Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 3 (2019). С. 390–433

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-3-390-433 УДК 517.968

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

© 2019 г. **А. С. КАЛИТВИН, В. А. КАЛИТВИН**

Аннотация. Линейные операторы и уравнения с частными интегралами рассматриваются в банаховых идеальных пространствах, в пространствах вектор-функций и в пространствах непрерывных функций. Изучаются действие, регулярность, двойственность, алгебры, фредгольмовость, обратимость и спектральные свойства таких операторов. Описываются основные свойства линейных уравнений с частными интегралами. Показано, что эти уравнения существенно отличаются от обычных интегральных уравнений. Приведены условия, при которых справедлива альтернатива Фредгольма и условия равенства нулю спектрального радиуса оператора Вольтерра с частными интегралами, строятся резольвенты обратимых уравнений. Рассматриваются уравнения Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами и отмечаются проблемы, приводящие к линейным уравнениям с частными интегралами.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В обзоре рассматриваются линейные интегральные уравнения с частными интегралами. Особенностью уравнений является наличие в них интегралов, в которых неизвестная функция интегрируется по части переменных. Эти интегралы определяют частично интегральные операторы, которые не являются интегральными операторами и у которых отсутствует полная непрерывность. Для линейного уравнения второго рода с частными интегралами не выполняется альтернатива Фредгольма даже в общем случае ядер любой гладкости, а спектральный радиус линейного оператора Вольтерра с частными интегралами в общем случае ядер не равен нулю.

В связи с многочисленными приложениями линейных уравнений с частными интегралами к изучению различных задач теории упругих оболочек [10, 34, 35, 98], механики сплошных сред [1–5, 35–38, 45, 53, 57, 72, 85, 86, 93, 94, 96, 98], интегродифференциальных уравнений [98] и других проблем [59, 70, 71, 79, 87, 98], актуальны следующие вопросы: выбор «естественных» пространств, в которых целесообразно рассматривать изучаемые операторы и уравнения, и которые «естественны» для приложений; определение условий равенства нулю спектрального радиуса операторов Вольтерра с частными интегралами и построение решений интегральных уравнений с такими операторами с использованием резольвентных ядер; описание условий фредгольмовости и обратимости линейных уравнений с частными интегралами и построение резольвент таких уравнений.

Изучению линейных интегральных уравнений Вольтерра посвящена обширная литература, для линейных интегральных уравнений Вольтерра с частными интегралами ситуация совершенно иная. Такие уравнения впервые систематически изучались, по-видимому, в книгах [18, 88, 111].

Однозначная разрешимость уравнений Вольтерра с непрерывными ядрами и с частными интегралами

$$\lambda x(t,s)=\int\limits_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau+\int\limits_c^s m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma+\int\limits_a^t\int\limits_c^s n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma+f(t,s) \quad (1.1)$$

устанавливалась методом последовательных приближений, а также методом Вольтерра, состоящим в последовательном решении двух одномерных уравнений Вольтерра с параметрами и обычного двумерного уравнения Вольтерра. Эти методы применимы также в случае ограниченных измеримых ядер и основаны на равенстве нулю спектрального радиуса рассматриваемых операторов. Равенство нулю спектрального радиуса оператора Вольтерра с частными интегралами в пространстве непрерывных функций и в пространствах Лебега доказывалось в [23] с применением свойства Андо. Однако приведенное в [23] свойство Андо оказалось не вполне удобным для изучения операторов Вольтерра с частными интегралами. Более приемлемым оказалось используемое в данной статье свойство Андо, принадлежащее первому автору статьи [35,41,57,65,104]. В связи с использованием свойства Андо, были определены классы ядер, обладающих этим свойством. Для линейных уравнений Вольтерра с частными интегралами и ядрами из этих классов получены теоремы об однозначной разрешимости уравнений и представлении их решений с применением резольвентных ядер. Признаки обращения в нуль спектрального радиуса действующего в пространстве непрерывных функций линейного оператора Вольтерра с частными интегралами и теоремы о разрешимости соответствующих уравнений рассмотрены в [57, 65, 94], условия равенства нулю спектрального радиуса этого же оператора и условия разрешимости линейных интегральных уравнений с такими операторами в других классах функциональных пространствах — в [35, 41, 104].

Линейные операторы и уравнения с одномерными частными интегралами и переменными пределами интегрирования изучались в [50, 58, 63]. Оказалось, что свойства таких операторов и уравнений существенно отличаются от свойств линейных интегральных операторов и уравнений Вольтерра. Некоторые результаты об уравнениях Вольтерра с частными интегралами на неограниченных областях получены в [64].

Линейные операторы и уравнения с ядрами Вольтерра

$$\lambda x(t,s)=\int\limits_T l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau+\int\limits_S m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma+\int\limits_T\int\limits_S n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma+f(t,s) \quad (1.2)$$

и с многомерными частными интегралами, где T и S — компактные множества в конечномерных пространствах, рассматривались в [55,57,67]. В работах [57,67] получены условия равенства нулю спектрального радиуса рассматриваемых операторов и формулы для решения линейных уравнений Вольтерра с частными интегралами в пространстве непрерывных функций. При этом решения уравнений представлялись с использованием резольвентных ядер.

Голоморфные решения уравнений Вольтерра с частными интегралами в комплексной области рассматривались в [7, 10, 61].

Описание некоторых приложений линейных уравнений Вольтерра с частными интегралами к изучению задач теории упругих оболочек, к решению интегродифференциальных и дифференциальных уравнений с частными производными и к исследованию других задач можно найти в [7, 10, 18, 88, 89, 98]. В частности, к линейным уравнениям Вольтерра с частными интегралами сводится задача Коши для интегродифференциального уравнения Барбашина, задача Гурса для дифференциального уравнения второго порядка с частными производными и ряд задач математической биологии. Изучение амплитудных функций регулярных и сингулярных струн приводит к отдельным случаям уравнений Вольтерра—Стильтьеса с частными интегралами [70, 71]. В [79] рассмотрена разрешимость уравнений Вольтерра с частными интегралами для ядра оператора преобразования в методе обратной задачи, а в [15] — разрешимость уравнения Гельфанда—Левитана.

Линейные уравнения Вольтерра с частными интегралами содержатся в более общем классе линейных уравнений Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами

$$\lambda x(t,s)=\int\limits_T l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau+\int\limits_S m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma+\int\limits_T\int\limits_S n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma+f(t,s), \quad (1.3)$$

которые содержат интеграл, определяющий частично интегральный оператор Вольтерра, и интеграл, не определяющий частично интегральный или интегральный оператор Вольтерра. К линейным уравнениям Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами приводятся различные задачи механики сплошных сред, смешанных задач эволюционного типа, осесимметричных контактных задач, контактных задач теории ползучести неоднородно-стареющих тел и другие задачи. Линейные уравнения Вольтерра—Фредгольма соответствующих задач рассматривались в [35,41,58,96,98], в этих же работах приводятся ссылки на работы В. М. Александрова, Н. Х. Арутюняна, Е. В. Коваленко, А. В. Манжирова, Л. А. Галина, И. Г. Горячевой с приложениями уравнений Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами. Операторы Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами не являются вполне непрерывными даже в общем случае гладких ядер, а для уравнений с такими операторами не выполняется альтернатива Фредгольма. В связи с этим важное значение приобрело описание спектральных свойств линейных операторов Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами, условий фредгольмовости, обратимости и регуляризации соответствующих уравнений [35, 41, 57, 65, 96, 98].

Линейные уравнения Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами содержатся в множестве уравнений, записываемых в виде (1.3), причем в (1.3) может отсутствовать интеграл, определяющий частично интегральный оператор Вольтерра. В данной работе приводятся общие свойства операторов, соответствующих этим уравнениям, условия их фредгольмовости и спектральные свойства. Формулы для спектра и различных частей спектра отдельных классов таких операторов связаны с соответствующими формулами для спектра и частей спектра тензорных произведений операторов на тензорных произведениях банаховых пространств. Работа содержит теоремы о существенном спектре Шехтера оператора Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами. Приведенные в разделе 4 примеры показывают особенности изучаемых в работе интегральных уравнений, их принципиальное отличие от обычных интегральных уравнений Фредгольма. В этом же разделе изучаются также условия, при которых для линейного уравнения второго рода с частными интегралами справедлива альтернатива Фредгольма, частные случаи линейных уравнений с частными интегралами, показано, что линейное уравнение второго рода с частными интегралами и непрерывными заданными функциями может иметь непрерывное, ограниченное разрывное и неограниченное решения, строятся резольвента и решение уравнения Вольтерра с частными интегралами, раздел содержит условия фредгольмовости и обратимости уравнений Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами. В разделе 5 отмечаются некоторые проблемы, приводящиеся к линейным уравнениям с частными интегралами, выписываются эти уравнения и даются ссылки на соответствующие работы. В заключении приводятся комментарии о других проблемах линейных операторов и уравнений с частными интегралами.

2. Пространства и операторы с частными интегралами

2.1. Функциональные пространства. В интегральных и интегродифференциальных уравнениях математической физики, механики сплошных сред, теории вероятностей и других задач, содержащих операторы с частными интегралами, решения уравнений понимаются в различных смыслах. Это естественно приводит к необходимости изучения операторов и уравнений с частными интегралами в подходящих классах пространств и, в частности, в банаховых идеальных пространствах, пространствах вектор-функций и в других пространствах.

2.1.1. Идеальные пространства [19, 20, 35, 68, 75]. Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с σ-конечной полной мерой, $M = M(\Omega, \Sigma, \mu)$ — пространство всех вещественных измеримых почти всюду конечных функций на Ω. Эквивалентные функции отождествляются. Пространство M линейно, в нем естественно вводится полуупорядоченность: для $x, y \in M$ пишем $x \leqslant y$, если $x(t) \leqslant y(t)$ почти всюду. Запись $x_n \downarrow$ означает, что $x_n \geqslant x_m$ при $m \geqslant n$, а $x_n \downarrow x$ означает, что $x_n \downarrow$ и $x_n(t)$ сходится к $x(t)$ почти всюду на Ω. Аналогично определяются записи $x_n \uparrow$ и $x_n \uparrow x$. Следующие определения применимы и в случае комплексного пространства M. Для $x \in M$ считаем, что $|x|(t) = |x(t)|$. Метрика в M задается равенством

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{\mu(\Omega_n)} \int\limits_{\Omega_n} \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} d\mu(t),$$

где $\Omega_n \in \Sigma, \Omega = \cup_n \Omega_n, \Omega_n \cap \Omega_m = \varnothing$ при $n \neq m, \mu(\Omega_n) \neq 0$, сходимость по которой есть сходимость по мере. В этой метрике пространство M полное. Отметим [68], что последовательность функций $x_n \in M$ сходится по мере на множестве $D \in \Sigma$, $\mu(D) < \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ $\mu(\{t \in D : |x_n(t) - x(t)| > \varepsilon\} \to 0$ при $n \to \infty$. В случае произвольной меры $\mu(D)$ считается, что последовательность (x_n) сходится по мере на множестве D к функции x, если x_n сходится по мере к x на любом множестве $G \in \Sigma, G \subset D, \mu(G) < \infty$.

Следуя [68], *идеальным пространством* (ИП) на Ω будем называть линейное множество $X \subset M$ такое, что из $x \in X, y \in M, |y| \leqslant |x|$ следует $y \in X$. Для каждой функции x определяется носитель $\operatorname{supp} x = \{t \in \Omega : x(t) \neq 0\}$, а для пространства X носитель определяется как наименьшее измеримое множество, вне которого все функции из X равны нулю. В дальнейшем считаем, что Ω — носитель пространства X и пользуемся записью $X(\Omega)$, носитель определяется с точностью до множества нулевой меры.

ИП с монотонной нормой называется *нормированным идеальным пространством* (НИП), а монотонность нормы означает, что из условий $x, y \in X, |x| \leqslant |y|$ следует $\|x\| \leqslant \|y\|$. Для любого x из НИП X $\|x\| = \||x|\|$. Полное по норме НИП называется *банаховым идеальным пространством* (БИП).

Обобщением НИП и БИП являются *квазинормированные* (КНИП) и *квазибанаховы* (КБИП) *идеальные пространства*, определения и свойства которых детально рассмотрены в [40]. В частности, каждая сходящаяся по квазинорме к $x \in X$ последовательность $(x_n) \subset X$ сходится к x и по мере, а каждая последовательность Коши $(x_n) \subset X$ сходится по мере к некоторой функции $x \in M$. Отсюда следует, что каждое КНИП X непрерывно вложено в пространство M, а каждое ограниченное по квазинорме множество $E \subset X$ ограничено в линейном топологическом пространстве X, т. е. для любой окрестности нуля U существует число λ такое, что $E \subset \lambda U$.

В КНИП X эквивалентны утверждения: X является КБИП; если $0 \leqslant x_n \uparrow$ — последовательность Коши в X, то x_n сходится к $x \in X$ и по квазинорме; если $0 \leqslant x_n \uparrow$ — последовательность Коши в X, то существует $x = \sup x_n \in X$.

Важную роль в теории КНИП играют порядковые свойства квазинормы [40].

- (A) Будем говорить, что в КНИП X квазинорма *порядково непрерывна*, или что в X *выполнено условие* (A), если $0 \leqslant x_n \downarrow 0 \Rightarrow \|x_n\| \to 0$;
- (B) *монотонно полна*, или что в X *выполнено условие* (B), если $0 \leqslant x_n \uparrow \wedge \|x_n\| \leqslant a < \infty \Rightarrow \exists \sup x_n \in X$;
- (C) *порядково полунепрерывна*, или что в X *выполнено условие* (C), если $0 \leqslant x_n \uparrow x \in X \Rightarrow \|x_n\| \to \|x\|$.

Справедливы следующие свойства [40]:

1. КНИП с условием (B) есть КБИП;
2. В КНИП X выполнено условие (C) тогда и только тогда, когда для каждой последовательности $(x_n) \subset X$, сходящейся по мере к $x \in X$, выполняется неравенство $\|x\| \leqslant \varliminf \|x_n\|$;
3. В КНИП X эквивалентны утверждения:
   а) в X выполнены условия (B) и (C);
   б) единичный шар $B_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$ замкнут в M, т. е. если последовательность $(x_n) \subset B_X$ сходится по мере к $x \in M$, то $x \in B_X$.

Простейшими примерами ненормируемых КБИП с условиями $(A), (B), (C)$ являются пространства $L^p([0,1])$ $(0 < p < 1)$.

Аналогично терминологии, принятой в теории идеальных пространств [20], КНИП X называется *почти совершенным* (*совершенным*, *правильным*, *вполне правильным*) КНИП, если в нем выполнено условие (C) ((B) и (C); (A); (A) и (B)).

2.1.2. Специальные классы идеальных пространств [20, 68]. Пусть $X = X(\Omega)$ и $Y = Y(\Omega)$ — КБИП. Через Y/X обозначим пространство мультипликаторов из X в Y; оно состоит из определенных на Ω измеримых функций c, для которых $cx \in Y$ при любой функции $x \in X$ с квазинормой $\|c\|_{Y/X} = \sup\{\|cx\|_Y : \|x\| \leqslant 1\}$. Y/X — КБИП.

Двойственным к БИП $Z = Z(\Omega)$ пространством Z' называется совокупность определенных на Ω измеримых функций f, для которых $|(f,g)| = \left|\int\limits_\Omega f(t)g(t)d\mu\right| < \infty$ $(z \in Z)$. Алгебраические операции в Z' определяются обычным образом, а норма равенством $\|f\|_{Z'} = \sup\{|(f,z)| : \|z\|_Z \leqslant 1\}$.

Пусть $u_0(t)$ — неотрицательная измеримая функция из $M = M(\Omega,\Sigma,\mu)$. Через E_{u_0} обозначим пространство измеримых на Ω функций $x(t)$, для которых имеет смысл и конечна норма $\|x\|_{E_{u_0}} = \inf\{\lambda : |x| \leqslant \lambda\, u_0\}$, а через E'_{u_0} — пространство измеримых на Ω и равных нулю вне носителя функции u_0 функций x, для которых конечна норма $\|x\|_{E'_{u_0}} = \int\limits_\Omega |x(t)|u_0(t)d\mu$. E_{u_0} и E'_{u_0} — двойственные друг к другу совершенные пространства, причем E'_{u_0} — правильное пространство [20].

2.1.3. Пространства вектор-функций. Пусть T — компакт в некотором метрическом пространстве, μ — борелевская мера на T, заданная на борелевской σ-алгебре компакта T. Через C обозначим банахово пространство непрерывных на T функций с нормой $\|y\| = \sup\{|y(t)| : t \in T$, а через $C(Y)$ обозначим пространство непрерывных на T функций со значениями в Y; здесь Y — банахово пространство или КНИП на (S,Σ,ν). Вектор-функция $y \in C(Y)$ тогда и только тогда, когда

$$\sup\{\|y(t)\|_Y < \infty : t \in T\} \text{ и } \lim_{t\to t_0} \|y(t) - y(t_0)\|_Y = 0.$$

$C(Y)$ — банахово (метризуемое квазинормированное или квазибанахово) пространство, если Y — банахово (КНИП или КБИП) пространство.

2.2. Линейные операторы с частными интегралами. Пусть T и S — заданные множества с выделенными в них σ-алгебрами $\Sigma(T)$ и $\Sigma(S)$, на которых заданы полные σ-конечные и счетно-аддитивные меры μ и ν, $\mu\times\nu$ — произведение этих мер, определенное на произведении $\Sigma(T)\times\Sigma(S)$ σ-алгебр $\Sigma(T)$ и $\Sigma(S)$. Через $M(T\times S)$ будем обозначать пространство измеримых на $T\times S$ вещественных или комплексных функций, а через X и Y — ИП функций из $M(T\times S)$.

2.2.1. Непрерывность действия и условия действия [35, 40, 41, 57, 65, 98]. Операторы C, L, M, N, K определим равенствами

$$(Cx)(t,s) = c(t,s)x(t,s), \tag{2.1}$$

$$(Lx)(t,s) = \int\limits_T l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\mu(\tau), \tag{2.2}$$

$$(Mx)(t,s) = \int\limits_S m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\nu(\sigma), \tag{2.3}$$

$$(Nx)(t,s) = \int\limits_{T\times S} n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\mu\times\nu(\tau,\sigma), \tag{2.4}$$

$$K = C + L + M + N \tag{2.5}$$

где $c(t,s), l(t,s,\tau), m(t,s,\sigma), n(t,s,\tau,\sigma)$ — измеримые по совокупности переменных функций, а интегралы понимаются в смысле Лебега—Радона. Операторы (2.2), (2.3) будем называть *частично интегральными операторами*, эти же операторы и оператор (2.5) будем называть также *операторами с частными интегралами*.

Для операторов с частными интегралами справедлив аналог теоремы С. Банаха о непрерывности интегрального оператора. Следующая теорема установлена в [106].

Теорема 2.1. *Если оператор K действует из КБИП X в КБИП Y или в $M(T\times S)$, то он непрерывен.*

Хорошо известно [68], что линейный непрерывный оператор A, действующий из БИП X в БИП X, является интегральным тогда и только тогда, когда любую последовательность $(x_n) \subset X$, сходящуюся по мере к функции $x \in X$ и удовлетворяющую условию $|x_n| \leqslant u \in X$, он переводит в последовательность $Ax_n \to Ax$ почти всюду. Простые примеры показывают, что операторы (2.2) и (2.3) не являются интегральными.

Действительно, пусть оператор (2.2) действует в $X = L^p([0,1] \times [0,1])$ $(1 < p < \infty)$ и для некоторой функции $u_0 = u_0(t)$ из $L^p([0,1])$ $y_0 = Lx_0 \neq 0$. Пусть $x_n(t,s) = u_0(t)v_n(s)$ — последовательность функций из X, сходящаяся по мере к $x \in X$, причем $|x_n| \leqslant 1$ и (x_n) не сходится почти всюду. Очевидно, последовательность (Lx_n) не сходится почти всюду. Следовательно, L не является интегральным оператором. Отсюда видно, что даже при $c(t,s) \equiv 0$ оператор (2.5) в общем случае не является интегральным.

Отметим, что оператор (2.5) действует из КБИП X в КБИП Y, если из X в Y действуют операторы (2.1)–(2.4). Обратное утверждение неверно по крайней мере в случае, когда хотя бы одно из множеств T и S содержит счетное число атомов. Справедливость этого обратного утверждения, в частности, связана и с вопросом единственности представления (2.5) рассматриваемого класса операторов — эта единственность не имеет места, если меры μ и ν на T и S соответственно не являются непрерывными. Однако эта единственность для непрерывных мер μ и ν на T и S справедлива — это вытекает из приводимой в пункте 2.2.2 теоремы о регулярности операторов с частными интегралами, которая также позволяет установить действие из X в Y операторов (2.1)–(2.4), когда из X в Y действует оператор (2.5), по крайней мере, в основных случаях.

2.2.2. Регулярность операторов с частными интегралами [35, 40, 98, 106]. Напомним, что линейный оператор $A : X \to Y$ называется *регулярным*, если существует такой положительный оператор $\tilde{A} : X \to Y$ (оператор $\tilde{A}$ называется *положительным*, если $\tilde{A}x \geqslant \theta$ при $x \geqslant \theta$), что $|Ax| \leqslant \tilde{A}|x|$ $(x \in X)$. Известная теорема Л. В. Канторовича [68] утверждает, что регулярность линейного оператора равносильна тому, что он преобразует ограниченные в смысле упорядоченности множества в множества, также ограниченные по упорядоченности. Далее среди операторов $\tilde{A}$ (их называют *мажорантами* оператора A) существует наименьшая (в смысле индуцированной упорядоченности пространства линейных операторов); эту наименьшую мажоранту принято называть *абсолютной величиной* A и обозначать через $|A|$.

Операторы $]C[,]L[,]M[,]N[,]K[$ определим равенствами

$$(]C[x)(t,s) = |c(t,s)|x(t,s), \tag{2.6}$$

$$(]L[x)(t,s) = \int\limits_T |l(t,s,\tau)|x(\tau,s)d\mu(\tau), \tag{2.7}$$

$$(]M[x)(t,s) = \int\limits_S |m(t,s,\sigma)|x(t,\sigma)d\nu(\sigma), \tag{2.8}$$

$$(]N[x)(t,s) = \int\limits_{T\times S} |n(t,s,\tau,\sigma)|x(\tau,\sigma)d\mu \times \nu(\tau,\sigma), \tag{2.9}$$

$$]K[=]C[+]L[+]M[+]N[. \tag{2.10}$$

Приводимые далее теоремы 2.2–2.9 установлены в [106].

Теорема 2.2. *Пусть меры μ и ν непрерывны, и пусть оператор K с частными интегралами действует из пространства X в пространство Y. Тогда он является регулярным оператором в том и только в том случае, когда из X в Y действует оператор $]K[$. При этом $|K| =]K[$.*

Предположение о непрерывности мер μ и ν в условии теоремы 2.2 существенно. Если множество T или S содержит счетное число атомов, то утверждение теоремы 2.2 в общем случае неверно. Однако теорему можно модифицировать так, что она окажется верной и для мер, не являющихся непрерывными.

Пусть $\mu(T)$ и $\nu(S)$ конечны, T_d и S_d, T_c и S_c соответственно непустые дискретные и непрерывные части множеств T и S. Представление (2.5) оператора K будем называть *нормальным*, если $c(t,s) = 0$ при $(t,s) \in T_d \times S_d$, $l(t,s,\tau) = 0$ при $s \in S_d$, $m(t,s,\sigma) = 0$ при $t \in T_d$.

Среди представлений любого оператора с частными интегралами существуют нормальные. Действительно, определим «δ-функции» равенствами

$$\delta(t,\tau) = \begin{cases} \mu(T)^{-1}, \text{при } t = \tau, \\ 0, \text{при } t \neq \tau, \end{cases} \qquad \delta(s,\sigma) = \begin{cases} \mu(S)^{-1}, \text{при } s = \sigma, \\ 0, \text{при } s \neq \sigma. \end{cases}$$

Представление оператора K будет нормальным, если в (2.5) функции $c(t,s), l(t,s,\tau), m(t,s,\sigma)$, $n(t,s,\tau,\sigma)$ заменить функциями $c(t,s)\chi_{T_c\times S_c}(t,s)$,

$$c(t,s)\chi_{T_d\times S_c}(t,s)\delta(t,\tau)+l(t,s,\tau)\chi_{T\times S_c}(t,s),\ c(t,s)\chi_{T_c\times S_d}(t,s)\delta(s,\sigma)+m(t,s,\sigma)\chi_{T_c\times S}(t,s),$$

$$c(t,s)\chi_{T_d\times S_d}(t,s)\delta(t,\tau)\delta(s,\sigma)+l(t,s,\tau)\chi_{T\times S_d}(t,s)\delta(s,\sigma)+m(t,s,\sigma)\chi_{T_d\times S}(t,s)\delta(t,\tau)+n(t,s,\tau,\sigma)$$

соответственно, где через $\chi_\Omega(t,s)$ обозначена характеристическая функция множества Ω.

Теорема 2.3. *Пусть меры μ и ν конечны, оператор K с частными интегралами действует из пространства X в пространство Y, и пусть* (2.5) — *его нормальное представление. Тогда он регулярен в том и только в том случае, когда из X в Y действует оператор $]K[$. При этом $|K|=]K[$.*

2.2.3. Теоремы о двойственном операторе [35, 40, 98, 106]. Пусть A — линейный оператор, действующий из БИП X в БИП Y. *Двойственным* к нему называется линейный оператор A', определяемый равенством $(Ax,y)=(x,A'y)$ $(x\in X, y\in Y')$. Двойственный оператор существует не для каждого оператора A; он совпадает с сужением на Y' сопряженного оператора A^* и, следовательно, необходимым и достаточным условием его существования является включение $A^*Y'\subset X'$.

Оператор K^T, *транспонированный* оператору K, определим равенством

$$(K^Ty)(t,s)=c(t,s)y(t,s)+\int\limits_T l^*(t,s,\tau)y(\tau,s)d\mu(\tau)+\int\limits_S m^*(t,s,\sigma)y(t,\sigma)d\nu(\sigma)+$$

$$+\int\limits_{T\times S} n^*(t,s,\tau,\sigma)y(\tau,\sigma)d\mu\times\nu(\tau,\sigma), \tag{2.11}$$

где $l^*(t,s,\tau)=l(\tau,s,t), m^*(t,s,\sigma)=m(t,\sigma,s), n^*(t,s,\tau,\sigma)=n(\tau,\sigma,t,s)$.

Теорема 2.4. *Пусть оператор K с частными интегралами действует из БИП X в БИП Y. Тогда он обладает двойственным оператором и, более того,*

$$K'y=K^Ty\ (y\in Y', K^Ty\in M(T\times S)).$$

В общем случае K' не совпадает с K^T. Действительно, пусть в (2.5) функции c,m,n тождественно равны нулю, а

$$l(t,s,\tau)=\bar{l}(t,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)b_n(\tau),\quad \text{где } a_n(t)=\begin{cases}2^{\frac{n}{2}}, 2^{-n}\leqslant t<2^{1-n},\\ 0, \text{при других } t,\end{cases}$$

$b_n(s)=\sin 2\pi ns$. Тогда оператор $K=L$ действует в $X=L^2([0,1]\times[0,1])$. Двойственный к L оператор L' существует и имеет вид $(L'y)(t,s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n,y(\cdot,s)b_n(t)$. Если допустить, что транспонированный оператор L^T действует в X, то в $L^2([0,1])$ действует и оператор $(\tilde{L}x)=\int\limits_0^1 l(\tau,t)x(\tau)d\tau$. Однако П. Е. Соболевским показано, что оператор $\tilde{L}$ не определен на $L^2([0,1])$. Поэтому транспонированный оператор L^T не действует в X, в то время как двойственный оператор действует в X.

Частным случаем теоремы 2.4 является

Теорема 2.5. *Пусть оператор K с частными интегралами действует из БИП X в БИП Y и регулярен. Тогда он обладает двойственным оператором и $K'=K^T$.*

Ядра l,m,n назовем *симметричными*, если $l(t,s,\tau)=l(\tau,s,t), m(t,s,\sigma)=m(t,\sigma,s)$, $n(t,s,\tau,\sigma)=n(\tau,\sigma,t,s)$, и *кососимметричными*, $l(t,s,\tau)=-l(\tau,s,t), m(t,s,\sigma)=-m(t,\sigma,s)$, $n(t,s,\tau,\sigma)=-n(\tau,\sigma,t,s)$.

Теорема 2.6. *Если оператор K с симметричными или кососимметричными ядрами действует из БИП X в X', то оператор K обладает двойственным оператором, причем $K'=K^T$.*

2.2.4. Алгебры операторов с частными интегралами [35, 40, 98, 106]. Пусть X и Y — БИП, $\mathbf{L}(X,Y)$ — пространство непрерывных линейных операторов, действующих из X в Y, $\mathbf{L_r}(X,Y)$ — пространство регулярных линейных операторов, действующих из X в Y, $\mathbf{K_n}(X,Y)$ и $\mathbf{K_r}(X,Y)$ — соответственно пространства действующих из X в Y и действующих из X в Y регулярных операторов вида (2.5). Утверждения теорем 2.1 и 2.2 означают тогда справедливость включений $\mathbf{K_n}(X,Y) \subset \mathbf{L}(X,Y)$, $\mathbf{K_r}(X,Y) \subset \mathbf{L_r}(X,Y)$, причем в общем случае $\mathbf{K_n}(X,Y)$ и $\mathbf{K_r}(X,Y)$ не являются замкнутыми подпространствами пространств $\mathbf{L}(X,Y)$ и $\mathbf{L_r}(X,Y)$, если $\mathbf{L}(X,Y)$ и $\mathbf{L_r}(X,Y)$ рассматривать с обычной операторной нормой, построенной по нормам пространств X и Y. Ситуация становится иной, если $\mathbf{L_r}(X,Y)$ рассматривать с нормой Л. В. Канторовича

$$\|K\| = \||K|\|. \tag{2.12}$$

$\mathbf{K_r}(X,Y)$ с этой нормой является банаховым пространством.

Через Y/X обозначим БИП мультипликаторов из X в Y; оно состоит из определенных на Ω измеримых функций c, для которых $cx \in Y$ при любой функции $x \in X$ с нормой

$$\|c\|_{Y/X} = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|cx\|_Y. \tag{2.13}$$

Через $\mathbf{R_l}(X,Y)$, $\mathbf{R_m}(X,Y)$, $\mathbf{R_n}(X,Y)$ обозначим соответственно множества измеримых по совокупности переменных функций $l(t,s,\tau) : T\times S\times T \to (-\infty,+\infty)$, $m(t,s,\sigma) : T\times S\times S \to (-\infty,+\infty)$ и $n(t,s,\tau,\sigma) : T\times S\times T\times S \to (-\infty,+\infty)$, для которых $l(t,s,\tau) = 0$ $(s \in S_d)$ и $m(t,s,\sigma) = 0$ $(t \in T_d)$, и для которых конечны нормы

$$\|l(t,s,\tau)\|_{\mathbf{R_l}(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X\leqslant 1} \left\| \int_T |l(t,s,\tau)x(\tau,s)|d\mu(\tau) \right\|, \tag{2.14}$$

$$\|m(t,s,\sigma)\|_{\mathbf{R_m}(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X\leqslant 1} \left\| \int_S |m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)|d\nu(\sigma) \right\|, \tag{2.15}$$

$$\|n(t,s,\tau,\sigma)\|_{\mathbf{R_n}(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X\leqslant 1} \left\| \int_{T\times S} |n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)|d\mu\times\nu(\tau,\sigma) \right\|. \tag{2.16}$$

$\mathbf{R_l}(X,Y)$, $\mathbf{R_m}(X,Y)$ и $\mathbf{R_n}(X,Y)$ — БИП функций, определенных на $T\times S\times T$, $T\times S\times S$ и $T\times S\times T\times S$ соответственно. Определим прямую сумму

$$\mathbf{R}(X,Y) = \mathbf{R_c}(X,Y) \oplus \mathbf{R_l}(X,Y) \oplus \mathbf{R_m}(X,Y) \oplus \mathbf{R_n}(X,Y), \tag{2.17}$$

где $\mathbf{R_c}(X,Y)$ — подпространство пространства Y/X функций $c(t,s)$, для которых $c(t,s) = 0$ при $(t,s) \in T_d \times S_d$, с нормой

$$\|(c,l,m,n)\|_{\mathbf{R}(X,Y)} = \|c\|_{\mathbf{R_c}(X,Y)} + \|l\|_{\mathbf{R_l}(X,Y)} + \|m\|_{\mathbf{R_m}(X,Y)} + \|n\|_{\mathbf{R_n}(X,Y)}. \tag{2.18}$$

Теорема 2.7. *Пусть X и Y — БИП. Тогда $\mathbf{K_r}(X,Y)$ — замкнутое подпространство пространства $\mathbf{L_r}(X,Y)$, изоморфное пространству $\mathbf{R}(X,Y)$, причем*

$$\|K\|_{\mathbf{K_r}(X,Y)} \leqslant \|(c,l,m,n)\|_{\mathbf{R}(X,Y)} \leqslant 4\|K\|_{\mathbf{K_r}(X,Y)}. \tag{2.19}$$

В приложениях полезна доказываемая с применением теоремы Фубини следующая

Теорема 2.8. *Пусть X, Y и Z — БИП,*

$$(K_jx)(t,s) = c_j(t,s)x(t,s) + \int_T l_j(t,s,\tau)x_j(\tau,s)d\mu(\tau) + \int_S m_j(t,s,\sigma)x_j(t,\sigma)d\nu(\sigma) + \\ + \int_{T\times S} n_j(t,s,\tau,\sigma)x_j(\tau,\sigma)d\mu\times\nu(\tau,\sigma) \tag{2.20}$$

$(j = 1,2)$ — операторы с частными интегралами, $K_1 \in \mathbf{K_r}(X,Y)$ и $K_2 \in \mathbf{K_r}(Y,Z)$. Тогда оператор $K = K_2K_1 \in \mathbf{K_r}(X,Z)$ и является оператором с частными интегралами, причем

$$c(t,s) = c_2(t,s)c_1(t,s), \tag{2.21}$$

$$l(t,s,\tau) = c_2(t,s)l_1(t,s,\tau) + l_2(t,s,\tau)c_1(\tau,s) + \int\limits_T l_2(t,s,\xi)l_1(\xi,s,\tau)d\mu(\xi), \tag{2.22}$$

$$m(t,s,\sigma) = c_2(t,s)m_1(t,s,\sigma) + m_2(t,s,\sigma)c_1(t,\sigma) + \int\limits_S m_2(t,s,\eta)m_1(t,\eta,\tau)d\nu(\eta), \tag{2.23}$$

$$n(t,s,\tau,\sigma) = c_2(t,s)n_1(t,s,\tau,\sigma) + n_2(t,s,\tau,\sigma)c_(\tau,\sigma) + l_2(t,s,\tau)m_1(\tau,s,\sigma) + m_2(t,\sigma)l_1(t,\sigma,\tau) +$$
$$+ \int\limits_T l_2(t,s,\xi)n_1(\xi,s,\tau,\sigma)d\mu(\xi) + \int\limits_S m_2(t,s,\eta)n_1(t,\eta,\tau,\sigma)d\nu(\eta) + \int\limits_T n_2(t,s,\xi,\sigma)l_1(\xi,\sigma,\tau)d\mu(\xi) +$$
$$+ \int\limits_T n_2(t,s,\xi,\sigma)l_1(\xi,\sigma,\tau)d\mu(\xi) + \int\limits_S n_2(t,s,\tau,\eta)m_1(\tau,\eta,\sigma)d\nu(\eta) +$$
$$+ \int\limits_{T\times S} n_2(t,s,\xi,\eta)n_1(\xi,\eta,\tau,\sigma)d\mu\times\nu(\xi,\eta). \tag{2.24}$$

Категорные свойства рассматриваемых классов операторов содержит вытекающая из теоремы 2.7

Теорема 2.9. *Пусть X, Y и Z — БИП. Тогда*

$$\mathbf{R_c}(X,Y)\mathbf{R_c}(Y,Z) \subset \mathbf{R_c}(X,Z), \mathbf{R_c}(X,Y)\mathbf{R_l}(Y,Z), \mathbf{R_l}(X,Y)\mathbf{R_c}(Y,Z) \subset \mathbf{R_l}(X,Z),$$
$$\mathbf{R_c}(X,Y)\mathbf{R_m}(Y,Z), \mathbf{R_m}(X,Y)\mathbf{R_c}(Y,Z) \subset \mathbf{R_m}(X,Z),$$
$$\mathbf{R_l}(X,Y)\mathbf{R_m}(Y,Z), \mathbf{R_m}(X,Y)\mathbf{R_l}(Y,Z) \subset \mathbf{R_n}(X,Z),$$
$$\mathbf{R}(X,Y)\mathbf{R_n}(Y,Z), \mathbf{R_n}(X,Y)\mathbf{R}(Y,Z) \subset \mathbf{R_n}(X,Z).$$

В частности, $\mathbf{R_c}(X,Y), \mathbf{R_l}(X,Y), \mathbf{R_m}(X,Y), \mathbf{R_n}(X,Y)$ являются подалгебрами алгебры $\mathbf{R}(X,Y)$, а $\mathbf{R_n}(X,Y)$ и $\mathbf{R_l}(X,Y) \oplus \mathbf{R_m}(X,Y) \oplus \mathbf{R_n}(X,Y)$ — идеалами алгебры $\mathbf{R}(X,Y)$.

В силу теоремы 2.9 проверка включения $K \subset \mathbf{K_r}(X,Y)$ сводится к проверке четырех включений $c \in \mathbf{R_c}(X,Y), l \in \mathbf{R_l}(X,Y), m \in \mathbf{R_m}(X,Y), n \in \mathbf{R_n}(X,Y)$.

Проверка первого из них и последнего являются классическими задачами теории БИП и действующих в них операторов, описания пространств мультипликаторов и описания пространств Заанена ядер линейных интегральных операторов [19,22]. Как и в случае пространства $\mathbf{R_n}(X,Y)$, простого и удобного описания пространств $\mathbf{R_l}(X,Y)$ и $\mathbf{R_m}(X,Y)$, по-видимому, не существует. Более того, их описание, скорее всего, существенно зависит от специальных свойств пространств X и Y, связанных с несимметричностью переменных t и s. Рассмотрим наиболее важный частный случай.

2.2.5. Операторы с частными интегралами в пространствах со смешанными нормами [35, 40, 98, 106]. Пусть U и V — БИП с носителями T и S соответственно, $V[U]$ (U — почти совершенное пространство), $U[V]$ (V — почти совершенное пространство) — БИП со смешанными нормами, т. е. пространства измеримых на $T \times S$ функций, для которых имеют смысл и конечны нормы $\|x(t,s)\|_{V[U]} = \|\|x(\cdot,s)\|_U\|_V,\ \|x(t,s)\|_{U[V]} = \|\|x(t,\cdot)\|_V\|_U$.

Опишем три подхода к исследованию условий действия операторов (2.2) и (2.3) в пространствах со смешанными нормами.

Определим два семейства линейных интегральных операторов

$$L(s)u(t) = \int\limits_T l(t,s,\tau)u(\tau)d\mu(\tau)\ (s\in S), \quad M(t)v(s) = \int\limits_S m(t,s,\sigma)v(\sigma)d\nu(\sigma)\ (t\in T). \tag{2.25}$$

Теорема 2.10. *Пусть U_1 и U_2, V_1 и V_2 — БИП с носителями T и S соответственно. Пусть почти при каждом $s \in S$ линейный интегральный оператор $L(s)$ действует из U_1 в U_2 и $\|L(s)\|_{\mathbf{L}(U_1,U_2)} \in V_2/V_1$. Тогда частично интегральный оператор* (2.2) *действует из пространства $X = V_1[U_1]$ в пространство $Y = V_2[U_2]$, где U_1 и U_2 — почти совершенные пространства, причем $\|L\|_{\mathbf{L}(X,Y)} \leqslant \|\|L(s)\|_{\mathbf{L}(U_1,U_2)}\|_{V_2/V_1}$.*

Аналогично, если V_1 и V_2 — почти совершенные БИП и почти при каждом $t \in T$ линейный оператор $M(t)$ действует из V_1 в V_2 и $\|M(t)\|_{\mathbf{L}(V_1,V_2)} \in U_2/U_1$, то частично интегральный *оператор* (2.3) *действует из пространства* $X = U_1[V_1]$ *в пространство* $Y = U_2[V_2]$, *причем* $\|M\|_{\mathbf{L}(X,Y)} \leqslant \|\|M(t)\|_{\mathbf{L}(V_1,V_2)}\|_{U_2/U_1}$.

Отметим, что в случае $V_2/V_1 = L^\infty$ или при $V_2/V_1 = E_{u_0}$ условия теоремы 2.10 являются и необходимыми для действия оператора (2.2) из X в Y. Если $U_2/U_1 = L^\infty$ или если $U_2/U_1 = E_{u_0}$, то условия теоремы 2.10 необходимы для действия оператора (2.3) из X в Y.

Пусть W_1 и W_2 — БИП с носителем Ω. Через $\mathbf{Z}(W_1, W_2)$ обозначим пространство Заанена ядер $z(t,s)$ линейных регулярных интегральных операторов, действующих из W_1 в W_2 с нормой

$$\|z(\xi,\eta)\|_{\mathbf{Z}(W_1,W_2)} = \sup_{\|w\|_{W_1}\leqslant 1} \left\| \int\limits_\Omega |z(\xi,\eta)| w(\eta) d\eta \right\|_{W_2}.$$

Теорема 2.11. *Пусть* U_1 *и* U_2, V_1 *и* V_2 — *БИП с носителями* T *и* S *соответственно, причем* U_1, U_2 — *почти совершенные пространства. Пусть почти при всех* $s \in S$ $l(t,s,\tau) \in \mathbf{Z}(U_1,U_2)$ *и* $\|l(\cdot,s,\cdot)\|_{\mathbf{Z}(U_1,U_2)} \in V_2/V_1$. *Тогда частично интегральный оператор* (2.2) *действует из пространства* $X = V_1[U_1]$ *в пространство* $Y = V_2[U_2]$, *регулярен и*

$$\||L|\|_{\mathbf{L}(X,Y)} \leqslant \|\|l(\cdot,s,\cdot)\|_{\mathbf{Z}(U_1,U_2)}\|_{V_2/V_1}.$$

Аналогично, если V_1 *и* V_2 — *почти совершенные БИП и почти при всех* $t \in T$ $m(t,s,\sigma) \in \mathbf{Z}(V_1,V_2)$ *и* $\|m(t,\cdot,\cdot)\|_{\mathbf{Z}(V_1,V_2)} \in U_2/U_1$, *то частично интегральный оператор* (2.3) *действует из пространства* $X = U_1[V_1]$ *в пространство* $Y = U_2[V_2]$, *регулярен и*

$$\||M|\|_{\mathbf{L}(X,Y)} \leqslant \|\|m(t,\cdot,\cdot)\|_{\mathbf{Z}(V_1,V_2)}\|_{U_2/U_1}.$$

Введем в рассмотрение два оператора

$$(\tilde{L}u)(t) = \int\limits_T \|l(t,\cdot,\tau)\|_{V_2/V_1} u(\tau) d\mu(\tau), \quad (\tilde{M}v)(s) = \int\limits_T \|m(\cdot,s,\sigma)\|_{U_2/U_1} v(\sigma) d\nu(\sigma).$$

Теорема 2.12. *Пусть* U_1 *и* U_2, V_1 *и* V_2 — *БИП с носителями* T *и* S *соответственно, причем* U_1 — *почти совершенное, а* U_2 — *совершенное или сепарабельное БИП. Пусть линейный интегральный оператор* $\tilde{L}$ *действует из* U_1 *в* U_2. *Тогда частично интегральный оператор* (2.2) *действует из пространства* $X = U_1[V_1]$ *в пространство* $Y = U_2[V_2]$, *регулярен и* $\||L|\|_{\mathbf{L}(X,Y)} \leqslant \|\|l(t,\cdot,\tau)\|_{V_2/V_1}\|_{\mathbf{Z}(U_1,U_2)}$.

Аналогично, если V_1 — *почти совершенное, а* V_2 — *совершенное или сепарабельное БИП, оператор* $\tilde{M}$ *действует из* V_1 *в* V_2. *Тогда частично интегральный оператор* (2.2) *действует из пространства* $X = V_1[U_1]$ *в пространство* $Y = V_2[U_2]$, *регулярен и* $\||M|\|_{\mathbf{L}(X,Y)} \leqslant \|\|m(\cdot,s,\sigma)\|_{U_2/U_1}\|_{\mathbf{Z}(V_1,V_2)}$.

Приведем еще два признака действия частично интегральных операторов в пространствах со смешанными нормами, основанные на использовании пространств мультипликаторов функций двух переменных.

Теорема 2.13. *Пусть* U_1 *и* U_2, V_1 *и* V_2 — *БИП с носителями* T *и* S *соответственно и* $X \in \{V_1[U_1], U_1[V_1]\}$.

Если $\|l(\cdot,s,\tau)\|_{U_2} \in Z = V_2[L^1]/X$, *то частично интегральный оператор* (2.2) *действует из* X *в* $Y = V_2[U_2]$, *регулярен и* $\||L|\|_{\mathbf{L}(X,Y)} \leqslant \|\|l(\cdot,s,\tau)\|_{U_2}\|_Z$.

Аналогично, если $\|m(t,\cdot,\sigma)\|_{V_2} \in W = U_2[L^1]/X$, *то частично интегральный оператор* (2.3) *действует из* X *в* $Y = U_2[V_2]$, *регулярен и* $\||M|\|_{\mathbf{L}(X,Y)} \leqslant \|\|m(t,\cdot,\sigma)\|_{V_2}\|_W$.

Теорема 2.14. *Пусть* U_1 *и* U_2, V_1 *и* V_2 — *БИП с носителями* T *и* S *соответственно и* $Y \in \{U_2[V_2], V_2[U_2]\}$.

Если $\|l(t,s,\cdot)\|_{U_1'} \in Z = V_1'[L^1]/Y'$, *то частично интегральный оператор* (2.2) *действует из* $X = V_1[U_1]$ *в* Y, *регулярен и* $\||L|\|_{\mathbf{L}(X,Y)} \leqslant \|\|l(t,s,\cdot)\|_{U_1'}\|_Z$.

Аналогично, если $\|m(t,s,\cdot)\|_{V_1'} \in W = U_1'[L^1]/Y'$, *то частично интегральный оператор* (2.3) *действует из* $X = U_1[V_1]$ *в* Y, *регулярен и* $\||M|\|_{\mathbf{L}(X,Y)} \leqslant \|\|m(t,s,\cdot)\|_{V_1'}\|_W$.

Анализ утверждений теорем 2.10–2.14 показывает, что их утверждения относятся к различным пространствам функций со смешанными нормами, причем различными для операторов (2.2) и (2.3). Таким образом, в теоремах 2.10–2.14 содержатся 12 различных утверждений, являющихся достаточными признаками действия и (за исключением теоремы 2.10) регулярности частично интегральных операторов в четырех возможных БИП со смешанными нормами.

Теоремы 2.10–2.14 применены в [35, 40, 97, 98] к изучению условий действия и регулярности частично интегральных операторов в пространствах Орлича и Лебега со смешанными нормами, пространствах Орлича и пространствах Лебега $L^p (1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

Из теоремы 2.10 вытекает следующее полезное утверждение: *частично интегральные операторы* (2.2) *и* (2.3) *действуют в* $L^p(T\times S)$ $(1 < p < \infty)$ *тогда и только тогда, когда операторы* $L(s)$ *и* $M(t)$ *действуют в* $L^p(T)$ *и в* $L^p(S)$ *при почти всех* $s \in S$ *и* $t \in T$ *соответственно и их нормы равномерно ограничены.*

Приведем два утверждения о действии и регулярности оператора (2.5) в пространствах $L^\infty(T \times S)$ и в $L^1(T \times S)$ (см. [35, 40, 98, 106]).

Теорема 2.15. *Оператор* (2.5) *действует в* $L^\infty(T \times S)$ *тогда и только тогда, когда*

$$A = \operatorname{vraisup}\left[|c(t,s)| + \int\limits_T |l(t,s,\tau)|d\mu(\tau) + \int\limits_S |m(t,s,\sigma)|d\nu(\sigma) + \int\limits_{T\times S} |n(t,s,\tau,\sigma)|d\mu\times\nu(\tau,\sigma)\right] < \infty.$$

При этом его норма равна A.

Теорема 2.16. *Оператор* (2.5) *действует в* $L^1(T \times S)$ *тогда и только тогда, когда*

$$B = \operatorname{vraisup}\left[|c(t,s)| + \int\limits_T |l(\tau,s,t)|d\mu(\tau) + \int\limits_S |m(t,\sigma,s)|d\nu(\sigma) + \int\limits_{T\times S} |n(\tau,\sigma,t,s)|d\mu\times\nu(\tau,\sigma)\right] < \infty.$$

При этом его норма равна B.

2.2.6. Операторы с частными интегралами в $C(X)$ *и в пространствах непрерывных функций* [35, 40, 57, 98]. Пусть T — компактное множество в метрическом пространстве, μ — борелевская мера на $\Sigma(T)$, C — банахово пространство непрерывных на T функций с sup-нормой, X и Y — БИП на (S, Σ, ν) с носителем S, $C(X)$ и $C(Y)$ — пространства непрерывных на T функций со значениями в X и Y соответственно.

Так же, как в теореме 2.1, из действия оператора (2.5) из $C(X)$ в $C(Y)$ или в $M(S, \Sigma, \nu)$ следует его непрерывность.

Если T и S — компактные множества в метрических пространствах, μ и ν — борелевские меры на $\Sigma(T)$ и $\Sigma(S)$ соответственно, C — пространство непрерывных на $T \times S$ функций с sup-нормой, то действующий в пространстве C оператор (2.5) непрерывен.

Через $X'[Y], Y[X']; L^1[Y/X]; L^1[\mathbf{Z}(X,Y)], L^1[X'[Y]], Y[L^1[X']]$ обозначим пространства со смешанной нормой функций переменных $s, \sigma; s, \tau; s, \tau, \sigma$ соответственно, причем норма в $X, Y, Y/X$ вычисляется как норма функции переменной s, а X' — переменной σ, в L^1 — переменной τ, в $\mathbf{Z}(X,Y)$ — переменных s, σ.

Достаточные условия действия оператора (2.5) из $C(X)$ в $C(Y)$ содержит

Теорема 2.17. *Пусть выполнено одно из условий*:

a) $c \in C(Y/X), l \in C(L^1[Y/X]), m \in C(\mathbf{Z}(X,Y)), n \in C(L^1[\mathbf{Z}(X,Y)])$;

b) $c \in C(Y/X), l \in C(L^1[Y/X]), m \in C(X'[Y]) \cup C(Y[X']), n \in C(L^1[X'[Y]]) \cup C(Y[L^1[X']])$.

Тогда оператор (2.5) *действует из* $C(X)$ *в* $C(Y)$.

Предположим, что $\nu(S) < \infty$, $X = L^p$, $Y = L^q$ $(1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty)$, $p' = p(p-1)^{-1}$, $u = pq(p-q)^{-1}$. Тогда $X' = L^q$, $Y/X = L^u$ и из теоремы 2.17 вытекает

Теорема 2.18. *Пусть выполнено одно из условий*:

а) $c \in C(L^u), l \in C(L^1[L^u]), m \in C(\mathbf{Z}(L^p, L^q)), n \in C(L^1(\mathbf{Z}(L^p, L^q)))$;

б) $c \in C(L^u), l \in C(L^1[L^u]), m \in C(L^{p'}[L^q]) \cup C(L^q[L^{p'}]), n \in C(L^1[L^{p'}[L^q]]) \cup C(L^q[L^1[L^{p'}]])$.

Тогда оператор (2.5) *действует из* $C(L^p)$ *в* $C(L^q)$.

Отметим, что необходимые и достаточные условия действия оператора (2.5) с частными интегралами из $C(X)$ в $C(Y)$ неизвестны.

Приведем необходимые и достаточные условия действия оператора (2.5) с частными интегралами в пространстве непрерывных функций $C(T \times S)$ в наиболее важном частном случае $T = [a, b]$ и $S = [c, d]$. При получении таких условий существенную роль играет теорема Радона о представлении линейного непрерывного оператора в виде двумерного интеграла Стильтьеса [16].

Пусть

$$\chi(t,s,\tau,\sigma) = \begin{cases} 1, \tau \geqslant t > a \text{ и } \sigma \geqslant s > c \text{ или } \tau > t = a, \sigma > s \geqslant c, \\ 0, \tau < t \text{ или } \sigma < s, \text{ или } \tau = t = a, \text{ или } \sigma = s = c, \end{cases}$$

$$\chi(t,\tau) = \begin{cases} 1, \tau \geqslant t > a \text{ или } \tau > t = a, \\ 0, \tau < t \text{ или } \ \tau = t = a, \end{cases} \qquad \chi(s,\sigma) = \begin{cases} 1, \sigma \geqslant s > c \text{ или } \ \sigma > s = c, \\ 0, \sigma < s \text{ или } \ \sigma = s = c. \end{cases}$$

Определим функции

$$B(t,s) = c(t,s) + \int_a^b l(t,s,\tau)d\tau + \int_c^d m(t,s,\sigma)d\sigma + \int_a^b \int_c^d n(t,s,\tau,\sigma)d\tau d\sigma, \tag{2.26}$$

$$B_\xi(t,s) = \int_a^\xi \left[\left(c(t,s) + \int_c^d m(t,s,\sigma)d\sigma \right) \chi(t,\tau) + (\xi - \tau) \left(l(t,s,\tau) + \int_c^d n(t,s,\tau,\sigma)d\sigma \right) \right] d\tau, \tag{2.27}$$

$$B_\eta(t,s) = \int_c^\eta \left[\left(c(t,s) + \int_a^b l(t,s,\tau)d\tau \right) \chi(s,\sigma) + (\eta - \sigma) \left(m(t,s,\sigma) + \int_c^d n(t,s,\tau,\sigma)d\tau \right) \right] d\sigma, \tag{2.28}$$

$$B_{\xi\eta}(t,s) = \int_a^\xi \int_c^\eta [c(t,s)\chi(t,s,\tau,\sigma) + (\xi-\tau)l(t,s,\tau)\chi(s,\sigma) + (\eta-\sigma)m(t,s,\sigma)\chi(t,\tau) +$$
$$+ (\xi-\tau)(\eta-\sigma)n(t,s,\tau,\sigma)]d\tau d\sigma, \tag{2.29}$$

$$\gamma(t,s) = |c(t,s)| + \int_a^b |l(t,s,\tau)|d\tau + \int_c^d |m(t,s,\sigma)|d\sigma + \int_a^b \int_c^d |n(t,s,\tau,\sigma)|d\tau d\sigma. \tag{2.30}$$

Следующая теорема установлена в [95]. Другие критерии действия оператора (2.5) в $C([a,b] \times [c,d])$ содержатся в [57, 65].

Теорема 2.19. *Оператор* (2.5) *действует в пространстве* $C([a,b] \times [c,d])$ *в том и только в том случае, когда при каждом фиксированном* (ξ, η) *функции* (2.26)–(2.29) *непрерывны, а функция* (2.30) *ограничена. При выполнении этих условий оператор* (2.5) *непрерывен, а его норма определяется равенством* $\|K\| = \sup\limits_{[a,b]\times[c,d]} \gamma(t,s)$.

Отметим, что представление Радона линейного непрерывного оператора на $C([a,b] \times [c,d])$ неединственно. Представление же оператора K с частными интегралами в виде (2.5), как следует из теоремы 2.19, единственно.

Проверка непрерывности функций (2.26)–(2.29) в теореме 2.19 не всегда проста. Однако нетрудно привести удобные достаточные признаки действия оператора (2.5) в пространстве непрерывных функций.

Пусть T, S и Ω — компактные множества положительных борелевских мер μ, ν и ω в метрических пространствах с расстояниями ρ_1, ρ_2 и ρ, и пусть C — пространство непрерывных функций на $T \times S$. Функция $a(t,s,u)$ по определению принадлежит пространству $C(L^1(\Omega))$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $\rho_1(t_1,t_2) < \delta$, $\rho_2(s_1,s_2) < \delta$ $\int\limits_\Omega |a(t_1,s_1,u) - a(t_2,s_2,u)|d\omega(u) < \varepsilon$ и $\sup\limits_{T\times S} \|a(t,s,\cdot\|_{L^1} < \infty$.

Теорема 2.20. *Если функция* $c(t,s)$ *непрерывна на* $C(T \times S)$, $l \in C(L^1(T))$, $m \in C(L^1(S))$, $n \in C(L^1(T \times S))$, *то оператор* (2.5) *действует в* $C(T \times S)$, *причем* $\|K\| \leqslant \sup\limits_{T\times S}(|c(t,s)| + \|l(t,s,\cdot\|_{L^1(T)} + \|m(t,s,\cdot\|_{L^1(S)} + \|n(t,s,\cdot,\cdot\|_{L^1(T\times S)})$.

Условие теоремы выполняется, если c,l,m,n — непрерывные функции.

Аналогично пункту 2.2.4, обозначим через $\mathbf{K}(C)$ множество действующих в $C([a,b]\times[c,d])$ операторов (2.5). Из теоремы 2.19 следует, что $\mathbf{K}(C)$ является замкнутым подпространством пространства $\mathbf{L}(C)$ непрерывных линейных операторов на C.

Пространство $\mathbf{L}(C)$ является банаховой алгеброй, в которой умножением является композиция операторов. В силу теоремы Фубини подпространство $\mathbf{K}(C)$ является подалгеброй алгебры $\mathbf{L}(C)$, причем утверждение теоремы 2.8 остается справедливым, если в нем заменить T на $[a,b]$, S на $[c,d]$, а меры рассматривать как меры Лебега на прямой.

Алгебра $\mathbf{K}(C)$ не является идеалом в $\mathbf{L}(C)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть композицию операторов из $\mathbf{K}(C)$ с оператором $D: x(t,s) \to x(t_0,s_0)$, где $(t_0,s_0) \in [a,b]\times[c,d]$.

Пусть $W = \mathbf{L_c}(C) \oplus \mathbf{L_l}(C) \oplus \mathbf{L_M}(C) \oplus \mathbf{L_n}(C)$, где L_c, L_l, L_m, L_n — множества действующих в $C([a,b]\times[c,d])$ операторов (2.1)–(2.4). Пространство W есть замкнутое подпространство пространства $\mathbf{K}(C)$. Примеры показывают [35, 57, 65, 98], что в $\mathbf{K}(C)$ существуют операторы, не принадлежащие W. Поэтому W — собственное подпространство в $\mathbf{K}(C)$.

Подпространства $\mathbf{L_c}(C)$ и $\mathbf{L_l}(C) \oplus \mathbf{L_M}(C) \oplus \mathbf{L_n}(C)$ суть идеалы в W и подалгебры в $\mathbf{K}(C)$, $\mathbf{L_n}(C)$ и $\mathbf{L_l}(C) \oplus \mathbf{L_m}(C) \oplus \mathbf{L_n}(C)$ не являются идеалами в $\mathbf{L}(C)$.

2.3. Спектральные свойства операторов с частными интегралами [69, 77, 102].

2.3.1. Спектральные свойства линейных ограниченных операторов. Пусть X — комплексное банахово пространство, R — ограниченный линейный оператор в X, λ — комплексное число, I — единичный оператор в X и $R(\lambda) = \lambda I - R$.

Через $\rho(R)$, $\sigma(R)$, $\sigma_p(R)$ и $\sigma_\pi(R)$ обозначим резольвентное множество, спектр, точечный и предельный спектры оператора R соответственно. Будем говорить, что $\lambda \in \mathbb{C}$ является *точкой области* $n(d)$*-нормальности* оператора R, если множество значений оператора $R(\lambda)$ замкнуто и размерность ядра $n(R(\lambda)) < \infty$ (коядра $d(R(\lambda)) < \infty$). Пересечение (объединение) области n-нормальности и области d-нормальности оператора R называется его *областью нетеровости* (*полуфредгольмовости*). Множество точек нетеровости с нулевым индексом $ind(R(\lambda)) = n(R(\lambda)) - d(R(\lambda))$ называется *областью фредгольмовости* оператора R.

Важное значение при изучении оператора R имеют его существенные спектры в смысле:

а) *Густавссона—Вайдмана множества* $\sigma_+(R)$, $\sigma_-(R)$, где $\sigma_+(R)$ $(\sigma_-(R))$ — дополнение до области $n(d)$-нормальности оператора R;
б) *Като* (*Вольфа*) *множество* $\sigma_{ek}(R) = \sigma_+(R) \cap \sigma_-(R)$ $(\sigma_{ew}(R) = \sigma_+(R) \cup \sigma_-(R))$;
в) *Шехтера множество* $\sigma_{es}(R)$, которое является объединением существенного спектра в смысле Вольфа и множества $\lambda \in \sigma(R)$, для которых оператор R является нетеровым оператором с ненулевым индексом;
г) *Браудера множество* $\sigma_{eb}(R)$ тех $\lambda \in C$, для которых выполнено по крайней мере одно из условий: множество значений оператора $R(\lambda)$ не замкнуто; λ — предельная точка $\sigma(R)$; $\bigcup\limits_{n\geqslant 0} Ker[R(\lambda)]^n$ имеет бесконечную размерность.

Для этих спектров справедливы следующие свойства [69, 103]:

$\sigma_+(R)$, $\sigma_-(R)$, $\sigma_{ek}(R)$, $\sigma_{ew}(R)$, $\sigma_{es}(R)$, $\sigma_{eb}(R)$, $\sigma_\pi(R)$, $\sigma(R)$ — *компактные множества*; $\sigma_{ek}(R) \subset \sigma_+(R), \sigma_-(R) \subset \sigma_{ew}(R) \subset \sigma_{es}(R) \subset \sigma_{eb}(R) \subset \sigma(R)$; $\sigma_{ek}(R) \cup \sigma_p(R) = \sigma_\pi(R) \subset \sigma(R)$; $\partial\sigma_{eb}(R) \subset \partial\sigma_{es}(R) \subset \partial\sigma_{ew}(R) \subset \partial\sigma_+(R), \partial\sigma_-(R) \subset \partial\sigma_{ek}(R)$; $\partial\sigma(R) = (\sigma(R) \setminus \sigma_{eb}(R)) \cup \partial\sigma_{eb}(R) \subset \partial\sigma_\pi(R)$, *где* $\partial\Phi$ *обозначает границу множества* Φ.

Через $t(R,\lambda)$ будем обозначать алгебраическую кратность собственного числа λ оператора R, а через $r(R)$ — его спектральный радиус.

2.3.2. Условия фредгольмовости операторов с частными интегралами. Как отмечалось выше, оператор (2.5) в общем случае есть не интегральный и не компактный оператор. Более того, оператор $\lambda I - K$ даже в простейшем случае единичных ядер l, m, n, функции $c(t,s) \equiv 0$ и $T = S = [0,1]$ не является не только фредгольмовым или нетеровым, но и n-нормальным и d-нормальным при $\lambda = 1$. В связи с этим возникает задача описания условий, при которых оператор левой части уравнения

$$(\lambda I - L - M - N)x = f \tag{2.31}$$

— обратимый, фредгольмов, нетеров, n-нормальный, d-нормальный, а также задача о сведении уравнения (2.31) к эквивалентному двумерному интегральному уравнению. Будем предполагать, что в уравнении (2.31) $\lambda \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\lambda = 1$. Тогда

$$I-L-M-N = (I-L)(I-M)-(N+LM) = I-L-M-N = (I-M)(I-L)-(N+ML). \tag{2.32}$$

Поэтому в случае существования ограниченных операторов $(I-L)^{-1}$ и $(I-M)^{-1}$ уравнение (2.31) эквивалентно любому из двух уравнений

$$(I-(I-M)^{-1}(I-L)^{-1})(N+LM)x = h_1, \quad (I-(I-L)^{-1}(I-M)^{-1})(N+ML)x = h_2, \tag{2.33}$$

где $h_1 = (I-M)^{-1}(I-L)^{-1}f$, $h_2 = (I-L)^{-1}(I-M)^{-1}f$. При естественных условиях $N + LM$ и $N + ML$ — двумерные интегральные операторы, а уравнения (2.33) — обычные интегральные уравнения, к которым уже можно применять все основные результаты классической теории интегральных уравнений.

Аналогично, если в (2.31) $\lambda = 1$ не является точкой спектра оператора $L+M$, то уравнение (2.31) эквивалентно интегральному уравнению

$$x = (I-L-M)^{-1}Nx + (I-L-M)^{-1})f. \tag{2.34}$$

Если теперь в (2.34) интегральный оператор N компактен, то для исследования этого уравнения может быть использована теория Рисса—Шаудера [68].

Таким образом, переход от уравнения (2.31) к эквивалентным уравнениям (2.33) и (2.34) связан с обратимостью операторов $I-L$, $I-M$, $I-L-M$. В приложениях обычно N — компактный оператор. Поэтому фредгольмовость, нетеровость, n-нормальность и d-нормальность уравнения (2.31) также определяются спектральными свойствами операторов L, M, $L+M$.

Обратимость операторов $I-L$ и $I-M$ связана с разрешимостью уравнений

$$u(t,s) = \int_T l(t,s,\tau)u(\tau,s)d\mu(\tau) + f(t,s), \quad v(t,s) = \int_S m(t,s,\sigma)v(t,\sigma)d\nu(\sigma) + f(t,s), \tag{2.35}$$

которые фактически являются обычными интегральными уравнениями с параметром s для первого уравнения (2.35) и параметром t для второго уравнения (2.35). Поэтому исследование уравнений семейств (2.35) сводится к исследованию семейств операторов (2.25).

В БИП $U = U(T)$ и $V = V(S)$ рассмотрим семейства интегральных уравнений

$$u(t) = \int_T l(t,s,\tau)u(\tau)d\mu(\tau) + g(t)\ (s \in S), \quad v(s) = \int_S m(t,s,\sigma)v(\sigma)d\nu(\sigma) + h(s)\ (t \in T), \tag{2.36}$$

где $g \in U$ и $h \in S$ — произвольные функции.

Пусть

$$]L(s)[u(t) = \int_T |l(t,s,\tau)|u(\tau)d\mu(\tau)\ (s \in S), \quad]M(t)[v(s) = \int_S |m(t,s,\sigma)|v(\sigma)d\nu(\sigma)\ (t \in T).$$

Предположим, что $r(]L(s)[) < 1$ $(s \in S)$, $r(]M(t)[) < 1$ $(t \in T)$, где $r(]L(s)[)$ и $r(]M(t)[)$ — спектральные радиусы операторов $]L(s)[$ и $]M(t)[$. В этом случае определены функции

$$\varphi(t,s,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} l^{(k)}(t,s,\tau)\ (s \in S, t,\tau \in T), \quad \psi(t,s,\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} m^{(k)}(t,s,\sigma)\ (t \in T, s,\sigma \in S), \tag{2.37}$$

где $l^{(k)}(t,s,\tau)$ и $m^{(k)}(t,s,\sigma)$ $(k = 1,2,\ldots)$ — итерированные ядра. При выполнении дополнительных условий

$$\varphi(t,s,\tau) \in \mathbf{R_l}(X,X),\ \psi(t,s,\sigma) \in \mathbf{R_m}(X,X), \tag{2.38}$$

$r(]L[) < 1$, $r(]M[) < 1$ функции

$$u(t,s) = f(t,s) + \int\limits_T \varphi(t,s,\tau)f(\tau,s)d\mu(\tau), \quad v(t,s) = f(t,s) + \int\limits_S \psi(t,s,\sigma)f(t,\sigma)d\nu(\sigma)$$

являются решениями уравнений (2.35).

Таким образом, справедлива

Теорема 2.21. *Пусть операторы L, M действуют в БИП X и регулярны. Если выполнены неравенства $r(]L(s)[) < 1$ $(s \in S)$, $r(]M(t)[) < 1$ $(t \in T)$ и условия* (2.38), *то операторы $I - L$ и $I - M$ обратимы в X. Если дополнительно N действует в X и регулярен, а хотя бы один из операторов $N + LM$ или $N + ML$ компактен, то оператор $I - L - M - N$ фредгольмов.*

Приведенные в теореме предположения не являются необходимыми. При доказательстве фредгольмовости оператора $I - L - M$ существенно используется предположение об обратимости операторов $I - L$ и $I - M$, т. е. условие $1 \notin \sigma(L) \cup \sigma(M)$. От этого предположения нельзя отказаться даже в практически важном частном случае операторов L, M, N с ядрами $l(t,s,\tau) \equiv l(t,\tau)$, $m(t,s,\sigma) \equiv m(s,\sigma)$, $n(t,s,\tau,\sigma) \equiv 0$.

Пусть $L(s)$ $(s \in S)$ и $M(t)$ $(t \in T)$ — операторы (2.25). Через $I(L)$ и $I(M)$ обозначим множество ядер $l(t,s,\tau)$ и $m(t,s,\sigma)$, при которых операторы $I - L$ и $I - M$ регулярны и обратимы на БИП $U = U(T)$ и $V = V(S)$ соответственно, причем операторы $(I - L)^{-1}$ и $(I - M)^{-1}$ допускают представления

$$(I - L(s))^{-1}u(t) = u(t) + \int\limits_T a(t,s,\tau)u(\tau)d\mu(\tau),\ (I - M(t))^{-1}v(s) = v(s) + \int\limits_S b(t,s,\sigma)v(\sigma)d\nu(\sigma), \tag{2.39}$$

где $a(t,s,\tau) \in \mathbf{R_l}(X,X)$, $b(t,s,\sigma) \in \mathbf{R_m}(X,X)$ и $X = U[V]$ или $X = V[U]$.

Отметим, что в условии теоремы 2.21 $l \in I(L)$, $m \in I(M)$.

Теорема 2.22. *Пусть $X = U[V]$ или $X = V[U]$ — БИП, операторы L, M действуют в БИП X и регулярны. Если $l \in I(L)$, $m \in I(M)$, то операторы $I - L$ и $I - M$ обратимы в X. Если дополнительно N действует в X и регулярен, а хотя бы один из операторов $N + LM$ или $N + ML$ компактен, то оператор $I - L - M - N$ фредгольмов.*

Заметим, что в условии теорем 2.21 и 2.22 уравнение (2.31) с $\lambda = 1$ эквивалентно двумерному интегральному уравнению.

Пусть операторы L и M имеют вырожденные ядра

$$l(t,s,\tau) = \sum_{i=1}^{l} l_i(t)\bar{l}_i(\tau)a_i(s),\ m(t,s,\sigma) = \sum_{j=1}^{m} m_j(s)\bar{m}_j(\sigma)b_j(t), \tag{2.40}$$

где $\{l_i\} \subset U, \{l_i'\} \subset U', \{a_i\} \subset L^\infty(S)$, $\{m_j\} \subset V, \{m_j'\} \subset V', \{b_j\} \subset L^\infty(T)$, $(i = 1,\ldots,l,\ j = 1,\ldots,m)$ — системы линейно-независимых функций. Операторы L и M регулярны в $U[V]$ и в $V[U]$, их композиция — компактный оператор, а разрешимость уравнений (2.35) эквивалентна разрешимости следующих систем:

$$z_i(s) - \sum_{p=1}^{l} l_{ip}a_p(s)z_p(s) = f_i(s)\ (i = 1,\ldots,l),\ z_j(t) - \sum_{q=1}^{m} m_{jq}b_q(t)y_q(t) = g_j(t)\ (j = 1,\ldots,m) \tag{2.41}$$

относительно $z_i \in V(S)$, $y_j \in U(T)$, где

$$l_{ip} = \int\limits_T l_p(\tau)\bar{l}_i(\tau)d\mu(\tau),\ f_i(s) = \int\limits_T \bar{l}_i(\tau)f(\tau,s)d\mu(\tau),$$

$$m_{jq} = \int\limits_S m_q(\sigma)\bar{m}_j(\sigma)d\nu(\sigma),\ g_j(t) = \int\limits_S \bar{m}_j(\sigma)f(t,\sigma)d\nu(\sigma).$$

Системы (2.41) линейных алгебраических уравнений с параметрами s и t соответственно однозначно разрешимы, если

$$|\det(\delta_{ip} - a_p(s)l_{ip})| \geqslant \alpha > 0, \ |\det(\delta_{jq} - b_q(t)m_{jq})| \geqslant \beta > 0, \tag{2.42}$$

причем $z_i \in U$, $y_j \in V$ $(i = 1, \dots, l, j = 1, \dots, m)$. Поэтому справедлива

Теорема 2.23. *Если вырожденные ядра* (2.40) *операторов L и M удовлетворяют условию* (2.42)*, то операторы $I - L$ и $I - M$ обратимы в $X = U[V]$ и в $X = V[U]$. Если дополнительно N — компактный оператор в X, то оператор $I - L - M - N$ фредгольмов.*

Заметим, что в условии теоремы 2.23 достаточно выполнение неравенств (2.42) почти при всех $s \in S$ и $t \in T$. Если на множестве положительной меры выполнено хотя бы одно из равенств $|\det(\delta_{ip} - a_p(s)l_{ip})| = 0$, $|\det(\delta_{jq} - b_q(t)m_{jq})| = 0$, то оператор $I - L - M - N$ не является нетеровым.

С применением аппроксимаций операторов L и M «близкими» операторами L_B и M_B с вырожденными ядрами для исследования обратимости операторов $I - L$ и $I - M$ можно использовать обратимость операторов $I - L_B$ и $I - M_B$.

Следующее утверждение о нетеровости и фредгольмовости оператора $I - L - M - N$ применимо в случае банаховых пространств.

Теорема 2.24 (см. [35])**.** *Если операторы L, M и N непрерывны в банаховом пространстве $X = X(T \times S)$, операторы $N + LM$ и $N + ML$ компактны в X, то нетеровость оператора $I - L - M - N$ равносильна нетеровости операторов $I - L$ и $I - M$. Если дополнительно оператор $I - L$* (*оператор $I - M$*) *фредгольмов, то фредгольмовость оператора $I - L - M - N$ равносильна фредгольмовости оператора $I - M$* (*оператора $I - L$ соответственно*).

Теоремы 2.21–2.24 сформулированы для операторов с частными интегралами, действующих в БИП. Аналогичные утверждения для этих операторов в $C(X)$ легко формулируются с применением теорем 2.21–2.24. Действительно, в условии этих теорем операторы L, M, N действуют одновременно из $C(X)$ в $C(Y)$ и из БИП $L^\infty[X]$ в БИП $L^\infty[Y]$, при этом $C(X)$ — замкнутое подпространство в $L^\infty[X]$, инвариантное для L, M, N при $X = Y$. Поэтому теоремы 2.21–2.24 в случае пространства $L^\infty[X]$ естественным образом переформулируются для $C(X)$.

Такая же схема применима и для пространства $C(T \times S)$. Из теоремы 2.19 получаются необходимые и достаточные условия действия операторов L, M, N в $C([a, b] \times [c, d])$. Так как $C([a, b] \times [c, d])$ — замкнутое подпространство в $L^\infty([a, b] \times [c, d])$, инвариантное для L, M, N, то теоремы 2.21–2.24 для пространства $L^\infty([a, b] \times [c, d])$ легко переформулируются на случай $C([a, b] \times [c, d])$.

Пусть $C = C(T)$ — пространство непрерывных на компакте T функций, μ — борелевская мера, $X = X(S)$ — БИП. Через $L^1[L^\infty]$, $X'[X]$, $L^1[X'[X]]$, $X[L^1[X']]$ обозначим пространства со смешанной нормой функций переменных $s, \tau; s, \sigma; \tau, \sigma$ соответственно, причем норма в L^1 вычисляется как норма функции переменной τ, в L^∞ и в X — переменной s, в X' — переменной σ.

Теорема 2.25. *Пусть $l(t, s, \tau) \in C(L^1[L^\infty])$, $m(t, s, \sigma) \in C(X'[X]) \cup C(X[X'])$. Если функция $\varphi(t, s, \tau)$ из* (2.37) *принадлежит $C(L^1[L^\infty])$, а функция $\psi(t, s, \sigma)$ из* (2.37) *принадлежит $C(X'[X])$ или $C(X[X'])$, то операторы $I - L$ и $I - M$ обратимы в $C(X)$. Если дополнительно $n(t, s, \tau, \sigma)$ принадлежит $C(L^1[X'[X]])$ или $C(X[L^1[X']])$, то оператор $I - L - M - N$ фредгольмов.*

Через $\bar{I}(L)$ и $\bar{I}(M)$ обозначим множество ядер $l(t, s, \tau)$ и $m(t, s, \sigma)$, при которых в (2.39) $a(t, s, \tau) \in C(L^1[L^\infty])$, $b(t, s, \sigma) \in C(X'[X]) \cup C(X[X'])$. В условии теоремы 2.25 $l \in \bar{I}(L)$, $l \in \bar{I}(M)$.

Теорема 2.26. *Пусть $l(t, s, \tau) \in C(X'[X]) \cup C(X[X'])$. Если $l(t, s, \tau) \in \bar{I}(L)$, $m(t, s, \sigma) \in \bar{I}(M)$, то операторы $I - L$ и $I - M$ обратимы в $C(X)$. Если дополнительно $n(t, s, \tau, \sigma) \in C(L^1[X'[X]]) \cup C(X[L^1[X']])$, то оператор $I - L - M - N$ фредгольмов.*

Утверждение, аналогичное теореме 2.23 для операторов с частными интегралами и вырожденными ядрами, имеет место и в случае пространства $C(X)$.

Пусть $\sigma(L(s))$ и $\sigma(M(t))$ — спектры операторов (2.25) и $\sigma_L = \bigcup\limits_s \sigma(L(s))$, $\sigma_M = \bigcup\limits_t \sigma(M(t))$.

Рассмотрим условия фредгольмовости операторов с частными интегралами в $C(T \times S)$.

Теорема 2.27. *Если T и S — компактные множества, μ и ν — борелевские меры, ядра $l(t,s,\tau)$ и $m(t,s,\sigma)$ непрерывны на $T\times S\times T$ и $T\times S\times S$ соответственно и N — компактный оператор в $C(T\times S)$, то оператор $I-L-M-N$ фредгольмов в $C(T\times S)$ тогда и только тогда, когда $1\notin\sigma_L\cup\sigma_M$.*

В наиболее важном частном случае $T=[a,b]$ и $S=[c,d]$ предположение о непрерывности ядер $l(t,s,\tau)$ и $m(t,s,\sigma)$ можно ослабить. Следующая теорема установлена в [43, 105].

Теорема 2.28. *Если $l\in C(L^1([a,b]))$, $m\in C(L^1([c,d]))$, $n\in C(L^1([a,b]\times[c,d]))$, то эквивалентны утверждения*:

а) *оператор $I-L-M-N$ фредгольмов в $C([a,b]\times[c,d])$;*
б) *операторы $I-L$ и $I-M$ обратимы в $C([a,b]\times[c,d])$;*
в) *операторы $I-L(s)$ и $I-M(t)$, где $L(s)$ и $M(t)$ — операторы* (2.25) *с $T=[a,b]$ и $S=[c,d]$, обратимы при любых $s\in[c,d]$, $t\in[a,b]$.*

2.3.3. Спектральные свойства операторов с частными интегралами в $L^2(T\times S)$. Важными для приложений линейными операторами с частными интегралами являются операторы с частными интегралами, допускающие реализацию в виде суммы тензорных произведений линейных интегральных операторов и единичных операторов. Для изучения спектральных свойств таких операторов может быть использована спектральная теория тензорных произведений операторов в тензорных произведениях банаховых пространств с квазиравномерными кросснормами [102, 103]. Важнейшим классом таких пространств является пространство $L^2(T\times S)$. Это пространство можно рассматривать как пополнение тензорного произведения $L^2(T)\otimes L^2(S)$ относительно кросснормы σ, совпадающей с нормой в $L^2(T\times S)$, при этом кросснорма σ является квазиравномерной.

Интегральные операторы A и B определим равенствами

$$(Ah)(t)=\int\limits_T l(t,\tau)h(\tau)d\mu(\tau),\ (Bg)(s)=\int\limits_S m(s,\sigma)g(\sigma)d\nu(\sigma). \tag{2.43}$$

Будем предполагать, что эти операторы действуют в $L^2(T)$ и в $L^2(S)$ соответственно. Тогда оператор вида

$$K=A\bar{\otimes}I+I\bar{\otimes}B, \tag{2.44}$$

где $A\bar{\otimes}I$ и $I\bar{\otimes}B$ — замыкания операторов $A\otimes I$ и $I\otimes B$, определенных на линейных комбинациях $(\sum\limits_{i=1}^n u_i\otimes v_i)(t,s)=\sum\limits_{i=1}^n u_i(t)v_i(s)$ равенствами $(A\otimes I)\sum\limits_{i=1}^n u_i\otimes v_i=\sum\limits_{i=1}^n A(u_i)\otimes v_i$, $(I\otimes B)\sum\limits_{i=1}^n u_i\otimes v_i=\sum\limits_{i=1}^n u_i\otimes B(v_i)$, есть частный случай оператора (2.5).

С применением результатов работ [102, 103] доказываются следующие утверждения:

Теорема 2.29.

$$\sigma(K)=\sigma(A)+\sigma(B), \tag{2.45}$$

$$\sigma_{eb}(K)=(\sigma_{eb}(A)+\sigma(B))\cup(\sigma(A)+\sigma_{eb}(B)). \tag{2.46}$$

Если λ не принадлежит множеству (2.46)*, то*

$$t(K,\lambda)=\sum_{(\alpha,\beta):\alpha+\beta=\lambda,\ \alpha\in E,\beta\in E'} t(A,\alpha)t(B\beta), \tag{2.47}$$

где $E=\sigma(A)/\sigma_{eb}(A)$, $E'=\sigma(B)/\sigma_{eb}(B)$,

$$\sigma_{ew}(K)=(\sigma_{ew}(A)+\sigma(B))\cup(\sigma(A)+\sigma_{ew}(B)). \tag{2.48}$$

Если λ не принадлежит множеству (2.48)*, то*

$$ind(K-\lambda I)=\sum_{(\alpha,\beta):\alpha+\beta=\lambda,\ \alpha\in F,\beta\in E'} ind(B-\beta I)\sum_{p=1}^{\infty}(n((A-\alpha I)^p)-n((A-\alpha I)^{p-1})+$$

$$+\sum_{(\alpha,\beta):\alpha+\beta=\lambda,\ \alpha\in E,\beta\in F'} ind(A-\alpha I)\sum_{p=1}^{\infty}(n((B-\beta I)^p)-n((B-\beta I)^{p-1}), \tag{2.49}$$

где $E = \sigma(A)/\sigma_{eb}(A)$, $E' = \sigma(B)/\sigma_{eb}(B)$, $F = \sigma(A)/\sigma_{ew}(A)$, $F' = \sigma(B)/\sigma_{ew}(B)$.

$\sigma_{es}(K)$ *равно объединению множества* (2.48) *и множества всех* $\lambda \in \mathbb{C}$ *и не принадлежащих множеству* (2.48)*, для которых определяемый по формуле* (2.49) $ind(K - \lambda I)$ *не равен нулю.*

Теорема 2.30.

$$\sigma_\pi(K) = \sigma_\pi(A) + \sigma_\pi(B), \tag{2.50}$$

$$\sigma_+(K) = (\sigma_+(A) + \sigma_\pi(B)) \cup (\sigma_\pi(A) + \sigma_+(B)). \tag{2.51}$$

Если λ *не принадлежит множеству* (2.51)*, то*

$$n(K-\lambda I) = \sum_{(\alpha,\beta)\in\sigma_\pi(A)\times\sigma_\pi(B),\alpha+\beta=\lambda} \sum_{p=1}^{\infty} (n((A-\alpha I)^p) - n((A-\alpha I)^{p-1}) \times (n((B-\beta I)^p) - n((B-\beta I)^{p-1}). \tag{2.52}$$

Теорема 2.31.

$$\sigma_\delta(K) = \sigma_\delta(A) + \sigma_\delta(B), \tag{2.53}$$

$$\sigma_-(K) = (\sigma_-(A) + \sigma_\delta(B)) \cup (\sigma_\delta(A) + \sigma_-(B)). \tag{2.54}$$

Если λ *не принадлежит множеству* (2.54)*, то*

$$d(K-\lambda I) = \sum_{(\alpha,\beta)\in\sigma_\delta(A)\times\sigma_\delta(B),\alpha+\beta=\lambda} \sum_{p=1}^{\infty} (d((A-\alpha I)^p) - d((A-\alpha I)^{p-1}) \times (d((B-\beta I)^p) - d((B-\beta I)^{p-1}). \tag{2.55}$$

$\sigma_{ek}(K)$ *совпадает с пересечением множеств, стоящих в правых частях равенств* (2.51) *и* (2.54).

Пример 2.1 (см. [31]). Пусть A и B — компактные интегральные операторы в $L^2(T)$ и $L^2(S)$ соответственно. Тогда $\sigma(A) = \{0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$, $\sigma(B) = \{0, \beta_1, \beta_2, \ldots\}$. Так как $\sigma(A) = \sigma_\pi(A) = \sigma_\delta(A)$, $\sigma(B) = \sigma_\pi(B) = \sigma_\delta(B)$, $\sigma_a(A) = \sigma_a(B) = \{0\}$, где $a \in \{+, -, ew, es, eb\}$, то применяя теоремы 2.29–2.31, получаем $\sigma_{eb}(K) = \sigma_{ew}(K) = \sigma_{es}(K) = \sigma_+(K) = \sigma_-(K) = \sigma(A) \cup \sigma(B)$. Поэтому области n-нормальности, d-нормальности, нетеровости и фредгольмовости оператора K совпадают с объединением множества $\{\lambda : \lambda \neq \alpha + \beta,$ где $\alpha \in \sigma(A), \beta \in \sigma(B)\}$ и множества изолированных собственных чисел конечной кратности оператора K, которое определяется равенством

$$\sigma(K)/\sigma_{eb}(K) = \{\alpha + \beta \neq 0 : \alpha + \beta \neq \gamma, \eta \text{ для } \alpha, \gamma \in \sigma(A); \beta, \eta \in \sigma(B)\}. \tag{2.56}$$

Пример 2.2 (см. [31]). Пусть A и B — самосопряженные интегральные операторы в $L^2(T)$ и в $L^2(S)$ соответственно. Тогда их существенные спектры в смысле Густавссона—Вайдмана, Като, Вольфа, Шехтера и Браудера совпадают. В этом случае $\sigma(K) = \sigma_\pi(K)$ и в силу теорем 2.29–2.31 $\sigma_a(K) = (\sigma_{eb}(A) + \sigma(B)) \cup (\sigma(A) + \sigma_{eb}(B))$ $(a \in \{+, -, ek, ew, es, eb\}$. Поэтому области n-нормальности, d-нормальности, нетеровости и фредгольмовости оператора K совпадают с множеством

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq \alpha + \beta, \alpha \in \sigma(A), \beta \in \sigma(B)\} \cup ((\sigma(A)/\sigma_{eb}(A) + \sigma(B)/\sigma_{eb}(B))/ \\ /(\sigma_{eb}(A) + \sigma(B)) \cup (\sigma(A) + \sigma_{eb}(B))).$$

Из формулы (2.46)вытекает следующая формула для изолированных собственных чисел конечной кратности оператора (2.44):

$$\sigma(K)/\sigma_{eb}(K) = ((\sigma(A)/\sigma_{eb}(A)) + (\sigma(B)/\sigma_{eb}(B))/((\sigma_{eb}(A) + \sigma(B)) \cup (\sigma(A) + \sigma_{eb}(B)).$$

В частности, если оператор A или B равен нулю, то оператор (2.44) изолированных собственных чисел конечной кратности не имеет.

Очевидно включение $\sigma_p(A) + \sigma_p(B) \subset \sigma_p(K)$. Если теперь $\sigma(A) = \sigma_p(A)$, $\sigma(B) = \sigma_p(B)$, то из (2.44) следует равенство

$$\sigma_p(K) = \sigma_p(A) + \sigma_p(B). \tag{2.57}$$

Пример 2.3 (см. [31]). Если интегральные операторы A и B имеют вырожденные ядра $l(t, \tau)$ и $m(s, \sigma)$ и действуют в пространствах $L^2(T)$ и $L^2(S)$ соответственно, то $\sigma(A) = \sigma_p(A)$, $\sigma(B) = \sigma_p(B)$. Поэтому $\sigma(K) = \sigma_p(K) = \sigma_p(A) + \sigma_p(B)$.

Следующий пример [31, 35, 98, 103] показывает, что формула (2.57) неверна, если даже A и B — компактные операторы.

Пример 2.4. Пусть $T = S = [0,1]$ и $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $L^2([0,1])$. Предположим также, что

$$l(t,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_{k+1}(t)e_k(\tau)}{k^2(k+1)},\ m(s,\sigma) = -\sum_{k=2}^{\infty} \frac{e_{k-1}(s)e_k(\sigma)}{(k-1)^2}.$$

Операторы A и B компактны в $L^2([0,1])$. Непосредственно проверяется, что $\sigma(B) = \sigma_p(B) = \{0\} = \sigma(A)$, $\sigma_p(A) = \varnothing$. Для оператора K имеем $\sigma(K) = \sigma(A) + \sigma(B) = \{0\}$. Так как $K\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{e_i \otimes e_i}{i!}\right) = 0$, то $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{e_i \otimes e_i}{i!} \neq 0$ — собственная функция оператора K, соответствующая собственному числу 0. Поэтому $\sigma_p(K) = 0 \neq \sigma_p(A) + \sigma_p(B)$.

В связи с примером 2.4 возникает вопрос об условиях, при которых справедливо равенство (2.57).

Линейный ограниченный оператор R, действующий в гильбертовом пространстве H, назовем оператором *с чисто точечным спектром*, если в H существует безусловный нормированный базис, составленный из собственных функций оператора R.

Теорема 2.32 (см. [31, 35, 98])**.** *Если интегральные операторы A и B действуют в $L^2(T)$ и в $L^2(S)$ соответственно и хотя бы один из них является оператором с чисто точечным спектром, то справедливо равенство* (2.57).

Следующий пример показывает, что спектром оператора (2.44) может быть любое содержащее нуль компактное множество F комплексной плоскости.

Пример 2.5 (см. [35])**.** Пусть $\{\lambda_n\}$ — всюду плотное множество в F, $e_1, e_2, \ldots$ — произвольные попарно непересекающиеся и измеримые по Лебегу подмножества отрезка $[0,1]$ и $l(t,\tau) = \sum\limits_{n} \lambda_n \chi_{e_n}(t)\chi_{e_n}(\tau)\mu(e_n)$. Тогда линейный интегральный оператор $(Ah)(t) = \int\limits_0^1 l(t,\tau)h(\tau)d\tau$ действует в $L^2([0,1])$ и имеет своим спектром множество F (см. [75]). В силу теоремы 2.29 это множество является спектром оператора $(Kx)(t,s) = \int\limits_0^1 l(t,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int\limits_0^s m(s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma$, где $m(s,\sigma) \in L^2([0,1] \times [0,1])$. Следовательно, спектром оператора (2.5) может быть любое содержащее нуль компактное множество комплексной плоскости.

2.3.4. Спектральные свойства операторов с частными интегралами в идеальных пространствах. Естественными для операторов с частными интегралами являются пространства со смешанными нормами. При дополнительных условиях на смешанные нормы эти пространства реализуются в виде тензорных произведений пространств с кросснормами, впервые введенными В. Л. Левиным [78]. Смешанная норма в общем случае не удовлетворяет условиям, используемым в спектральной теории тензорных произведений линейных ограниченных операторов на тензорных произведениях банаховых пространств (не является квазиравномерной кросснормой), уже в общем случае пространств Лебега со смешанными нормами [68]. Поэтому результаты о спектре и частях спектра линейных ограниченных операторов на таких пространствах без дополнительных условий на операторы, вообще говоря, не имеют места. Приводимые далее в этом разделе результаты получены в [31].

Теорема 2.33. *Пусть интегральные операторы A и B из* (2.43) *действуют в правильных БИП $X = X(T)$ и $Y = Y(S)$ соответственно и пусть выполнено одно из условий*: *A — регулярный оператор в X и $\rho(A) = \rho_r(A)$; B — регулярный оператор в Y и $\rho(B) = \rho_r(B)$, где $\rho(A) = \{\lambda \in \rho(A) : (\lambda I - A)^{-1}$— регулярный оператор в $X\}$, $\rho(B) = \{\lambda \in \rho(B) : (\lambda I - B)^{-1}$— регулярный оператор в $Y\}$.*

Тогда справедливы равенства (2.44) *и* (2.46).

Если в условии теоремы 2.33 λ не принадлежит множеству (2.46), то справедливо равенство (2.47).

Теорема 2.34. *Пусть интегральные операторы A и B из* (2.43) *действуют в вполне правильных БИП $X = X(T)$ и $Y = Y(S)$ соответственно и пусть выполнено одно из условий*:

а) $\|l(\cdot,\tau)\|_X \in X'$, $\|l(t,\cdot)\|_{X'} \in X$;

б) $\|m(\cdot,\sigma)\|_Y \in Y'$, $\|m(s,\cdot)\|_{Y'} \in Y$.

Тогда справедливо равенство (2.48)*, где оператор* (2.44) *рассматривается в $X[Y]$ в случае а) и в $Y[X]$ в случае б).*

В условии теоремы 2.34 при $\lambda \in \sigma(K)/((\sigma_{ew}(A)+\sigma(B)) \cup (\sigma(A)+\sigma_{tw}(B)))$ справедливы равенства (2.52), (2.55) и (2.49), $\sigma_{es}(K) = (\sigma_{ew}(A)+\sigma(B)) \cup (\sigma(A)+\sigma_{ew}(B)) \cup \sigma$, где σ — множество $\lambda \in \sigma(K)/((\sigma_{ew}(A)+\sigma(B)) \cup (\sigma(A)+\sigma_{ew}(B)))$, для которых $ind(K-\lambda I)$, определяемый равенством (2.49), не равен нулю. Отметим, что условие теоремы 2.33 вытекает из условия теоремы 2.34.

Условие на ядра в теореме 2.34 можно ослабить, если одно из пространств $X[Y]$ или $Y[X]$ вложено в другое.

Теорема 2.35. *Пусть интегральные операторы A и B из* (2.43) *действуют в вполне правильных БИП $X = X(T)$ и $Y = Y(S)$ соответственно и пусть выполнено одно из условий*:

а) $Y[X] \subset X[Y]$, $\|l(\cdot,\tau)\|_X \in X'$;

б) $Y[X] \subset X[Y]$, $\|m(s,\cdot)\|_{Y'} \in Y$;

в) $Y[X] \subset X[Y]$, $\|l(t,\cdot)\|_{X'} \in X$;

г) $X[Y] \subset Y[X]$, $\|m(\cdot,\sigma)\|_Y \in Y'$.

Тогда справедливы равенства (2.44)*,* (2.46)*,* (2.48)*, где оператор* (2.44) *рассматривается в $X[Y]$ в случаях а), в) и в $Y[X]$ в случаях б), г).*

При дополнительном условии $\lambda \notin \sigma(K)/((\sigma_{ew}(A)+\sigma(B)) \cup (\sigma(A)+\sigma_{ew}(B))$ размерность ядра, дефект и индекс оператора $\lambda I - K$ вычисляются по формулам (2.52)*,* (2.55)*,* (2.49).

Если $X = L^p(T)$, $Y = L^q(S)$ $(1 \leqslant p,q \leqslant \infty)$, то при $p \leqslant q$ $X[Y] \subset Y[X]$, а при $q \leqslant p$ $Y[X] \subset X[Y]$. Поэтому утверждение теоремы 2.35 легко переформулируется для случая пространств $L^p[L^q]$ и $L^q[L^p]$, в частности, для пространств $L^p(T\times S)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ (см. [31, 35, 98]).

2.3.5. Спектральные свойства операторов с частными интегралами в пространствах вектор-функций. Существование и свойства решений различных уравнений механики сплошных сред, интегродифференциальных уравнений Барбашина и других задач существенно зависят от спектральных свойств линейных операторов с частными интегралами, содержащихся в уравнениях. Как показывают примеры, спектр и части спектра линейных операторов с частными интегралами могут изменяться при изменении пространств, в которых они рассматриваются. Поэтому при исследовании таких уравнений в том или ином пространстве требуются спектральные свойства соответствующих операторов. В пункте 2.3.5 приводятся свойства спектра и частей спектра линейных операторов с частными интегралами в случае пространства $C(L^2)$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ вектор-функций со значениями в $L^2 = L^2([c,d])$.

Пусть $\Omega \in \{[a,b],[c,d], D = [a,b]\times[c,d]\}$, $C(L^2(\Omega))$ — пространство непрерывных на D вектор-функций со значениями в $L^2(\Omega)$,

$$(Lx)(t,s) = \int\limits_a^b l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau,\ (Mx)(t,s) = \int\limits_c^d m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma, \tag{2.58}$$

$$(Nx)(t,s) = \int\limits_a^b\int\limits_c^d n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma,\ (Cx)(t,s) = c(t,s)x(t,s),\ K = C+L+M+N,$$

где $(t,s) \in D = [a,b]\times[c,d]$, а интегралы понимаются в смысле Лебега.

Теорема 2.36 (см. [42]). *Пусть $c \in C(D)$, $l \in C(L^2([a,b]))$, $m \in C(L^2([c,d]))$, $n \in C(L^2(D))$. Тогда существенные спектры оператора K в смысле Густавссона—Вайдмана, Като, Вольфа и Шехтера совпадают и справедливы утверждения*:

1. *Если $\lambda - c(t,s) \neq 0$ на D, то n-нормальность, d-нормальность, фредгольмовость и нетеровость оператора $\lambda I - K$ в $C(L^2)$ равносильны обратимости в $C([a,b])$ и в*

$L^2([c,d])$ соответственно операторов следующих семейств операторов: $L(\lambda)(s)x(t) = x(t) - \int\limits_a^b \dfrac{l(t,s,\tau)}{\lambda - c(t,s)}x(\tau)d\tau$ $(s \in [c,d])$, $M(\lambda)(t)y(s) = y(s) - \int\limits_c^d \dfrac{m(t,s,\sigma)}{\lambda - c(t,s)}y(\sigma)d\sigma$ $(t \in [a,b])$;

2. *Если $\lambda - c(t_0,s_0) = 0$, $((t_0,s_0) \in D)$, то оператор $\lambda I - K$ не является ни фредгольмовым, ни нетеровым, ни n и ни d-нормальным в $C(L^2)$.*

Пусть $l(t,\tau)$ и $m(s,\sigma)$ — ядра операторов L и M в (2.58), интегральные операторы

$$(\tilde{L}h)(t) = \int\limits_a^b l(t,\tau)h(\tau)d\tau,\ (\tilde{M}g)(s) = \int\limits_c^d m(s,\sigma)g(\sigma)d\sigma$$

действуют в пространствах $C([a,b])$ и в $L^2([c,d])$ соответственно, при этом не требуются включения $l \in C(L^2([a,b]))$ и $m \in C(L^2([c,d]))$. Теорема 2.36 в этом случае к оператору K не применима, если $l \notin C(L^2([a,b]))$ или $m \notin C(L^2([c,d]))$, но спектр и части спектра оператора K удается описать с применением спектральной теории тензорных произведений линейных операторов в тензорных произведениях банаховых пространств [35, 98, 102, 103], так как $C(L^2)$ изометрически изоморфно пополнению тензорного произведения пространств $C([a,b])$ и $L^2([c,d])$ относительно квазиравномерной кросснормы.

Теорема 2.37. *Пусть операторы $\tilde{L}$ и $\tilde{M}$ действуют в пространствах $C([a,b])$ и $L^2([c,d])$ соответственно. Тогда справедливы утверждения*:

а) $\sigma(K) = \{\lambda : \lambda = \alpha + \beta, (\alpha,\beta) \in \sigma(\tilde{L}) \times \sigma(\tilde{M})\}$;

б) $\sigma_+(K) = \{\lambda : \lambda = \alpha + \beta, (\alpha,\beta) \in \sigma_+(\tilde{L}) \times \sigma_\pi(\tilde{M}) \cup \sigma_\pi(\tilde{L}) \times \sigma_+(\tilde{M})\}$;

в) $\sigma_\pi(K) = \{\lambda : \lambda = \alpha + \beta, (\alpha,\beta) \in \sigma_\pi(\tilde{L}) \times \sigma_\pi(\tilde{M})\}$;

г) $\sigma_\delta(K) = \{\lambda : \lambda = \alpha + \beta, (\alpha,\beta) \in \sigma_\delta(\tilde{L}) \times \sigma_\delta(\tilde{M})\}$, *где через $\sigma_\delta(K)$, $\sigma_\delta(\tilde{L})$, $\sigma_\delta\tilde{M})$ обозначены множества $\sigma_\pi(K^*)$, $\sigma_\pi(\tilde{L}^*)$, $\sigma_\pi(\tilde{M}^*)$, в которых $K^*, \tilde{L}^*, \tilde{M}^*$ — операторы, сопряженные операторам $K, \tilde{L}, \tilde{M}$*;

д) $\sigma_-(K) = \{\lambda : \lambda = \alpha + \beta, (\alpha,\beta) \in \sigma_-(\tilde{L}) \times \sigma_\delta(\tilde{M}) \cup \sigma_\delta(\tilde{L}) \times \sigma_-(\tilde{M})\}$;

е) $\sigma_{ew}(K) = \{\lambda : \lambda = \alpha + \beta, (\alpha,\beta) \in \sigma_{ew}(\tilde{L}) \times \sigma(\tilde{M}) \cup \sigma(\tilde{L}) \times \sigma_{ew}(\tilde{M})\}$;

ж) $\sigma_{ek}(K)$ *совпадает с пересечением множеств б) и д)*;

з) $\sigma_{es}(K)$ *совпадает с объединением множества из правой части равенства е) теоремы и множества всех $\lambda \in \mathbb{C}$, не принадлежащих $\sigma_{ew}(K)$, для которых индекс оператора $\lambda I - K$ не равен нулю*;

и) $\sigma_p(K) = \{\lambda : \lambda = \alpha + \beta, (\alpha,\beta) \in \sigma_p(\tilde{L}) \times \sigma_p(\tilde{M})\}$, *если $\sigma(\tilde{L}) = \sigma_p(\tilde{L})$, $\sigma(\tilde{M}) = \sigma_p(\tilde{M})$.*

3. Линейные операторы Вольтерра и Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами

3.1. Линейные операторы Вольтерра с частными интегралами. Через K обозначим оператор Вольтерра с частными интегралами

$$(Kx)(t,s) = \int\limits_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int\limits_c^s m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \iint\limits_\Delta n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma, \tag{3.1}$$

где $t \in [a,b]$, $s \in [c,d]$, Δ — одно из множеств $[a,t] \times [c,s]$, $[a,t] \times [c,d]$, $[a,b] \times [c,s]$, заданные функции l, m, n измеримы, интегралы понимаются в смысле Лебега. Оператор (3.1) является частным случаем оператора (2.5). Операторы, определяемые первым, вторым и третьим слагаемыми соответственно правой части равенства (3.1), по-прежнему будем обозначать через L, M, N.

Операторы L и M не являются компактными операторами даже в случае ядер любой гладкости, более того, в силу критерия А. В. Бухвалова [68] об интегральном представлении ограниченного линейного оператора операторы L и M не являются интегральными операторами.

Рассмотрим сначала оператор (3.1) с $\Delta = [a,t] \times [c,s]$.

Пример оператора Харди—Литтльвуда с частными интегралами

$$(Qx)(t,s) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t x(\tau,s)d\tau + \frac{1}{s}\int\limits_0^s x(t,\sigma)d\sigma + \frac{1}{ts}\int\limits_0^t\int\limits_0^s x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma$$

показывает, что он действует в $L^p([0,1]\times)[0,1]$ при $1 < p \leqslant \infty$, причем его спектральный радиус $r(Q) = 3 > 0$. Таким образом, спектральный радиус оператора Вольтерра с частными интегралами, вообще говоря, отличен от нуля. В связи с этим приведем определение свойства Андо, из которого вытекает равенство нулю спектрального радиуса оператора (3.1).

Через P_D обозначим оператор умножения на характеристическую функцию множества D.

Пусть оператор (3.1) действует в БИП U с носителем $[a,b] \times [c,d]$. Тогда в БИП U действует и непрерывен оператор $P_{[f,\tilde f]\times[g,\tilde g]}KP_{[f,\tilde f]\times[g,\tilde g]}$, где $a \leqslant f \leqslant \tilde f \leqslant b$, $c \leqslant g \leqslant \tilde g \leqslant d$. Положим

$$\delta(K) = \overline{\lim_{\tilde f - f, \tilde g - g \to 0}} \|P_{[f,\tilde f]\times[g,\tilde g]}KP_{[f,\tilde f]\times[g,\tilde g]}\|. \tag{3.2}$$

Если оператор (3.1) действует в БИП U, то

$$r(K) \leqslant \delta(K). \tag{3.3}$$

Неравенство (3.3) доказано в [23]. Следующий пример показывает, что равенство $r(K) = \delta(K)$ в общем случае неверно.

Пример 3.1. Пусть $a = c = 0$, $b = d = 1$, $m(t,s,\sigma) \equiv 0$, $n(t,s,\tau,\sigma) \equiv 0$ и

$$l(t,s,\tau) = l(t,\tau) = \begin{cases} 2^n, 2^{-n} \leqslant \tau \leqslant t < 2^{1-n}, \\ 0, \text{при других } t, \tau. \end{cases}$$

Оператор $(\bar L x)(t) = \int\limits_0^t l(t,\tau)x(\tau)d\tau$ действует в $L^\infty([0,1])$ и $r(\bar L) = 0$. Следовательно, оператор (3.1) действует $L^\infty([0,1]\times[0,1])$ и $r(K) = 0$. Если теперь $x(t,s) = 1$, то функция $P_{[f,\tilde f]\times[g,\tilde g]}KP_{[f,\tilde f]\times[g,\tilde g]}x$ принимает значение 1 на множестве положительной меры. Тогда $\delta(K) = 1 > r(K) = 0$.

Определение 3.1. Будем говорить,что оператор (3.1) обладает *свойством Андо*, если

$$\lim_{mesD_1 + mesD_2 \to 0} \|P_{D_1\times D_2}KP_{D_1\times D_2}\| = 0. \tag{3.4}$$

Свойство Андо выполняется для оператора K, если оно выполняется для операторов L, M, N и проверяется с использованием теорем из пунктов 2.2.5 и 2.2.6 и мажорантных оценок. В силу теоремы 2.2 оператор $]K[$ обладает свойством Андо тогда и только тогда, когда этим свойством обладают операторы $]L[,]M[,]N[$. Свойство Андо для оператора N проверяется по стандартным схемам [19], для операторов L и M в правильных БИП со смешанными нормами оно проверяется с применением теорем 2.12–2.14. Отметим, что приведенное свойство Андо отличается от определения свойства Андо в работах [19, 23].

Теорема 3.1 (см. [35])**.** *Если оператор* (3.1) *действует в БИП* U *и обладает свойством Андо, то* $r(K) = \delta(K) = 0$.

Определим следующие семейства интегральных операторов:

$$L(s)x(t) = \int\limits_a^t l(t,s,\tau)x(\tau)d\tau,\ ]L(s)[x(t) = \int\limits_a^t |l(t,s,\tau)|x(\tau)d\tau\ (c \leqslant s \leqslant d), \tag{3.5}$$

$$M(t)y(s) = \int\limits_c^s m(t,s,\sigma)y(\sigma)d\sigma,\ ]M(t)[y(s) = \int\limits_c^s m(t,s,\sigma)|y(\sigma)d\sigma\ (a \leqslant t \leqslant b). \tag{3.6}$$

Теорема 3.2 (см. [35])**.** *Пусть* X *и* Y — *правильные БИП с носителями* $[a,b]$ *и* $[c,d]$, $U = X[Y]$ *или* $U = Y[X]$, *оператор* (3.1) *регулярен в* U, *а операторы* $]L(s)[$ $(c \leqslant s \leqslant d)$, $]M(t)[$ $(t \in [a,b])$ *и* N *компактны в* X, Y *и* U *соответственно. Если при каждом* $\lambda \neq 0$

$$\varphi(t,s,\tau) = \sum_{k=1}^\infty \lambda^{-k} l^{(k)}(t,s,\tau) \in \mathbf{R_l}(U,U), \psi(t,s,\sigma) = \sum_{k=1}^\infty \lambda^{-k} m^{(k)}(t,s,\sigma) \in \mathbf{R_m}(U,U), \tag{3.7}$$

где $l^{(k)}(t,s,\tau)$, $m^{(k)}(t,s,\sigma)$ — *итерированные ядра, и хотя бы один из операторов* LM *или* ML *компактен в* U, *то спектральный радиус оператора* (3.1) *равен нулю.*

Будем говорить, что семейства операторов $L(s)$ $(c \leqslant s \leqslant d)$ и $M(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ обладают свойством Андо, если

$$\lim_{mesD\to 0}\sup_{c\leqslant s\leqslant d}\|P_D L(s) P_D\|_{X\to X} = 0, \lim_{mesD\to 0}\sup_{a\leqslant t\leqslant b}\|P_D M(t) P_D\|_{Y\to Y} = 0. \tag{3.8}$$

Равенства (3.8) проверяются обычно при помощи мажорантных оценок. При выполнении равенств (3.5) $\delta(L) = r(L) = 0$, $\delta(M) = r(M) = 0$, где оператор L действует в $Y[X]$, а оператор M действует в $X[Y]$.

Теорема 3.3 (см. [35]). *Пусть* $X = L^p([a,b])$, $Y = L^p([c,d])$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, *интегральные операторы* $L(s)$ $(c \leqslant s \leqslant d)$ *и* $M(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ *действуют в* X *и* Y *соответственно и их семейства обладают свойством Андо, а линейный интегральный оператор* N *действует в* $U = L^p([a,b]\times[c,d])$ *и обладает свойством Андо. Тогда для оператора* (3.1)*, действующего в* U*, справедливы равенства* $\delta(K) = r(K) = 0$.

Через $\tilde L$ и $\tilde M$ обозначим операторы

$$\tilde L x(t) = \int_a^t \tilde l(t,\tau)x(\tau)d\tau, \tilde M y(s) = \int_c^s \tilde m(s,\sigma)y(\sigma)d\sigma, \tag{3.9}$$

где $\tilde l(t,\tau) = \|l(t,\cdot,\tau)\|_{L^\infty}$, $\tilde m(t,\tau) = \|m(\cdot,s,\sigma)\|_{L^\infty}$.

Отметим, что $\delta(L) \leqslant \delta(\tilde L)$, $\delta(M) \leqslant \delta(\tilde M)$.

Теорема 3.4 (см. [35]). *Если операторы* $\tilde L$, $\tilde M$ *и* N *действуют в* $X = L^p([a,b])$, $Y = L^p([c,d])$ *и в* $U = L^p([a,b]\times[c,d])$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ *соответственно и обладают свойством Андо, то для действующего в* U *оператора* (3.1) *справедливы равенства* $\delta(K) = r(K) = 0$.

Пусть при каждом $s \in [c,d]$ оператор $L(s)$ действует в БИП X с носителем $T = [a,b]$, при каждом $t \in [a,b]$ оператор $M(t)$ действует в БИП Y с носителем $S = [c,d]$. Тогда определены и конечны функции $\alpha(s) = \|L(s)\|_{X\to X}$, $\beta(t) = \|M(t)\|_{Y\to Y}$.

Теорема 3.5. *Пусть* $X = X([a,b])$ *и* $Y = Y([c,d])$ *— БИП,* $\alpha(s) \in L^\infty([c,d])$, $\beta(t) \in L^\infty([a,b])$, *семейства операторов* $L(s)$ $(c \leqslant s \leqslant d)$ *и* $M(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ *обладают свойством Андо* (3.8) *и выполнено одно из следующих условий*:

а) *операторы* $\tilde M$ *и* N ($\tilde L$ *и* N) *действуют в* Y *и в* $Y[X]$ (*в* X *и в* $X[Y]$) *и обладают свойством Андо*;

б) $Y[X] \subset X[Y]$ ($X[Y] \subset Y[X]$)*, оператор* M (L *соответственно*) *действует в* $Y[X]$ (*в* $X[Y]$)*, а оператор* N *обладает свойством Андо в* $Y[X]$ (*в* $X[Y]$).

Тогда оператор (3.1) *действует в* $Y[X]$ (*в* $X[Y]$) *и* $\delta(K) = r(K) = 0$.

Приводимые ниже условия равенства $\delta(K) = r(K) = 0$ для оператора (3.1) с $\Delta = [a,t]\times[c,d]$ предполагают использование понятие t-свойства Андо.

Для оператора

$$(Nx)(t,s) = \int_a^t\int_c^d n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma \tag{3.10}$$

положим $\delta_t(N) = \overline{\lim_{\tilde f - f\to 0}}\|P_{[\tilde f,f]\times[c,d]} N P_{[\tilde f,f]\times[c,d]}\|$.

Если оператор (3.10) действует в БИП U с носителем $[a,b]\times[c,d]$, то $r(N) \leqslant \delta_t(N)$, причем последнее неравенство может быть строгим.

Будем говорить, что оператор (3.10) обладает *t-свойством Андо* [35, 104], если

$$\lim_{mesD\to 0}\|P_{D\times[c,d]} N P_{D\times[c,d]}\|.$$

t-свойство Андо проверяется с применением мажорантных оценок. В L^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ оно, например, выполнено в случае ограниченного ядра n. Оператор N обладает t-свойством Андо, если N — компактный регулярный оператор в правильном БИП.

Если оператор (3.10) обладает t-свойством Андо, то $\delta_t(N) = r(N) = 0$.

Рассмотрим оператор (3.1) с $\Delta = [a,t] \times [c,d]$. Оказывается, что при естественных условиях его спектральный радиус равен нулю и в этом случае. Будем предполагать регулярность оператора (3.1) в БИП U. Предыдущие теоремы содержат условия, при которых $r(L) = r(M) = 0$. В этих условиях уравнение $x = \mu K x + f$ равносильно уравнению

$$x(t,s) = \mu(Rx)(t,s) + g(t,s) \tag{3.11}$$

с оператором

$$(Rx)(t,s) = \int_a^t \int_c^d r(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma, \tag{3.12}$$

где

$$r(t,s,\tau,\sigma) = \int_\tau^t \varphi(t,s,\tau_1)n_1(\tau_1,s,\tau,\sigma)d\tau_1 + \int_c^s \psi(t,s,\sigma_1)n_1(t,\sigma_1,\tau,\sigma)d\sigma_1 +$$

$$+ \int_\tau^t \int_c^s n_2(t,s,\tau_1,\sigma_1)n_1(\tau_1,\sigma_1,\tau,\sigma)d\tau_1 d\sigma_1 + n_1(t,s,\tau,\sigma),$$

$$g(t,s) = f(t,s) + \int_a^t \varphi(t,s,\tau)f(\tau,s)d\tau + \int_c^d \psi(t,s,\sigma)f(t,\sigma)d\sigma + \int_\tau^t \int_c^s n_2(t,s,\tau,\sigma)f(\tau,\sigma)d\tau d\sigma,$$

$$n_1(t,s,\tau,\sigma) = n(t,s,\tau,\sigma) + \mu l(t,s,\tau)m(\tau,s,\sigma)\chi_{[0,s]}(\sigma), n_2(t,s,\tau,\sigma) = \psi(t,s,\sigma)\varphi(t,\sigma,\tau).$$

Если теперь оператор (3.12) обладает t-свойством Андо, то уравнение (3.11), следовательно, и уравнение $x - \mu K x = f$ имеет единственное решение в U при любой функции $f \in U$ и любом комплексном числе μ. Тогда $\lambda = \mu^{-1} \notin \sigma(K)$ и $r(K) = 0$.

Таким образом, для оператора K с $\Delta = [a,t] \times [c,d]$ $r(K) = 0$ в условии теоремы 3.2. $r(K) = 0$, если условия теорем 3.3–3.5 дополнить предположением о выполнении t-свойства Андо для оператора (3.12) и регулярности для оператора (3.10).

Аналогичные утверждения имеют место для оператора (3.1) и с $\Delta = [a,b] \times [c,s]$.

Предположим, что оператор (3.1) действует в $C([a,b] \times [c,d])$. В силу теорем 2.15 и 2.19 он действует и в $L^\infty([a,b] \times [c,d])$ и $\|K\|_C = \|K\|_{L^\infty}$. Отсюда и формулы Гельфанда для спектрального радиуса следует, что его спектральные радиусы в $C([a,b] \times [c,d])$ и в $L^\infty([a,b] \times [c,d])$ одинаковы. Поэтому приведенные выше утверждения о спектральном радиусе операторов (3.1) и (3.8) в $L^\infty([a,b] \times [c,d])$ имеют место для этих операторов и в $C([a,b] \times [c,d])$.

Приведем другие условия равенства нулю спектрального радиуса операторов с частными интегралами в $C([a,b] \times [c,d])$ (см. [57, 65]).

Пусть $\Delta = [a,t] \times [c,s]$, $T_1 \subset [a,b], S_1 \subset [c,d]$ и ядра l, m, n удовлетворяют условиям

$$\int_{T_1} |l(t,s,\tau)|d\tau \to 0, \int_{S_1} |m(t,s,\sigma)|d\sigma \to 0, \int_{T_1}\int_{S_1} |n(t,s,\tau,\sigma)|d\tau d\sigma \to 0 \tag{3.13}$$

равномерно по (t,s) при $mesT_1 \to 0$, $mesS_1 \to 0$ соответственно, где T_1, S_1 — отрезки.

Теорема 3.6. *Если операторы L, M, N действуют в $C([a,b] \times [c,d])$, а ядра l, m, n удовлетворяют условиям* (3.13)*, то $r(K) = 0$.*

Приведем еще один эффективный способ проверки равенства нулю спектрального радиуса оператора (3.1) с $\Delta = [a,t] \times [c,s]$.

Пусть $|l(t,s,\tau)| \leqslant l(t,\tau)$, $|m(t,s,\sigma)| \leqslant m(s,\sigma)$, $|n(t,s,\tau,\sigma)| \leqslant nl(t,\tau)m(s,\sigma)$. Тогда $r(K) \leqslant r(A) + r(B) + nr(A)r(B)$, где операторы A и B определяются равенствами

$$(Au)(t) = \int_a^t l(t,\tau)u(\tau)d\tau, \ (Bv)(s) = \int_c^s m(s,\sigma)v(\sigma)d\sigma.$$

Если теперь $r(A) = r(B) = 0$, то и $r(K) = 0$. Проверка равенства $r(A) = r(B) = 0$ для интегральных операторов Вольтерра производится по стандартным схемам [19, 22].

При $\Delta = [a,t] \times [c,d]$ спектральный радиус $r(K) = 0$, если операторы L, M, N действуют в $C([a,b] \times [c,d])$, ядра l, m удовлетворяют условиям (3.12), а ядро n условию

$$\int\limits_{T_1} \int\limits_{c}^{d} |n(t,s,\tau,\sigma)| d\tau d\sigma \to 0$$

равномерно по (t,s) при $mesT_1 \to 0$, где T_1 — отрезок [65].

Аналогичное утверждение имеет место и при $\Delta = [a,b] \times [c,s]$. Следующее простое условие равенства $r(K) = 0$ применимо при $\Delta = [a,t] \times [c,s]$, при $\Delta = [a,t] \times [c,d]$ и при $\Delta = [a,b] \times [c,s]$.

Теорема 3.7. *Если ядра l, m, n принадлежат $C(L^1([a,b]))$, $C(L^1([c,d]))$, $C(L^1([a,b] \times [c,d]))$, то $r(K) = 0$.*

Отметим, что утверждение теоремы 3.7 справедливо для оператора K с ядрами типа потенциала [65].

Равенство нулю спектрального радиуса оператора (3.1) в пространствах вектор-функций $C(X)$ или $C(Y)$ проверяется как равенство нулю его спектрального равенства в $L^\infty[X]$ или $L^\infty[Y]$. При этом могут быть использованы утверждения, аналогичные приведенным выше.

3.2. Линейные операторы Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами. *Операторами Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами* будем называть операторы следующих видов:

$$(K_1x)(t,s) = \int\limits_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int\limits_c^s m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \int\limits_a^b \int\limits_c^d n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma, \tag{3.14}$$

$$(K_2x)(t,s) = \int\limits_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int\limits_c^d m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \int\limits_T \int\limits_S n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma, \tag{3.15}$$

$$(K_3x)(t,s) = \int\limits_a^b l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int\limits_c^s m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \int\limits_T \int\limits_S n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma, \tag{3.16}$$

где $T = [a,b]$ или $T = [a,t]$, $S = [c,d]$ или $S = [c,s]$. Операторы, определяемые первым, вторым и третьим слагаемыми в (3.14), (3.15), (3.16) по-прежнему будем обозначать через L, M, N.

Свойства оператора (3.14) существенно отличаются от свойств операторов (3.15) и (3.16). Будем предполагать, что N — компактный оператор в рассматриваемых пространствах. Тогда существенные спектры операторов (3.14)–(3.16) определяются суммами двух первых слагаемых, стоящих в правых частях равенств (3.14)–(3.16).

Рассмотрим сначала оператор K_1. Если выполнено условие хотя бы одной из теорем 3.1–3.7, то $r(K_1 - N) = 0$, поэтому $\sigma(K_1 - N) = \{0\}$ и существенный спектр Шехтера оператора K_1 совпадает с множеством $\sigma_{es}(K_1) = \{0\}$. Таким образом, если оператор K_1 рассматривается в банаховых идеальных пространствах или в пространстве $C([a,b] \times [c,d])$, то $\sigma_{es}(K_1) = \{0\}$.

Рассмотрим теперь оператор (3.15). Аналогично предыдущему случаю, $\sigma_{es}(K_2) = \sigma_{es}(K_2 - N)$. В условии приводимых ниже теорем 3.8–3.11 $\sigma_{es}(K_2) = \sigma_{es}(M)$.

Теорема 3.8 (см. [35])**.** *Пусть $X = X([a,b])$ и $Y = Y([c,d])$ — правильные БИП, $U = Y[X]$ или $U = X[Y]$, оператор* (3.15) *регулярен в U, а оператор $]L(s)[$ $(c \leqslant s \leqslant d)$, определяемый равенством* (3.5)*, компактен в X. Если при каждом $\lambda \neq 0$ функция φ из* (3.7) *принадлежит $\mathbf{R}_1(U,U)$, а оператор N компактен в U, то $\sigma_{es}(K_2) = \sigma_{es}(M)$.*

Теорема 3.9 (см. [35])**.** *Пусть $X = L^p([a,b])$ и $Y = L^p([c,d])$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, семейство действующих в X линейных интегральных операторов $]L(s)[$ $(c \leqslant s \leqslant d)$ обладает свойством Андо* (3.8)*. Если оператор* (3.15) *регулярен в $U = L^p([a,b] \times [c,d])$, а оператор N компактен в U, то $\sigma_{es}(K_2) = \sigma_{es}(M)$.*

Теорема 3.10 (см. [35])**.** *Если оператор $\tilde{L}$ из* (3.9) *действует в $X = L^p([a,b])$ и обладает свойством Андо, оператор* (3.16) *регулярен в $U = L^p([a,b] \times [c,d])$, а оператор N компактен в U, то $\sigma_{es}(K_2) = \sigma_{es}(M)$.*

Теорема 3.11 (см. [35]). *Если* $X = X([a,b])$ *и* $Y = Y([c,d])$ — *БИП, функция* $\alpha(s) = \|L(s)\|_{X\to X}$ *ограничена в существенном и семейство операторов* $L(s)$ $(c \leqslant s \leqslant d)$ *из* (3.5) *обладает свойством Андо* (3.8) (*оператор* $\tilde{L}$ *из* (3.9) *действует в* X *и обладает свойством Андо*), *оператор* (3.16) *регулярен, а оператор* N *компактен в* $Y[X]$ (*в* $X[Y]$), *то* $\sigma_{es}(K_2) = \sigma_{es}(M)$ *в* $Y[X]$ (*в* $X[Y]$).

Изучение существенного спектра Шехтера оператора (3.16) в $C([a,b] \times [c,d])$ производится по схеме, аналогичной описанной выше схеме для оператора (3.15) (см. [57, 65]).

Отметим, что для рассматриваемых в $C([a,b] \times [c,d])$ операторов (3.15) и (3.16) с ядрами $l \in C(L^1([a,b]))$, $m \in C(L^1([c,d]))$, $n \in C(L^1([a,b]\times[c,d]))$ справедливо равенство $\sigma_{es}(K_1) = \sigma_{es}(K_2) = \sigma(M)$.

Изучение существенного спектра Шехтера операторов (3.14)–(3.16) в пространствах $C(X)$ и $C(Y)$ производится по схемам, аналогичным приведенным выше схемам для описания существенного спектра операторов K_1, K_2, K_3 (см. [35]).

4. Линейные уравнения с частными интегралами

4.1. Специальные примеры и условия фредгольмовости. Будем рассматривать уравнение

$$(\lambda I - L - M - N)x = f, \tag{4.1}$$

где L, M, N — операторы (2.2)–(2.4).

Приводимые ниже примеры показывают, что теория уравнения (4.1) существенно отличается не только от теории интегральных уравнений Фредгольма, но и от теории сингулярных интегральных уравнений. В приводимых ниже примерах 4.1–4.3 уравнение (4.1) рассматривается в $L^2(T \times S)$, где $T = S = [0,1]$.

Пример 4.1 (см. [35]). Пусть в (4.1) $\lambda = 1$, $l(t,s,\tau) \equiv 1$, $m(t,s,\sigma) \equiv 0$, $n(t,s,\tau,\sigma) \equiv 0$. Тогда $n(I-L) = d(I-L) = \infty$. Поэтому уравнение (4.1) с частными интегралами не только не фредгольмово и не нетерово, но даже и не n-нормально, и не d-нормально, тогда как обычное интегральное уравнение $x(t) = \int\limits_0^1 x(\tau)d\tau + f(t)$ с этим же ядром l фредгольмово.

Пример 4.1 показывает, что никакая гладкость ядра не обеспечивает ни фредгольмовости, ни нетеровости, ни n-нормальности, ни d-нормальности уравнения (4.1); напротив, обычные интегральные уравнения второго рода с гладкими ядрами фредгольмовы.

Для уравнения (4.1) с ядрами из примера 4.1 фредгольмовость совпадает с n,d-нормальностью и обратимостью. При этом $\lambda \notin \{0,1\}$. При $\lambda \in \{0,1\}$ уравнение (4.1) нормально разрешимо, так как множество значений оператора $\lambda I - L$ замкнуто.

Пример 4.2 (см. [35]). Пусть в (4.1) $l(t,s,\tau) \equiv 1$, $m(t,s,\sigma) \equiv 1$, $n(t,s,\tau,\sigma) \equiv 0$. В силу теорем 2.29–2.31 уравнение (4.1) допускает обращение только при $\lambda \notin \{0,1,2\}$ и является фредгольмовым, нетеровым, n,d-нормальным только при $\lambda \notin \{0,1\}$.

Пример 4.3 (см. [35]). Пусть в (4.1) $\lambda = 1$, $m(t,s,\sigma) \equiv 1$, $n(t,s,\tau,\sigma) \equiv 0$, $l(t,s,\tau) = l(t,\tau) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \chi_{e_n}(t)\dfrac{\varphi_n(\tau)}{\sqrt{\mu e_n}}$, где $\{\varphi_n\}$ — ортонормированный базис в $L^2([0,1])$ и $\{e_n\}$ — последовательность измеримых по Лебегу попарно непересекающихся подмножеств отрезка $[0,1]$ таких, что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\mu e_n}$. В этом случае уравнение (4.1) не является нетеровым, однако оно n-нормально.

Пример 4.4 (см. [35]). Пусть в (4.1) $T = [0,+\infty)$, $S = [0,1]$. Рассмотрим уравнение

$$2x(t,s) - \int\limits_0^{+\infty} l(t-\tau)x(\tau,s)d\tau - \int\limits_0^1 x(t,\sigma)d\sigma = f(t,s), \tag{4.2}$$

где $l \in L^1(-\infty,+\infty)$ и $f \in L^1(T\times S)$. Через $\tilde{l}(\xi)$ обозначим преобразование Фурье функции l. Пусть ядро l выбрано так, что $\tilde{l}(\xi)\neq 1$, $\tilde{l}(\xi)\neq 2$ при $\xi\in(-\infty,+\infty)$ и

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d_\xi \arg(1-\tilde{l}(\xi))\neq 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d_\xi \arg(2-\tilde{l}(\xi)) = 0.$$

Тогда уравнение (4.2) в $L^1(T\times S)$ нетерово, но не фредгольмово.

Утверждения, содержащиеся в этом пункте, фактически вытекают из приведенных выше утверждений о фредгольмовости линейных операторов с частными интегралами. Следующая теорема содержит альтернативу Фредгольма.

Теорема 4.1 (см. [35]). *Пусть операторы L, M, N действуют в БИП X с носителем $T\times S$, один из операторов $N+LM$ или $N+ML$ компактен в X и $1\notin\sigma(L)\cup\sigma(M)$. Тогда справедлива альтернатива Фредгольма*:

1. *либо уравнения $(I-K)x=f$ и $(I-K^*)y=g$, где оператор $K=L+M+N$, а K^* — сопряженный к K оператор, разрешимы при любых правых частях $f\in X$, $g\in X^*$ и тогда их решения единственны*;
2. *либо однородные уравнения $(I-K)x=0$ и $(I-K^*)y=0$ имеют одинаковое число линейно-независимых решений $x_1,\ldots,x_n$ и $y_1,\ldots,y_n$ соответственно. При этом уравнения $(I-K)x=f$, $(I-K^*)y=g$ разрешимы соответственно тогда и только тогда, когда $y_k(f)=0$, $g(x_k)=0$ $(k=1,\ldots,n)$, а общее решение каждого из этих уравнений имеет вид $x=x_0+\sum\limits_{k=1}^{n} c_k x_k$, $y=y_0+\sum\limits_{k=1}^{n} d_k y_k$, где x_0 и y_0 — частные решения уравнений $(I-K)x=f$ и $(I-K^*)y=g$ соответственно, а c_k, d_k — произвольные постоянные.*

В условии теоремы 4.1 уравнение $(I-K)x=f$ приводится к эквивалентному уравнению $x=A_i x+f_i$ $(i=1,2)$, где компактные операторы A_1 и A_2 определяются равенствами $A_1=(I-M)^{-1}(I-L)^{-1}(N+LM)$, $A_2=(I-L)^{-1}(I-M)^{-1}(N+ML)$, а $f_1=(I-M)^{-1}(I-L)^{-1}f$, $f_2=(I-L)^{-1}(I-M)^{-1}f$. Поэтому операторы $(I-M)^{-1}(I-L)^{-1}$ и $(I-L)^{-1}(I-M)^{-1}$ являются эквивалентными левыми регуляризаторами уравнения $(I-K)x=f$.

В условии следующей теоремы эквивалентными регуляризаторами с частными интегралами являются операторы с частными интегралами.

Теорема 4.2 (см. [35]). *Пусть $X=U[V]$ или $X=V[U]$ — БИП, оператор $K=L+M+N$ действует в X и регулярен, один из операторов $N+LM$ или $N+ML$ компактен в X и выполнены включения $l\in I(L)$, $m\in I(M)$, где $I(L)$ и $I(M)$ — множества из теоремы* 2.22. *Тогда справедливо утверждение теоремы* 4.1.

Отметим, что в теореме 4.2 включения $l\in I(L)$, $m\in I(M)$ выполняются, если имеют место включения (2.38).

Примеры, приведенные в этом пункте, показывают, что от требования обратимости операторов $I-L$ и $I-M$ отказаться, вообще говоря, нельзя. Изучение условий обратимости этих операторов связано с изучением обратимости операторов $I-L(s)$ и $I-M(t)$, где $L(s)$ и $M(t)$ — операторы (2.25). В случае вырожденных ядер такие условия приведены в теореме 2.23. Из теоремы 2.23 вытекает

Теорема 4.3 (см. [35]). *Пусть $X=U[V]$ или $X=V[U]$ — БИП, N — компактный оператор в X, а $l(y,s,\tau)$ и $m(t,s,\sigma)$ — вырожденные ядра* (2.40). *Если ядра l и m удовлетворяют условию* (2.42)*, то для уравнения $(I-L-M-N)x=f$ имеет место альтернатива Фредгольма.*

Если на множестве положительной меры хотя бы один из определителей из условий (2.42) равен нулю, то уравнение $(I-L-M-N)x=f$ не нетерово.

С применением описанных в пункте 2.3.2 схем получаются условия фредгольмовости уравнения $(I-K)x=f$ в пространствах $C(X)$ и $C(T\times S)$. В частности, теоремы 2.25–2.27 содержат условия фредгольмовости уравнения $(I-K)x=f$ в $C(X)$, теорема 2.28 содержит критерий фредгольмовости в $C([a,b]\times[c,d])$ этого уравнения с ядрами $l\in C(L^1([a,b]))$, $m\in C(L^1([c,d]))$, $n\in C(L^1([a,b]\times[c,d]))$.

4.2. Частные случаи [35, 98]. Рассмотрим уравнение

$$x(t,s) = g(s)\int\limits_a^b l(t,\tau)x(\tau,s)d\tau + h(t)\int\limits_c^d m(s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \int\limits_a^b\int\limits_c^d n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + f(t,s), \quad (4.3)$$

где $g(s)$ и $h(t)$ — непрерывные функции. В подходящем пространстве это уравнение можно записать в виде

$$(I-\tilde{L})(I-\tilde{M})x = (N+\tilde{L}\tilde{M})x + f, (I-\tilde{M})(I-\tilde{L})x = (N+\tilde{M}\tilde{L})x + f, \quad (4.4)$$

где $\tilde{L} = gL$, $\tilde{M} = hM$, $L = A\bar{\otimes}I$, $M = I\bar{\otimes}B$, а A и B — интегральные операторы

$$(Au)(t) = \int\limits_a^b l(t,\tau)u(\tau)d\tau, \ (Bv)(s) = \int\limits_c^d m(s,\sigma)v(\sigma)d\sigma. \quad (4.5)$$

Теорема 4.4. *Если операторы A, B и N компактны в пространствах $U = L^p([a,b])$, $V = L^p([c,d])$ и $X = L^p([a,b]\times[c,d])$ $(1 \leqslant p < \infty)$ соответственно, то альтернатива Фредгольма имеет место для уравнения* (4.3) *в X тогда и только тогда, когда*

$$1 \notin g(s)\sigma(A) \cup h(t)\sigma(B) \ (s \in [c,d], t \in [a,b]). \quad (4.6)$$

Отметим, что в условии теоремы 4.4 включение (4.6) необходимо и достаточно для нетеровости, n-нормальности и d-нормальности уравнения (4.4) в $L^p([a,b]\times[c,d])$ $(1 \leqslant p < \infty)$.

Условия фредгольмовости уравнения (4.3) в пространствах со смешанными нормами содержит

Теорема 4.5. *Пусть операторы A, B и N компактны в пространствах $U = L^p([a,b])$, $V = L^q([c,d])$ $(1 \leqslant p, q < \infty)$ соответственно. Если выполнено одно из условий*:

а) *оператор A регулярен в U и N — компактный оператор в $U[V]$*;

б) *оператор B регулярен в V и N — компактный оператор в $V[U]$*,

то альтернатива Фредгольма имеет место для уравнения (4.3) *в случае а) и в $V[U]$ в случае б) тогда и только тогда, когда выполнено включение* (4.6).

Аналогично формулируются условия фредгольмовости уравнения (4.3) в пространстве непрерывных вектор-функций.

Теорема 4.6. *Если оператор A (оператор B) компактен в пространстве $C = C([a,b])$ (в пространстве $C = C([c,d])$,) оператор B (оператор A) компактен в $V = L^p([c,d])$ (в $U = L^p([a,b])$) и N — компактный оператор в $X = C(V)$ (в $X = C(U)$), то альтернатива Фредгольма для уравнения* (4.3) *в X справедлива в том и только в том случае, когда выполнено условие* (4.6).

Теорема 4.6 справедлива, в частности, если ядра $l \in C(L^1([a,b]))$, $m \in C(L^1([c,d]))$, $n \in C(L^1([a,b]\times[c,d]))$, $U = C([a,b])$, $V = C([c,d])$, $X = C([a,b]\times[c,d])$.

Для уравнения (4.3) с $g(s) \equiv 1$ и $h(t) \equiv 1$ из результатов, приведенных в разделе 2.3, вытекает

Теорема 4.7. *Пусть $g(s) \equiv 1$, $h(t) \equiv 1$, интегральные операторы A и B из* (4.5) *действуют в БИП $U = U(T)$ и $V = V(S)$ соответственно, интегральный оператор N компактен в БИП X, где $X = U[V]$ или $X = V[U]$, и пусть выполнено одно из условий*:

а) $U = L^p(T)$, $V = L^p(S)$ $(1 \leqslant p < \infty)$;

б) $U = L^1(T)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, *V — почти совершенное БИП и $X = U[V]$*;

в) $V = L^1(S)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, *U — почти совершенное БИП и $X = V[U]$*.

Тогда справедливы утверждения:

1. *альтернатива Фредгольма имеет место для уравнения* (4.3) *в X тогда и только тогда, когда $1 \notin \sigma_{es}(K)$, где $\sigma_{es}(K)$ — множество из теоремы* 2.29;
2. *уравнение* (4.3) *нетерово в том и только в том случае, когда $1 \notin \sigma_{ew}(K)$, где $\sigma_{ew}(K)$ — множество* (2.48). *При $1 \notin \sigma_{es}(K)$ индекс уравнения вычисляется по формуле* (2.49).

Для уравнения (4.3) с $g(s) \equiv 1$ и $h(t) \equiv 1$ в пространствах вектор-функций справедлива

Теорема 4.8. *Пусть $g(s) \equiv 1$, $h(t) \equiv 1$, T (S) — компактное множество, μ (ν) — борелевская мера, оператор A (оператор B) из* (4.5) *действует в $C = C(T)$ (в $C = C(S)$), оператор B (оператор A) непрерывен в банаховом пространстве $V = V(S)$ (в $U = U(T)$) и N — компактный оператор в пространстве $X = C(V)$ (в $X = C(U)$) вектор-функций. Тогда справедливы утверждения теоремы* 4.7.

Отметим, что если в теоремах 4.7, 4.8 некоторые степени операторов A и B являются компактными операторами, то альтернатива Фредгольма для уравнения (4.3) справедлива точно в случае $1 \notin \sigma(A) \cup \sigma(B)$. Более того, в этом случае условие $1 \notin \sigma(A) \cup \sigma(B)$ есть критерий нетеровости, n-нормальности и d-нормальности уравнения (4.3).

Частным случаем уравнения (4.3) является уравнение $(I - L - M)x = f$. В различных функциональных пространствах это уравнение допускает представление $(I\bar{\otimes}I - A\bar{\otimes}I - I\bar{\otimes}B)x = f$. Отметим условие обратимости данного уравнения: $1 \notin \sigma(A) + \sigma(B) = \{\alpha + \beta : \alpha \in \sigma(A), \beta \in \sigma(B)\}$.

При $1 \notin \sigma(A)+\sigma(B)$ найдутся окрестности G и F спектров $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$ такие, что в окрестности $G \times F$ голоморфна функция $g(\xi, \eta) = (1 - \xi - \eta)^{-1}$. В силу теории операторного исчисления тензорных произведений ограниченных линейных операторов [101]

$$(I\bar{\otimes}I - A\bar{\otimes}I - I\bar{\otimes}B)^{-1} = (2\pi i)^{-2} \int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2} \frac{(\xi I - A)^{-1}\bar{\otimes}(\eta I - B)^{-1}}{1 - \xi - \eta} d\xi d\eta,$$

где $\Gamma_1 \subset G$ и $\Gamma_2 \subset F$ — некоторые спрямляемые кривые, лежащие в резольвентных множествах $\rho(A)$ и $\rho(B)$ соответственно, а интеграл понимается в смысле Римана. Поэтому единственное решение уравнения (4.3) имеет вид

$$x = (2\pi i)^{-2} \int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2} \frac{(\xi I - A)^{-1}\bar{\otimes}(\eta I - B)^{-1}}{1 - \xi - \eta} d\xi d\eta f. \tag{4.7}$$

Теорема 4.9. *Пусть $U = U(T)$ и $V = V(S)$ — банаховы функциональные пространства, оператор A непрерывен в U, оператор B непрерывен в V и пусть выполнено одно из условий*:

а) $U = L^p(T)$, $V = L^p(S)$, $X = L^p(T \times S)$ $(1 \leqslant p < \infty)$;
б) $U = L^1(T)$, *V — почти совершенное БИП и* $X = U[V]$;
в) $V = L^1(S)$, *U — почти совершенное БИП и* $X = V[U]$;
г) *U и V — правильные БИП, A — регулярный оператор в U, $X = U[V]$ и $\rho(A) = \rho_r(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : (\lambda I - A)^{-1}$ — регулярный оператор в $U\}$*;
д) *U и V — правильные БИП, B — регулярный оператор в V, $X = V[U]$ и $\rho(B) = \rho_r(B) = \{\lambda \in \sigma(B) : (\lambda I - B)^{-1}$ — регулярный оператор в $V\}$*;
е) *T и S — компактные множества, μ и ν — борелевские меры, $U = C(T), V = C(S)$ и $X = C(T \times S)$*;
ж) *T (S) — компактное множество, μ (ν) — борелевская мера, $U = C(T)$ $(V = C(S))$ и $X = C(V)$ ($X = C(U)$, соответственно)*.

Тогда уравнение $(I - L - M)x = f$ имеет единственное решение в пространстве X при любой функции $f \in X$ тогда и только тогда, когда выполнено условие $1 \notin \sigma(A) + \sigma(B)$, при этом решение находится по формуле (4.7).

4.3. Ограниченность и непрерывность решений. Хорошо известно, что каждое суммируемое решение линейного интегрального уравнения $x(t) = \int\limits_0^1 l(t, \tau)x(\tau)d\tau + f(t)$ с непрерывным заданным ядром и непрерывной функцией f непрерывно. Для линейных уравнений с частными интегралами это не так.

Линейное уравнение

$$x(t, s) = \int\limits_0^1 x(\tau, s)d\tau + \int\limits_0^1 x(t, \sigma)d\sigma + \int\limits_0^1\int\limits_0^1 x(\tau, \sigma)d\tau d\sigma - 2$$

имеет непрерывное решение $x(t,s)=1$, ограниченное разрывное решение $x(t,s)=1+\chi_{[0;0,5]}(s)-\chi_{[0,5;1]}(s)$ и неограниченное решение

$$x(t,s)=\begin{cases} 1-(0,5-s)^{-0,5}, \text{ если } 0\leqslant s<0,5,\\ 1, \text{ если } s=0,5,\\ 1+(s-0,5)^{-0,5}, \text{ если } 0,5<s\leqslant 1. \end{cases}$$

Поэтому изучение свойств решений уравнения (4.1) следует проводить в пространствах функций с требуемыми от решения свойствами.

4.4. Линейные уравнения Вольтерра с частными интегралами. Основные утверждения об однозначной разрешимости уравнения

$$x=Kx+f, \tag{4.8}$$

где K — оператор Вольтерра с частными интегралами (3.1), получаются применением результатов о равенстве нулю спектрального радиуса оператора K из раздела 3.1.

В частности, если выполнено условие одной из теорем 3.2–3.7, то уравнение (4.8) имеет единственное решение в рассматриваемом пространстве U, и для любой функции $f\in U$ оно может быть получено методом последовательных приближений. При этом решение уравнения есть сумма ряда Неймана

$$x=f+\sum_{p=1}^{\infty}K^p f. \tag{4.9}$$

Учитывая равенства (2.21)–(2.24), решение (4.9) можно представить в виде

$$x(t,s)=f(t,s)+\int\limits_a^t\varphi(t,s,\tau)f(\tau,s)d\tau+\int\limits_c^s\psi(t,s,\sigma)f(t,\sigma)d\sigma+\int\limits_\Delta\phi(t,s,\tau,\sigma)f(\tau,\sigma)d\tau d\sigma \tag{4.10}$$

с резольвентными ядрами φ,ψ,ϕ, определяемыми равенствами

$$\varphi(t,s,\tau)=\sum_{p=1}^{\infty}l^{(p)}(t,s,\tau),\psi(t,s,\sigma)=\sum_{p=1}^{\infty}m^{(p)}(t,s,\sigma),\phi(t,s,\tau,\sigma)=\sum_{p=1}^{\infty}n^{(p)}(t,s,\tau,\sigma),$$

где

$$l^{(p)}(t,s,\tau)=\int\limits_\tau^t l(t,s,\xi)l^{(p-1)}(\xi,s,\tau)d\xi, l^{(1)}(t,s,\tau)=l(t,s,\tau),$$

$$m^{(p)}(t,s,\sigma)=\int\limits_\sigma^s m(t,s,\eta)m^{(p-1)}(t,\eta,\sigma)d\eta, m^{(1)}(t,s,\sigma)=m(t,s,\sigma),$$

$$n^{(p)}(t,s,\tau,\sigma)=l(t,s,\tau)m^{(p-1)}(\tau,s,\sigma)+m(t,s,\sigma)l^{(p-1)}(t,\sigma,\tau)+\int\limits_\alpha^\beta l(t,s,\xi)n^{(p-1)}(\xi,s,\tau,\sigma)d\xi+$$

$$+\int\limits_\gamma^\delta m(t,s,\eta)n^{(p-1)}(t,\eta,\tau,\sigma)d\eta+\int\limits_\alpha^\beta n(t,s,\xi,\eta)l^{(p-1)}(\xi,\sigma,\tau)d\xi+\int\limits_\gamma^\delta n(t,s,\tau,\eta)m^{(p-1)}(\tau,\eta,\sigma)d\eta+$$

$$+\int\limits_\alpha^\beta\int\limits_\gamma^\delta n(t,s,\xi,\eta)n^{(p-1)}(\xi,\eta,\tau,\sigma)d\xi d\eta, n^{(1)}(t,s,\tau,\sigma)=n(t,s,\tau,\sigma),$$

$\alpha=\tau,\beta=t,\gamma=\sigma,\delta=s$ при $\Delta=[a,t]\times[c,s]$, $\alpha=\tau,\beta=t,\gamma=c,\delta=d$ при $\Delta=[a,t]\times[c,d]$, $\alpha=a,\beta=b,\gamma=\sigma,\delta=s$ при $\Delta=[a,b]\times[c,s]$.

Равенство (4.10) показывает, что резольвентой уравнения (4.8) является оператор с частными интегралами. Аналогично, этот же оператор является резольвентой уравнения (4.8) и в пространстве вектор-функций.

В предположениях раздела 3.1 спектральный радиус операторов L и M равен нулю. Если теперь $\Delta = [a,t] \times [c,s]$,

$$(I-L)^{-1}x(t,s) = x(t,s) + \int_a^t \varphi(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau, (I-M)^{-1}x(t,s) = x(t,s) + \int_c^s \psi(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma,$$

$$n_1(t,s,\tau,\sigma) = n(t,s,\tau,\sigma) + l(t,s,\tau)m(\tau,s,\sigma), n_2(t,s,\tau,\sigma) = n_1(t,s,\tau,\sigma)+$$

$$+\int_\tau^t \varphi(t,s,\xi)n_1(\xi,s,\tau,\sigma)d\xi + \int_\sigma^s \psi(t,s,\eta)n_1(t,\eta,\tau,\sigma)d\eta + \int_\tau^t \int_\sigma^s \psi(t,s,\eta)\varphi(t,\eta,\xi)n_1(\xi,\eta,\tau,\sigma)d\xi d\eta,$$

то уравнение (4.8) есть интегральное уравнение Вольтерра

$$x(t,s) = \int_a^t \int_c^s n_2(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + g(t,s), \tag{4.11}$$

где $g(t,s) = (I-M)^{-1}(I-L)^{-1}f$. Пусть $r(t,s,\tau,\sigma)$ — резольвентное ядро уравнения (4.11). Тогда

$$x(t,s) = g(t,s) + \int_a^t \int_c^s r(t,s,\tau,\sigma)g(\tau,\sigma)d\tau d\sigma.$$

Подставляя в это равенство $g(t,s) = (I-M)^{-1}(I-L)^{-1}f$, получим

$$x(t,s) = f(t,s) + \int_a^t \varphi(t,s,\tau)f(\tau,s)d\tau + \int_c^s \psi(t,s,\sigma)f(t,\sigma)d\sigma + \int_\tau^t \int_c^s \omega(t,s,\tau,\sigma)f(\tau,\sigma)d\tau d\sigma, \tag{4.12}$$

где

$$\omega(t,s,\tau,\sigma) = \psi(t,s,\sigma)\varphi(t,\sigma,\tau) + r(t,s,\tau,\sigma) + \int_\tau^t r(t,s,\xi,\sigma)\varphi(\xi,s,\tau)d\xi+$$

$$+\int_\sigma^s r(t,s,\tau,\eta)\psi(t,\eta,\sigma)d\eta + \int_\tau^t \int_\sigma^s r(t,s,\xi,\eta)\psi(\xi,\eta,\sigma)\varphi(\xi,\sigma,\tau)d\xi d\eta.$$

Таким образом, резольвента уравнения (4.8) имеет вид (4.12), где резольвентные ядра φ, ψ, ω выражаются через резольвентные ядра уравнений Вольтерра $(I-L)x = f, (I-M)x = f$ и (4.10).

Описанный метод построения резольвенты уравнения (4.8) принадлежит В. Вольтерра и применим также при $\Delta = [a,t] \times [c,d]$ и $\Delta = [a,b] \times [c,s]$.

4.5. Линейные уравнения Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами. Интегральное уравнение

$$x = K_i x + f \ (i = 1,2,3), \tag{4.13}$$

где K_1, K_2, K_3 — операторы (3.14), (3.15), (3.16), будем называть *уравнением Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами*.

Пример уравнения

$$x(t,s) = \frac{1}{2t}\int_0^t x(\tau,s)d\tau + \frac{1}{2t}\int_0^t \int_0^1 x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma$$

показывает, что без дополнительных условий уравнение (4.13), вообще говоря, не только не однозначно разрешимо, но и не нетерово.

Условия фредгольмовости уравнения (4.13) легко получаются из результатов разделов 3.1 и 3.2. В частности, при $i = 1$ справедлива

Теорема 4.10. *Пусть K_1 — регулярный оператор в БИП $U = U([a,b] \times [c,d])$ и выполнено условие одной из теорем* 3.1–3.5 *или K_1 действует в $U = C([a,b] \times [c,d])$ и выполнено условие одной из теорем* 3.6 *или* 3.7. *Тогда для уравнения $x = K_1 x + f$ справедлива альтернатива Фредгольма.*

В условии теоремы 4.10 уравнение $x = K_1x + f$ равносильно интегральному уравнению

$$x(t,s) = \int\limits_a^b \int\limits_c^d r_1(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + g_1(t,s) \equiv (R_1x)(t,s) + g_1(t,s), \tag{4.14}$$

где

$$r_1(t,s,\tau,\sigma) = \int\limits_a^t \varphi(t,s,\xi)n_1(\xi,s,\tau,\sigma)d\xi + \int\limits_c^s \psi(t,s,\eta)n_1(t,\eta,\tau,\sigma)d\eta +$$

$$+ \int\limits_a^t \int\limits_c^s n_2(t,s,\xi,\eta)n_1(\xi,\eta,\tau,\sigma)d\xi d\eta + n_1(t,s,\tau,\sigma),$$

$$g(t,s) = f(t,s) + \int\limits_a^t \varphi(t,s,\tau)f(\tau,s)d\tau + \int\limits_c^s \psi(t,s,\sigma)f(t,\sigma)d\sigma + \int\limits_a^t \int\limits_c^s n_2(t,s,\tau,\sigma)f(\tau,\sigma)d\tau d\sigma,$$

$$n_1(t,s,\tau,\sigma) = n(t,s,\tau,\sigma) + l(t,s,\tau)m(\tau,s,\sigma)\chi_{[a,t]}(\tau)\chi_{[c,s]}(\sigma), n_2(t,s,\tau,\sigma) = \psi(t,s,\sigma)\varphi(t,\sigma,\tau).$$

Если $1 \notin \sigma(K_1)$, то уравнение $x = K_1x + f$ допускает обращение, а резольвента имеет вид

$$x(t,s) = f(t,s) + \int\limits_a^t \varphi(t,s,\tau)f(\tau,s)d\tau + \int\limits_c^s \psi(t,s,\sigma)f(t,\sigma)d\sigma + \int\limits_a^b \int\limits_c^d \tilde{n}(t,s,\tau,\sigma)f(\tau,\sigma)d\tau d\sigma, \tag{4.15}$$

где φ и ψ — резольвентные ядра из пункта 4.4, а

$$\tilde{n}(t,s,\tau,\sigma) = r(t,s,\tau,\sigma) + n_2(t,s,\tau,\sigma)\chi_{[a,t]\times[c,s]}(\tau,\sigma) + \int\limits_\tau^b r(t,s,\xi,\sigma)\varphi(\xi,\sigma,\tau)d\xi +$$

$$+ \int\limits_\sigma^d r(t,s,\tau,\eta)\psi(\tau,\eta,\sigma)d\eta + \int\limits_\tau^b \int\limits_\sigma^d r(t,s,\xi,\eta)n_2(\xi,\eta,\tau,\sigma)d\xi d\eta, n_2(t,s,\tau,\sigma) = \psi(t,s,\sigma)\varphi(t,\sigma,\tau).$$

Таким образом, резольвента (4.15) выражается через резольвентные ядра уравнений Вольтерра $x = Lx + f$, $x = Mx + f$ и резольвентное ядро r уравнения Фредгольма (4.14).

Уравнения $x = K_2x + f$ и $x = K_3x + f$ существенно отличаются от уравнения $x = K_1x + f$. Действительно, например, при единичных ядрах уравнение $x = K_1x+f$ является фредгольмовым в $C([0,1]\times[0,1])$, а уравнения $x = K_2x+f$ и $x = K_3x+f$ не являются даже ни n-, ни d-нормальными. Из теорем 3.8–3.11 вытекает

Теорема 4.11. *Если K_2 — регулярный оператор в БИП $U = U([a,b] \times [c,d])$ и выполнено условие одной из теорем* 3.8–3.11, *то альтернатива Фредгольма для уравнения $x = K_2x + f$ справедлива тогда и только тогда, когда она справедлива для уравнения $x(t,s) = \int_c^d m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + f(t,s) \equiv (Mx)(t,s) + f(t,s)$.*

Аналогичная теорема имеет место и для уравнения $x = K_3x + f$.

Если уравнение $x = K_ix + f$ $(i = 2,3)$ с ядрами $l \in C(L^1([a,b]))$, $m \in C(L^1([c,d]))$, $n \in C(L^1([a,b] \times [c,d]))$ рассматривается в $C([a,b] \times [c,d])$, то оно фредгольмово точно тогда, когда обратимо при $i = 2$ уравнение $x = Mx + f$ и обратимо при $i = 3$ уравнение $x = Lx + f$.

Если в условии теоремы 4.5 выполнено $1 \notin \sigma(M)$, $(I-M)^{-1}x(t,s) = x(t,s)+\int_c^d r_m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma$ и $(I - M)^{-1}$ — регулярный оператор в БИП U, то уравнение $x = K_2x + f$ приводится к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма

$$x(t,s) = \int\limits_a^b \int\limits_c^d \bar{n}_1(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + \bar{g}_1(t,s), \tag{4.16}$$

где функция $\bar{n}_1(t,s,\tau,\sigma)$ определяется по функциям $r_m(t,s,\sigma)$, $m(t,s,\sigma)$, $n(t,s,\tau,\sigma)$ и функции $\varphi(t,s,\tau)$ из пункта 4.4, а функция $\bar{g}_1(t,s)$ определяется по функциям $f(t,s)$, $r_m(t,s,\sigma)$ и $\varphi(t,s,\tau)$ (см. [35]).

Если теперь уравнение (4.16) допускает обращение и $r(t,s,\tau,\sigma)$ — резольвентное ядро для ядра $\bar{n}_1(t,s,\tau,\sigma)$, то резольвента уравнения $x = K_2x + f$ определяется через резольвентные ядра уравнений $x = Lx + f$, $x = Mx + f$ и $r(t,s,\tau,\sigma)$ и имеет такую же структуру, что и оператор $I + K_2$.

Уравнение $x = K_3x + f$ рассматривается аналогично.

Приведенные схемы исследования уравнения (4.8) применимы и в случае пространств вектор-функций.

5. Некоторые приложения линейных уравнений с частными интегралами

В разделе указываются проблемы, приводящиеся к линейным уравнениям с частными интегралами, выписываются соответствующие уравнения и даются ссылки на работы, в которых изучаются эти уравнения.

Изгиб тонких пластинок, пологие упругие оболочки [10, 35, 98]:

$$\omega(z,\xi) = \int_0^z l(z,\xi,t)\omega(t,\xi)dt + \int_0^\xi m(z,\xi,\tau)\omega(z,\tau)d\tau + \int_0^z\int_0^\xi n(z,\xi,t,\tau)\omega(t,\tau)dtd\tau + g(z,\xi).$$

Функция Римана для уравнения второго порядка эллиптического типа [10]:

$$V(z,\zeta) - \int_t^z B(\xi,\zeta)V(\xi,\zeta)d\xi - \int_\tau^\zeta A(z,\eta)V(z,\eta)d\eta + \int_t^z d\xi\int_\tau^\zeta C(\xi,\zeta)V(\xi,\eta)d\eta = 1.$$

Гиперболическое уравнение Лапласа, задача Гурса [88, 89]:

$$\varphi(x,y) = \int_0^x b(x,y)\varphi(\xi,y)d\xi + \int_0^y a(x,y)\varphi(x,\eta)d\eta + f(x,y).$$

Задача Коши для интегродифференциального уравнения Барбашина [98]:

$$y(t,s) = \int_{t_0}^t c(t,s)y(\tau,s)d\tau + \int_{t_0}^t\int_a^b k(t,s,\sigma)y(\tau,\sigma)d\sigma d\tau + g(t,s).$$

Механика сплошных сред [3, 35, 96, 98]:

$$\lambda x(t,s) + \int_0^t l(t,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_{-1}^1 m(s-\sigma)x(t,\sigma)d\sigma = g(t,s).$$

Смешанные задачи эволюционного типа [5, 35, 96, 98]:

$$x(t,s) + \int_0^t l(t,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_{-1}^1 m(s-\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \int_0^t\int_{-1}^1 n(t,\tau)m(s-\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma = g(t,s).$$

Осесимметричные контактные задачи [2, 35, 96, 98]:

$$\lambda x(t,s) + \int_0^t sx(\tau,s)d\tau + \frac{2}{\pi}\int_c^1 m\left(\frac{2\sqrt{s\sigma}}{s+\sigma}\frac{\sigma}{s+\sigma}\right)x(t,\sigma)d\sigma = g(t,s).$$

Контактные задачи теории ползучести неоднородно-стареющих тел [1, 35, 86, 96, 98]:

$$x(t,s) - \int_1^t l(t,\tau)x(\tau,s)d\tau - c(t)\int_a^b m(s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma - \int_1^t\int_a^b c(t)n(t,\tau)m(s,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma = g(t,s).$$

Общее уравнение механики сплошных сред и теории ползучести неоднородно-стареющих тел [35, 96, 98]:

$$x(t,s) = a(s)\int\limits_0^t l(t,\tau)x(\tau,s)d\tau + c(t)\int\limits_0^b m(s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma +$$

$$+d(t,s)\int\limits_0^t\int\limits_0^b n(t,\tau)m(s,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + f(t,s).$$

Аэродинамика [6, 35, 96, 98]:

$$x(t,s) - \frac{1}{\pi b}\left(\frac{a-t}{a+t}\right)^{1/2}\int\limits_{-a}^{a} x(\tau,s)d\tau - \int\limits_{-b}^{b} m(s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma = f(t,s).$$

Расчет плотин методом арок-консолей [35, 87, 96, 98]:

$$\int\limits_0^a l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int\limits_{-b}^{b} m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma = f(t,s).$$

Другие приложения: в монографиях [35, 98] приведены многочисленные примеры линейных и нелинейных уравнений с частными интегралами, применявшихся к решению различных задач.

6. Заключение

Библиография работ по теории линейных операторов и уравнений с частными интегралами, доведенная до 2000 г., содержится в монографии [35], в ней же рассмотрены линейные операторы и уравнения с частными интегралами и ядрами различных классов. В связи с этим данная статья не содержит описание свойств операторов и условий разрешимости уравнений с частными интегралами и вырожденными, симметричными, симметризуемыми, жордановыми, разностными, сингулярными ядрами; линейные операторы и уравнения с частными интегралами не рассматриваются в пространствах дифференцируемых и частично, дифференцируемых функций, в пространствах Гельдера, Орлича и некоторых других пространствах. В обзоре не обсуждаются приближенные и численные схемы решения уравнений с частными интегралами, системы линейных уравнений с частными интегралами, линейные операторы и уравнения типа Романовского с частными интегралами [44]. Список литературы в статье не претендует на полноту, в частности, в список работ не включены тезисы докладов по теории линейных операторов и уравнений с частными интегралами.

Основы теории линейных операторов и уравнений с частными интегралами представлены в монографиях [35, 57, 65, 98].

Отметим, что линейные операторы и уравнения частными интегралами изучались в [8, 9, 11, 17, 21, 24–30, 32, 33, 39, 46–49, 51, 52, 54, 56, 60, 62, 66, 73, 74, 80–84, 90–92, 99, 100, 107–110]. В работах [12–14] рассматривались приложения линейных уравнений с частными интегралами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров В. М., Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В.* Контактные задачи теории ползучести неоднородно стареющих тел// В сб.: «Аналитические и численные методы краевых задач пластичности и вязкоупругости». — Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986. — С. 3–13.
2. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Осесимметричная контактная задача для линейно-деформируемого основания общего типа при наличии износа// Изв. АН СССР. Сер. Мех. тверд. тела. — 1978. — № 5. — С. 58–66.
3. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Об одном классе интегральных уравнений смешанных задач механики сплошных сред// Докл. АН СССР. — 1980. — *252*. — С. 324–328.
4. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* О контактном взаимодействии тел с покрытиями при наличии износа// Докл. АН СССР. — 1984. — *275*, № 4. — С. 827–830.
5. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. — М.: Наука, 1986.

6. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. — М.: Наука, 1985.
7. *Бицадзе А.В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. — М.: Наука, 1966.
8. *Болтянский В.В.* О разрешимости интегрального уравнения с частными интегралами с ядром, зависящим от трех переменных// В сб.: «Дифференциальные уравнения» — Рязань, 1981. — С. 3–14.
9. *Болтянский В.В., Лихтарников Л.М.* Об одном классе линейных интегральных уравнений с частными интегралами// Дифф. уравн. — 1982. — *18*, № 11. — С. 1939–1950.
10. *Векуа И.Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. — М.—Л.: ОГИЗ Гостехиздат, 1948.
11. *Витова Л.З.* К теории линейных интегральных уравнений с частными интегралами// Дисс. к.ф.-м.н. — Новгород, 1977.
12. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1982.
13. *Габов С.А., Свешников А.Г.* Линейные задачи нестационарных внутренних волн. — М.: Наука, 1990.
14. *Галин Л.А., Горячева И.Г.* Осесимметричная контактная задача теории упругости при наличии износа// Прикл. мат. мех. — 1977. — *41*, № 5. — С. 807–812.
15. *Гельфанд И.М., Левитан Б.М.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции// Усп. мат. наук. — 1956. — *11*, № 1. — С. 191–198.
16. *Гливенко В.И.* Интеграл Стильтьеса. — М.—Л.: ОНТИ, 1936.
17. *Говорухина А.А., Коваленко Н.В., Парадоксова И.А.* Двумерные интегральные уравнения с частными интегралами на плоскости и полуплоскости// В сб.: «Интегр. и дифференц. уравнения и приближенные решения». — Элиста, 1985. — С. 23–32.
18. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. 3. Ч. 2. — М.—Л.: ОНТИ, 1934.
19. *Забрейко П.П.* Исследование интегральных операторов в идеальных пространствах// Дисс. д.ф.-м.н. — Воронеж, 1968.
20. *Забрейко П.П.* Идеальные пространства функций. I// Вестн. Ярославск. ун-та. — 1974. — *8*. — С. 12–52.
21. *Забрейко П.П., Калитвин А.С., Фролова Е.В.* Об интегральных уравнениях с частными интегралами в пространстве непрерывных функций// Дифф. уравн. — 2002. — *38*, № 4. — С. 538–546.
22. *Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А., Михлин С.Г., Раковщик Л.С., Стеценко В.Я.* Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
23. *Забрейко П.П., Ломакович А.Н.* Интегральные операторы Вольтерра в пространствах функций двух переменных// Укр. мат. ж. — 1990. — *42*, № 9. — С. 1187–1191.
24. *Иноземцев А.И., Калитвин А.С.* О спектре операторов с многомерными частными интегралами // Вестн. ЛГПУ. Сер. Мат. Информ. техн. Физ. Естествозн. — 2015. — № 2. — С. 8–11.
25. *Иноземцев А.И., Калитвин А.С.* Оператор-функции с многомерными частными интегралами // Науч. ведом. БелГУ. Мат. Физ. — 2015. — *37*, № 25. — С. 19–29.
26. *Какичев В.А., Коваленко Н.В.* К теории двумерных интегральных уравнений с частными интегралами// Укр. мат. ж. — 1973. — *25*, № 3. — С. 302–312.
27. *Калитвин А.С.* О спектре и собственных функциях оператора с частными интегралами и оператора с частными интегралами типа В.И. Романовского// В сб.: «Функциональный анализ». — Ульяновск, 1984. — *22*. — С. 35–45.
28. *Калитвин А.С.* О спектре некоторых классов операторов с частными интегралами// В сб.: «Операторы и их приложения. Приближение функций. Уравнения». — Ленинград, 1985. — С. 27–35.
29. *Калитвин А.С.* О мультиспектре линейных операторов// В сб.: «Операторы и их приложения. Приближение функций. Уравнения». — Ленинград, 1985. — С. 91–99.
30. *Калитвин А.С.* О спектре оператора с частными интегралами в пространствах со смешанной нормой// В сб.: «Дифференциальные уравнения в частных производных». — Ленинград, 1986. — С. 128–131.
31. *Калитвин А.С.* Исследование операторов с частными интегралами// Дисс. к.ф.-м.н. — Ленинград, 1986.
32. *Калитвин А.С.* О спектре линейных операторов с частными интегралами и положительными ядрами// В сб.: «Операторы и их приложения». — Ленинград, 1988. — С. 43–50.
33. *Калитвин А.С.* О разрешимости некоторых классов интегральных уравнений с частными интегралами// В сб.: «Функциональный анализ». — Ульяновск, 1989. — *29*. — С. 68–73.
34. *Калитвин А.С.* Об уравнениях Вольтерра с частными интегралами теории упругости// Тр. конф. «Математическое моделирование систем. Методы, приложения и средства». — Воронеж, 1998. — С. 85–89.
35. *Калитвин А.С.* Линейные операторы с частными интегралами. — Воронеж: ЦЧКИ, 2000.

36. *Калитвин А. С.* Уравнения Вольтерра с частными интегралами в функциональных пространствах// Тр. Ин-та мат. НАН Беларуси. — 2000. — *5*. — С. 72–76.
37. *Калитвин А. С.* Об обобщении одного класса уравнений с частными интегралами контактных задач теории ползучести неоднородно-стареющих тел// В сб.: «Современные проблемы механики и прикладной математики». — Воронеж, 2000. — С. 189–193.
38. *Калитвин А. С.* Об обобщении одного уравнения механики сплошных сред// Изв. РАЕН. Сер. ММ-МИУ. — 2000. — *4*, № 3. — С. 81–88.
39. *Калитвин А. С.* Об уравнениях Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами// Дифф. уравн. — 2001. — *37*, № 10. — С. 151–152.
40. *Калитвин А. С.* Нелинейные операторы с частными интегралами. — Липецк: ЛГПУ, 2002.
41. *Калитвин А. С.* Операторы и уравнения с частными интегралами и их приложения// Дисс. д.ф.-м.н. — Липецк, 2003.
42. *Калитвин А. С.* Интегральные уравнения третьего рода с частными интегралами// Соврем. мат. и ее прилож. — 2005. — *36*. — С. 95–99.
43. *Калитвин А. С.* Об одном классе интегральных уравнений в пространстве непрерывных функций // Дифф. уравн. — 2006. — *42*, № 9. — С. 1194–1200.
44. *Калитвин А. С.* Интегральные уравнения типа Романовского с частными интегралами. — Липецк: ЛГПУ, 2007.
45. *Калитвин А. С.* Линейные уравнения с частными интегралами механики сплошных сред// В сб.: «Актуальные проблемы естественных наук и их преподавания». — Липецк, 2009. — С. 86–93.
46. *Калитвин А. С.* Об операторах и уравнениях Вольтерра с частными интегралами// ВЗМШ С. Г. Крейна 2012: материалы межд. конф. — Воронеж, 2012. — С. 91–94.
47. *Калитвин А. С.* О нетеровости, фредгольмовости и обратимости линейных уравнений с частными интегралами в двух классах идеальных пространств// Тр. межд. конф. «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений, AMADE-11. Т. 1. Математический анализ». — Минск: Ин-т мат. НАН Беларуси, 2012. — С. 75–79.
48. *Калитвин А. С.* О линейных операторах с частными интегралами в пространствах симметричных и кососимметричных функций // Вестн. ЛГПУ. Сер. Мат. Информ. техн. Физ. Естествозн. — 2012. — № 1. — С. 9–13.
49. *Калитвин А. С.* О спектре линейных операторов с частными интегралами в пространстве вектор-функций $C(L^2)$// Материалы межд. конф. «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна-2014». — Воронеж, 2014. — С. 157–160.
50. *Калитвин А. С.* О спектре операторов с частными интегралами и переменными пределами интегрирования// Материалы обл. науч.-практ. конф. «Актуальные проблемы естественных наук и их преподавания». — Липецк, 2014. — С. 91–96.
51. *Калитвин А. С.* О мультиспектре линейных операторов с частными интегралами // Вестн. ЛГПУ. Сер. Мат. Информ. техн. Физ. Естествозн. — 2015. — № 1. — С. 7–11.
52. *Калитвин А. С.* О фредгольмовости одного класса линейных уравнений с частными интегралами в пространстве $L^1(D)$// Материалы межд. конф. «Дифференциальные уравнения и динамические системы». — Суздаль, 2018. — С. 103–104.
53. *Калитвин А. С., Иноземцев А. И.* О нетеровости, фредгольмовости и обратимости линейных операторов и уравнений с многомерными частными интегралами// Науч.-техн. вестн. Поволжья. — 2018. — № 5. — С. 22–25.
54. *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* Об уравнениях Вольтерра—Фредгольма—Романовского с частными интегралами// Тр. Ин-та мат. НАН Беларуси. — 2004. — *12*, № 1. — С. 71–75.
55. *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* Интегральные уравнения Вольтерра с многомерными частными интегралами// Тр. XII Межд. симп. «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2005). — Харьков—Херсон, 2005. — С. 153–156.
56. *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами. — Липецк: ЛГПУ, 2007.
57. *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* Об интегральных уравнениях Вольтерра с многомерными частными интегралами// Вестн. ЛГПУ. Сер. Мат. Информ. техн. Физ. Естествозн. — 2006. — № 1. — С. 20–23.
58. *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* О линейных операторах и уравнениях с частными интегралами и переменными пределами интегрирования// Науч. ведом. Белгород. гос. ун-та. Сер. Мат. Физ. — 2013. — *32*, № 19. — С. 49–56.
59. *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* Об одном классе математических моделей с частными интегралами и мультипараметром// Науч. ведом. Белгород. гос. ун-та. Сер. Мат. Физ. — 2016. — *42*, № 6. — С. 40–44.

60. *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* О линейных операторах с несобственными частными интегралами// Науч. ведом. Белгород. гос. ун-та. Сер. Мат. Физ. — 2016. — *43*, № 13. — С. 24–29.
61. *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* О матричных интегральных уравнениях Вольтерра с частными интегралами в комплексной области// Науч.-техн. вестн. Поволжья. — 2017. — № 6. — С. 28–30.
62. *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* Об операторах с частными интегралами в пространствах функций двух переменных// Тавр. вестн. информ. и мат. — 2017. — № 3. — С. 17–27.
63. *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* Линейные уравнения с частными интегралами и переменными пределами интегрирования// Сб. мат. межд. конф. «XXIX Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным эволюционным задачам» (КРОМШ-2018), Секции 1–3. — Симферополь, 2018. — С. 70–72.
64. *Калитвин А. С., Фролова Е. В.* Об уравнениях Вольтерра с частными интегралами в пространстве непрерывных и ограниченных на полуполосе функций// Тр. ин-та мат. НАН Беларуси. — 2001. — *9*. — С. 68–72.
65. *Калитвин А. С., Фролова Е. В.* Линейные уравнения с частными интегралами. C-теория. — Липецк: ЛГПУ, 2004.
66. *Калитвин А. С., Янкелевич Е. В.* Операторы с частными интегралами в пространстве непрерывных функций. I// Вестн. Челябинск. гос. ун-та. Сер. Мат. Мех. — 1994. — № 1. — С. 61–67.
67. *Калитвин В. А.* Операторные методы исследования уравнений Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами// Дисс. к.ф.-м.н. — Липецк, 2003.
68. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977.
69. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
70. *Кац И. С.* Поведение решений линейного дифференциального уравнения второго порядка (по поводу одной работы Э. Хилле)// Мат. сб. — 1963. — *62*, № 4. — С. 476–495.
71. *Кац И. С., Крейн М. Г.* Критерий дискретности спектра сингулярной струны// Изв. вузов. Сер. Мат. — 1958. — *2*. — С. 136–153.
72. *Коваленко Е. В.* Исследование осесимметричной контактной задачи об изнашивании пары кольцевой штамп — упругое шероховатое полупространство// Прикл. мат. мех. — 1985. — *49*, № 5. — С. 836–843.
73. *Коваленко Н. В.* О решении двумерного интегрального уравнения с частными интегралами в пространстве L_2// В сб.: «Сообщения на 2 конференции Ростовского научного математического общества». — Ростов, 1968. — С. 41–49.
74. *Коваленко Н. В.* Об одном однородном интегральном уравнении с частными интегралами// В сб.: «Физ.-мат. исследования». — Ростов-на-Дону, 1972. — С. 3–7.
75. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы. — Новосибирск: Наука, 1983.
76. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1966.
77. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971.
78. *Левин В. Л.* Тензорные произведения и функторы в категориях банаховых пространств, определяемые КВ-линеалами// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1969. — *20*. — С. 43–82.
79. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Операторы Штурма—Лиувилля и Дирака. — М.: Наука, 1988.
80. *Лихтарников Л. М.* Об одном операторном уравнении с двумя параметрами в гильбертовом пространстве// В сб.: «Функц. анализ. Вып. 3». — Ульяновск, 1974. — С. 92–95.
81. *Лихтарников Л. М.* О спектре одного класса линейных интегральных уравнений с двумя параметрами// Дифф. уравн. — 1975. — *11*, № 6. — С. 1108–1117.
82. *Лихтарников Л. М., Витова Л. З.* О спектре интегрального оператора с частными интегралами// Лит. мат. сб. — 1975. — *15*, № 2. — С. 41–47.
83. *Лихтарников Л. М., Витова Л. З.* О разрешимости линейного интегрального уравнения с частными интегралами// Укр. мат. ж. — 1976. — *28*, № 1. — С. 83–87.
84. *Лихтарников Л. М., Морозова Л. М.* Об одном способе исследования интегральных уравнений с частными интегралами// В сб.: «Функц. анализ. Вып. 21». — Ульяновск, 1983. — С. 108–112.
85. *Манжиров А. В.* Осесимметричные контактные задачи для неоднородно стареющих вязкоупругих слоистых оснований// Прикл. мат. мех. — 1983. — *47*, вып. 4. — С. 684–694.
86. *Манжиров А. В.* Об одном методе решения двумерных интегральных уравнений осесимметричных контактных задач для тел со сложной реологией// Прикл. мат. мех. — 1985. — *49*, № 6. — С. 1019–1025.
87. *Морозов В. А.* Применение метода регуляризации к решению одной некорректной задачи// Вестн. МГУ. — 1965. — *1*, № 4. — С. 13–25.
88. *Мюнтц Г.* Интегральные уравнения. Т. 1. — Л.—М.: ГТТИ, 1934.
89. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. — М.: Высшая школа, 1995.

90. *Околелов О. П.* К теории двумерных интегральных уравнений с частными интегралами// Материалы 6-й межвуз. физ.-мат. науч. конф. Дальнего Востока. Дифф. и интегр. уравн. — Хабаровск, 1967. — *3*. — С. 142–149.
91. *Околелов О. П.* Исследование уравнений с частными интегральными операторами// Дисс. к.ф.-м.н. — Иркутск, 1967.
92. *Пилиди В. С.* Об одном классе линейных операторных уравнений// Мат. анализ и его прилож. — 1975. — *7*. — С. 34–42.
93. *Фролова Е. В.* Об одном операторе механики сплошных сред// Тр. конф. «Математическое моделирование систем. Методы, приложения и средства». — Воронеж, 1998. — С. 183–187.
94. *Фролова Е. В.* Линейные операторы с частными интегралами// Дисс. к.ф.-м.н. — Липецк, 2000.
95. *Appell J., Frolova E. V., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P.* Partial integral operators on $C([a, b] \times [c, d])$// Integr. Equ. Oper. Theory. — 1997. — *27*. — С. 125–140.
96. *Appell J., Kalitvin A. S., Nashed M. Z.* On some partial integral equations arising in the mechanics of solids// ZAMM Z. Angew. Math. Mech. — 1999. — *79*, № 2. — С. 703–713.
97. *Appell J., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P.* Partial integral operators in Orlich spaces with mixed norms// Collect. Math. — 1998. — *78*, № 2. — С. 293–306.
98. *Appell J., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P.* Partial integral operators and integro-differential equations. — New York—Basel: Marcel Dekker, 2000.
99. *Fenyö S.* Beiträge zur Theorie der linearen partiellen Integralgleichungen// Publ. Math. — 1955. — *4*, № 1. — С. 98–103.
100. *Frolova E. V., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P.* Operator-functions with partial integrals on C and L_p// J. Electrotech. Math. Pristina. — 2001. — *6*. — С. 29–50.
101. *Ichinose T.* Operational calculus for tensor products of linear operators in Banach spaces// Hokkaido Math. J. — 1975. — *4*. — С. 306–334.
102. *Ichinose T.* Spectral properties of tensor products of linear operators. I// Trans. Am. Math. Soc. — 1978. — *235*. — С. 75–113.
103. *Ichinose T.* Spectral properties of tensor products of linear operators. II// Trans. Am. Math. Soc. — 1978. — *237*. — С. 223–254.
104. *Kalitvin A. S.* Spectral properties of partial integral operators of Volterra and Volterra—Fredholm type// Z. Anal. Anwend. — 1998. — *17*, № 2. — С. 297–309.
105. *Kalitvin A. S.* On a class of integral equations in the space of continuous functions// Differ. Equ. — 2006. — *42*, № 9. — С. 1262–1268.
106. *Kalitvin A. S., Zabrejko P. P.* On the theory of partial integral operators// J. Integral Equ. Appl. — 1991. — *3*, № 3. — С. 351–382.
107. *Kantorovitz S.* A note on partial linear integral equations// Bull. Res. Council Israel. — 1957. — *7*, № 4. — С. 181–186.
108. *Kantorovitz S.* On the integral equation $\varphi(x, y) - \lambda a(x, y) \int \varphi(x, y)dx - \mu b(x, y) \int \varphi(x, y)dy = c(x, y)$// Riveon le Matematika. — 1958. — *12*. — С. 24–26.
109. *Mauro P.* Su un'equazione integrale lineare di tipo non ancora considerato// Rend. Accad. Naz. Sci. XL. — 1976. — *5*, № 1. — С. 55–59.
110. *Salam A.* Fredholm solution of partial integral equations// Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1953. — *49*. — С. 213–217.
111. *Volterra V.* Lecons sur les equations integrales et les equations integro-differentielles. — Paris: Gauthier-Villars, 1913.

А. С. Калитвин
Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского,
г. Липецк, ул. Ленина, д. 42
E-mail: kalitvinas@mail.ru

В. А. Калитвин
Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского,
г. Липецк, ул. Ленина, д. 42
E-mail: kalitvin@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-3-390-433 UDC 517.968

Linear Operators and Equations with Partial Integrals

© 2019 **A. S. Kalitvin, V. A. Kalitvin**

Abstract. We consider linear operators and equations with partial integrals in Banach ideal spaces, spaces of vector functions, and spaces of continuous functions. We study the action, regularity, duality, algebras, Fredholm properties, invertibility, and spectral properties of such operators. We describe principal properties of linear equations with partial integrals. We show that such equations are essentially different compared to usual integral equations. We obtain conditions for the Fredholm alternative, conditions for zero spectral radius of the Volterra operator with partial integrals, and construct resolvents of invertible equations. We discuss Volterra–Fredholm equations with partial integrals and consider problems leading to linear equations with partial integrals.

REFERENCES

1. V. M. Aleksandrov, N. Kh. Arutyunyan, and A. V. Manzhirov, “Kontaktnye zadachi teorii polzuchesti neodnorodno stareyushchikh tel” [Contact problems of the creepage of nonhomogeneously aging bodies], In: *Analiticheskie i chislennye metody kraevykh zadach plastichnosti i vyazkouprugosti* [Analytic and Numeric Methods of Boundary-Value Problems of Plasticity and Viscoelasticity], UNTS AN SSSR, Sverdlovsk, 1986, pp. 3–13 (in Russian).
2. V. M. Aleksandrov and E. V. Kovalenko, “Osesimmetrichnaya kontaktnaya zadacha dlya lineyno-deformiruemogo osnovaniya obshchego tipa pri nalichii iznosa” [Axisymmetric contact problem for linearly deformable groundwork of general kind with abrasion], *Izv. AN SSSR. Ser. Mekh. tverd. tela* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Contin. Mech.], 1978, No. 5, 58–66 (in Russian).
3. V. M. Aleksandrov and E. V. Kovalenko, “Ob odnom klasse integral’nykh uravneniy smeshannykh zadach mekhaniki sploshnykh sred” [One one class of integral equations in mixed problems of continuum mechanics], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1980, **252**, 324–328 (in Russian).
4. V. M. Aleksandrov and E. V. Kovalenko, “O kontaktnom vzaimodeystvii tel s pokrytiyami pri nalichii iznosa” [On the contact interaction of covered bodies with abrasion], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1984, **275**, No. 4, 827–830 (in Russian).
5. V. M. Aleksandrov and E. V. Kovalenko, *Zadachi mekhaniki sploshnykh sred so smeshannymi granichnymi usloviyami* [Problems of Continuum Mechanics with Mixed Boundary-Value Conditions], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
6. S. M. Belotserkovskiy and I. K. Lifanov, *Chislennye metody v singulyarnykh integral’nykh uravneniyakh* [Numerical Methods in Singular Integral Equations], Nauka, Moscow, 1985 (in Russian).
7. A. V. Bitsadze, *Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy vtorogo poryadka* [Boundary-Value Problems for Second-Order Elliptic Equations], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
8. V. V. Boltyanskiy, “O razreshimosti integral’nogo uravneniya s chastnymi integralami s yadrom, zavisyashchim ot trekh peremennykh” [On solvability of integral equation with partial integrals and a kernel depending on three variables], In: *Differentsial’nye uravneniya* [Differential Equations], Ryazan’, 1981, pp. 3–14 (in Russian).
9. V. V. Boltyanskiy and L. M. Likhtarnikov, “Ob odnom klasse lineynykh integral’nykh uravneniy s chastnymi integralami” [On one class of integral equation with partial integrals], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1982, **18**, No. 11, 1939–1950 (in Russian).
10. I. N. Vekua, *Novye metody resheniya ellipticheskikh uravneniy* [New Methods of Solution of Elliptic Equations], OGIZ Gostekhizdat, Moscow–Leningrad, 1948 (in Russian).
11. L. Z. Vitova, “K teorii lineynykh integral’nykh uravneniy s chastnymi integralami” [To the theory of linear integral equations with partial integrals] *PhD Thesis*, Novgorod, 1977.
12. V. Vol’terra, *Teoriya funktsionalov, integral’nykh i integrodifferentsial’nykh uravneniy* [Theory of Functionals, Integral and Integrodifferential Equations], Nauka, Moscow, 1982 (in Russian).
13. S. A. Gabov and A. G. Sveshnikov, *Lineynye zadachi nestatsionarnykh vnutrennikh voln* [Linear Problems of Nonstationary Inner Waves], Nauka, Moscow, 1990 (in Russian).

14. L. A. Galin and I. G. Goryacheva, “Osesimmetrichnaya kontaktnaya zadacha teorii uprugosti pri nalichii iznosa” [Axisymmetric contact problem of elasticity theory with abrasion], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1977, **41**, No. 5, 807–812 (in Russian).
15. I. M. Gel’fand and B. M. Levitan, “Ob opredelenii differentsial’nogo uravneniya po ego spektral’noy funktsii” [On determining of differential equation by its spectral function], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1956, **11**, No. 1, 191–198 (in Russian).
16. V. I. Glivenko, *Integral Stil’t’esa* [Stieltjes Integral], ONTI, Moscow–Leningrad, 1936 (in Russian).
17. A. A. Govorukhina, N. V. Kovalenko, and I. A. Paradoksova, “Dvumernye integral’nye uravneniya s chastnymi integralami na ploskosti i poluploskosti” [Two-dimensional integral equations with partial integrals on a plane and a half-plane], In: *Integr. i differents. uravneniya i priblizhennye resheniya* [Integral and Differential Equations and Approximate Solutions], Elista, 1985, pp. 23–32 (in Russian).
18. É. Goursat, *Kurs matematicheskogo analiza. T. 3. Ch. 2* [Cours d’Analyse Mathématique. Vol. 3. Part 2], ONTI, Moscow–Leningrad, 1934 (Russian translation).
19. P. P. Zabreyko, “Issledovanie integral’nykh operatorov v ideal’nykh prostranstvakh” [Investigation of integral operators in ideal spaces], *PhD Thesis*, Voronezh, 1968.
20. P. P. Zabreyko, “Ideal’nye prostranstva funktsiy. I” [Ideal spaces of functions. I], *Vestn. Yaroslavsk. un-ta* [Bull Yaroslavl Univ.], 1974, **8**, 12–52 (in Russian).
21. P. P. Zabreyko, A. S. Kalitvin, and E. V. Frolova, “Ob integral’nykh uravneniyakh s chastnymi integralami v prostranstve nepreryvnykh funktsiy” [On integral equations with partial integrals in the space of continuous functions], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2002, **38**, No. 4, 538–546 (in Russian).
22. P. P. Zabreyko, A. I. Koshelev, M. A. Krasnosel’skiy, S. G. Mikhlin, L. S. Rakovshchik, and V. Ya. Stetsenko, *Integral’nye uravneniya* [Integral Equations], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).
23. P. P. Zabreyko and A. N. Lomakovich, “Integral’nye operatory Vol’terra v prostranstvakh funktsiy dvukh peremennykh” [Volterra integral operators in spaces of functions of two variables], *Ukr. mat. zh.* [Ukr. Math. J.], 1990, **42**, No. 9, 1187–1191 (in Russian).
24. A. I. Inozemtsev and A. S. Kalitvin, “O spektre operatorov s mnogomernymi chastnymi integralami” [On spectrum of operators with multidimensional partial integrals], *Vestn. LGPU. Ser. Mat. Inform. tekhn. Fiz. Estestvozn.* [Bull. LGPU. Ser. Math. Inform. Phys. Nat. Sci.], 2015, No. 2, 8–11 (in Russian).
25. A. I. Inozemtsev and A. S. Kalitvin, “Operator-funktsii s mnogomernymi chastnymi integralami” [Operator functions with multidimensional partial integrals], *Nauch. vedom. BelGU. Mat. Fiz.* [Sci. Bull. Belgorod State Univ. Math. Phys.], 2015, **37**, No. 25, 19–29 (in Russian).
26. V. A. Kakichev and N. V. Kovalenko, “K teorii dvumernykh integral’nykh uravneniy s chastnymi integralami” [To the theory of two-dimensional integral equations with partial integrals], *Ukr. mat. zh.* [Ukr. Math. J.], 1973, **25**, No. 3, 302–312 (in Russian).
27. A. S. Kalitvin, “O spektre i sobstvennykh funktsiyakh operatora s chastnymi integralami i operatora s chastnymi integralami tipa V. I. Romanovskogo” [On spectrum and eigenfunctions of an operator with partial integrals and the Romanovskiy operator with partial integrals], In: *Funktsional’nyy analiz* [Functional Analysis], Ul’yanovsk, 1984, **22**, 35–45 (in Russian).
28. A. S. Kalitvin, “O spektre nekotorykh klassov operatorov s chastnymi integralami” [On spectrum of some classes of operators with partial integrals], In: *Operatory i ikh prilozheniya. Priblizhenie funktsiy. Uravneniya* [Operators and Their Applications. Approximation of Functions. Equations], Leningrad, 1985, pp. 27–35 (in Russian).
29. A. S. Kalitvin, “O mul’tispektre lineynykh operatorov” [On multispectrum of linear operators], In: *Operatory i ikh prilozheniya. Priblizhenie funktsiy. Uravneniya* [Operators and Their Applications. Approximation of Functions. Equations], Leningrad, 1985, pp. 91–99 (in Russian).
30. A. S. Kalitvin, “O spektre operatora s chastnymi integralami v prostranstvakh so smeshannoy normoy” [On spectrum of an operator with partial integrals in spaces with mixed norm], In: *Differentsial’nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Partial Differential Equations], Leningrad, 1986, pp. 128–131 (in Russian).
31. A. S. Kalitvin, “Issledovanie operatorov s chastnymi integralami” [Study of operators with partial integrals], *PhD Thesis*, Leningrad, 1986.
32. A. S. Kalitvin, “O spektre lineynykh operatorov s chastnymi integralami i polozhitel’nymi yadrami” [On spectrum of linear operators with partial integrals and positive kernels], In: *Operatory i ikh prilozheniya* [Operators and Their Applications], Leningrad, 1988, pp. 43–50 (in Russian).
33. A. S. Kalitvin, “O razreshimosti nekotorykh klassov integral’nykh uravneniy s chastnymi integralami” [On solvability of some classes of integral equations with partial integrals], In: *Funktsional’nyy analiz* [Functional Analysis], Ul’yanovsk, 1989, **29**, 68–73 (in Russian).

34. A. S. Kalitvin, "Ob uravneniyakh Vol'terra s chastnymi integralami teorii uprugosti" [On Volterra equations with partial integrals from the elasticity theory], Proc. Conf. *Math. model. of systems. Methods, applications, and means*, Voronezh, 1998, pp. 85–89.
35. A. S. Kalitvin, *Lineynye operatory s chastnymi integralami* [Linear Operators with Partial Integrals], TsChKI, Voronezh, 2000 (in Russian).
36. A. S. Kalitvin, "Uravneniya Vol'terra s chastnymi integralami v funktsional'nykh prostranstvakh" [Volterra equations with partial integrals in functional spaces], *Tr. In-ta mat. NAN Belarusi* [Proc. Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Belarus], 2000, **5**, 72–76 (in Russian).
37. A. S. Kalitvin, "Ob obobshchenii odnogo klassa uravneniy s chastnymi integralami kontaktnykh zadach teorii polzuchesti neodnorodno-stareyushchikh tel" [On generalization of one class of equations with partial integrals of contact problems from the theory of creepage of nonhomogeneously aging bodies], In: *Sovremennye problemy mekhaniki i prikladnoy matematiki* [Contemporary Problems of Mechanics and Applied Mathematics], Voronezh, 2000, pp. 189–193 (in Russian).
38. A. S. Kalitvin, "Ob obobshchenii odnogo uravneniya mekhaniki sploshnykh sred" [On generalization of one equation of continuum mechanics], *Izv. RAEN. Ser. MMMIU* [Bull. Russ. Acad. Nat. Sci. Ser. MMIU], 2000, **4**, No. 3, 81–88 (in Russian).
39. A. S. Kalitvin, "Ob uravneniyakh Vol'terra—Fredgol'ma s chastnymi integralami" [On Volterra–Fredholm equations with partial integrals], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2001, **37**, No. 10, 151–152 (in Russian).
40. A. S. Kalitvin, *Nelineynye operatory s chastnymi integralami* [Nonlinear Operators with Partial Integrals], LGPU, Lipetsk, 2002 (in Russian).
41. A. S. Kalitvin, "Operatory i uravneniya s chastnymi integralami i ikh prilozheniya" [Operators and equations with partial integrals and their applications], *Doctoral Thesis*, Lipetsk, 2003.
42. A. S. Kalitvin, "Integral'nye uravneniya tret'ego roda s chastnymi integralami" [Integral equations of the third kind with partial integrals], *Sovrem. mat. i ee prilozh.* [Contemp. Math. Appl.], 2005, **36**, 95–99 (in Russian).
43. A. S. Kalitvin, "Ob odnom klasse integral'nykh uravneniy v prostranstve nepreryvnykh funktsiy" [On one class of integral equations in the space of continuous functions], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2006, **42**, No. 9, 1194–1200 (in Russian).
44. A. S. Kalitvin, *Integral'nye uravneniya tipa Romanovskogo s chastnymi integralami* [Romanovskiy-type Integral Equations with Partial Integrals], LGPU, Lipetsk, 2007 (in Russian).
45. A. S. Kalitvin, "Lineynye uravneniya s chastnymi integralami mekhaniki sploshnykh sred" [Linear equation with partial integrals of the continuum mechanics], In: *Aktual'nye problemy estestvennykh nauk i ikh prepodavaniya* [Actual Problems of Natural Sciences and Their Teaching], Lipetsk, 2009, pp. 86–93 (in Russian).
46. A. S. Kalitvin, "Ob operatorakh i uravneniyakh Vol'terra s chastnymi integralami" [On Volterra operators and equations with partial integrals], Materials of Int. Conf. *S. G. Krein's Voronezh Wintry Math. School-2012*, Voronezh, 2012, pp. 91–94.
47. A. S. Kalitvin, "O neterovosti, fredgol'movosti i obratimosti lineynykh uravneniy s chastnymi integralami v dvukh klassakh ideal'nykh prostranstv" [On Noether and Fredholm properties and invertibility of linear equations with partial integrals in two classes of ideal spaces], Proc. Int. Conf. *Analytical Methods of Analysis and Differential Equations, AMADE-11*, Vol. 1. *Mathematical Analysis*, Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Belarus, Minsk, 2012, pp. 75–79 (in Russian).
48. A. S. Kalitvin, "O lineynykh operatorakh s chastnymi integralami v prostranstvakh simmetrichnykh i kososimmetrichnykh funktsiy" [On linear operators with partial equations in spaces of symmetric and skew-symmetric functions], *Vestn. LGPU. Ser. Mat. Inform. tekhn. Fiz. Estestvozn.* [Bull. LGPU. Ser. Math. Inform. Phys. Nat. Sci.], 2012, No. 1, 9–13 (in Russian).
49. A. S. Kalitvin, "O spektre lineynykh operatorov s chastnymi integralami v prostranstve vektor-funktsiy $C(L^2)$" [On spectrum of linear operators with partial integrals in the space of vector functions $C(L^2)$], Materials Int. Conf. *S. G. Krein Voronezh Wintry Math. School-2014*, Voronezh, 2014, pp. 157–160 (in Russian).
50. A. S. Kalitvin, "O spektre operatorov s chastnymi integralami i peremennymi predelami integrirovaniya" [On spectrum of operators with partial integrals and variable limits of integration], Materials Regional Sci.-Practic Conf. *Actual Problems of Natural Sciences and Their Teaching*, Lipetsk, 2014, pp. 91–96 (in Russian).
51. A. S. Kalitvin, "O mul'tispektre lineynykh operatorov s chastnymi integralami" [On multispectrum of linear operators with partial integrals], *Vestn. LGPU. Ser. Mat. Inform. tekhn. Fiz. Estestvozn.* [Bull. LGPU. Ser. Math. Inform. Phys. Nat. Sci.], 2015, No. 1, 7–11 (in Russian).

52. A. S. Kalitvin, "O fredgol'movosti odnogo klassa lineynykh uravneniy s chastnymi integralami v prostranstve $L^1(D)$" [On Fredholm property of one class of linear equations with partial integrals in the space $L^1(D)$], Materials Int. Conf. *Differential Equations and Dynamical Systems*, Suzdal', 2018, pp. 103–104 (in Russian).
53. A. S. Kalitvin and A. I. Inozemtsev, "O neterovosti, fredgol'movosti i obratimosti lineynykh operatorov i uravneniy s mnogomernymi chastnymi integralami" [On Noether and Fredholm properties and invertibility of linear operators and equations with multidimensional partial integrals], *Nauch.-tekhn. vestn. Povolzh'ya* [Sci.-Tech. Bull. Volga Reg.], 2018, No. 5, 22–25 (in Russian).
54. A. S. Kalitvin and V. A. Kalitvin, "Ob uravneniyakh Vol'terra—Fredgol'ma—Romanovskogo s chastnymi integralami" [Ob uravneniyakh Vol'terra—Fredgol'ma—Romanovskogo s chastnymi integralami], *Tr. In-ta mat. NAN Belarusi* [Proc. Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Belarus], 2004, **12**, No. 1, 71–75 (in Russian).
55. A. S. Kalitvin and V. A. Kalitvin, "Integral'nye uravneniya Vol'terra s mnogomernymi chastnymi integralami" [Volterra integral equations with multidimensional partial integrals], Proc. XII Int. Symp. *Methods of Discrete Singularities in Problems of Mathematical Physics*, Khar'kov–Kherson, 2005, pp. 153–156 (in Russian).
56. A. S. Kalitvin and V. A. Kalitvin, *Integral'nye uravneniya Vol'terra i Vol'terra—Fredgol'ma s chastnymi integralami* [Volterra and Volterra–Fredholm Integral Equations with Partial Integrals], LGPU, Lipetsk, 2007 (in Russian).
57. A. S. Kalitvin and V. A. Kalitvin, "Ob integral'nykh uravneniyakh Vol'terra s mnogomernymi chastnymi integralami" [On Volterra integral equations with multidimensional partial integrals], *Vestn. LGPU. Ser. Mat. Inform. tekhn. Fiz. Estestvozn.* [Bull. LGPU. Ser. Math. Inform. Phys. Nat. Sci.], 2006, No. 1, 20–23 (in Russian).
58. A. S. Kalitvin and V. A. Kalitvin, "O lineynykh operatorakh i uravneniyakh s chastnymi integralami i peremennymi predelami integrirovaniya" [On linear operators and equations with partial integrals and variable limits of integration], *Nauch. vedom. Belgorod. gos. un-ta. Ser. Mat. Fiz.* [Sci. Bull. Belgorod State Univ. Ser. Math. Phys.], 2013, **32**, No. 19, 49–56 (in Russian).
59. A. S. Kalitvin and V. A. Kalitvin, "Ob odnom klasse matematicheskikh modeley s chastnymi integralami i mul'tiparametrom" [On one class of mathematical models with partial integrals and multiparameter], *Nauch. vedom. Belgorod. gos. un-ta. Ser. Mat. Fiz.* [Sci. Bull. Belgorod State Univ. Ser. Math. Phys.], 2016, **42**, No. 6, 40–44 (in Russian).
60. A. S. Kalitvin and V. A. Kalitvin, "O lineynykh operatorakh s nesobstvennymi chastnymi integralami" [On linear operators with improper partial integrals], *Nauch. vedom. Belgorod. gos. un-ta. Ser. Mat. Fiz.* [Sci. Bull. Belgorod State Univ. Ser. Math. Phys.], 2016, **43**, No. 13, 24–29 (in Russian).
61. A. S. Kalitvin and V. A. Kalitvin, "O matrichnykh integral'nykh uravneniyakh Vol'terra s chastnymi integralami v kompleksnoy oblasti" [On matrix Volterra integral equations with partial integrals in complex domain], *Nauch.-tekhn. vestn. Povolzh'ya* [Sci.-Tech. Bull. Volga Reg.], 2017, No. 6, 28–30 (in Russian).
62. A. S. Kalitvin and V. A. Kalitvin, "Ob operatorakh s chastnymi integralami v prostranstvakh funktsiy dvukh peremennykh" [On operators with partial integrals in spaces of functions of two variables], *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavricheskiy Bull. Inform. Math.], 2017, No. 3, 17–27 (in Russian).
63. A. S. Kalitvin and V. A. Kalitvin, "Lineynye uravneniya s chastnymi integralami i peremennymi predelami integrirovaniya" [Linear equations with partial integrals and variable limits of integration], Abstracts Int. Conf. *XXIX Crimean Autumnal Math. School on Spectral and Evolution Problems*, Sec. 1–3, Simferopol', 2018, pp. 70–72 (in Russian).
64. A. S. Kalitvin and E. V. Frolova, "Ob uravneniyakh Vol'terra s chastnymi integralami v prostranstve nepreryvnykh i ogranichennykh na polupolose funktsiy" [On Volterra equations with partial integrals in the space of continuous and bounded functions on a half-strip], *Tr. in-ta mat. NAN Belarusi* [Proc. Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Belarus], 2001, **9**, 68–72 (in Russian).
65. A. S. Kalitvin and E. V. Frolova, *Lineynye uravneniya s chastnymi integralami. C-teoriya* [Linear Equations with Partial Integrals. C-Theory], LGPU, Lipetsk, 2004 (in Russian).
66. A. S. Kalitvin and E. V. Yankelevich, "Operatory s chastnymi integralami v prostranstve nepreryvnykh funktsiy. I" [Operators with partial integrals in the space of continuous functions. I], *Vestn. Chelyabinsk. gos. un-ta. Ser. Mat. Mekh.* [Bull. Chelyabinsk State Univ. Ser. Math. Mech.], 1994, No. 1, 61–67 (in Russian).
67. V. A. Kalitvin, "Operatornye metody issledovaniya uravneniy Vol'terra—Fredgol'ma s chastnymi integralami" [Operator methods of study of Volterra–Fredholm equations with partial integrals], *PhD Thesis*, Lipetsk, 2003.

68. L. V. Kantorovich and G. P. Akilov, *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1977 (in Russian).
69. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
70. I. S. Kats, "Povedenie resheniy lineynogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka (po povodu odnoy raboty E. Khille)" [Behavior of solutions of a second-order linear differential equation (concerning one paper by E. Hille)], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1963, **62**, No. 4, 476–495 (in Russian).
71. I. S. Kats and M. G. Kreyn, "Kriteriy diskretnosti spektra singulyarnoy struny" [Criterion for discreteness of spectrum of a singular string], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1958, **2**, 136–153 (in Russian).
72. E. V. Kovalenko, "Issledovanie osesimmetrichnoy kontaktnoy zadachi ob iznashivanii pary kol'tsevoy shtamp — uprugoe sherokhovatoe poluprostranstvo" [Study of axisymmetric contact problem on wearing of a pair circular stamp — elastic rugged half-space], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1985, **49**, No. 5, 836–843 (in Russian).
73. N. V. Kovalenko, "O reshenii dvumernogo integral'nogo uravneniya s chastnymi integralami v prostranstve L_2" [On solution of two-dimensional integral equation with partial integrals in the space L_2], In: *Soobshcheniya na 2 konferentsii Rostovskogo nauchnogo matematicheskogo obshchestva* [Talks at 2 Conf. Rostov Sci. Math. Soc.], Rostov, 1968, pp. 41–49 (in Russian).
74. N. V. Kovalenko, "Ob odnom odnorodnom integral'nom uravnenii s chastnymi integralami" [On one homogeneous integral equation with partial integrals], In: *Fiz.-mat. issledovaniya* [Phys.-Math. Investigations], Rostov-na-Donu, 1972, pp. 3–7 (in Russian).
75. V. B. Korotkov, *Integral'nye operatory* [Integral Operators], Nauka, Novosibirsk, 1983 (in Russian).
76. M. A. Krasnosel'skiy, P. P. Zabreyko, E. I. Pustyl'nik, and P. E. Sobolevskiy, *Integral'nye operatory v prostranstvakh summiruemykh funktsiy* [Integral Operators in Spaces of Summable Functions], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
77. S. G. Kreyn, *Lineynye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1971 (in Russian).
78. V. L. Levin, "Tenzornye proizvedeniya i funktory v kategoriyakh banakhovykh prostranstv, opredelyaemye KV-linealami" [Tensor products and functors in categories of Banach spaces defined by KV-lineals], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1969, **20**, 43–82 (in Russian).
79. B. M. Levitan and I. S. Sargsyan, *Operatory Shturma—Liuvillya i Diraka* [Sturm–Liouville and Dirac Operators], Nauka, Moscow, 1988 (in Russian).
80. L. M. Likhtarnikov, "Ob odnom operatornom uravnenii s dvumya parametrami v gil'bertovom prostranstve" [On one operator equations with two parameters in Hilbert space], In: *Funkts. analiz. Vyp. 3* [Functional Anal. Vol. 3], Ul'yanovsk, 1974, pp. 92–95 (in Russian).
81. L. M. Likhtarnikov, "O spektre odnogo klassa lineynykh integral'nykh uravneniy s dvumya parametrami" [On spectrum of one class of linear integral equations with two parameters], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1975, **11**, No. 6, 1108–1117 (in Russian).
82. L. M. Likhtarnikov and L. Z. Vitova, "O spektre integral'nogo operatora s chastnymi integralami" [On spectrum of integral operator with partial integrals], *Lit. mat. sb.* [Lit. Math. Digest], 1975, **15**, No. 2, 41–47 (in Russian).
83. L. M. Likhtarnikov and L. Z. Vitova, "O razreshimosti lineynogo integral'nogo uravneniya s chastnymi integralami" [On solvability of a linear integral equation with partial integrals], *Ukr. mat. zh.* [Ukr. Math. J.], 1976, **28**, No. 1, 83–87 (in Russian).
84. L. M. Likhtarnikov and L. M. Morozova, "Ob odnom sposobe issledovaniya integral'nykh uravneniy s chastnymi integralami" [On one method of study of integral equations with partial integrals], In: *Funkts. analiz. Vyp. 21* [Functional Anal. Vol. 21], Ul'yanovsk, 1983, pp. 108–112 (in Russian).
85. A. V. Manzhirov, "Osesimmetrichnye kontaktnye zadachi dlya neodnorodno stareyushchikh vyazkouprugikh sloistykh osnovaniy" [Axisymmetric contact problems for nonhomogenously aging viscoelastic foliated bases], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1983, **47**, vyp. 4, 684–694 (in Russian).
86. A. V. Manzhirov, "Ob odnom metode resheniya dvumernykh integral'nykh uravneniy osesimmetrichnykh kontaktnykh zadach dlya tel so slozhnoy reologiey" [On one method of solution for two-dimensional integral equations of axisymmetric contact problems for bodies with complex rheology], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1985, **49**, No. 6, 1019–1025 (in Russian).
87. V. A. Morozov, "Primenenie metoda regulyarizatsii k resheniyu odnoy nekorrektnoy zadachi" [Application of regularization method to solution of one ill-posed problem], *Vestn. MGU* [Bull. MSU], 1965, **1**, No. 4, 13–25 (in Russian).

88. G. Myuntts, *Integral'nye uravneniya. T. 1* [Integral Equations. Vol. 1], GTTI, Leningrad–Moscow, 1934 (in Russian).
89. A. M. Nakhushev, *Uravneniya matematicheskoy biologii* [Equations of Mathematical Biology], Vysshaya shkola, Moscow, 1995 (in Russian).
90. O. P. Okolelov, "K teorii dvumernykh integral'nykh uravneniy s chastnymi integralami" [To the theory of two-dimensional integral equations with partial integrals], Materials *6th Inter-Univ. Sci. Conf. Far East. Differ. and Integral Equ.*, Khabarovsk, 1967, **3**, 142–149 (in Russian).
91. O. P. Okolelov, "Issledovanie uravneniy s chastnymi integral'nymi operatorami" [Investigation of equations with partial integral operators], *PhD Thesis*, Irkutsk, 1967.
92. V. S. Pilidi, "Ob odnom klasse lineynykh operatornykh uravneniy" [On one class of linear operator equations], *Mat. analiz i ego prilozh.* [Math. Anal. Appl.], 1975, **7**, 34–42 (in Russian).
93. E. V. Frolova, "Ob odnom operatore mekhaniki sploshnykh sred" [On one operator of continuum mechanics], Proc. Conf. *Math. Modelling of Systems. Methods, Applications, and Means*, Voronezh, 1998, pp. 183–187 (in Russian).
94. E. V. Frolova, "Lineynye operatory s chastnymi integralami" [Linear operators with partial integrals], *PhD Thesis*, Lipetsk, 2000.
95. J. Appell, E. V. Frolova, A. S. Kalitvin, and P. P. Zabrejko, "Partial integral operators on $C([a, b] \times [c, d])$," *Integr. Equ. Oper. Theory*, 1997, **27**, 125–140.
96. J. Appell, A. S. Kalitvin, and M. Z. Nashed, "On some partial integral equations arising in the mechanics of solids," *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, 1999, **79**, No. 2, 703–713.
97. J. Appell, A. S. Kalitvin, and P. P. Zabrejko, "Partial integral operators in Orlich spaces with mixed norms," *Collect. Math.*, 1998, **78**, No. 2, 293–306.
98. J. Appell, A. S. Kalitvin, P. P. Zabrejko, *Partial integral operators and integro-differential equations*, Marcel Dekker, New York—Basel, 2000.
99. S. Fenyö, "Beiträge zur Theorie der linearen partiellen Integralgleichungen," *Publ. Math.*, 1955, **4**, No. 1, 98–103.
100. E. V. Frolova, A. S. Kalitvin, and P. P. Zabrejko, "Operator-functions with partial integrals on C and L_p," *J. Electrotech. Math. Pristina*, 2001, **6**, 29–50.
101. T. Ichinose, "Operational calculus for tensor products of linear operators in Banach spaces," *Hokkaido Math. J.*, 1975, **4**, 306–334.
102. T. Ichinose, "Spectral properties of tensor products of linear operators. I," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1978, **235**, 75–113.
103. T. Ichinose, "Spectral properties of tensor products of linear operators. II," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1978, **237**, 223–254.
104. A. S. Kalitvin, "Spectral properties of partial integral operators of Volterra and Volterra—Fredholm type," *Z. Anal. Anwend.*, 1998, **17**, No. 2, 297–309.
105. A. S. Kalitvin, "On a class of integral equations in the space of continuous functions," *Differ. Equ.*, 2006, **42**, No. 9, 1262–1268.
106. A. S. Kalitvin and P. P. Zabrejko, "On the theory of partial integral operators," *J. Integral Equ. Appl.*, 1991, **3**, No. 3, 351–382.
107. S. Kantorovitz, "A note on partial linear integral equations," *Bull. Res. Council Israel*, 1957, **7**, No. 4, 181–186.
108. S. Kantorovitz, "On the integral equation $\varphi(x, y) - \lambda a(x, y) \int \varphi(x, y)dx - \mu b(x, y) \int \varphi(x, y)dy = c(x, y)$," *Riveon le Matematika*, 1958, **12**, 24–26.
109. P. Mauro, "Su un'equazione integrale lineare di tipo non ancora considerato," *Rend. Accad. Naz. Sci. XL*, 1976, **5**, No. 1, 55–59.
110. A. Salam, "Fredholm solution of partial integral equations," *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1953, **49**, 213–217.
111. V. Volterra, *Lecons sur les equations integrales et les equations integro-differentielles*, Gauthier-Villars, Paris, 1913.

A. S. Kalitvin
Lipetsk State Pedagogical University, Lipetsk, Russia
E-mail: `kalitvinas@mail.ru`

V. A. Kalitvin
Lipetsk State Pedagogical University, Lipetsk, Russia
E-mail: `kalitvin@mail.ru`