторяет доказательства лемм 3.7 и 3.19 с заменой некоторых обозначений. В (4.76) первые два условия необходимы и достаточны для положительной определенности операторной матрицы $C_{11}^{(2)}$ (лемма 3.7), а вторые два — для операторной матрицы $C_{22}^{(2)}$ (лемма 3.19). Для $C_{33}^{(2)}$ это свойство очевидно. □

4.2.2. Введение оператора диссипации энергии и оператора обмена энергиями. Вернемся снова к системе уравнений (4.22), (4.23), (4.26), (4.40), (4.44), (4.10), описывающей в операторной форме эволюцию исследуемой гидромеханической системы, и выделим теперь операторную матрицу, связанную с действием диссипативных сил: на элементах $z_1 = (z_{11}; z_{12}; z_{13})^\tau$, $z_{11} = (\{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^2; \{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}\}_{k=1}^2; \vec{\omega}_1)$, $z_{12} = (\{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^3; \vec{\omega}_2)$, $z_{13} = \vec{\omega}_3$ она имеет вид

$$\begin{gathered}
A_1 z_1 = \Big(\vec{0}, \vec{0}, \alpha_1\vec{\omega}_1 - \alpha_2(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1);\ \widetilde{A}_2\{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^3, \alpha_1(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) - \alpha_3(\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2);\ \alpha_3(\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2)\Big)^\tau, \\
A_1 : \mathcal{D}(A_1) \subset \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_{11} \oplus \mathcal{H}_{12} \oplus \mathcal{H}_{13}, \\
\mathcal{D}(A_1) = \mathcal{H}_{11} \oplus (\mathcal{D}(\widetilde{A}_2) \oplus \mathbb{C}^3) \oplus \mathcal{H}_{13}, \quad \mathcal{D}(\widetilde{A}_2) \subset \vec{J}_{0,S_2,\Gamma}^1(\Omega_2).
\end{gathered} \tag{4.77}$$

Лемма 4.4. *Оператор A_1, определенный в* (4.77)*, является неограниченным неотрицательным самосопряженным оператором, действующим в $\mathcal{H}_1$.*

Доказательство. Вычислим квадратичную форму оператора A_1 на элементах из $\mathcal{D}(A_1)$. Будем иметь

$$\begin{aligned}
(A_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} &= \Big(\widetilde{A}_2\{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^3, \{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^3\Big)_{\vec{J}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2)} + \Big(\alpha_1|\vec{\omega}_1|^2 + \sum_{l=2}^3 \alpha_l|\vec{\omega}_l - \vec{\omega}_{l-1}|^2\Big) = \\
&= \|\vec{u}_{2k}\|^2_{\vec{J}_{0,S_2,\Gamma}^1(\Omega_2)} + \Big(\alpha_1|\vec{\omega}_1|^2 + \sum_{l=2}^3 \alpha_l|\vec{\omega}_l - \vec{\omega}_{l-1}|^2\Big) \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{4.78}$$

Так как $\widetilde{A}_2$ — самосопряженный неограниченный оператор, действующий в $\vec{J}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2)$ и заданный на $\mathcal{D}(\widetilde{A}_2) \subset \vec{J}_{0,S_2,\Gamma}^1(\Omega_2) \subset \vec{J}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2)$, $\mathcal{R}(\widetilde{A}_2) = \vec{J}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2)$, то из (4.78) получаем утверждение леммы. □

Введем, наконец, операторную матрицу вида

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix} : \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}, \tag{4.79}$$

отвечающую оставшимся слагаемым в упомянутой выше системе уравнений, связанным с действием вспомогательных операторов на динамические и кинематические переменные изучаемой системы. Именно, для кинематических переменных

$$z_2 = (z_{21}; z_{22}; z_{23})^\tau, \quad z_{21} = (\zeta_{11}; P_2\vec{\delta}_1), \quad z_{22} = (\{\zeta_{2j}\}_{j=1}^2; P_2\vec{\delta}_2), \quad z_{23} = P_2\vec{\delta}_3,$$

определим оператор B_{12} по закону

$$B_{12} = \operatorname{diag}\big(B_{12,1}; B_{12,2}; B_{12,3}\big) : \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_{21} \oplus \mathcal{H}_{22} \oplus \mathcal{H}_{23} \to \mathcal{H}_1, \tag{4.80}$$

$$\begin{aligned}
B_{12,1} z_{21} = \Big(\vec{0};\ & Q_1(\zeta_{11} + \theta_{11}((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3})); \\
& - (\rho_{11} - \rho_{12}) \int_{\Gamma_{11}} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_{11})\zeta_{11}\, d\Gamma_{11} + (m_1 l_1 + (m_2 + m_3)h_1)P_2\vec{\delta}_1\Big);
\end{aligned} \tag{4.81}$$

$$\begin{aligned}
B_{12,2} z_{22} = \Big(& Q_2\left\{\zeta_{2j} + \theta_{2j}((P_2\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_{2j}) \cdot \vec{e}_2^{\,3})\right\}_{j=1}^2; \\
& - \sum_{j=1}^2 (\rho_{2j} - \rho_{2,j+1}) \int_{\Gamma_{2j}} (\vec{e}_2^{\,3} \times \vec{r}_{2j})\zeta_{2j}\, d\Gamma_{2j} + (m_2 l_2 + m_3 h_2)P_2\vec{\delta}_2\Big);
\end{aligned} \tag{4.82}$$

$$B_{12,3} z_{23} = m_3 l_3 P_2 \vec{\delta}_3. \tag{4.83}$$

Отметим, что здесь $Q_1 : \mathcal{D}(Q_1) = H^{1/2}_{\Gamma_{11}} \to \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ — оператор краевой задачи вида (3.58) (см. лемму 3.2), а $Q_2 : \mathcal{D}(Q_2) = H^{1/2}_{\Gamma_{21}} \times H^{1/2}_{\Gamma_{22}} \to \vec{G}_{h,S_2,\Gamma}(\Omega_2)$ — оператор краевой задачи (3.203) (см. также (3.209)).

Далее, определим оператор B_{21} по закону

$$B_{21} = \operatorname{diag}\Big(B_{21,1}; B_{21,2}; B_{21,3}\Big) : \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_{11} \oplus \mathcal{H}_{12} \oplus \mathcal{H}_{13} \to \mathcal{H}_2, \tag{4.84}$$

$$\begin{gathered} B_{21,1}z_{11} := (-(\rho_{11} - \rho_{12})\left[\gamma_{n,11}(\rho_{11}^{-1}\nabla\Phi_{11}) + \theta_{11}((P_2\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3})\right]; \\ (\rho_{11} - \rho_{12}) \int\limits_{\Gamma_{11}} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_{11})\gamma_{n,11}(\rho_{11}^{-1}\nabla\Phi_{11})\, d\Gamma_{11} - (m_1 l_1 + (m_2 + m_3)h_1)P_2\vec{\omega}_1); \end{gathered} \tag{4.85}$$

$$\begin{gathered} B_{21,2}z_{12} := \Big(-\left\{(\rho_{2j} - \rho_{2,j+1})\left[\gamma_{n,2j}\vec{u}_{2j} + \theta_{2j}((P_2\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{2j}) \cdot \vec{e}_2^{\,3})\right]\right\}_{j=1}^2; \\ \sum_{j=1}^2 (\rho_{2j} - \rho_{2,j+1}) \int\limits_{\Gamma_{2j}} (\vec{e}_2^{\,3} \times \vec{r}_{2j})\gamma_{n,2j}\vec{u}_{2j}\, d\Gamma_{2j} - (m_2 l_2 + m_3 h_2)P_2\vec{\omega}_2\Big); \end{gathered} \tag{4.86}$$

$$B_{21,3}z_{13} = -m_3 l_3 P_2\vec{\omega}_3. \tag{4.87}$$

В (4.84)–(4.87) операторы $B_{21,1}$ и $B_{21,2}$ неограниченные и заданы, как и соответствующие операторы B_{21} и B_{22} из пунктов 3.2.7 и 3.3.5 (см. (3.109), (3.229)), на следующих областях определения:

$$\mathcal{D}(B_{21,1}) = \vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \mathcal{D}(\gamma_{n,11}) \oplus \mathbb{C}^3, \tag{4.88}$$

$$\mathcal{D}(\gamma_{n,11}) := \{\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}\}_{k=1}^2 : \gamma_{n_1 1}(\rho_{11}^{-1}\nabla\Phi_{11}) = \gamma_{n,11}(\rho_{12}^{-1}\nabla\Phi_{12}) \in L_{2,\Gamma_{11}}\}; \tag{4.89}$$

$$\mathcal{D}(B_{21,2}) := \{z_{12} = (\vec{u}_2; \vec{\omega}_2) \in \mathcal{H}_{12} : \vec{u}_2 = \{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^3 \in \vec{J}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2),\ \gamma_{n,2j}\vec{u}_{2j} \in L_{2,\Gamma_{2j}},\ j = 1, 2\}. \tag{4.90}$$

Лемма 4.5. *Операторы B_{12} и B_{21}, определяемые формулами* (4.80)–(4.83) *и* (4.84)–(4.87) *на своих областях определения, являются кососамосопряженными*:

$$(B_{12}z_2, z_1)_{\mathcal{H}_1} = -(z_2, B_{21}z_1)_{\mathcal{H}_2}, \tag{4.91}$$

$$\forall z_1 \in \mathcal{D}(B_{21}), \quad \forall z_2 \in \mathcal{D}(B_{12}) = (\mathcal{D}(Q_1) \oplus \mathbb{C}^2) \oplus (\mathcal{D}(Q_2) \oplus \mathbb{C}^2) \oplus \mathbb{C}^2. \tag{4.92}$$

Доказательство. Оно повторяет доказательство лемм 3.8 (для $B_{12,1}$ и $B_{21,1}$) и 3.20(1) (для $B_{12,2}$ и $B_{21,2}$). Для $B_{12,3}$ и $B_{21,3}$ оно очевидно (см. (4.83) и (4.87)). □

4.3. Итоговая операторная формулировка исследуемой задачи. После введения всех операторных матриц задачу Коши для дифференциально-операторных уравнений, описывающих совместные малые движения системы из трех сочлененных маятников, т. е. совокупности динамических уравнений (4.22), (4.23), (4.26), (4.40), (4.44), (4.10), а также кинематических уравнений (4.62)–(4.64), вместе с начальными условиями можно коротко переписать в виде

$$\begin{gathered} C^{(1)}\frac{dz_1}{dt} + A_1 z_1 + gB_{12}z_2 = f_1(t), \quad z_1(0) = z_1^0, \\ gC^{(2)}\frac{dz_2}{dt} + gB_{21}z_1 = 0, \quad z_2(0) = z_2^0, \end{gathered} \tag{4.93}$$

где $C^{(1)}$ — операторная матрица кинетической энергии, $C^{(2)}$ — операторная матрица потенциальной энергии, A_1 — операторная матрица диссипации энергии, B_{12} и B_{21} — операторные матрицы, по которым строится оператор обмена

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad D(B) = D(B_{21}) \oplus D(B_{12}), \quad \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 = \mathcal{H} \tag{4.94}$$

между кинематической и потенциальной энергиями. Напомним, что z_1 — совокупность динамических переменных исследуемой системы (см. (4.45)), а z_2 — совокупность ее кинематических переменных исследуемой системы (см. (4.46)). Наконец, заданная функция $f_1(t)$ переменной t со значениями в $\mathcal{H}_1$ такова:

$$f_1(t) := \Big(\big(P_{0,1}\{f_{1k}(t)\}_{k=1}^2; P_{h,S_1}\{\vec{f}_{1k}\}_{k=1}^2; M_{1,\text{пр}}(t)\big);\ \big(P_0\{P_{0,S_{2k}}\vec{f}_{2k}(t)\}_{k=1}^3;\ \vec{M}_{2,\text{пр}}(t)\big);\ \vec{M}_{3,\text{пр}}(t)\Big)^{\tau}. \tag{4.95}$$

Здесь функции справа — это заданные функции в уравнениях (4.22), (4.23), (4.26) — первый маятник, (4.40), (4.44) — второй маятник, (4.10) — третий маятник.

Свойства операторов $C^{(1)},\ C^{(2)},\ A_1,\ B_{12}$ и B_{21} описаны в теореме 4.1 и леммах 4.1–4.5.

Заметим еще, что начальные данные в (4.93) таковы:

$$\begin{gathered} z_1(0) = z_1^0 = (z_{11}^0; z_{12}^0; z_{13}^0)^{\tau}, \quad z_{11}^0 = \big(\{\vec{w}_{1k}^0\}_{k=1}^2; \{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}^0\}_{k=1}^2; \vec{\omega}_1^0\big) \in \vec{J}_0(\Omega_1)\oplus\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)\oplus\mathbb{C}^3, \\ z_{12}^0 = \big(\{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^3; \vec{\omega}_2\big) \in \vec{J}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2)\oplus\mathbb{C}^3, \quad z_{13}^0 = \vec{\omega}_3^0 \in \mathbb{C}^3, \quad z_2(0) = z_2^0 = (z_{21}^0; z_{22}^0; z_{23}^0), \\ z_{21}^0 = (\zeta_{11}^0; P_2\vec{\delta}_1^0) \in L_{2,\Gamma_{11}}\oplus\mathbb{C}^2,\ z_{22}^0 = \Big(\{\zeta_{2j}^0\}_{j=1}^2; P_2\vec{\delta}_2^0\Big) \in (L_{2,\Gamma_{21}}\oplus L_{2,\Gamma_{22}})\oplus\mathbb{C}^2, \quad z_{23}^0 = P_2\vec{\delta}_3^0 \in \mathbb{C}^2. \end{gathered} \tag{4.96}$$

Как и ранее в пунктах 3.1, 3.2.7, 3.3.7, задачу (4.93) можно переписать в виде

$$C\frac{dz}{dt} + Az + gBz = f(t), \quad z(0) = z^0, \tag{4.97}$$

$$C := \operatorname{diag}(C^{(1)}; gC^{(2)}), \quad A := \operatorname{diag}(A_1; 0), \quad B := \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.98}$$

где C — оператор полной энергии системы, A — оператор диссипации, а B — оператор обмена между кинетической и потенциальной энергиями.

4.4. О разрешимости задачи Коши для финальной системы дифференциально-операторных уравнений. Вернемся к задаче Коши (4.93) и выясним условия, при которых эта задача имеет решение на произвольном отрезке времени.

Определение 4.1. Будем говорить, что задача (4.93) имеет *сильное решение* (по переменной t) на произвольном отрезке времени $[0,T]$, если выполнены следующие условия:

$$1^\circ.\ z_1(t) \in C\left([0,T]; \mathcal{D}(A_1)\cap\mathcal{D}(B_{21})\right)\cap C^1([0,T];\mathcal{H}_1); \tag{4.99}$$

$$2^\circ.\ z_2(t) \in C\left([0,T]; \mathcal{D}(B_{12})\right)\cap C^1([0,T];\mathcal{H}_2); \tag{4.100}$$

3°. При любом $t\in[0,T]$ выполнены уравнения (4.93), а при $t=0$ — начальные условия.

Очевидно, необходимыми условиями существования сильного решения задачи (4.93) являются условия

$$f_1(t)\in C([0,T];\mathcal{H}_1), \quad z_1^0 \in \mathcal{D}(A_1)\cap\mathcal{D}(B_{21}), \quad z_2^0\in\mathcal{D}(B_{12}). \tag{4.101}$$

Переходя к вопросу о разрешимости задачи (4.93), т. е. задачи (4.97)-(4.98), выясним сначала, какими свойствами обладает операторная матрица $A+gB$ как оператор, действующий в пространстве $\mathcal{H}=\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_2 = \bigoplus\limits_{k=1}^3 \mathcal{H}_{2k}$. Исходя из определений элементов матриц B_{12} и B_{21} (см. (4.80)–(4.87)) и леммы 4.5, а также из определения (4.77) оператора A_1 и леммы 4.4, получаем представление

$$A+gB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & igF_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_{2,0} & 0 & 0 & igF_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & igF_3 \\ igF_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & igF_2^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & igF_3^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \operatorname{diag}(A_\alpha;\ 0), \tag{4.102}$$

где

$$A_\alpha : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1 = \Big(\vec{J}_0(\Omega_1)\oplus\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)\oplus\mathbb{C}^3\Big)\oplus\Big(\vec{J}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2)\oplus\mathbb{C}^3\Big)\oplus\mathbb{C}^3 \tag{4.103}$$

имеет вид

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1+\alpha_2 & 0 & -\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_2 & 0 & \alpha_2+\alpha_3 & -\alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_3 & \alpha_3 \end{pmatrix}. \tag{4.104}$$

Поясним обозначения в (4.102). Так как $B_{12}^* = -B_{21}$ и имеет диагональную структуру (см. (4.80)), то можно переобозначить

$$(B_{12})_k = iF_k, \quad k = 1, 2, 3, \tag{4.105}$$

и тогда $(B_{21})_k = iF_k^*$. Далее, оператор $A_{2,0} : \mathcal{H}_{12} \to \mathcal{H}_{12}$ действует, согласно (4.77), по закону

$$A_{2,0} z_{12} = (\widetilde{A}_2 \vec{u}_2;\ \vec{0}), \quad \vec{u}_2 = \{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^3 \in \mathcal{D}(\widetilde{A}_2) \subset \vec{J}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2), \quad z_{12} = \{\vec{u}_2;\ \vec{\omega}_2\} \in \mathcal{H}_{12}. \tag{4.106}$$

Введем еще оператор $A_{2,\varepsilon}$ по формуле

$$A_{2,\varepsilon} z_{12} := (\widetilde{A}_2 \vec{u}_2;\ \varepsilon\vec{\omega}_2), \quad \varepsilon > 0. \tag{4.107}$$

Тогда, в силу свойств оператора $\widetilde{A}_2$, получим, что

$$A_{2,\varepsilon} : \mathcal{D}(\widetilde{A}_2) \oplus \mathbb{C}^3 \subset \mathcal{H}_{12} \to \mathcal{H}_{12} \tag{4.108}$$

— положительно определенный оператор. При этом возникает представление вида (4.102)–(4.104), где в (4.102) вместо $A_{2,0}$ стоит оператор $A_{2,\varepsilon}$ из (4.107), а в (4.104) вместо $\alpha_2+\alpha_3$ стоит выражение $\alpha_2 + \alpha_3 - \varepsilon$. Соответствующую матрицу обозначим $A_{\alpha,\varepsilon}$.

В итоге получим представление

$$A + gB = \mathcal{A}_{0,\varepsilon} + \mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon}, \quad \mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon} := \operatorname{diag}(A_{\alpha,\varepsilon}; 0), \tag{4.109}$$

где $\mathcal{A}_{0,\varepsilon}$ — первая матрица справа в (4.102) с заменой $A_{2,0}$ на $A_{2,\varepsilon}$. Наконец, представим еще $\mathcal{A}_{0,\varepsilon}$ в виде

$$\mathcal{A}_{0,\varepsilon} = \mathcal{A}_\varepsilon - \mathcal{I}_5, \quad \mathcal{I}_5 := \operatorname{diag}(I; 0; I; I; I; I), \tag{4.110}$$

добавив к $\mathcal{A}_{0,\varepsilon}$ единичные операторы на диагонали:

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & igF_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_{2,\varepsilon} & 0 & 0 & igF_2 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & igF_3 \\ igF_1^* & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & igF_2^* & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & igF_3^* & 0 & 0 & I \end{pmatrix}. \tag{4.111}$$

Тогда получим представление

$$A + gB = \mathcal{A}_\varepsilon - \mathcal{I}_5 + \mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon}. \tag{4.112}$$

Заметим теперь, что оператор $A + gB$ аккретивный:

$$\operatorname{Re}((A+gB)z, z)_{\mathcal{H}} \geqslant 0 \quad \forall z \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B). \tag{4.113}$$

Покажем, опираясь на представление (4.112), что он является в существенном аккретивным оператором, т. е. его замыкание — максимальный аккретивный оператор.

С этой целью воспользуемся следующей факторизацией оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ из (4.111) с симметричными крайними множителями:

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \operatorname{diag}(I; \mathcal{A}_{2,\varepsilon}^{1/2}; I; I; I; I)\, \mathcal{J}_\varepsilon \operatorname{diag}(I; \mathcal{A}_{2,\varepsilon}^{1/2}; I; I; I; I), \tag{4.114}$$

$$\mathcal{J}_\varepsilon = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & igF_1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & igA_{2,\varepsilon}^{-1/2} F_2 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & igF_3 \\ igF_1^* & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & igF_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2} & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & igF_3^* & 0 & 0 & I \end{pmatrix}. \tag{4.115}$$

Заметим теперь, что операторы $\mathcal{I}_5$ и $A_{\alpha,\varepsilon}$ в выражении (4.112) ограничены и поэтому заданы на всем пространстве $\mathcal{H}$. Поэтому достаточно убедиться, что A_ε — в существенном максимальный оператор.

Лемма 4.6. *В представлении* (4.114), (4.115) *оператор* $F_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2} : \mathcal{H}_{12} \to \mathcal{H}_{22}$ *компактен, а оператор* $A_{2,\varepsilon}^{-1/2} F_2$ *допускает замыкание до компактного оператора* $(F_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2})^* : \mathcal{H}_{22} \to \mathcal{H}_{21}$.

Доказательство. Заметим сначала, что $\mathcal{D}(F_2^*) = \mathcal{D}((B_{21})_2)$ (см. (4.90)) и это множество плотно в $\mathcal{H}_{12} = \vec{J}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega) \oplus \mathbb{C}^3$. Далее, $\mathcal{D}(F_2) = \mathcal{D}((B_{12})_2)$ (см. (4.82)) и множество $\mathcal{D}(F_2) = \mathcal{D}(Q_2) \oplus \mathbb{C}^2 = \left(H_{\Gamma_{21}}^{1/2} \times H_{\Gamma_{22}}^{1/2}\right) \oplus \mathbb{C}^2$ плотно в $\mathcal{H}_{22}$. Так как оператор $\widetilde{A}_2^{-1/2}$ ограниченно действует из $\vec{J}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega)$ в $\vec{J}_{0,S_2,\Gamma}^1(\Omega)$, а $F_2^* = -i(B_{21})_2$ из $\vec{J}_{0,S_2,\Gamma}^1(\Omega)$ в $H_{\Gamma_{21}}^{1/2} \times H_{\Gamma_{22}}^{1/2}$, то $F_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2} : \mathcal{H}_{12} \to \mathcal{H}_{22}$ — компактный оператор (в силу теоремы вложения Гальярдо, см. [7]).

Пусть теперь $z_{22} \in \mathcal{D}(F_2)$, $z_{12} \in \mathcal{H}_{12}$. Тогда

$$\left((A_{2,\varepsilon}^{-1/2} F_2) z_{22}, z_{12}\right)_{\mathcal{H}_{12}} = \left(F_2 z_{22}, A_{2,\varepsilon}^{-1/2} z_{12}\right)_{\mathcal{H}_{12}} = \left(z_{22}, F_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2} z_{12}\right)_{\mathcal{H}_{22}}.$$

Отсюда следует, что

$$A_{2,\varepsilon}^{-1/2} F_2 = \left(F_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2}\right)^* \Big|_{\mathcal{D}(F_2)},$$

и так как $\mathcal{D}(F_2)$ плотно в $\mathcal{H}_{22}$, то замыкание оператора $A_{2,\varepsilon}^{-1/2} F_2$ на все $\mathcal{H}_{22}$ совпадает с $(F_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2})^*$, причем

$$\overline{A_{2,\varepsilon}^{-1/2} F_2} = \left(F_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2}\right)^* : \mathcal{H}_{22} \to \mathcal{H}_{12}$$

— компактный оператор. □

В качестве следствия из леммы 4.6 получаем такой вывод: средний множитель в (4.114) допускает замыкание до ограниченного оператора $\overline{\mathcal{J}_\varepsilon}$ путем замены $A_{2,\varepsilon}^{-1/2} F_2$ на $\left(F_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2}\right)^*$, причем оператор $\overline{\mathcal{J}_\varepsilon}$ равномерно аккретивен:

$$\operatorname{Re}\,(\overline{\mathcal{J}_\varepsilon} z, z)_{\mathcal{H}} \geqslant \|z\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \forall z \in \mathcal{H}. \tag{4.116}$$

Другим следствием леммы 4.6 является такое утверждение.

Теорема 4.2. *Оператор* $A + gB$ *допускает замыкание до максимального аккретивного оператора* $\overline{A + gB}$, *действующего в* $\mathcal{H}$, *и поэтому оператор* $-\overline{(A + gB)}$ *является генератором сжимающей полугруппы операторов.*

При этом $\overline{A + gB}$ *задан на области определения*

$$\begin{gathered}\mathcal{D}(\overline{A + gB}) = \big\{z = (z_1; z_2)^\tau,\ z_1 = (z_{11}; z_{12}; z_{13}),\ z_2 = (z_{21}; z_{22}; z_{23}) : \\ z_{12} \in \mathcal{D}(A_{2,\varepsilon}^{-1/2}), \quad A_{2,\varepsilon}^{-1/2} z_{12} + ig\left(F_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2}\right)^* z_{22} \in \mathcal{D}(A_{2,\varepsilon}^{-1/2}), \\ z_{11} \in \mathcal{D}(F_1^*), \quad z_{13} \in \mathbb{C}^3, \quad z_{21} \in \mathcal{D}(F_1), \quad z_{22} \in \mathbb{C}^3\big\}\end{gathered} \tag{4.117}$$

и действует на ней по закону

$$\overline{A + gB} z = \overline{A_\varepsilon} z - \mathcal{I}_5 z - \mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon} z, \tag{4.118}$$

$$\begin{aligned}\overline{A_\varepsilon} z = \bigg(\Big(z_{11} + igF_1 z_{21};\ A_{2,\varepsilon}^{1/2}\left(A_{2,\varepsilon}^{1/2} z_{12} + ig(F_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2})^* z_{22}\right);\ z_{13} + igF_3 z_{23};\Big) \\ (igF_1^* z_{11} + z_{21};\ igF_2^* z_{12} + z_{22};\ igF_3^* z_{13} + z_{23})\bigg)^\tau.\end{aligned} \tag{4.119}$$

Доказательство. Так как в представлении (4.112) операторы $\mathcal{I}_5$ и $\mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon}$ ограничены, то достаточно установить, что оператор допускает замыкания до максимального оператора. Заметим, что свойство аккретивности в таком процессе сохраняется (см. (4.113)).

В представлении (4.114) крайние множители — самосопряженные положительно определенные операторы, имеющие ограниченные обратные, заданные на всем пространстве. После замыкания оператор $\overline{\mathcal{J}_\varepsilon}$ сохраняет свойство (4.116) равномерной аккретивности. Поэтому он имеет ограниченный обратный оператор, заданный на всем пространстве. Отсюда следует, что $\overline{\mathcal{A}_\varepsilon}$ — максимальный равномерно аккретивный оператор, и поэтому область его значений совпадает со всем пространством.

Можно непосредственно убедиться также, что тогда область определения оператора $\overline{\mathcal{A}_\varepsilon}$ задается посредством (4.117), а сам он действует по закону (4.118), (4.119). $\square$

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса разрешимости задачи Коши (4.97).

Определение 4.2. Будем говорить, что состояние равновесия гидромеханической системы из трех сочлененных маятников с полостями, заполненными жидкостями, является *статически устойчивым по линейному приближению*, если оператор потенциальной энергии $C^{(2)}$ положительно определен в пространстве $\mathcal{H}_2$:

$$(C^{(2)}z_2, z_2)_{\mathcal{H}} \geqslant c\|z_2\|^2_{\mathcal{H}}, \quad c > 0. \tag{4.120}$$

Будем считать далее, что свойство (4.120) выполнено. Тогда оператор полной энергии C в (4.97), (4.98) — ограниченный положительно определенный, и потому существует ограниченный положительно определенный оператор C^{-1}, заданный на всем $\mathcal{H}$.

Учитывая этот факт, перепишем задачу Коши (4.94) в равносильном виде:

$$\frac{dz}{dt} = -C^{-1}(A + gB)z + C^{-1}f(t), \quad z(0) = z^0, \tag{4.121}$$

и введем в $\mathcal{H}$ новое скалярное произведение

$$[z, w] := (Cz, w)_{\mathcal{H}} \quad \forall z,\ w \in \mathcal{H}, \tag{4.122}$$

порождающее, в силу свойств оператора C, эквивалентную норму в $\mathcal{H} = \mathcal{H}_C$.

Рассмотрим, наряду с задачей (4.121), задачу Коши с замкнутым оператором:

$$\frac{dz}{dt} = -C^{-1}\overline{(A + gB)}z + C^{-1}f(t), \quad z(0) = z^0. \tag{4.123}$$

Так как оператор $-\overline{(A+gB)}$ является максимальным диссипативным оператором в $\mathcal{H}$, то $-C^{-1}\overline{(A+gB)}$ обладает этим свойством в $\mathcal{H}_C$:

$$\mathrm{Re}\,[C^{-1}\overline{(A+gB)}z, z] = \mathrm{Re}\,[(\overline{(A+gB)}z, z)_{\mathcal{H}}] \geqslant 0 \quad \forall z \in \mathcal{D}(\overline{A+gB}). \tag{4.124}$$

Поэтому оператор $-C^{-1}\overline{(A+gB)}$ есть оператор сжимающей полугруппы операторов в $\mathcal{H}_C = \mathcal{H}$. Отсюда по теореме Р. С. Филлипса (см., например, [13, с. 166], а также [26, с. 127]) следует, что если выполнены условия

$$f(t) \in C^1\left([0,T], \mathcal{H}\right), \quad z^0 \in \mathcal{D}(\overline{(A+gB)}), \tag{4.125}$$

то задача (4.123) имеет сильное решение на отрезке $[0,T]$.

Теорема 4.3. *Пусть выполнены следующие условия.*

1°. *Первая группа условий*:

$$z^0_{11} = \left(\{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^2;\ \{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi^0_{1k}\}_{k=1}^2;\ \vec{\omega}_1^0\right) \in \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \mathcal{D}(\gamma_{n,11}) \oplus \mathbb{C}^3;$$

$$z^0_{12} = \left(\{\vec{u}^0_{2k}\}_{k=1}^3;\ \vec{\omega}_2^0\right) \in \left(\mathcal{D}(\widetilde{A}_2) \cap \mathcal{D}(\{\gamma_{n,2j}\}_{j=1}^2)\right) \oplus \mathbb{C}^3, \quad z^0_{13} \in \mathbb{C}^3.$$

2°. *Вторая группа условий*:

$$z^0_{21} = \left(\zeta^0_{11};\ P_2\vec{\delta}_1^0\right) \in H^{1/2}_{\Gamma_{11}} \oplus \mathbb{C}^2,$$

$$z^0_{22} = \left(\{\zeta^0_{2j}\}_{j=1}^2;\ P_2\vec{\delta}_2^0\right) \in \left(H^{1/2}_{\Gamma_{21}} \times H^{1/2}_{\Gamma_{22}}\right) \oplus \mathbb{C}^2, \quad z^0_{23} = P_2\vec{\delta}_3^0 \in \mathbb{C}^2.$$

3°. *Третья группа условий*:

$$\vec{f}_{1k} \in C^1\left([0,T]; \vec{L}_2(\Omega_{1k})\right), \quad k = 0,1,2;$$

$$\vec{f}_{2k} \in C^1\left([0,T]; \vec{L}_2(\Omega_{2k})\right), \quad k = 0,1,2,3;$$

$$\vec{f}_{3k} \in C^1\left([0,T]; \vec{L}_2(\Omega_{3k})\right), \quad k = 0,1.$$

Тогда задача (4.121) *имеет единственное сильное* (*по переменной* t) *решение на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. Пусть выполнена первая и вторая группы условий, т. е. начальные условия исследуемой проблемы. Тогда можно проверить, что в задаче Коши (4.123) выполнено условие

$$z(0) = z^0 \in \mathcal{D}(A + gB) = \mathcal{D}(C^{-1}(A + gB)) \subset \mathcal{D}(C^{-1}\overline{(A + gB)}).$$

Можно убедиться также, что в этой задаче $f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{H})$. Поэтому по теореме Р. С. Филлипса задача (4.123) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$. Это означает, что справедливо уравнение (4.123), где все слагаемые — элементы из $C([0,T];\mathcal{H}_C)$. Отсюда следует, что справедливо и уравнение

$$C\frac{dz}{dt} + \overline{(A + gB)}z = f(t), \tag{4.126}$$

где все слагаемые — элементы из $C([0,T];\mathcal{H})$. Учитывая представление (4.118), (4.119) для $\overline{(A + gB)}z$, а также факторизацию $\overline{\mathcal{A}}_\varepsilon$ в виде (4.114) со средним множителем $\overline{\mathcal{J}}_\varepsilon$ (см. (4.114), (4.119)) получим из предыдущего, что имеет место уравнение

$$C\frac{dz}{dt} + \overline{\mathcal{A}}_\varepsilon z - \mathcal{I}_5 z - \mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon} z = f(t), \quad z(0) = z^0, \tag{4.127}$$

где все слагаемые в уравнении — непрерывные по t функции, а $\overline{\mathcal{A}}_\varepsilon z$ выражается формулой (4.119).

Заметим теперь, что уравнение (4.121) и соответственно исходную задачу (4.97), т. е. задачу (4.93), можно переписать в эквивалентной форме

$$C\frac{dz}{dt} + \mathcal{A}_\varepsilon z - \mathcal{I}_5 z - \mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon} z = f(t), \quad z(0) = z^0, \tag{4.128}$$

с незамкнутым оператором $\mathcal{A}_\varepsilon$ (см. (4.111), (4.112), (4.114), (4.115)). Поэтому утверждение теоремы будет доказано, если в задаче (4.127) можно в представлении для $\overline{\mathcal{A}_\varepsilon}$ (см. (4.119)) иметь возможность раскрыть скобки в выражении

$$A_{2,\varepsilon}^{1/2}\left(A_{2,\varepsilon}^{1/2} z_{12} + ig(F^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2})^* z_{22}\right), \tag{4.129}$$

т. е. установить, что в скобках каждое слагаемое является функцией из $C([0,T];\mathcal{D}(A_{2,\varepsilon}^{1/2}))$.

С этой целью перепишем задачу (4.126) в исходной форме, опираясь на представления для $\mathcal{A}_\varepsilon$ и $\overline{\mathcal{A}}_\varepsilon$ (см. (4.111)) и переходя к системе уравнений с компонентами z_1 и z_2. Тогда, в частности, второе уравнение примет вид второго уравнения из (4.93), где $C^{(2)}$ и B_{21} — диагональные операторы (см. (4.67)–(4.70)). Значит, второе уравнение этой диагональной системы имеет прежний вид:

$$C_{22}^{(2)}\frac{dz_{22}}{dt} + ig(B_{21})_2 z_{12} = 0. \tag{4.130}$$

Напомним теперь, что согласно лемме 4.1 при выполнении условия (4.66) связь (4.130) равносильна соотношениям (4.60), которые можно переписать в виде

$$\frac{dz_{22}}{dt} = \widetilde{\gamma}_n z_{12} := \left(\{\gamma_{n,2j}\vec{u}_2\}_{j=1}^2;\ P_2\vec{\omega}_2\right). \tag{4.131}$$

Отсюда получаем, что

$$z_{22}(t) = z_{22}^0 + \int_0^t \widetilde{\gamma}_n z_{12}(s)\,ds \in C^1([0,T];\mathcal{H}_{22}). \tag{4.132}$$

Представляя это выражение в (4.129), приходим к выводу, что для сильного решения задачи (4.127) (с замкнутым оператором $\overline{\mathcal{A}_\varepsilon}$) имеет место свойство

$$A_{2,\varepsilon}^{1/2} z_{12}(t) + ig(F_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2})^*\Big(z_{22}^0 + \int_0^t \widetilde{\gamma}_n z_{12}(s)\,ds\Big) =: v_{12}(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(A_{2,\varepsilon}^{1/2})). \tag{4.133}$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что

$$z_{12}(t) + igA_{2,\varepsilon}^{-1/2}\left(F_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2}\right)^* \int_0^t \widetilde{\gamma}_n z_{12}(s)\,ds =$$

$$= A_{2,\varepsilon}^{-1/2}\left(v_{12}(t) - ig\left(F_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2}\right)^* z_{22}^0\right) =: \varphi_{12}(t) \in C\left([0;T];\mathcal{D}(A_{2,\varepsilon})\right), \quad (4.134)$$

так как

$$\left(F_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2}\right)^* z_{22}^0 = A_{2,\varepsilon}^{-1/2} F_2 z_{22}^0 \in \mathcal{D}(A_{2,\varepsilon}^{1/2}), \quad z_{22}^0 \in \mathcal{D}(F_2) = \mathcal{D}((B_{12})_2) = \mathcal{D}(Q_2) \oplus \mathbb{C}^2, \qquad (4.135)$$

(см. (4.82) и лемму 4.6).

Докажем, что на самом деле

$$z_{12}(t) \in C\left([0;T];\mathcal{D}(A_{2,\varepsilon})\right). \qquad (4.136)$$

Действительно, рассмотрим (4.134) как интегральное уравнение Вольтерра второго рода в пространстве $H(A_{2,\varepsilon}) = \mathcal{D}(A_{2,\varepsilon})$ с нормой, эквивалентной норме графика (поскольку $A_{2,\varepsilon} \gg 0$):

$$\|z_{12}\|_{H(A_{2,\varepsilon})} := \|A_{2,\varepsilon} z_{12}\|_{\mathcal{H}_{12}}.$$

В (4.134) правая часть $\varphi_{12}(t)$ — непрерывная функция t со значениями в $H(A_{2,\varepsilon})$. Далее, оператор $\left(A_{2,\varepsilon}^{-1/2}\left(F_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2}\right)^* \widetilde{\gamma}_n\right)$, суженный на $H(A_{2,\varepsilon})$, ограниченно действует из $H(A_{2,\varepsilon})$ в $H(A_{2,\varepsilon})$. В самом деле, если $z_{12} = (\vec{u}_2; \vec{\omega}_2) \in \mathcal{D}(A_{2,\varepsilon})$, то $\widetilde{u}_2 \in \mathcal{D}(\widetilde{A}_2) \subset \mathcal{D}(\widetilde{A}_2^{1/2}) = \vec{J}^1_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2)$, и тогда $\widetilde{\gamma}_n z_{12} \in \left(H^{1/2}_{\Gamma_{12}} \times H^{1/2}_{\Gamma_{22}}\right) \oplus \mathbb{C}^2 = \mathcal{D}(Q_2) \oplus \mathbb{C}^2 = \mathcal{D}((B_{12})_2) = \mathcal{D}(F_2)$. Поэтому по лемме 4.6 имеем

$$A_{2,\varepsilon}^{-1/2}\left(F_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2}\right)^* \widetilde{\gamma}_n z_{12} = A_2^{-1}\left(F_2 \widetilde{\gamma}_n z_{12}\right) \in \mathcal{D}(A_{2,\varepsilon}) = \mathcal{H}(A_{2,\varepsilon}).$$

Отсюда следует, что уравнение (4.134) однозначно разрешимо и имеет решение $z_{12}(t)$ со свойством (4.136). Поэтому в сумме (4.129) каждое слагаемое является элементом из $C\left([0;T];\mathcal{D}(A_{2,\varepsilon}^{1/2})\right)$, и потому в этом выражении можно раскрыть скобки. Это означает, что исходное уравнение (с замкнутым оператором) после раскрытия скобок переходит в уравнение с оператором $\mathcal{A}_\varepsilon - \mathcal{I}_5 - \mathcal{A}_{2,\varepsilon} = A + gB$, где все слагаемые — непрерывные функции t со значениями в $\mathcal{H}$. Таким образом, доказано, что задача (4.121), а вместе с ней и задача (4.97) имеет сильное решение на отрезке $[0;T]$. $\square$

5. Малые колебания консервативной системы из трех сочлененных маятников

В этом параграфе рассмотрим упрощенный вариант исследуемой гидромеханической системы, когда сила трения в шарнирах пренебрежимо мала, а жидкости в полостях маятников идеальные (т. е. невязкие):

$$\alpha_k = 0, \quad \mu_{2k} = 0, \quad k = 1,2,3. \qquad (5.1)$$

Такая система будет консервативной, так как диссипативные силы равны нулю.

5.1. Получение операторных уравнений движения системы. Общая схема получения уравнений движения системы маятников и жидкостей в полостях маятников остается прежней, за исключением уравнений движения трех жидкостей во втором маятнике.

Именно, для третьего маятника по-прежнему приходим к уравнению (4.10), а для первого маятника — к уравнениям (4.22)–(4.24), (4.26). Далее, для соответствующих уравнений, описывающих динамику второго маятника с полостью, заполненной системой из трех идеальных жидкостей, т. е. уравнений (2.7) и (2.8) при условиях (5.1), теперь следует применить тот же подход, который был применен при рассмотрении динамики первого маятника. В частности, в уравнении (4.27) следует положить $\mu_{2k} = 0$ $(k = 1,2,3)$, а затем набор полей скоростей $\{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^3$ искать в форме

$$\{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^3 = \{\vec{w}_{2k}\}_{k=1}^3 + \left\{\rho_{2k}^{-1} \nabla \Phi_{2k}\right\}_{k=1}^3, \qquad (5.2)$$

$$\{\vec{w}_{2k}\}_{k=1}^3 \in \vec{J}_0(\Omega_2) = \vec{J}_0(\Omega_{21}) \oplus \vec{J}_0(\Omega_{22}) \oplus \vec{J}_0(\Omega_{23}), \quad \left\{\rho_{2k}^{-1} \nabla \Phi_{2k}\right\}_{k=1}^3 \in \vec{G}_{h,S_2,\Gamma}(\Omega_2) \qquad (5.3)$$

и воспользоваться ортогональным разложением

$$\vec{L}_2(\Omega_2) = \vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{h,S_2,\Gamma}(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2) \qquad (5.4)$$

(см. соответствующие построения для первого маятника и формулы (4.15)–(4.18)). При этом набор полей давлений разыскиваем в виде

$$\left\{\rho_{2k}^{-1} \nabla p_{2k}\right\}_{k=1}^3 = \left\{\rho_{2k}^{-1} \nabla \varphi_{2k}\right\}_{k=1}^3 + \left\{\rho_{2k}^{-1} \nabla \psi_{2k}\right\}_{k=1}^3, \qquad (5.5)$$

$$\left\{\rho_{2k}^{-1}\nabla\varphi_{2k}\right\}_{k=1}^{3} \in \vec{G}_{h,S_2,\Gamma}(\Omega_2), \quad \left\{\rho_{2k}^{-1}\nabla\psi_{2k}\right\}_{k=1}^{3} \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2). \tag{5.6}$$

Применим далее метод ортогонального проектирования для уравнений движения жидкостей во втором маятнике, т. е. для уравнения

$$\left\{\frac{d\vec{u}_{2k}}{dt}\right\}_{k=1}^{3} + \left\{\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1\right\}_{k=1}^{3} + \left\{\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_{2k}\right\}_{k=1}^{3} + \left\{\rho_{2k}^{-1}\nabla p_{2k}\right\}_{k=1}^{3} = \left\{\vec{f}_{2k}\right\}_{k=1}^{3} \tag{5.7}$$

(см. (4.27) при $\mu_{2k}=0$). Введя ортопроекторы

$$\begin{aligned}
&P_{0,2}: \quad \vec{L}_2(\Omega_2) \to \vec{J}_0(\Omega_2), \quad P_{0,2} = \{P_{0,2k}\}_{k=1}^{3},\\
&P_{h,S_2,\Gamma}: \quad \vec{L}_2(\Omega_2) \to \vec{G}_{h,S_2,\Gamma}(\Omega_2),\\
&P_{0,2,\Gamma}: \quad \vec{L}_2(\Omega_2) \to \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2),
\end{aligned} \tag{5.8}$$

и действуя ими на обе части (5.7), получим уравнения в проекциях:

$$\left\{\frac{d\vec{w}_{2k}}{dt}\right\}_{k=1}^{3} + P_{0,2}\left\{\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1\right\}_{k=1}^{3} + P_{0,2}\left\{\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_{2k}\right\}_{k=1}^{3} = P_{0,2}\left\{\vec{f}_{2k}\right\}_{k=1}^{3}, \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}
\left\{\frac{d}{dt}\left(\rho_{2k}^{-1}\nabla\Phi_{2k}\right)\right\}_{k=1}^{3} + P_{h,S_2,\Gamma}\left\{\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1\right\}_{k=1}^{3} + P_{h,S_2,\Gamma}\left\{\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_{2k}\right\}_{k=1}^{3} +&\\
+\left\{\rho_{2k}^{-1}\nabla\varphi_{2k}\right\}_{k=1}^{3} = P_{h,S_2,\Gamma}\left\{\vec{f}_{2k}\right\}_{k=1}^{3},&
\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$P_{0,2,\Gamma}\left\{\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1\right\}_{k=1}^{3} + P_{0,2,\Gamma}\left\{\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_{2k}\right\}_{k=1}^{3} + \left\{\rho_{2k}^{-1}\nabla\psi_{2k}\right\}_{k=1}^{3} = P_{0,2,\Gamma}\left\{f_{2k}\right\}_{k=1}^{3}. \tag{5.11}$$

Здесь снова (как и в уравнениях движения жидкостей в первом маятнике) набор полей $\left\{\rho_{2k}^{-1}\nabla\psi_{2k}\right\}_{k=1}^{3}$ явно находится по другим искомым и заданным переменным задачи, и поэтому уравнение (5.11) далее не учитывается в исследовании проблемы.

Аналогично преобразуется и уравнение движения второго маятника, что приводит (взамен уравнения (4.44)) к уравнению

$$\begin{aligned}
\vec{J}_2\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} + \int\limits_{G_2}\left(\vec{r}_2\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1\right)\right)dm_2 + \sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}\left(\vec{r}_{2k}\times\frac{d}{dt}\left(\vec{w}_{2k}+\rho_{2k}^{-1}\nabla\Phi_{2k}\right)\right)d\Omega_{2k}+&\\
+\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}\left(\vec{h}_2\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_{30}\right)\right)d\Omega_{30}+&\\
+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}\left(\vec{h}_2\times P_{G,3}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_{31}\right)\right)d\Omega_{31}+&\\
+g(m_2l_2+m_3h_2)P_2\vec{\delta}_2 - g\sum_{j=1}^{2}\left(\rho_{2j}-\rho_{2,j+1}\right)\int\limits_{\Gamma_{2j}}\left(\vec{e}_2^{\,3}\times\vec{r}_{2j}\right)\zeta_{2j}\,d\Gamma_{2j} = \vec{M}_{2,\text{пр}}(t).&
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Таким образом, система уравнений, описывающая эволюцию системы сочлененных маятников с полостями, содержащими идеальные жидкости при отсутствии трения в шарнирах, свелась к задаче Коши для уравнения (4.12), уравнения (4.19) при $\alpha_1=\alpha_2=0$, уравнений (5.9), (5.10), (5.12) и уравнения (4.10) при $\alpha_3=0$.

5.2. Переход к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения в гильбертовом пространстве. Введем, как и ранее, динамические и кинематические переменные задачи, однако с соответствующими изменениями для второго маятника. Именно, будем считать, что они имеют вид (4.45), (4.46), но теперь

$$z_{12} = \left(\left\{\vec{w}_{2k}\right\}_{k=1}^{3};\ \left\{\rho_{2k}^{-1}\nabla\Phi_{2k}\right\}_{k=1}^{3};\ \vec{\omega}_2\right) \in \vec{J}_0(\Omega_2)\oplus\vec{G}_{h,S_2,\Gamma}(\Omega_2)\oplus\mathbb{C}^3. \tag{5.13}$$

Далее вводим оператор кинетической энергии системы посредством соотношений вида (4.47)–(4.56), осуществляя замены в этих формулах $\vec{u}_{2k} = \vec{w}_{2k} + \rho_{2k}^{-1}\nabla\Phi_{2k}$, $k = 1,2,3$, а $P_0 = P_{0,S_2,\Gamma}$ выражая в виде

$$P_0 = P_{0,2} + P_{0,S_2,\Gamma}. \tag{5.14}$$

Тогда новый оператор кинетической энергии $C^{(1)}$ будет обладать прежними свойствами (см. теорему 4.1). Оператор потенциальной энергии $C^{(2)}$ (см. (4.67)) будет прежний, и для него справедливы утверждения лемм 4.2 и 4.3. Введем, наконец, оператор обмена энергиями (4.79) с компонентами (4.80)–(4.83) и (4.84)–(4.87), снова заменяя $\vec{u}_{2j}$ на $\vec{w}_{2j} + \rho_{2j}^{-1}\nabla\Phi_{2j}, j = 1,2$, в формулах (4.85), (4.86). Здесь опять справедливы утверждения леммы 4.5.

В конечном итоге приходим к задаче Коши в пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$:

$$\begin{aligned} &C^{(1)}\frac{dz_1}{dt} + gB_{12}z_2 = f_1(t), \quad z_1(0) = z_1^0, \\ &gC^{(2)}\frac{dz_2}{dt} + gB_{21}z_1 = 0, \quad z_2(0) = z_2^0, \end{aligned} \tag{5.15}$$

она является частным случаем задачи (4.93) при $A_1 = 0$. Здесь

$$\begin{aligned} &z_1 = (z_{11}; z_{12}; z_{13})^\tau, \quad z_{11} = \Big(\{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^2;\ \{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}\}_{k=1}^2;\ \vec{\omega}_1\Big), \\ &z_{12} = \Big(\{\vec{w}_{2k}\}_{k=1}^3;\ \{\rho_{2k}^{-1}\nabla\Phi_{2k}\}_{k=1}^3;\ \vec{\omega}_2\Big), \quad z_{13} = \vec{\omega}_3, \\ &z_2 = (z_{21}; z_{22}; z_{23})^\tau, \quad z_{21} = (\zeta_{11}; P_2\vec{\delta}_1), \quad z_{22} = (\{\zeta_{2j}\}_{j=1}^2;\ P_2\vec{\delta}_2), \quad z_{23} = P_2\vec{\delta}_3. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Коротко эту задач записываем в виде

$$C\frac{dz}{dt} + gBz = f(t), \quad z(0) = z^0, \tag{5.17}$$

(сравн. с (4.97), (4.98)), где C — оператор полной энергии системы, а B — оператор обмена между кинетической и потенциальной энергиями системы, $B^* = -B$.

Скажем несколько слов о разрешимости задачи (5.17). Если система статически устойчива по линейному приближению, т. е. оператор $C^{(2)}$ положительно определен в $\mathcal{H}_2$, то оператор $-C^{-1}B$ является консервативным и потому порождает изометрическую полугруппу операторов, действующих в пространстве $\mathcal{H}_C = \mathcal{H}$ с эквивалентной нормой (см. (4.122)). Потому при выполнении условий

$$z^0 \in \mathcal{D}(B) \subset \mathcal{H}, \quad f(t) \in C^1([0;T];\mathcal{H}) \tag{5.18}$$

задача (5.17) имеет единственное сильное (по переменной t) решение на любом отрезке $[0;T]$. Для этого решения имеет место закон баланса полной энергии, а при $f(t) \equiv 0$ — закон сохранения полной энергии. Более подробно на этой эволюционной проблеме не будем останавливаться.

5.3. О собственных колебаниях консервативной системы. Будем считать, что в задаче (5.15) оператор $C^{(2)}$ потенциальной энергии положительно определен, т. е. система статически устойчива по линейному приближению. Рассмотрим решения однородной задачи (5.15), зависящие от t по закону

$$z_k(t) = \exp(i\lambda t)z_k, \quad k = 1,2. \tag{5.19}$$

Здесь λ — частота собственных колебаний, а z_k — амплитудные элементы.

Для нахождения амплитудных элементов (ненулевых решений задачи) приходим к спектральной проблеме

$$i\lambda C^{(1)}z_1 + gB_{12}z_2 = 0, \quad i\lambda C^{(2)}z_2 + B_{21}z_1 = 0. \tag{5.20}$$

Проверим сначала, имеет ли задача (5.20) вместе с тривиальной проблемой

$$i\lambda P^3\vec{\delta}_k - P^3\vec{\omega}_3 = \vec{0}, \quad k = 1,2,3, \tag{5.21}$$

возникшей из связи $d(P^3\vec{\delta}_k)/dt = P^3\vec{\omega}_k,\ k = 1,2,3$, решения при $\lambda = \lambda_0 = 0$.

Приходим к задаче

$$B_{12}z_2 = 0, \quad B_{21}z_1 = 0, \quad P^3\vec{\omega}_k = 0, \quad k = 1,2,3, \tag{5.22}$$

Напомним, что для рассматриваемой гидромеханической системы выполнены условия леммы 4.1, т. е. условия (4.66). Поэтому по этой лемме и из определений (4.80)–(4.83) для блоков матрицы B_{12} и определений (4.84)–(4.87) для блоков матрицы B_{21} получаем из (5.22), что справедливые соотношения (4.59)–(4.62) для решений вида (5.19) при $\lambda = \lambda_0 = 0$ приводят к формулам

$$\begin{aligned} &\gamma_{n,11}\vec{u}_{11} = \gamma_{n,11}\vec{u}_{12} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{11}), \quad P_2\vec{\omega}_1 = \vec{0}, \quad P_2\vec{\omega}_2 = \vec{0}, \quad P_2\vec{\omega}_3 = \vec{0}, \\ &\gamma_{n,21}\vec{u}_{21} = \gamma_{n,21}\vec{u}_{22} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{21}), \quad \gamma_{n,22}\vec{u}_{22} = \gamma_{n,22}\vec{u}_{23} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{22}). \end{aligned} \tag{5.23}$$

Отсюда приходим к выводу, что

$$\begin{aligned} &z_2 = z_2^0 = \left(z_{21}^0; z_{22}^0; z_{23}^0\right); \quad z_{21}^0 = (\zeta_{21}^0; P_2\vec{\delta}_1^0) = (0, \vec{0}), \quad P_2\vec{\delta}_3^0 = 0, \\ &z_{22}^0 = \left(\left\{\zeta_{2j}^0\right\}_{j=1}^2;\ P_2\vec{\delta}_2^0\right) = (0, \vec{0}); \\ &z_1 = z_1^0 = \left(z_{11}^0; z_{12}^0; z_{13}^0\right)^\tau; \quad z_{11}^0 = \left(\left\{\vec{w}_{1k}^0\right\}_{k=1}^2;\ \left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}^0\right\}_{k=1}^2;\ \vec{\omega}_1^0\right) = \\ &= \left(\left\{\vec{w}_{1k}^0\right\}_{k=1}^2;\ \vec{0};\ \vec{0}\right), \quad \forall\, \vec{w}_{1k}^0 \in \vec{J}_0(\Omega_{1k}), \quad k = 1, 2; \\ &z_{12}^0 = \left(\left\{\vec{w}_{2k}^0\right\}_{k=1}^3;\ \left\{\rho_{2k}^{-1}\nabla\Phi_{2k}^0\right\}_{k=1}^3;\ \vec{\omega}_2^0\right) = \left(\left\{\vec{w}_{2k}^0\right\}_{k=1}^3;\ \vec{0};\ \vec{0}\right), \\ &\forall\, \vec{w}_{2k}^0 \in \vec{J}_0(\Omega_{2k}),\ k = 1, 2, 3, \quad z_{13}^0 = \vec{\omega}_3^0 = \vec{0}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Лемма 5.1. *Собственное значение* $\lambda = \lambda_0 = 0$ *спектральной задачи* (5.20), (5.21) *бесконечнократно. Физически ему отвечает такое стационарное состояние системы, когда движение жидкостей в полостях маятников не зависят от времени и являются чисто вихревыми, причем границы раздела* $\Gamma_{11}, \Gamma_{21}, \Gamma_{22}$ *между жидкостями не отклоняются, а вся система в целом* (*каждый маятник*) *по отношению к исходному состоянию повернута вокруг вертикальной оси на произвольные углы* $(\vec{\delta}_1^3)^0$, $(\vec{\delta}_2^3)^0$, $(\vec{\delta}_3^3)^0$ *соответственно.*

Рассмотрим теперь случай ненулевых частот колебаний: $\lambda \neq 0$. Здесь можно исключить переменную z_2 и ввести характеристики, зависящие от $z_1 = (z_{11};\ z_{12};\ z_{13})$.

В самом деле, для динамических переменных из однородного уравнения (4.22) движения жидкостей в первом маятнике для решений вида (5.19) получаем связь

$$i\lambda\left(\{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^2 + P_{0,1}\{\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}\}_{k=1}^2\right) = 0, \tag{5.25}$$

и тогда

$$z_{11} = \widetilde{z}_{11} := \left(-P_{0,1}\{\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}\}_{k=1}^2;\ \left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}\right\}_{k=1}^2;\ \vec{\omega}_1\right). \tag{5.26}$$

Далее, из аналогичного уравнения для второго маятника (см. (5.9)) получаем также связь

$$i\lambda\left(\{\vec{w}_{2k}\}_{k=1}^3 + P_{0,2}\left\{\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{2k}\right\}_{k=1}^3\right) = \vec{0}, \tag{5.27}$$

и тогда

$$z_{12} = \widetilde{z}_{12} := \left(-P_{0,2}\left\{\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{2k}\right\}_{k=1}^3;\ \left\{\rho_{2k}^{-1}\nabla\Phi_{2k}\right\}_{k=1}^2;\ \vec{\omega}_2\right). \tag{5.28}$$

Для третьего маятника имеем

$$z_{13} = \widetilde{z}_{13} = \vec{\omega}_3. \tag{5.29}$$

Что касается соответствующих преобразований для кинематических переменных, то здесь имеем связь для первого маятника:

$$i\lambda\zeta_{11} = \gamma_{n,11}\left(\rho_{11}^{-1}\nabla\Phi_{11}\right) = \gamma_{n,11}\left(\rho_{12}^{-1}\nabla\Phi_{12}\right), \quad i\lambda P_2\vec{\delta}_1 = P_2\vec{\omega}_1. \tag{5.30}$$

Перепишем их в такой форме

$$z_{21} = (i\lambda)^{-1}\left(\gamma_{n,11}\left(\rho_{11}^{-1}\nabla\Phi_{11}\right);\ P_2\vec{\omega}_1\right) =: (i\lambda)^{-1}\,\widetilde{z}_{21}. \tag{5.31}$$

Отсюда видно, что $\widetilde{z}_{21}$ также выражается через динамические переменные системы.

Для второго маятника соответственно имеем:

$$\begin{aligned} &i\lambda\zeta_{21} = \gamma_{n,21}\left(\rho_{21}^{-1}\nabla\Phi_{21}\right) = \gamma_{n,21}\left(\rho_{22}^{-1}\nabla\Phi_{22}\right), \\ &i\lambda\zeta_{22} = \gamma_{n,22}\left(\rho_{22}^{-1}\nabla\Phi_{22}\right) = \gamma_{n,23}\left(\rho_{23}^{-1}\nabla\Phi_{23}\right), \quad i\lambda P_2\vec{\delta}_2 = P_2\vec{\omega}_2, \end{aligned} \tag{5.32}$$

и эти связи перепишем в виде

$$z_{22} = (i\lambda)^{-1}\left(\{\gamma_{n,2j}(\rho_{2j}^{-1}\nabla\Phi_{2j})\}_{j=1}^{2};\ P_2\vec{\omega}_2\right) =: (i\lambda)^{-1}\,\widetilde{z}_{22}. \tag{5.33}$$

Наконец,

$$z_{23} = P_2\vec{\delta}_3 = (i\lambda)^{-1}\,P_2\vec{\omega}_3 =: (i\lambda)^{-1}\,\widetilde{z}_{23}. \tag{5.34}$$

Подставим теперь представления (5.31), (5.33), (5.34) в систему уравнений (5.11) и умножим первое уравнение на $\widetilde{z}_1$ в $\mathcal{H}_1$. Используя свойство $B_{12}^* = -B_{21}$, будем иметь соотношение

$$i\lambda(C^{(1)}\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_1} - g(i\lambda)^{-1}(\widetilde{z}_2, B_{21}\widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_2} = 0. \tag{5.35}$$

Однако непосредственное вычисление показывает, что

$$(\widetilde{z}_2, B_{21}\widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_2} = (\widetilde{z}_2, C^{(2)}\widetilde{z}_2)_{\mathcal{H}_2} = (C^{(2)}\widetilde{z}_2, \widetilde{z}_2)_{\mathcal{H}_2}. \tag{5.36}$$

Поэтому числа $\mu := \lambda^2/g$ (квадраты частот колебаний системы) можно найти по формуле

$$\mu = \lambda^2/g = \frac{(C^{(2)}\widetilde{z}_2, \widetilde{z}_2)_{\mathcal{H}_2}}{(C^{(1)}\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_1}}, \tag{5.37}$$

где $\widetilde{z}_1$ и $\widetilde{z}_2$ — соответствующие амплитудные элементы в задаче (5.20), (5.21).

Напомним, что вариационное отношение (5.37) следует рассматривать на классе функций

$$\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}\}_{k=1}^{2} \in \vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1), \quad \{\rho_{2k}^{-1}\nabla\Phi_{2k}\}_{k=1}^{3} \in \vec{G}_{h,S_2,\Gamma}(\Omega_2), \tag{5.38}$$

т. е. таких, для которых выполнены следующие уравнения и краевые условия:

для первого маятника

$$\begin{aligned} &\Delta\Phi_{1k} = 0 \quad (\text{в } \Omega_{1k}), \quad \frac{\partial\Phi_{1k}}{\partial n} = 0 \ (\text{на } S_{1k}),\\ &\rho_{11}^{-1}\frac{\partial\Phi_{11}}{\partial n_{11}} = \rho_{12}^{-1}\frac{\partial\Phi_{12}}{\partial n_{11}} \quad (\text{на } \Gamma_{11}), \quad \vec{n}_{11} = \vec{e}_1^{\,3}; \end{aligned} \tag{5.39}$$

для второго маятника

$$\begin{aligned} &\Delta\Phi_{2k} = 0 \quad (\text{в } \Omega_{1k}), \quad \frac{\partial\Phi_{2k}}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_{2k}),\\ &\rho_{21}^{-1}\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial n_{21}} = \rho_{22}^{-1}\frac{\partial\Phi_{22}}{\partial n_{21}} \quad (\text{на } \Gamma_{21}), \quad \vec{n}_{21} = \vec{e}_2^{\,3},\\ &\rho_{22}^{-1}\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial n_{21}} = \rho_{23}^{-2}\frac{\partial\Phi_{23}}{\partial n_{22}} \quad (\text{на } \Gamma_{22}), \quad \vec{n}_{22} = \vec{e}_2^{\,3}. \end{aligned} \tag{5.40}$$

5.4. Теорема о дискретности спектра. Использование потенциалов Жуковского. Докажем, что вариационному отношению (5.37) на решениях задач сопряжения (5.39), (5.40) отвечает дискретный спектр частот колебаний гидродинамической системы из трех сочлененных маятников. Предварительно преобразуем вариационную задачу введением потенциалов Жуковского для каждого маятника.

Воспользуемся выражением (4.58) для кинетической энергии третьего маятника и учтем, что

$$P_{G,3}(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2) = \vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2.$$

Имеем квадратичную форму

$$\begin{aligned} &\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{30}|^2\, d\Omega_{30} +\\ &+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + P_{G,3}(\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{31})|^2\, d\Omega_{31},\\ &P_{G,3} : \vec{L}_2(\Omega_{31}) \ \to\ \vec{G}(\Omega_{31}) := \{\vec{u}_{31} = \nabla\psi_{31} : \int\limits_{\partial\Omega_{31}} \psi_{31}\, dS = 0\} \end{aligned} \tag{5.41}$$

— ортопроектор. Тогда, рассуждая так же, как и в пункте 3.1, и вводя потенциалы Жуковского $\psi_{31,l}$ (см. (3.21)–(3.31)), будем иметь из (5.41) форму

$$\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2+\vec{\omega}_3\times\vec{r}_{30}|^2\,d\Omega_{30}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2+\sum_{l=1}^{3}\omega_3^l\nabla\psi_{31,l}|^2\,d\Omega_{31}. \quad (5.42)$$

Аналогичные преобразования проведем для первого и второго маятников. Для первого маятника квадратичная форма кинетической энергии, как следует из (4.58), имеет вид

$$\rho_{10}\int\limits_{\Omega_{10}}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{10}|^2\,d\Omega_{10}+\sum_{k=1}^{2}\rho_{1k}\int\limits_{\Omega_{1k}}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{1k}+\vec{w}_{1k}+\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}|^2\,d\Omega_{1k}, \quad (5.43)$$

причем для спектральной задачи при $\lambda\neq 0$ выполнено условие связи (5.25), которое приводит к квадратичной форме

$$\rho_{10}\int\limits_{\Omega_{10}}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{10}|^2\,d\Omega_{10}+\sum_{k=1}^{2}\rho_{1k}\int\limits_{\Omega_{1k}}|\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}+P_{G,1k}(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{1k})|^2\,d\Omega_{1k}, \quad (5.44)$$

где $P_{G,1k}:\vec{L}_2(\Omega_{1k})\ \to\ \vec{G}(\Omega_{1k}),\ k=1,2$ — соответствующие ортопроекторы.

Вводя потенциал Жуковского соотношениями

$$P_{G,1k}(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{1k})=\nabla\psi_{1k},\quad k=1,2, \quad (5.45)$$

и представляя их в виде

$$\begin{gathered}\psi_{1k}=\sum_{l=1}^{3}\omega_1^l\psi_{1k,l},\quad \Delta\psi_{1k,l}=0\quad (\text{в } \Omega_{1k}),\\ \frac{\partial\psi_{1k,l}}{\partial n}=(\vec{e}_1^{\,l}\times\vec{r}_{1k})\cdot\vec{n}_{1k}\quad (\text{на } \partial\Omega_{1k}),\qquad \int\limits_{\partial\Omega_{1k}}\psi_{1k,l}\,dS=0,\end{gathered} \quad (5.46)$$

приходим к следующему выражению для кинетической энергии первого маятника:

$$\rho_{10}\int\limits_{\Omega_{10}}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{10}|^2\,d\Omega_{10}+\sum_{k=1}^{2}\rho_{1k}\int\limits_{\Omega_{1k}}|\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}+\sum_{l=1}^{3}\omega_1^l\nabla\psi_{1k,l}|^2\,d\Omega_{1k}. \quad (5.47)$$

Для второго маятника аналогично из (4.58) имеем квадратичную форму

$$\rho_{20}\int\limits_{\Omega_{20}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{20}|^2\,d\Omega_{20}+\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{2k}+\vec{w}_{2k}+\rho_{2k}^{-1}\nabla\Phi_{2k}|^2\,d\Omega_{2k}, \quad (5.48)$$

причем для спектральной задачи из (5.27) следует, что

$$i\lambda(\vec{w}_{2k}+P_{0,2k}(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{2k}))=0,\quad k=1,2,3. \quad (5.49)$$

Подставляя эти связи в (5.48), вводя потенциалы Жуковского

$$\nabla\psi_{2k}:=P_{G,2k}(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{2k}),\quad k=1,2,3,$$

и их компоненты $\psi_{2k,l}$:

$$\begin{gathered}\psi_{2k}:=\sum_{l=1}^{3}\omega_2^l\psi_{2k,l},\quad \Delta\psi_{2k,l}=0\quad (\text{в } \Omega_{2k}),\\ \frac{\partial\psi_{2k,l}}{\partial n}=(\vec{e}_2^{\,l}\times\vec{r}_{2k})\cdot\vec{n}_{2k}\quad (\text{на } \partial\Omega_{2k}),\qquad \int\limits_{\Omega_{2k}}\psi_{2k,l}\,dS=0,\end{gathered} \quad (5.50)$$

приходим к квадратичному функционалу для кинетической энергии второго маятника

$$\rho_{20}\int\limits_{\Omega_{20}} |\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{20}|^2\,d\Omega_{20}+\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}} |\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\rho_{2k}^{-1}\nabla\Phi_{2k}+\sum_{l=1}^{3}\omega_2^l\nabla\psi_{2k,l}|^2\,d\Omega_{2k}. \tag{5.51}$$

Окончательно получаем, что квадратичный функционал кинетической энергии гидромеханической энергии из трех сочлененных маятников имеет вид

$$\begin{aligned}(C^{(1)}\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_1}&=\Big[\rho_{10}\int\limits_{\Omega_{10}}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{10}|^2\,d\Omega_{10}+\sum_{k=1}^{2}\rho_{1k}\int\limits_{\Omega_{1k}}|\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}+\sum_{l=1}^{3}\omega_1^l\nabla\psi_{1k,l}|^2\,d\Omega_{1k}\Big]+\\&+\Big[\rho_{20}\int\limits_{\Omega_{20}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{20}|^2\,d\Omega_{20}+\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\rho_{2k}^{-1}\nabla\Phi_{2k}+\sum_{l=1}^{3}\omega_2^l\nabla\psi_{2k,l}|^2\,d\Omega_{2k}\Big]+\\&+\Big[\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2+\vec{\omega}_3\times\vec{r}_{30}|^2\,d\Omega_{30}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2+\sum_{l=1}^{3}\omega_3^l\nabla\psi_{3k,l}|^2\,d\Omega_{31}\Big].\end{aligned} \tag{5.52}$$

Опираясь теперь на определения операторных блоков оператора потенциальной энергии (см. (4.67)–(4.70)), формулы (4.71)–(4.73) для соответствующих квадратичных функционалов и на определения (5.31)–(5.34) элемента $\widetilde{z}_2$ и его компонент, приходим к квадратичному функционалу

$$\begin{aligned}(C^{(2)}\widetilde{z}_2,\widetilde{z}_2)_{\mathcal{H}_2}&=\Big\{(\rho_{11}-\rho_{12})\int\limits_{\Gamma_{11}}\big[|\gamma_{n,11}(\rho_{11}^{-1}\nabla\Phi_n)+\theta_{11}((P_2\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})|^2-\\&\quad-|\theta_{11}((P_2\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})|^2\big]\,d\Gamma_{11}+(m_1l_1+(m_2+m_3)h_2)|P_2\vec{\omega}_2|^2\Big\}+\\&\quad+\Big\{\sum_{j=1}^{2}(\rho_{2,j}-\rho_{2,j+1})\int\limits_{\Gamma_{2j}}\big[|\gamma_{n,2j}(\rho_{2j}^{-1}\nabla\Phi_{2j})+\theta_{2j}((P_2\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{2j})\cdot\vec{e}_2^{\,3})|^2-\\&\quad-|\theta_{2j}((P_2\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{2j})\cdot\vec{e}_2^{\,3})|^2\big]\,d\Gamma_{2j}+(m_2l_2+m_3h_2)|P_2\vec{\omega}_2|^2\Big\}+m_3l_3|P_2\vec{\omega}_3|^2.\end{aligned} \tag{5.53}$$

Таким образом, вариационное отношение (5.37) с квадратичными функционалами (5.52), (5.53) следует рассматривать в классе функций, удовлетворяющих связям (5.39), (5.40), с заданными потенциалами Жуковского для областей $\Omega_{1k},\ k=1,2$ (первый маятник, см. (5.46)), для областей $\Omega_2k,\ k=1,2,3$ (второй маятник, см. (5.50)), а также для области Ω_{31} (третий маятник).

Теорема 5.1. *Вариационная задача* (5.37), (5.52), (5.53), (5.39), (5.40) *имеет дискретный спектр* $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$, *состоящий из конечнократных положительных собственных значений* μ_j *с предельной точкой* $\mu=+\infty$. *Отвечающая им система собственных элементов*

$$\begin{aligned}&\{\widetilde{z}_{1j}=\big((\widetilde{z}_{1,j})_1;\ (\widetilde{z}_{1,j})_2;\ (\widetilde{z}_{1,j})_3\big)\}_{j=1}^{\infty},\\&(\widetilde{z}_{1,j})_1=\big(-P_{0,1}\{\vec{\omega}_{1,j}\times\vec{r}_{1k}\}_{k=1}^{2};\ \{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k,j}\}_{j=1}^{2};\ \vec{\omega}_{1,j}\big),\\&(\widetilde{z}_{1,j})_2=\big(-P_{0,2}\{\vec{\omega}_{1,j}\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_{3,j}\times\vec{r}_{2k}\}_{k=1}^{3};\ \vec{\omega}_{2,j}\big),\quad(\widetilde{z}_{1,j})_3=\vec{\omega}_{3,j}.\end{aligned} \tag{5.54}$$

образует базис в подпространстве пространства $\mathcal{H}_1=\oplus_{k=1}^{3}\mathcal{H}_{1k}$ *ортогональном к подпространству* $\mathcal{H}_{10}$ *решений, отвечающих нулевому собственному значению* $\lambda=\lambda_0=0$ (*см.* (5.24)). *Этот базис ортогонален по формам операторов кинетической и потенциальной энергии гидромеханической системы* (*см.* (5.52), (5.53)).

Собственные элементы и собственные значения можно найти, рассматривая последовательные минимумы вариационного отношения (5.37) *в классе функций, удовлетворяющих условиям* (5.39), (5.40). *Для нахождения приближенных решений задачи можно применить метод Ритца к функционалу*

$$F(\widetilde{z}_1):=(C^{(2)}\widetilde{z}_2,\widetilde{z}_2)_{\mathcal{H}_2}-\mu(C^{(1)}\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_1}. \tag{5.55}$$

При $j \to \infty$ собственные значения μ_j асимптотически разбиваются на 2 ветви

$$\mu_{j,k}, \quad k = 1,2, \quad j = 1,2,\ldots, \tag{5.56}$$

отвечающие пограничным волнам в окрестности поверхности раздела Γ_{11} (первый маятник), и волнами в окрестности Γ_{21} и Γ_{22} (второй маятник). Эти ветви имеют следующее асимптотическое поведение:

$$\mu_{j,1} = (j/c_1)^{1/2}[1+o(1)] \ \ (j\to\infty), \quad c_1 = \frac{1}{4\pi}\frac{(\rho_{11}+\rho_{12})^2}{(\rho_{11}-\rho_{12})^2}|\Gamma_{11}| > 0; \tag{5.57}$$

$$\mu_{j,2} = (j/c_2)^{1/2}[1+o(1)] \ \ (j\to\infty), \quad c_2 = \frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{2}\frac{(\rho_{2k}+\rho_{2,k+1})^2}{(\rho_{2k}-\rho_{2,k+1})^2}|\Gamma_{2k}| > 0. \tag{5.58}$$

Доказательство. Заметим сначала, что совокупность элементов $\{\widetilde{z}_1\} \in \mathcal{H}_1 \ominus \mathcal{H}_{10}$, для которых при условиях (5.39), (5.40) конечна квадратичная форма (5.53), компактна в $\mathcal{H}_1 \ominus \mathcal{H}_{10}$. Поэтому по теореме С. Г. Михлина (см. [26]) вариационная задача имеет дискретный положительный спектр $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$ с предельной точкой $\mu = +\infty$, а система собственных элементов $\{\widetilde{z}_{1,j}\}_{j=1}^{\infty}$ отвечающая этим собственным значениям, образует ортогональный базис в $\mathcal{H}_1 \ominus \mathcal{H}_{10}$ как по форме (5.52), так и по форме (5.53). В частности, этот базис можно выбрать удовлетворяющим свойствам

$$(C^{(1)}\widetilde{z}_{1,j};\widetilde{z}_{1,j})_{\mathcal{H}_1} = \delta_{jl}, \quad (C^{(2)}\widetilde{z}_{2,j};\widetilde{z}_{2,j})_{\mathcal{H}_2} = \mu_j\delta_{jl}, \quad j,l = 1,2,\ldots. \tag{5.59}$$

Из [26] также получаем, что собственные значения μ_j можно найти по методу Ритца на основе функционала (5.55). Переходя к доказательству последних (асимптотических) утверждений теоремы, заметим, что квадратичная форма $(C^{(1)}\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2)_{\mathcal{H}_1}$ отличаются от «невозмущенной» квадратичной формы

$$(C_0^{(1)}\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2)_{\mathcal{H}_1} := \sum_{k=1}^{2}\rho_{1k}\int\limits_{\Omega_{1k}}|\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}|^2\,d\Omega_{1k} + \sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}|\rho_{2k}^{-1}\nabla\Phi_{2k}|^2\,d\Omega_{2k} \tag{5.60}$$

тем, что первая форма является расширением формы (5.60) на конечномерное (девятимерное) подпространство. Далее, аналогично квадратичная форма потенциальной энергии (5.53) является расширением формы

$$(C_0^{(2)}\widetilde{z}_2,\widetilde{z}_2)_{\mathcal{H}_2} = (\rho_{11}-\rho_{12})\int\limits_{\Gamma_{11}}|\gamma_{n,11}(\rho_{11}^{-1}\nabla\Phi_{11})|^2\,d\Gamma_{11} + \sum_{j=1}^{2}(\rho_{2j}-\rho_{2,j+1})\int\limits_{\Gamma_{2j}}|\gamma_{n,2j}(\rho_{2j}^{-1}\nabla\Phi_{2j})|^2\,d\Gamma_{2j} \tag{5.61}$$

на это же конечномерное подпространство.

Отсюда и из общих результатов М. Ш. Бирмана и М. З. Соломяка (см., например, [26]) следует, что асимптотическое поведение чисел μ_j при $j \to \infty$ такое же, как для собственных значений вариационного отношения

$$(C_0^{(2)}\widetilde{z}_2,\widetilde{z}_2)_{\mathcal{H}_2} \ / \ (C_0^{(1)}\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_1} \tag{5.62}$$

при дополнительных условиях (5.39), (5.40).

Однако вариационному отношению (5.62) отвечают две независимые спектральные задачи: первая задача — для отношения

$$(\rho_{11}-\rho_{12})\int\limits_{\Gamma_{11}}|\gamma_{n,11}(\rho_{11}^{-1}\nabla\Phi_{11})|^2\,d\Omega_{11} \ / \ \sum_{k=1}^{2}\rho_{1k}\int\limits_{\Omega_{1k}}|\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}|^2\,d\Omega_{1k}, \tag{5.63}$$

рассматриваемого в классе функций (5.39), и вторая задача — для отношения

$$\sum_{j=1}^{2}(\rho_{2j}-\rho_{2,j+1})\int\limits_{\Gamma_{2j}}|\gamma_{n,2j}(\rho_{2j}^{-1}\nabla\Phi_{2j})|^2\,d\Gamma_{2j} \ / \ \sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}|\rho_{2k}^{-1}\nabla\Phi_{2k}|^2\,d\Omega_{2k}, \tag{5.64}$$

рассматриваемого в классе функций (5.40).

Вариационные задачи (5.63) и (5.64) подробно исследованы, см., например, [37, с. 189–198]. Каждая из них имеет дискретный положительный спектр $\{\mu_{j,k}^0\}_{j=1}^{\infty}$, $k = 1,2$ с предельной точкой

$\mu^0 = +\infty$. Асимптотические формулы (5.57) и (5.58) для этих задач следуют из работ И. С. Вулиса и М. З. Соломяка (см. [11, 12]).

С физической точки зрения собственным значениям $\mu_{j,1}$ отвечают пограничные волны собственных колебаний системы из двух идеальных жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд, и имеющих границу раздела Γ_{11}. Соответственно собственным значениям $\mu_{j,2}$ отвечают пограничные волны собственных колебаний систем из трех жидкостей в окрестностях их границ раздела Γ_{21} и Γ_{22} (в полости неподвижного второго маятника). □

Замечание 5.1. Как показывают примеры, совокупность пограничных волн у поверхностей Γ_{21} и Γ_{22} во втором маятнике также асимптотически распадается на две совокупности: пограничные волны в окрестности Γ_{21} и пограничные волны в окрестности Γ_{22}. Каждой из этих совокупностей отвечает своя серия положительных собственных значений $\{\mu^0_{j,kl}\}_{j=1}^\infty$, $kl = 21, 22$, с асимптотическим поведением вида (5.57), т. е. отвечающим колебаниям лишь в одной окрестности Γ_{kl}.

5.5. Обращение теоремы Лагранжа об устойчивости. До сих пор предполагалось, что исследуемая гидродинамическая система из трех сочлененных маятников статически устойчива по линейному приближению, то есть оператор потенциальной энергии системы положительно определен. Рассмотрим теперь случай, когда оператор $C^{(2)}$ имеет конечное число (не более 4) отрицательных собственных значений, то есть система не является статически устойчивой.

Учитывая формулы (5.26), (5.28), (5.29) и (5.31), (5.33), (5.34), а также связь $(i\lambda)^{-1}P^3\vec{\omega}_k = P^3\vec{\delta}_k$, введем оператор, связывающий между собой $\widetilde{z}_1$ и $\widetilde{z}_2$. Имеем

$$\widetilde{z}_2 = \breve{\gamma}_n\widetilde{z}_1 := (\gamma_{n,11}(\rho_{11}^{-1}\nabla\Phi_{11});\ P_2\vec{\omega}_1;\ \{\gamma_{n,2l}(\rho_{2l}^{-1}\nabla\Phi_{2l})\}_{l=1}^2;\ P_2\vec{\omega}_2;\ P_2\vec{\omega}_3) \tag{5.65}$$

и заметим, что задача о спектре вариационного отношения (5.37) равносильна задаче

$$(\breve{\gamma}_n)^*C^{(2)}\breve{\gamma}_n\widetilde{z}_1 = \mu C_0^{(1)}\widetilde{z}_1, \quad \breve{\gamma}_n : \mathcal{H}_1 \ominus \mathcal{H}_{10} \ \to\ \mathcal{H}_2, \tag{5.66}$$

где $C_0^{(1)}$ — сужение оператора $C^{(1)}$ на $\mathcal{H}_1 \ominus \mathcal{H}_{10}$; при этом $C^{(2)}$ представим в виде

$$C^{(2)} = |C^{(2)}|^{1/2}J_\kappa|C^{(2)}|^{1/2}, \tag{5.67}$$

где оператор $|C^{(2)}|^{1/2} \gg 0$ в $\mathcal{H}_2$, а J_κ — каноническая симметрия: $J_\kappa = J_\kappa^{-1} = J_\kappa^*$. Можно привести также (с учетом дополнительной связи и опираясь на свойства решений вспомогательных задач сопряжения, см. (5.58), (5.60) и (4.41)–(4.43)), что операторы $(\breve{\gamma}_n)^*$ и $\breve{\gamma}_n$ имеют ограниченные (и даже компактные) обратные в подпространстве $\mathcal{H}_1 \ominus \mathcal{H}_{10}$, т. е. на элементах у которых $P^3\vec{\omega}_k = \vec{0}$. Тогда, осуществляя в (5.65), (5.66) замену по формуле

$$|C^{(2)}|^{1/2}\breve{\gamma}_n\widetilde{z}_1 =: v_1 \in \mathcal{H}_2, \tag{5.68}$$

приходим к задаче

$$v_1 = \mu J_\kappa C v_1, \quad C := |C^{(2)}|^{-1/2}((\breve{\gamma}_n)^*)^{-1}C_0^{(1)}(\breve{\gamma}_n)^{-1}|C^{(2)}|^{-1/2}, \tag{5.69}$$

где оператор C положительный и компактный.

Теорема 5.2. *Задача* (5.66) *имеет дискретный спектр* $\{\mu_j\}_{j=1}^\infty$, *состоящий из конечнократных собственных значений* $\mu_j \in \mathbb{R}$ *с предельной точкой* $\mu = +\infty$. *При этом первые* κ *собственных значений отрицательные, а остальные положительные. Собственные элементы* $\{z_{2,j}\}_{j=1}^\infty$ *задачи* (5.66) *образуют базис, ортогональный по форме* $(C^{(1)}\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_1}$. *При этом выполнены формулы ортогональности* (5.59), *где теперь* $\mu_j < 0$ $(j \leqslant \kappa)$, $\mu_j > 0$ $(j \geqslant \kappa + 1)$.

Асимптотическое поведение собственных значений μ_j *при* $j \to \infty$ *по-прежнему имеет вид* (5.57), (5.58).

Доказательство. Оно основано на теореме Л. С. Понтрягина (см. [31], а также [2]) с учетом того, что оператор $J_\kappa C$ в (5.69) является компактным положительным оператором, действующим в пространстве с индефинитной метрикой

$$[v, w] := (J_\kappa v,\ w)_{\mathcal{H}_2}.$$

□

Следствием установленных фактов является утверждение, которое называют обращением теоремы Лагранжа об устойчивости.

Теорема 5.3. *Пусть выполнены условия* (4.66) *и не выполнены условия* (4.76)*, т. е. изучаемая гидромеханическая система не является статически устойчивой по линейному приближению. Тогда она является и динамически неустойчивой, т. е. имеются решения однородной начально-краевой задачи* (4.63)*, экспоненциально возрастающие по t при $t \to +\infty$.*

Доказательство. В самом деле, при $\mu = \lambda^2/g < 0$ задача имеет решения, зависящие от t по закону $\exp\left((|\mu|g)^{1/2}t\right)$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович М. С.* Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. — М.: МЦНМО, 2013.
2. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Наука, 1986.
3. *Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д.* Приложения индефинитной метрики. — Симферополь: ДИАЙПИ, 2014.
4. *Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* Гидромеханика невесомости. — М.: Наука, 1976.
5. *Батыр Э. И., Копачевский Н. Д.* Малые движения и нормальные колебания системы сочлененных гиростатов// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2013. — *49*. — С. 5–88.
6. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра дифференциальных уравнений// Итоги науки и техн. Мат. анализ. — 1977. — *14*. — С. 5–52.
7. *Войтицкий В. И.* К проблеме малых движений системы трех сочлененных маятников с полостями, заполненными однородными несжимаемыми жидкостями// Динам. сист. — 2018. — *8*, № 4. — С. 337–356.
8. *Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д.* О малых колебаниях системы из трех сочлененных маятников с полостями, заполненными несмешивающимися несжимаемыми жидкостями// Материалы межд. конф. «Современные методы и проблемы математической гидродинамики», Воронеж, 3–8 мая 2018 г. — 2018. — С. 84–91.
9. *Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д.* О малых движениях физического маятника, содержащего полость, заполненную системой однородных несмешивающихся жидкостей// Сб. материалов межд. конф. «XXIX Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам» (КРОМШ-2018). Секции 1–3. — Симферополь: Полипринт, 2018. — С. 58–62.
10. *Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д.* О малых движениях физического маятника с полостью, заполненной системой трех однородных несмешивающихся вязких жидкостей// Тавр. вестн. информ. и мат. — 2018. — № 3. — С. 22–45.
11. *Вулис И. Л., Соломяк М. З.* Спектральная асимптотика вырождающейся задачи Стеклова // Вестн. ЛГУ. — 1973. — *19*. — С. 148–150.
12. *Вулис И. Л., Соломяк М. З.* Спектральная асимптотика вырождающихся эллиптических операторов второго порядка// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1974. — *38*, № 6. — С. 1362–1392.
13. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. — Киев: Выща школа, 1989.
14. *Жуковский Н. Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью// В сб.: «Избранные сочинения. Т. 1». — М.—Л.: Гостехиздат, 1948. — С. 31–52.
15. *Кононов Ю. Н.* О движении связанных твердых тел с полостями, содержащими жидкость// Мех. тверд. тела. — 2000. — *30*. — С. 207–216.
16. *Копачевский Н. Д.* О колебаниях тела с полостью, частично заполненной тяжелой идеальной жидкостью: теоремы существования, единственности и устойчивости сильных решений// Пробл. динам. та стiйк. багатовимiр. систем. — 2005. — *2*, № 1. — С. 158–194.
17. *Копачевский Н. Д.* Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и полуторалинейных форм// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *57*. — С. 71–105.
18. *Копачевский Н. Д.* Абстрактная формула Грина и некоторые ее приложения. — Симферополь: ООО «ФОРМА», 2016.
19. *Копачевский Н. Д., Войтицкий В. И., Ситшаева З. З.* О колебаниях двух сочлененных маятников, содержащих полости, частично заполненные несжимаемой жидкостью// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2017. — *63*, № 4. — С. 627–677.
20. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.

21. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
22. *Крейн С. Г., Моисеев Н. Н.* О колебаниях твердого тела, содержащего жидкость со свободной границей// Прикл. мат. мех. — 1957. — *21*, № 2. — С. 169–174.
23. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
24. *Луковский И. А., Барняк М. Я., Комаренко А. И.* Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. — Киев: Наукова думка, 1989.
25. *Микишев Г. Н., Рабинович Б. И.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. — М.: Машиностроение, 1968.
26. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970.
27. *Моисеев Н. Н., Петров А. А.* Численные методы расчета собственных частот и колебаний ограниченного объема жидкости. — М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1966.
28. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. — М.: Наука, 1965.
29. *Мышкис А. Д., Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости. — Киев: Наукова думка, 1992.
30. *Нариманов Г. С., Докучаев Л. В., Луковский И. А.* Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. — М.: Машиностроение, 1977.
31. *Понтрягин Л. С.* Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1944. — *8*, № 6. — С. 243–280.
32. *Рапопорт И. М.* Колебания упругой оболочки, частично заполненной жидкостью. — М.: Машиностроение, 1967.
33. *Фещенко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И., Докучаев Л. В.* Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных областях. — Киев: Наукова думка, 1969.
34. *Харламов П. В.* Составной пространственный маятник// Мех. тверд. тела. — 1972. — *4*. — С. 73–82.
35. *Черноусько Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. — М.: ВЦ АН СССР, 1968.
36. *Gagliargo E.* Caratterizzazioni delle trace sulla frontiera relative ad alaine classi di funzioni in n variabili// Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 1957. — *27*. — С. 284–305.
37. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. — Vol. 1: Self-adjoint problems for an ideal fluid. — Basel–Boston–Berlin: Birkhauser, 2001.
38. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-adjoint problems for viscous fluids. — Basel–Boston–Berlin: Birkhauser, 2003.
39. *Myshkis A. D., Babskii V. G., Kopachevsky N. D., Slobozhanin L. A., Tyuptsov A. D.* Low-gravity fluid mechanics. mathematical theory of capillary phenomena. — Berlin: Springer, 1987.

Н. Д. Копачевский
Таврическая академия Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского,
факультет математики и информатики, кафедра математического анализа
E-mail: kopachevsky@list.ru

В. И. Войтицкий
Таврическая академия Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского,
факультет математики и информатики, кафедра математического анализа
E-mail: victor.voytitsky@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-3-434-512 UDC 517.98, 517.955, 532.5

On Oscillations of Connected Pendulums with Cavities Filled with Homogeneous Fluids

© 2019 **N. D. Kopachevsky, V. I. Voytitsky**

Abstract. We consider the problem and normal (eigen) oscillations of the system of three connected (coupled to each other) pendulums with cavities filled with one or several immiscible homogeneous fluids. We study the case of partially dissipative system when the cavity of the first pendulum is completely filled with two ideal fluids, the cavity of the second one is filled with three viscous fluids, and the cavity third one is filled with one ideal fluid. We use methods of functional analysis. We prove the theorem on correct solvability of the initial-boundary value problem on any interval of time. We study the case of eigen oscillations of conservative system where all fluids in cavities of pendulums are ideal and the friction in joints (points of suspension) is not taken into account. We consider in detail three auxiliary problems on small oscillations of single pendulums with three above variants of fluids in cavities.

REFERENCES

1. M. S. Agranovich, *Sobolevskie prostranstva, ikh obobshcheniya i ellipticheskie zadachi v oblastyakh s gladkoy i lipshitsevoy granitsey* [Sobolev Spaces, Their Generalizations, and Elliptic Problems in Domains with Smooth and Lipschitz Boundaries], MTSNMO, Moscow, 2013 (in Russian).
2. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, *Osnovy teorii lineynykh operatorov v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy* [Fundamentals of Theory of Linear Operators in Spaces with Indefinite Metrics], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
3. T. Ya. Azizov and N. D. Kopachevskiy, *Prilozheniya indefinitnoy metriki* [Applications of Indefinite Metrics], DIAYPI, Simferopol', 2014 (in Russian).
4. V. G. Babskiy N. D. Kopachevskiy, A. D. Myshkis, L. A. Slobozhanin, and A. D. Tyuptsov, *Gidromekhanika nevesomosti* [Hydromechanics of Weightlessness], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
5. E. I. Batyr and N. D. Kopachevskiy, "Malye dvizheniya i normal'nye kolebaniya sistemy sochlenennykh girostatov" [Small motions and normal oscillations in systems of connected gyrostats], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2013, **49**, 5–88 (in Russian).
6. M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, "Asimptotika spektra differentsial'nykh uravneniy" [Asymptotics of spectra of differential equations], *Itogi nauki i tekhn. Mat. analiz* [Totals Sci. Tech. Ser. Math. Anal.], 1977, **14**, 5–52 (in Russian).
7. V. I. Voytitskiy, "K probleme malykh dvizheniy sistemy trekh sochlenennykh mayatnikov s polostyami, zapolnennymi odnorodnymi neszhimaemymi zhidkostyami" [To the problem of small motions of system of three connected pendulums with cavities filled with homogeneous incompressible fluids], *Dinam. sist.* [Dynam. Syst.], 2018, **8**, No. 4, 337–356 (in Russian).
8. V. I. Voytitskiy and N. D. Kopachevskiy, "O malykh kolebaniyakh sistemy iz trekh sochlenennykh mayatnikov s polostyami, zapolnennymi nesmeshivayushchimisya neszhimaemymi zhidkostyami" [On small motions of system of three connected pendulums with cavities filled with immiscible incompressible fluids], Materials Int. Conf. "*Contemporary Methods and Problems of Mathematical Hydrodynamics,*" *Voronezh,* 3–8 *May 2018*, Voronezh, 2018, pp. 84–91 (in Russian).
9. V. I. Voytitskiy and N. D. Kopachevskiy, "O malykh dvizheniyakh fizicheskogo mayatnika, soderzhashchego polost', zapolnennuyu sistemoy odnorodnykh nesmeshivayushchikhsya zhidkostey" [On small motions of a physical pendulum with cavity filled with a system of homogeneous immiscible fluids], Matherials Int. Conf. *XXIX Crimean Autumnal Mathematical School on Spectral and Evolution Problems*, Sec. 1–3, Poliprint, Simferopol', 2018, pp. 58–62 (in Russian).
10. V. I. Voytitskiy and N. D. Kopachevskiy, "O malykh dvizheniyakh fizicheskogo mayatnika s polost'yu, zapolnennoy sistemoy trekh odnorodnykh nesmeshivayushchikhsya vyazkikh zhidkostey" [On small motions of a physical pendulum with cavity filled with a system of three homogeneous immiscible viscous fluids], *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavricheskiy Bull. Inform. Math.], 2018, No. 3, 22–45 (in Russian).

11. I. L. Vulis and M. Z. Solomyak, “Spektral’naya asimptotika vyrozhdayushcheysya zadachi Steklova” [Spectral asymptotics of the degenerating Steklov problem], *Vestn. LGU* [Bull. LGU], 1973, **19**, 148–150 (in Russian).
12. I. L. Vulis and M. Z. Solomyak, “Spektral’naya asimptotika vyrozhdayushchikhsya ellipticheskikh operatorov vtorogo poryadka” [Spectral asymptotics of second-order degenerating elliptic operators], *Izv. AN SSSR. Ser. mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1974, **38**, No. 6, 1362–1392 (in Russian).
13. J. Goldstein, *Polugruppy lineynykh operatorov i ikh prilozheniya* [Semigroups of Linear Operators and Applications], Vyshcha shkola, Kiev, 1989 (Russian translation).
14. N. E. Zhukovskiy, “O dvizhenii tverdogo tela, imeyushchego polosti, napolnennye odnorodnoy kapel’noy zhidkost’yu” [On motion of solid body with cavities filled with homogeneous drip fluid], In: *Izbrannye sochineniya. T. 1* [Selected Works. Vol. 1], Gostekhizdat, Moscow–Leningrad, 1948, pp. 31–52 (in Russian).
15. Yu. N. Kononov, “O dvizhenii svyazannykh tverdykh tel s polostyami, soderzhashchimi zhidkost”’ [On motion of connected solid bodies with cavities containing fluid], *Mekh. tverd. tela* [Mech. Solid Body], 2000, **30**, 207–216 (in Russian).
16. N. D. Kopachevskiy, “O kolebaniyakh tela s polost’yu, chastichno zapolnennoy tyazheloy ideal’noy zhidkost’yu: teoremy sushchestvovaniya, edinstvennosti i ustoychivosti sil’nykh resheniy” [On oscillations of a body with a cavity partially filled with heavy ideal fluid: existence, uniqueness, and stability theorems for strong solutions], *Probl. dinam. ta stiyk. bagatovimir. sistem* [Probl. Dynam. Stability Multidim. Syst.], 2005, **2**, No. 1, 158–194 (in Russian).
17. N. D. Kopachevskiy, “Ob abstraktnoy formule Grina dlya troyki gil’bertovykh prostranstv i polutoralineynykh form” [Abstract Green formulas for triples of Hilbert spaces and sesquilinear forms], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **57**, 71–105 (in Russian).
18. N. D. Kopachevskiy, *Abstraktnaya formula Grina i nekotorye ee prilozheniya* [Abstract Green Formula and Some Its Applications], Forma, Simferopol’, 2016 (in Russian).
19. N. D. Kopachevskiy, V. I. Voytitskiy, and Z. Z. Sitshaeva, “O kolebaniyakh dvukh sochlenennykh mayatnikov, soderzhashchikh polosti, chastichno zapolnennye neszhimaemoy zhidkost’yu” [On oscillations of two connected pendulums containing cavities partially filled by incompressible fluids], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2017, **63**, No. 4, 627–677 (in Russian).
20. N. D. Kopachevskiy, S. G. Kreyn, and Ngo Zuy Kan, *Operatornye metody v lineynoy gidrodinamike: Evolyutsionnye i spektral’nye zadachi* [Operator Methods in Nonlinear Hydrodynamics: Evolution and Spectral Problems], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
21. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial’nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
22. S. G. Kreyn and N. N. Moiseev, “O kolebaniyakh tverdogo tela, soderzhashchego zhidkost’ so svobodnoy granitsey” [On oscillations of solid body containing fluid with free boundary], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1957, **21**, No. 2, 169–174 (in Russian).
23. J. L. Lions and E. Magenes, *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya* [Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications], Mir, Moscow, 1971 (Russian translation).
24. I. A. Lukovskiy, M. Ya. Barnyak and A. I. Komarenko, *Priblizhennye metody resheniya zadach dinamiki ogranichennogo obema zhidkosti* [Approximate Methods of Solution for Problems of Dynamics of Bounded Volume of Fluid], Naukova dumka, Kiev, 1989 (in Russian).
25. G. N. Mikishev and B. I. Rabinovich, *Dinamika tverdogo tela s polostyami, chastichno zapolnennymi zhidkost’yu* [Dynamics of a Solid Body with Cavities Partially Filled with Fluid], Mashinostroenie, Moscow, 1968 (in Russian).
26. S. G. Mikhlin, *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike* [Variational Methods in Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
27. N. N. Moiseev and A. A. Petrov, *Chislennye metody rascheta sobstvennykh chastot i kolebaniy ogranichennogo obema zhidkosti* [Numerical Methods for Computing Eigen Frequencies and Oscillations of Bounded Volume of Fluid], VTs AN SSSR, Moscow, 1966 (in Russian).
28. N. N. Moiseev and V. V. Rumyantsev, *Dinamika tela s polostyami, soderzhashchimi zhidkost’* [Dynamics of a Body with Cavities Containing Fluid], Nauka, Moscow, 1965 (in Russian).
29. A. D. Myshkis, V. G. Babskiy, N. D. Kopachevskiy, L. A. Slobozhanin, and A. D. Tyuptsov, *Metody resheniya zadach gidromekhaniki dlya usloviy nevesomosti* [Methods of Solution of Hydromechanical Problems for Weightlessness Conditions], Naukova dumka, Kiev, 1992 (in Russian).
30. G. S. Narimanov, L. V. Dokuchaev, and I. A. Lukovskiy, *Nelineynaya dinamika letatel’nogo apparata s zhidkost’yu* [Nonlinear Dynamics of an Aircraft with Fluid], Mashinostroenie, Moscow, 1977 (in Russian).

31. L. S. Pontryagin, "Ermitovy operatory v prostranstve s indefinitnoy metrikoy" [Hermit operators in the space with indefinite metrics], *Izv. AN SSSR. Ser. mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1944, **8**, No. 6, 243–280 (in Russian).
32. I. M. Rapoport, *Kolebaniya uprugoy obolochki, chastichno zapolnennoy zhidkost'yu* [Oscillations of Elastic Casing Partially Filled with Fluid], Mashinostroenie, Moscow, 1967 (in Russian).
33. S. F. Feshchenko, I. A. Lukovskiy, B. I. Rabinovich, and L. V. Dokuchaev, *Metody opredeleniya prisoedinennykh mass zhidkosti v podvizhnykh oblastyakh* [Methods of Determination of Connected Masses of Fluid in Movable Domains], Naukova dumka, Kiev, 1969 (in Russian).
34. P. V. Kharlamov, "Sostavnoy prostranstvennyy mayatnik" [Compound spatial pendulum], *Mekh. tverd. tela* [Mech. Solid Body], 1972, **4**, 73–82 (in Russian).
35. F. L. Chernous'ko, *Dvizhenie tverdogo tela s polostyami, soderzhashchimi vyazkuyu zhidkost'* [Motion of Solid Body with Cavities Filled with Viscous Fluid], VTs AN SSSR, Moscow, 1968 (in Russian).
36. E. Gagliargo, "Caratterizzazioni delle trace sulla frontiera relative ad alaine classi di funzioni in n variabili," *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 1957, **27**, 284–305.
37. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator approach to linear problems of hydrodynamics*, Self-adjoint problems for an ideal fluid. — Basel–Boston–Berlin: Birkhauser, Vol. 1, 2001.
38. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-adjoint problems for viscous fluids*, Birkhauser, Basel–Boston–Berlin, 2003.
39. A. D. Myshkis, V. G. Babskii, N. D. Kopachevsky, L. A. Slobozhanin, and A. D. Tyuptsov, *Low-gravity fluid mechanics. mathematical theory of capillary phenomena*, Springer, Berlin, 1987.

N. D. Kopachevsky
Taurida Academy, V. I. Vernadsky Crimea Federal University, Simferopol, Russia
E-mail: kopachevsky@list.ru

V. I. Voytitsky
Taurida Academy, V. I. Vernadsky Crimea Federal University, Simferopol, Russia
E-mail: victor.voytitsky@gmail.com