Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 3 (2019). С. 339–389

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-3-339-389 УДК 517.9

УМНОЖЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ И АЛГЕБРЫ МНЕМОФУНКЦИЙ

© 2019 г. **А. Б. АНТОНЕВИЧ, Т. Г. ШАГОВА**

Аннотация. Работа посвящена обсуждению методов и подходов, связанных с приданием смысла произведению обобщенных функций, которое в общем случае не определено в классической теории. Показано, что в основе проблемы лежит незамыкаемость в пространстве распределений оператора умножения на гладкую функцию. Изложен общий метод построения новых объектов, называемых новыми обобщенными функциями, или мнемофункциями, которые сохраняют основные свойства обычных обобщенных функций и при этом образуют алгебры. Описаны различные способы вложения пространств распределений в алгебры мнемофункций. Все идеи и рассуждения проиллюстрированы на наиболее простом примере пространства обобщенных функций на окружности. Некоторые эффекты, возникающие при исследовании уравнений с обобщенными коэффициентами, продемонстрированы на примере линейного дифференциального уравнения первого порядка.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Создание теории обобщенных функций (распределений) позволило решить многие задачи математической физики и теории линейных дифференциальных уравнений с гладкими коэффициентами [7, 10, 11, 38]. Однако в рамках этой классической теории невозможно задать произведение произвольных распределений, что является препятствием для приложений к уравнениям с обобщенными коэффициентами и нелинейным задачам. В связи с этим разрабатывались различные подходы к решению задачи умножения распределений (В. К. Иванов [18], Б. Дамянов и Х. Христов [27–30], С. Т. Завалищин и А. Н. Сесекин [17], Э. Розингер [37]). Наибольший резонанс в этом направлении вызвали работы французского математика Ж. Ф. Коломбо [31, 32]. Модификация этой конструкции была предложена Ю. В. Егоровым в работе [15], содержащей довольно подробную историю вопроса. Общий подход заключается во введении (для заданного пространства распределений) новых объектов, сохраняющих ряд свойств распределений и образующих алгебры, т. е. допускающих корректно заданное умножение. Эти объекты называют *новыми обобщенными функциями*, *мнемофункциями*, или *нелинейными обобщенными функциями*. На основе анализа предшествующих конструкций в работах [2, 25] был описан общий метод построения таких алгебр. Истории вопроса и дальнейшему развитию теории таких алгебр и их приложений посвящена обширная литература (см., например, [21, 26, 33, 35, 36]), сделать обзор которой не представляется возможным.

Целью данной работы является только обсуждение методов, связанных с приданием смысла произведению обобщенных функций из заданного пространства. Для конкретности общие рассуждения иллюстрируются на одном из наиболее простых примеров — пространстве распределений на окружности. Изложенный подход применим и для более сложных пространств распределений.

2. Пространство распределений на прямой

Напомним сначала определение пространства обобщенных функций (распределений) на прямой. *Пространство основных функций* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ состоит из бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций φ с компактным носителем, т. е. таких, что $\varphi(x) = 0$ при $|x| > C_\varphi$. В этом пространстве вводится сходимость: последовательность φ_n сходится к нулевой функции, если

i) существует C_0, при котором для всех n выполнено $\varphi_n(x) = 0$ при $|x| > C_0$;

ii) последовательность $\varphi_n^{(j)}(x)$ производных порядка j равномерно сходится к нулю для любого $j = 0, 1, \ldots$.

Существует топология τ на $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, сходимость в которой совпадает с введенной, но эта топология описывается достаточно сложно, в связи с чем обычно используется только понятие сходимости в указанном пространстве. Функции из пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ называют *основными*, или *пробными*.

Линейный функционал f на пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ называется *непрерывным*, если $f(\varphi_n) \to 0$ для любой последовательности φ_n, сходящейся к нулю в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Для значений таких функционалов обычно используется обозначение $f(\varphi_n) :=< f, \varphi_n >$.

Пространство, сопряженное к $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, т. е. множество $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, называется *пространством распределений* (*обобщенных функций*) на $\mathbb{R}$. В этом пространстве вводится *слабая сходимость*: последовательность распределений f_n сходится к распределению f_0, если

$$< f_n, \varphi > \to < f_0, \varphi > \text{ для любого } \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

В пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ задано *дифференцирование* по формуле $< f', \varphi > := - < f, \varphi' >$ и определено *умножение* $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ на любую функцию $g \in C^\infty(\mathbb{R})$: $< gf, \varphi > = < f, g\varphi >$.

Если u — локально интегрируемая функция, то формула

$$< f_u, \varphi > = \int u(x)\varphi(x)dx \tag{2.1}$$

задает распределение, при этом если u отлична от нуля на множестве положительной меры, то $f_u \neq 0$. Из этого следует, что пространство $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ вкладывается в пространство распределений. Распределение, представимое в виде (2.1), называется *регулярным*.

Одно из замечательных свойств пространства обобщенных функций заключается в том, что у любого распределения, в том числе у локально интегрируемой функции, существуют производные любого порядка, являющиеся обобщенными функциями.

Примером нерегулярного распределения (их называют *сингулярными*) служит дельта-функция Дирака — функционал $< \delta_0, \varphi > = \varphi(0)$, который является производной в смысле обобщенных функций разрывной функции Хевисайда

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Функция $\dfrac{1}{x}$ не является локально интегрируемой, но ей можно поставить в соответствие целое семейство (нерегулярных) распределений, которые задаются следующим образом. Функция $g(x) = \ln|x|$ дифференцируема при $x \neq 0$ и $g'(x) = \dfrac{1}{x}$. Поскольку g локально интегрируема, ей соответствует регулярное распределение $f_g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. По определению, $\mathcal{P}\Big(\dfrac{1}{x}\Big) = f'_g$, где дифференцирование понимается в смысле распределений.

Функция $g_C(x) = \ln|x| + C\Theta(x)$ дифференцируема при $x \neq 0$ и ее производная также есть $\dfrac{1}{x}$ при $x \neq 0$. Производная в смысле обобщенных функций функции $g_C(x)$ есть

$$\mathcal{P}\Big(\frac{1}{x}\Big) + C\delta_0. \tag{2.2}$$

Таким образом, функции $\dfrac{1}{x}$ соответствует семейство распределений (2.2).

Введение обобщенных функций как функционалов на пространстве основных функций является не только удачным математическим приемом, но имеет и физический смысл. Например, состояние физической системы часто описывается с помощью интегрируемой функции $\rho(x)$ — плотности распределения числовой характеристики вещества (массы, заряда, энергии, температуры и т. п.). Заметим, что не существует физического прибора, который измерял бы значение $\rho(x)$ в заданной точке, реальные приборы измеряют только усредненные значения, которые в случае существования плотности выражаются формулой вида

$$\int \rho(x)\varphi(x)dx,$$

где функция φ характеризует конкретный прибор (*приборная функция*). Таким образом, величины, которые могут быть измерены (только они имеют физический смысл!), являются значениями функционала, соответствующего функции $\rho(x)$. Если у распределения вещества плотность не существует, то такие величины все равно определены для всех φ и задают функционал на пространстве приборных функций.

3. Проблема умножения распределений

Введенное выше умножение не определено для произвольных распределений, в частности, это означает, что пространство $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ не является дифференциальной алгеброй. Напомним, что векторное пространство G называется *дифференциальной алгеброй*, если

- задано ассоциативное и коммутативное умножение;
- задано линейное отображение $G \ni f \to f' \in G$, называемое *дифференцированием*;
- эти операции связаны соотношением $(fg)' = f'g + fg'$.

Поскольку пространство распределений есть расширение пространства обычных функций, построенное так, чтобы в нем операция дифференцирования была всюду определена, Л. Шварц поставил вопрос о следующем шаге обобщения: *построить расширение пространства распределений до дифференциальной алгебры, в которой всюду определены дифференцирование и умножение.*

В первоначальном варианте задача была сформулирована Л. Шварцем следующим образом: построить дифференциальную алгебру G и линейное вложение

$$R : \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \to G$$

такие, что дифференцирование и умножение в пространстве распределений переходят в соответствующие операции в G, т. е. выполнены равенства

$$R(f') = [R(f)]', \tag{3.1}$$

$$R(af) = R(a)R(f) \text{ для } a \in C^\infty,\ f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{3.2}$$

Если такая алгебра G построена, то можно определить произведение произвольных распределений как элемент из G:

$$f \otimes g := R(f)R(g) \in G, \quad f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Но при рассмотрении этой задачи Л. Шварц заметил, что введенное умножение неассоциативно [39]. Им был приведен пример выражения

$$\mathcal{P}\Big(\frac{1}{x}\Big) \times x \times \delta_0,$$

которое принимает разные значения при разной расстановке скобок. А именно,

$$\Big[\mathcal{P}\Big(\frac{1}{x}\Big) \times x\Big] \times \delta_0 = 1 \times \delta_0 = \delta_0,$$

но при этом

$$\mathcal{P}\Big(\frac{1}{x}\Big) \times \big[x \times \delta_0\big] = \mathcal{P}\Big(\frac{1}{x}\Big) \times 0 = 0.$$

Из этого примера следует, что невозможно задать ассоциативную и коммутативную операцию умножения на всем пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ и, более того, нельзя вложить это пространство в какую-либо коммутативную и ассоциативную алгебру G таким образом, чтобы выполнялись свойства (3.1) и (3.2).

Вместе с тем формальные выражения, в которые входят произведения распределений, встречаются во многих прикладных задачах, в связи с чем вопрос о нахождении произведения распределений рассматривался многими специалистами.

Отправная точка почти всех исследований в этом направлении следующая. Распределение f может быть аппроксимировано семейством гладких функций f_ε. Для распределений на прямой наиболее часто используется следующий метод аппроксимации. Пусть $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и $\int\limits_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 1$. Тогда семейство

$$\psi_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\psi\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big) \tag{3.3}$$

сходится к δ_0 и носители функций ψ_ε стягиваются к точке 0. Пусть

$$T_x\psi_\varepsilon(t) = \psi_\varepsilon(t-x).$$

Тогда

$$f_\varepsilon(x) = < f, T_x\psi_\varepsilon > \tag{3.4}$$

есть семейство гладких функций, сходящееся к f при $\varepsilon \to 0$.

Заметим, что иногда оказывается более удобным вместо семейств гладких функций $f_\varepsilon(x)$, зависящих от непрерывно меняющегося положительного малого параметра ε, рассматривать последовательности $\{f_n\}$ таких функций. Приведенные ниже утверждения справедливы и для этого случая, если считать, что малый параметр принимает только значения $\dfrac{1}{n}$.

Пусть $f_\varepsilon(x)$ есть некоторое семейство гладких функций, сходящихся к распределению f, и $g_\varepsilon(x)$ — аналогичное семейство для распределения g. Естественно определить произведение распределений как предел в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ соответствующих произведений:

$$f \times g := \lim_{n\to\infty} f_\varepsilon g_\varepsilon. \tag{3.5}$$

Но такое определение некорректно по двум причинам:

i) такой предел зависит от выбора аппроксимирующих семейств;
ii) может оказаться, что предел не существует.

Приведем примеры, иллюстрирующие сказанное.

Пример 3.1. В пространстве распределений имеем $e^{inx} \to 0, \quad e^{-inx} \to 0$, причем сходимость к нулю очень быстрая: последовательность $< e^{inx}, \varphi >$ убывает быстрее любой степени $1/n$. Но при этом $e^{inx}e^{-inx} = 1 \to 1$. Тогда, согласно формуле (3.5), получаем, что $0 \times 0 = 1$, что абсурдно.

Пример 3.2. Рассмотрим, что может соответствовать при аппроксимативном подходе произведению $\delta\Theta$, не определенному в классической теории.

Заменим δ-функцию на ее аппроксимацию вида (3.3), а Θ-функцию на $\Gamma_\varepsilon(x) = \Gamma\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$, где

$$\Gamma(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \gamma(s)ds, \quad \gamma \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \int\limits_{\mathbb{R}} \gamma(t)dt = 1.$$

Тогда произведение $\psi_\varepsilon(x)\Gamma_\varepsilon(x)$ в пространстве распределений сходится к $C\delta$, где постоянная

$$C = \int\limits_{\mathbb{R}} \psi(x)\Gamma(x)dx$$

зависит от ψ и γ, т. е. от выбранных аппроксимаций.

Пример 3.3. Семейство (3.3) сходится к дельта-функции, но квадраты этих функций

$$[\psi_\varepsilon(t)]^2 = \frac{1}{\varepsilon^2}\Big[\psi\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)\Big]^2$$

не имеют предела в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, т. е. в этом пространстве нет элемента, который бы играл роль квадрата дельта-функции, откуда можно сделать вывод, что такой квадрат может быть только элементом некоторого более широкого пространства.

Препятствия к введению всюду определенного произведения распределений заключаются в сформулированных выше свойствах i) и ii).

Свойство i) отражает то, что операция умножения (на своей области определения) является разрывным и даже незамыкаемым отображением в топологии пространства распределений, а свойство ii) показывает, что пространство, в котором могут лежать произведения распределений, должно быть шире, чем исходное пространство.

4. Замыкание незамыкаемых операторов

4.1. Расширения линейных операторов. Чтобы проанализировать указанные выше препятствия, рассмотрим сначала частный случай задачи, а именно вопрос об определении умножения распределений на некоторое заданное распределение u, и обсудим связи этой задачи с вопросами общей теории операторов.

Умножение на u есть линейный оператор U, определенный на всюду плотном подпространстве $C^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$, состоящем из гладких функций. Задача о задании произведения uv для некоторых распределений v, не являющихся гладкими функциями, есть задача о построении расширения этого оператора, т. е. задании его продолжения на более широкое подпространство.

Вопрос о построении расширений линейных операторов является одним из классических. В общей постановке он заключается в следующем. Пусть X есть топологическое векторное пространство, X_0 — его векторное подпространство, и задан линейный оператор A, действующий из X_0 в некоторое пространство Y. Требуется построить его продолжение на более широкое подпространство (или на все X).

Напомним сначала известные факты о построении таких расширений, для примера будем рассматривать операторы в банаховых пространствах, но рассуждения полностью аналогичны в случае локально выпуклых топологических векторных пространств.

Заметим, что одним из частных случаев рассматриваемой задачи является вопрос о продолжении линейного ограниченного функционала $f_0 : X_0 \to \mathbb{C}$, т. е. случай, когда $Y = \mathbb{C}$. Согласно теореме Хана—Банаха, для любого f_0 существует линейный ограниченный функционал f, являющийся продолжением f_0 на все пространство X.

Заметим, что если подпространство X_0 не является всюду плотным, то даже для линейных ограниченных операторов ответ в общем случае отрицательный — может не существовать ограниченного продолжения на все X. Но в случае, когда X_0 всюду плотно в X, пространство Y банахово и оператор A ограничен, задача тривиальна — существует и при том единственное продолжение оператора на все X, которое может быть задано следующим образом.

Для любого $x_0 \in X$ существует последовательность $x_n \in X_0$, сходящаяся к x_0, для любой такой последовательности существует предел последовательности образов Ax_n, который не зависит от выбора x_n. Это позволяет определить продолжение на все X

$$\widetilde{A}x_0 = \lim_{n\to\infty} Ax_n, \tag{4.1}$$

которое является линейным ограниченным оператором из X в Y.

В интересующем нас случае рассматриваемый линейный оператор разрывен и определен на всюду плотном подпространстве X_0. Обозначим через X_1 множество таких $x_0 \in X$, что имеется хотя бы одна последовательность $x_n \in X_0$, такая, что $x_n \to x_0$ и при этом существует $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n$. Кажется естественным задать значение искомого расширения в точке x_0 формулой (4.1), но в общем случае такое определение некорректно, так как правая часть может зависеть от выбора последовательности. Оператор, у которого такой предел не зависит от выбора последовательности, называется *замыкаемым*. Свойство замыкаемости оператора обычно формулируется как условие, что из того, что $x_n \to 0$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = y$, следует, что $y = 0$. При выполнении этого условия формула (4.1) определяет оператор $\overline{A}$, корректно заданный на X_1, называемый *замыканием* оператора A. На X_1 определена т. н. *норма графика*

$$\|x\|_1 = \|x\| + \|\overline{A}x\|,$$

относительно которой пространство X_1 полно.

Пример 4.1. Типичным примером такой конструкции является определение т. н. *сильной производной*. Пусть $X = Y = L_1[0,1]$, и A есть оператор дифференцирования, определенный на $C^1[0,1] \subset L_1[0,1]$

$$(Ax)(t) = x'(t).$$

Говорят, что функция $u_0 \in L_1[0,1]$ *сильно дифференцируема*, если существует последовательность $u_n \in C^1[0,1]$, такая, что $u_n \to u_0$ в $L_1[0,1]$ и при этом в $L_1[0,1]$ существует $\lim u_n' := y$. Тогда функция y называется *сильной производной* функции u_0. Корректность этого определения следует из замыкаемости оператора дифференцирования (относительно рассматриваемых норм). Действительно, пусть $u_n \to 0$ и $\lim u_n' = y$ в $L_1[0,1]$. Из представления

$$u_n(x) - u_n(0) = \int\limits_0^x u_n'(s)ds \tag{4.2}$$

и сходимости последовательности u_n' в $L_1[0,1]$ получаем, что последовательность $u_n(x) - u_n(0)$ равномерно сходится. Поэтому она сходится в $L_1[0,1]$, а так как $u_n \to 0$ в $L_1[0,1]$, то последовательность постоянных функций $u_n(0)$ также сходится в $L_1[0,1]$, что возможно только, когда эта числовая последовательность сходится. Поэтому последовательность u_n также равномерно сходится и, следовательно, сходится к нулю. Мы имеем право перейти к пределу в (4.2), откуда получаем, что

$$\int\limits_0^x y(s)ds = 0 \ \ \forall\ x,$$

что возможно только в случае, когда $y(x) = 0$ почти всюду.

Таким образом, оператор сильного дифференцирования является замыканием классического оператора дифференцирования. Из сказанного выше получаем, что область определения этого замыкания состоит из функций, представимых в виде

$$u(x) = u(0) + \int\limits_0^x y(s)ds, \text{ где } y \in L_1[0,1],$$

т. е. из абсолютно непрерывных функций (С. Л. Соболев использовал для этого пространства обозначение $W_1^1[0,1]$).

Аналогично задается замыкание оператора дифференцирования в пространстве $L_2[0,1]$; область определения этого замыкания состоит из абсолютно непрерывных функций, представимых в виде

$$u(x) = u(0) + \int\limits_0^x y(s)ds, \text{ где } y \in L_2[0,1].$$

Это подпространство обозначается $W_2^1[0,1]$ или $H^1[0,1]$.

Пример 4.2. Рассмотрим в $L_1[0,1]$ уравнение с начальным условием:

$$u'(x) = f(x), \ u(0) = C.$$

Это вырожденный случай задачи Коши. Этой задаче соответствует оператор A с областью определения $C^1[0,1] \subset L_1[0,1]$, действующий в прямую сумму $Y = L_1[0,1] \oplus \mathbb{R}$ по формуле $Au = (u', u(0))$. Из приведенных выше рассуждений получаем, что этот оператор также замыкаем, область определения замыкания есть $W_1^1[0,1]$ и $\overline{A}u = (u', u(0))$, где u' есть сильная производная.

Пример 4.3. Пусть оператор A определен на $C^1[0,1] \subset L_1[0,1]$, действует в прямую сумму $Y = L_1[0,1] \oplus \mathbb{R}^2$ по формуле $Au = (u', u(0), u'(0))$. Этот оператор внешне похож на оператор из примера 4.2, но здесь картина качественно меняется. Действительно, последовательность

$$u_n(x) = \begin{cases} x(1-nx)^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1/n; \\ 0, & x > 1/n. \end{cases}$$

принадлежит области определения, сходится к нулю в $L_1[0,1]$, и при этом последовательность образов имеет ненулевой предел: $u'_n \to 0$ в $L_1[0,1]$, но $u'_n(0) = 1 \to 1$. Из этого следует, что рассматриваемый оператор незамыкаем.

4.2. Замыкание незамыкаемого оператора. В работе [24] был рассмотрен вопрос о том, *какой оператор может играть роль замыкания в случае незамыкаемого оператора*. Ответ естественный и по существу уже содержится в конструкции замыкания, если ее записать в несколько другом виде.

Первый шаг этой конструкции заключается в построении множества $\widetilde{G}$, состоящего из последовательностей $x_n \in X_0$, таких, что x_n сходится в X и последовательность образов Ax_n сходится в Y. Две последовательности x_n и $\widetilde{x}_n$ называются *эквивалентными*, если $x_n - \widetilde{x}_n \to 0$ и $A(x_n - \widetilde{x}_n) \to 0$. Пусть G есть пространство, состоящее из классов эквивалентных последовательностей из $\widetilde{G}$. На этом пространстве определен оператор $\overline{A} : G \to Y$, который ставит в соответствие классу эквивалентности элемент

$$G \ni \{x_n\} \mapsto \lim_{n\to\infty} Ax_n \in Y. \tag{4.3}$$

Второй шаг конструкции замыкания заключается в проверке того, что отображение

$$G \ni \{x_n\} \mapsto \lim_{n\to\infty} x_n \in X$$

устанавливает биекцию между G и некоторым подпространством X_1 в X.

Первый шаг этой конструкция применим к любому линейному оператору, так как он не использует замыкаемость.

Определение 4.1. *Замыканием* оператора A с областью определения $X_0 \subset X$ будем называть оператор, определенный на построенном пространстве G и действующий по формуле (4.3).

Для пояснения того, чем отличается случай замыкаемого оператора от случая незамыкаемого, напомним геометрический смысл описанной конструкции.

Пусть

$$G(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset X \oplus Y$$

есть график оператора. Тогда $\widetilde{G}$ есть множество всех лежащих в $G(A)$ последовательностей Коши в смысле нормы из $X \oplus Y$, а пространство G есть пополнение графика $G(A)$, которое, в силу полноты $X \oplus Y$, есть замыкание $\overline{G(A)}$. При этом действие оператора $\overline{A}$ есть проектирование P_Y на вторую координату.

Пусть X_1 есть проекция $\overline{G(A)}$ на X. Условие замыкаемости оператора эквивалентно тому, что замыкание графика является графиком некоторого оператора. Это значит, что проектирование на первую координату инъективно, что позволяет отождествить точку из $\overline{G(A)}$ с его первой проекцией, после чего получаем оператор, определенный на подпространстве X_1 в X.

В случае незамыкаемого оператора проектирование P_X на первую координату не является инъективным и возникает ненулевое подпространство

$$M = P_X^{-1}(0) = \{y \in Y : \exists x_n \in X_0, \text{ такая, что } x_n \to 0,\ Ax_n \to y\} \subset Y.$$

Будем называть его *мерой незамыкаемости* оператора A.

Тогда G представляется в виде прямой суммы $M \oplus X_1$, причем проектирование P_X задает на G структуру расслоенного пространства над X_1. Прообразом точки $x \in X_1$ здесь является множество

$$P_X^{-1}(x) = \{(x, \xi) : \xi \in M\},$$

которое не является векторным подпространством в G, но имеет естественную структуру векторного пространства, т. е. здесь имеем дело с векторным расслоением. Таким образом, построенный оператор $\overline{A}$ определен на элементах векторного расслоения G над X_1.

Пример 4.4. Замыкание оператора из примера 4.3. В этом примере оператор A определен на $C^1[0,1] \subset L_1[0,1]$, действует в прямую сумму $Y = L_1[0,1] \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ по формуле $Au = (u', u(0), u'(0))$. Мерой незамыкаемости этого оператора является одномерное подпространство $M = \{(0,0,\xi) \in L_1[0,1] \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\}$. Пространство $\widetilde{G}$ есть множество последовательностей $u_n \in C^1$, для каждой из которых существует четыре предела: двух функциональных последовательностей $u_n \to u_0$ и $u'_n \to y$ в $L_1[0,1]$ и пределы двух числовых последовательностей $u_n(0)$ и $u'_n(0)$.

Как показано в примере 4.2, из первых двух условий следует, что функция u_0 абсолютно непрерывна и $u_n(0) \to u_0(0)$. Особенность рассматриваемого случая заключается в том, что у предельной функции u_0 производная $u'_0(0)$ может не существовать и, даже если она существует, может быть, что последовательность $u'_n(0)$ не сходится к $u'_0(0)$.

Согласно общей конструкции, две последовательности из $\widetilde{G}$ называются *эквивалентными*, если для них все указанные выше пределы совпадают.

Обратим внимание на то, что возникающие здесь классы эквивалентности меньше, чем в примере 4.2, и каждый класс эквивалентности из примера 4.2 содержит много различных классов из рассматриваемого примера.

Полученный класс эквивалентности u состоит из последовательностей дифференцируемых функций u_n, сходящихся к абсолютно непрерывной функции u_0 специальным образом, он задается абсолютно непрерывной функцией u_0 и числом $\xi = \lim u'_n(0)$, которое можно интерпретировать как значение производной $u'(0)$. Таким образом, каждый класс эквивалентности, связанный с u_0, «помнит» о способе приближения u_n к u_0, а именно, сохраняет дополнительную информацию о поведении значений $u'_n(0)$. В этом примере пространство из классов эквивалентных последовательностей изоморфно пространству $W_1^1[0,1] \oplus \mathbb{R}$. При этом замыкание оператора действует по формуле, внешне выглядящей как формула для исходного оператора $\overline{A}u = (u', u(0), u'(0))$. Но здесь u' есть сильная производная, а значение $u'(0)$ определяется как $\lim u'_n(0)$.

Где может быть использовано это пространство? В классических функциональных пространствах переопределенная задача Коши

$$u'(x) = f(x),\ u(0) = C_0,\ u'(0) = C_1, \tag{4.4}$$

неразрешима для произвольной функции $f \in L_1[0,1]$. А во введенном пространстве G задача (4.4) имеет решение, и притом единственное, для любого $f \in L_1[0,1]$.

Аналогичное пространство может быть построено с помощью семейств функций, зависящих от малого параметра ε. Такие семейства естественно возникают при рассмотрении т. н. сингулярно возмущенных задач. Простейший пример — задача Коши

$$\varepsilon u''(x) + u'(x) = f(x),\ u(0) = C_0,\ u'(0) = C_1 \tag{4.5}$$

для уравнения с малым параметром при второй производной.

Пусть u_ε — решения задачи (4.5), а v_ε — решения аналогичной задачи

$$\varepsilon v''(x) + v'(x) = f(x),\ v(0) = C_0,\ v'(0) = C_2.$$

Оба эти семейства сходятся к одной и той же абсолютно непрерывной функции u_0, являющейся решением задачи Коши

$$u'_0(x) = f(x),\ u_0(0) = C_0, \tag{4.6}$$

но их не следует отождествлять между собой, так как они по-разному приближаются к u_0 и каждое из них содержит некоторую дополнительную информацию о способе приближения: $u'_\varepsilon(0) = C_1$, а $v'_\varepsilon(0) = C_2$. Это и означает, что решениями задачи (4.5) естественно считать элементы из построенного расширенного пространства, изоморфного $W_1^1[0,1] \oplus \mathbb{R}$.

Пример 4.5. Связь пополнений пространства по двум нормам. В качестве еще одного примера рассмотрим классический вопрос, при анализе которого возникают аналогичные эффекты.

Пусть на векторном пространстве X_0 заданы две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$. Вопрос заключается в описании соотношений между соответствующими пополнениями X_1 и X_2. Если нормы эквивалентны, т. е. при некоторых постоянных выполнены неравенства $\|x\|_1 \leqslant C_1\|x\|_2, \|x\|_2 \leqslant C_2\|x\|_1$, то $X_1 = X_2$ — пополнения совпадают как векторные пространства.

Часто встречается случай, когда выполнено только одно неравенство: $\|x\|_1 \leqslant C\|x\|_2$. Во многих примерах оказывается, что при этом условии имеет место естественное вложение X_2 в X_1. Например, пусть $X_0 = C^1[0,1]$ и

$$\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)|dt, \ \|x\|_2 = \int_0^1 |x(t)|dt + \int_0^1 |x'(t)|dt.$$

Здесь пополнение по первой норме есть $X_1 = L_1[0,1]$, пополнение по второй норме X_2 фактически было рассмотрено в примере 4.1, это пополнение есть пространство $W_1^1[0,1]$, состоящее из абсолютно непрерывных функций, и здесь $W_1^1[0,1] \subset L_1[0,1]$.

Однако обратим внимание на то, что в общем случае нет вложения X_2 в X_1. Для примера рассмотрим на $X_0 = C^1[0,1]$ нормы

$$\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)|dt, \quad \|x\|_2 = \int_0^1 |x(t)|dt + |x(0)|.$$

Здесь имеем другое соотношение пространств: пополнение X_1 есть, как и выше, $L_1[0,1]$, а пополнение X_2 изоморфно $L_1[0,1] \oplus \mathbb{C}$, и оно шире, чем X_1, в отличие от предыдущего примера.

За счет чего возникает такое отличие? Элементы из пополнения X_2 суть классы эквивалентности последовательностей Коши в смысле второй нормы. Если (x_n) есть такая последовательность Коши из класса, задающего элемент $x \in X_2$, то из заданного неравенства следует, что она является последовательностью Коши относительно первой нормы и определяет элемент из пополнения X_1. Тем самым определено непрерывное отображение

$$J : X_2 \ni x \to \lim_{n\to\infty} x_n \in X_1.$$

Но это отображение может не быть инъективным, т. е. может не быть вложением X_2 в X_1. Для инъективности нужно дополнительное условие *согласования норм*: *если* $\|x_n\|_1 \to 0$ *и* x_n *есть последовательность Коши в смысле второй нормы, то* $\|x_n\|_2 \to 0$.

Связь с задачей о замыкании оператора заключается в следующем. Тождественное отображение $J_0x = x$ пространства X_0 будем рассматривать как отображение нормированного пространства $(X_0, \|x\|_2) \subset X_2$ в нормированное пространство $(X_0, \|x\|_1) \subset X_1$. Поскольку J_0 есть ограниченный линейный оператор, отображение J есть его замыкание, определенное на всем X_2. Но обратное отображение J_0^{-1}, действующее из $(X_0, \|x\|_1)$ в $(X_0, \|x\|_2)$, может быть незамыкаемым оператором. Согласование норм есть в точности условие замыкаемости этого оператора.

В общем случае, когда условие согласования норм не выполнено, получаем, что отображение J имеет ненулевое ядро M, поэтому X_2 не изоморфно своему образу $\widehat{X_2} = J(X_2) \subset X_1$, а представляется в виде векторного расслоения: $X_2 = \widehat{X_2} \oplus M$.

4.3. Расширенное замыкание линейного оператора. Вернемся к задаче о расширении оператора U умножения на заданное распределение u. Из свойства ii) раздела 3 получаем, что этот оператор незамыкаем, его мера незамыкаемости есть некоторое ненулевое подпространство $M_u \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Его замыкание $\overline{U}$ в смысле определения 4.1 есть оператор, заданный на некотором векторном расслоении $G_u = M_u \oplus X_1$ над подпространством $X_1 \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

При этом остается открытым вопрос о том, как задать расширение оператора U на распределениях, не принадлежащих X_1. Этот вопрос приводит к еще одному обобщению конструкции замыкания.

При построении замыкания оператора A рассматривалось векторное пространство $\widetilde{G}$, состоящее из последовательностей $x_n \in X_0$, таких, что x_n сходится в X и последовательность образов Ax_n сходится в Y. При этом две последовательности считались эквивалентными, если $x_n - \widetilde{x}_n \to 0$ и $A(x_n - \widetilde{x}_n) \to 0$. Искомое обобщение получаем, если отказаться от требования существования предела последовательности образов Ax_n.

Рассмотрим векторное пространство $\widehat{G}$, состоящее из всех последовательностей (x_n, Ax_n) точек графика $G(A)$, таких, что x_n сходится в X. Пусть $\widehat{G}_0$ есть подпространство в $\widehat{G}$, состоящее из последовательностей, таких, что $x_n \to 0$ и $Ax_n \to 0$, и рассмотрим фактор-пространство $\widehat{G}^* = \widehat{G}/\widehat{G}_0$.

Здесь переход к фактор-пространству равносилен введению того же отношения эквивалентности, что и выше: $(x_n, Ax_n) \sim (\widetilde{x}_n, A\widetilde{x}_n)$, если $x_n - \widetilde{x}_n \to 0$ и $A(x_n - \widetilde{x}_n) \to 0$.

Пусть $\widehat{Y}$ есть пространство всех последовательностей (y_n) в Y, и пусть

$$Y^* = \widehat{Y}/\widehat{Y}_0, \text{ где } \widehat{Y}_0 = \{(y_n) \in Y : y_n \to 0\}.$$

Заметим, что Y^* является расширением исходного пространства Y, т. к. последнее естественно вкладывается в Y^*: точке $y \in Y$ ставится в соответствие класс эквивалентности, состоящий из последовательностей, сходящихся к y. После введения этих пространств определяем оператор $\widehat{A}$, действующий из $\widehat{G}^*$ в Y^* по формуле

$$\widehat{A}([(x_n, Ax_n)]) = [(Ax_n)] \in Y^*. \tag{4.7}$$

Аналогично предыдущему, здесь $\widehat{G}^*$ изоморфно $X \oplus M$, и это пространство будем рассматривать как векторное расслоение над X.

Определение 4.2. *Расширенным замыканием оператора* A будем называть оператор $\widehat{A}$, определенный на векторном расслоении $\widehat{G}^*$ над X и действующий в расширенное пространство Y^* по формуле (4.7).

Заметим, что по построению $G \subset \widehat{G}^*$ оператор $\overline{A}$ отображает G в $Y \subset Y^*$, и на G его действие совпадает с действием $\widehat{A}$, т. е. последний оператор является расширением $\overline{A}$.

Подводя итог сказанному, видим, что в случае незамыкаемого оператора A, действующего из X в Y, расширенное замыкание действует в новых пространствах, которые возникают в результате построений двух типов:

1. *дробление исходного пространства* X — каждая точка $x \in X$ распадается на обширное семейство новых элементов (слои над x);
2. *добавление новых элементов* к финальному пространству Y.

Обратим внимание на то, что аналогичные операции использовались уже при переходе от обычных функций к обобщенным, т. к. кроме добавления новых элементов (сингулярных распределений), происходило и дробление — функции $\dfrac{1}{x}$ соответствует не одно распределение, а целое семейство.

Замечание 4.1. С точки зрения приложений естественность введения новых пространств при построении замыкания оператора можно интерпретировать следующим образом. Пусть изучается некоторое воздействие на систему. В первоначальной модели явления считается, что состояния системы описываются элементами из пространства X, а результаты воздействия описываются элементами пространства Y, а именно, для некоторых «простых» состояний (из подпространства $X_0 = D(A)$) задан оператор A, описывающий результат воздействия на систему: при состоянии x в результате получаем на выходе $Ax \in Y$.

Задача заключается в описании результата воздействия для более сложных состояний системы. Ситуация, когда переход к замыканию графика приводит к многозначному оператору, соответствует тому, что в исходной постановке задачи недостаточно информации для получения однозначного ответа о реакции системы, находящейся в более сложном состоянии. Конструкция замыкания в новом смысле подсказывает выход: для получения однозначного результата нужна дополнительная информация о рассматриваемом более сложном состоянии, соответствующем точке $x_0 \in X$, а именно, о том, как это состояние возникло из простых. Иначе говоря, для рассматриваемых систем требуется уточнение постановки задачи — состояние описывается специально построенным классом эквивалентных последовательностей $x_n \in D(A)$ и не определяется однозначно по предельной точке $x_0 \in X$.

С этой точки зрения переход к расширению $\widehat{Y}$ пространства Y требуется в ситуации, когда для системы, находящейся в состоянии $x_0 \in X$, последовательность Ax_n не сходится в Y, т. е. результат эксперимента не описывается элементом первоначально выбранного пространства Y.

4.4. Нестандартное расширение поля $\mathbb{R}$. Обратим внимание на то, что описанные выше конструкции аналогичны построениям из *нестандартного анализа*, который имеет содержательные применения во многих задачах [13]. Напомним описание одного из нестандартных расширений поля $\mathbb{R}$.

Пусть $\widehat{\mathbb{R}}$ есть пространство всех последовательностей (y_n) в $\mathbb{R}$. Доказывается, что на множестве $\mathbb{N}$ существует (конечно-аддитивная) мера μ, определенная на алгебре всех подмножеств из $\mathbb{N}$, такая, что для всех $\omega \subset \mathbb{N}$ значение $\mu(\omega)$ есть 0 или 1, причем $\mu(\omega) = 0$ для любого конечного ω. Пусть $\widehat{\mathbb{R}}_0 \subset \widehat{\mathbb{R}}$ есть подпространство, состоящее из последовательностей, равных нулю почти всюду по мере μ. Нестандартное расширение $\mathbb{R}$ есть фактор-пространство

$$\mathbb{R}^* = \widehat{\mathbb{R}}/\widehat{\mathbb{R}}_0.$$

Эта конструкция может быть описана в других терминах. Пространство $\widehat{\mathbb{R}}$ имеет естественную структуру алгебры, $\widehat{\mathbb{R}}_0$ есть один из ее максимальных идеалов, содержащих все финитные последовательности, поэтому $\mathbb{R}^*$ есть фактор-алгебра по максимальному идеалу.

Оказывается, что построенное пространство $\mathbb{R}^*$ является полем: если $[(y_n)] \neq 0$, то $\mu(\{n : y_n \neq 0\}) = 1$, и тогда последовательность

$$z_n = \begin{cases} \dfrac{1}{y_n}, & y_n \neq 0; \\ 0, & y_n = 0, \end{cases}$$

задает элемент, обратный к $[(y_n)]$.

Далее на множестве классов эквивалентности задается отношение порядка:

$$[(x_n)] \prec [(y_n)], \text{ если } \quad x_n \leqslant y_n \text{ почти всюду.}$$

Этот порядок линейный: если $\mu(\{n : x_n \leqslant y_n\}) = 1$, то $[(x_n)] \prec [(y_n)]$; в противном случае $\mu(\{n : x_n \leqslant y_n\}) = 0$, и тогда $[(y_n)] \prec [(x_n)]$.

Элемент $\gamma \in \mathbb{R}^*$ называется *бесконечно малым*, если $-a \prec \gamma \prec a$ для любого положительного $a \in \mathbb{R}$. С каждым числом $x \in \mathbb{R}$ связана т. н. *монада* — множество нестандартных чисел, отличающихся от x на бесконечно малую величину.

Элемент $\Gamma \in \mathbb{R}^*$ называется *бесконечно большим*, если $a \prec |\Gamma|$ для любого $a \in \mathbb{R}$.

Обычной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ставится в соответствие ее *нестандартное расширение* $f^* : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, действующее по формуле, аналогичной (4.7):

$$f^*([(x_n)]) = [(f(x_n))].$$

Таким образом, при построении нестандартного анализа при переходе от $\mathbb{R}$ к $\mathbb{R}^*$ использованы операции, аналогичные описанным выше: дробление точек из $\mathbb{R}$ с помощью введения бесконечно малых величин и добавление бесконечно больших величин. А переход от функции к ее нестандартному расширению соответствует переходу от оператора к его расширенному замыканию.

5. Алгебры мнемофункций

Оператор умножения на заданное распределение действует из пространства распределений в себя, т.е здесь $X = Y$ в обозначениях предыдущего раздела. Так как естественно потребовать, чтобы расширенное замыкание такого оператора также действовало из некоторого нового пространства Z в себя, построение Z требует операций двух видов: дробление элементов исходного пространства и его расширения путем добавления качественно новых элементов. Как показано ниже, именно это происходит при построении алгебр мнемофункций.

Согласно постановке задачи, данной Л. Шварцем, решением проблемы умножения элементов из заданного пространства распределений E можно считать расширение E до дифференциальной алгебры, т. е. построение дифференциальной алгебры $G(E)$ и вложения $R : E \to G(E)$.

При этом пример Шварца показывает, что не существует вложений, удовлетворяющих условиям (3.1) и (3.2). Поэтому строились алгебры и вложения, обладающие более слабыми свойствами. Наибольший резонанс в этом направлении вызвали работы Ж. Ф. Коломбо [31], который построил дифференциальную алгебру и вложение, при котором ослабление (3.2) заключается в том, что только гладкие функции вкладываются вместе со своим умножением:

$$R(fg) = R(f)R(g) \text{ для } f \in C^\infty,\ g \in C^\infty. \tag{5.1}$$

Одна из наиболее широких и простых алгебр указанного типа была построена Ю. В. Егоровым [31].

Это направление исследований называют *нелинейной теорией обобщенных функций*, построенные дифференциальные алгебры — *алгебрами типа Коломбо*, а их элементы — *новыми обобщенными функциями*, или *мнемофункциями*.

В [2,25] были проанализированы методы построения искомых алгебр и предложена общая схема их построения, описанная ниже.

Обычно существует много различных вложений R, каждое из них позволяет определить произведение произвольных распределений как мнемофункцию: по определению считается, что

$$u \otimes_R v = R(u)R(v) \in G(E). \tag{5.2}$$

Поскольку условие (3.2) не может быть выполнено, т. е. умножение, заданное (5.2), не может совпадать с введенным выше умножением распределения на гладкую функцию, при таком подходе операция умножения корректируется — изменяется так, что становится ассоциативной.

В основе конструкции искомых дифференциальных алгебр лежат семейства гладких функций, зависящие от малого параметра ε. Каждое классическое пространство распределений E содержит некоторое подпространство $\mathcal{E}$, состоящее из бесконечно дифференцируемых функций, причем это подпространство является дифференциальной алгеброй.

Способом аппроксимации R называется семейство операторов $R_\varepsilon : E \to \mathcal{E}$, такое, что семейство гладких функций $f_\varepsilon = R_\varepsilon f$ сходится к f в E.

При заданном R множество всех семейств гладких функций $R(E) = \{f_\varepsilon = R_\varepsilon f : f \in E\}$ не является алгеброй. Поэтому первый шаг построения заключается в выборе дифференциальной алгебры $\widetilde{G(E)}$, состоящей из семейств гладких функций $f_\varepsilon \in \mathcal{E}$ и включающей множества вида $R(E)$, соответствующие некоторым «естественным» методам аппроксимации.

Пространство $\widetilde{G(E)}$ весьма обширно, поэтому искомая алгебра мнемофункций $G(E)$ определяется как фактор-алгебра $G(E) = \widetilde{G(E)}/J$, где J — идеал в $\widetilde{G(E)}$, инвариантный относительно дифференцирования.

Основная сложность заключается в выборе идеала J. Метод аппроксимации R задает отображение $E \ni u \to [(R_\varepsilon u)] \in G(E)$, но чтобы оно было вложением, нужно, чтобы из равенства классов эквивалентности $[(R_\varepsilon u)] = [(R_\varepsilon v)]$ следовало, что $u = v$. Рассмотрим подпространство

$$N = \{(f_\varepsilon) \in \widetilde{G(E)} : f_\varepsilon \to 0 \ \text{ в } \ E\}.$$

Если $J \subset N$, то $R_\varepsilon u - R_\varepsilon v \in N$, откуда

$$u = \lim R_\varepsilon u = \lim R_\varepsilon v = v.$$

Полученное условие $J \subset N$ есть ограничение сверху, которое означает, что идеал не должен быть очень большим. Заметим, что N не является идеалом, поэтому всегда $J \neq N$. Именно это отличие приводит к распаду распределения из исходного пространства на целое семейство элементов нового типа (мнемофункций), устроенное как фактор-пространство N/J.

Далее особый интерес представляют вложения, обладающие дополнительными свойствами (свойства вложений обсуждаются ниже). Выполнение этих свойств сводится к требованию, что идеал содержит некоторые элементы специального вида, т. е. он достаточно большой. Например, для выполнения условия (5.1) нужно, чтобы идеал J содержал разности $R_\varepsilon(f)R_\varepsilon(g) - R_\varepsilon(fg)$ для всех $f, g \in \mathcal{E}$. А для выполнения условия (3.1) нужно, чтобы идеал J содержал разности $R_\varepsilon(f') - [R_\varepsilon(f)]'$ для всех $f \in E$.

Таким образом, идеал J должен удовлетворять двум условиям противоположного характера, которые могут быть несовместимы. Например, в случае $E = \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ и $\mathcal{E} = C^\infty(\mathbb{R})$ не существует идеала, содержащего разности $R_\varepsilon(f)R_\varepsilon(g) - R_\varepsilon(fg)$ для всех $f \in \mathcal{E},\ g \in E$.

Рассмотрим вопросы, связанные с построением и исследованием алгебр мнемофункций $G(E)$ на примере пространства периодических распределений [5]. Это одно из наиболее просто устроенных пространств обобщенных функция, благодаря чему полученные результаты более наглядны, чем в общем случае.

6. Пространство периодических распределений

Окружность, как многообразие, может быть реализована как подмножество комплексной плоскости $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ и как фактор-пространство $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Соответственно, для пространств функций или распределений на окружности возникают две реализации: их можно рассматривать как периодические функции переменной t на прямой $\mathbb{R}$ с периодом 2π и как функции комплексной переменной z, определенные на $\mathbb{S}^1$. Такие пространства изоморфны, изоморфизм устанавливается с помощью замены $z = e^{it}$. При этом каждая из реализаций имеет свои преимущества в смысле более простого вида встречающихся формул.

Пространство $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R})$ состоит из комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций, периодических с периодом 2π. Изоморфное ему пространство $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ состоит из функций, бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{S}^1$. Обратим внимание на то, что здесь имеется в виду дифференцирование не по z, а по переменной t при представлении $z = e^{it}$. Если функция переменной z определена и аналитична в окрестности единичной окружности, связь этих производных задается формулой $f' = iz\dfrac{df}{dz}$. Например, $(z^n)' = inz^n$.

Топология на пространстве $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ задается с помощью счетной системы норм

$$p_m(\varphi) = \sum_{j=0}^{m} \max_z |\varphi^{(j)}(z)|, \ \varphi \in C^\infty(\mathbb{S}^1). \tag{6.1}$$

Пространство обобщенных функций (распределений) $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ определяется как сопряженное к пространству $C^\infty(\mathbb{S}^1)$, т. е. состоит из непрерывных линейных функционалов на $C^\infty(\mathbb{S}^1)$. Для значений функционала f в точке φ обычно используется обозначение $f(\varphi) \equiv < f, \varphi >$.

На пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ задается сходимость, соответствующая $*$-слабой топологии в сопряженном пространстве: последовательность f_n сходится к f, если

$$< f_n, \varphi > \to < f, \varphi > \ \text{для любого} \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{S}^1).$$

Функцию, заданную на окружности, можно интегрировать по комплексной переменной z и по вещественной переменной t. Поскольку на окружности $z = e^{it}$, имеем $dz = ie^{it}dt$ и $dt = \dfrac{1}{iz}dz = |dz|$, эти интегралы связаны равенством

$$\int_0^{2\pi} u(e^{it})dt = \int_{\mathbb{S}^1} u(z)|dz| = \int_{\mathbb{S}^1} u(z)\frac{dz}{iz}.$$

Пространство $L_1(\mathbb{S}^1)$ (и, в частности, $C(\mathbb{S}^1)$) вкладывается в $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ по формуле

$$L_1(\mathbb{S}^1) \ni u \to < u, \varphi >= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} u(z)\varphi(z)|dz| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})\varphi(e^{it})dt. \tag{6.2}$$

Всюду ниже интегралы вычисляются по всей окружности $\mathbb{S}^1$. Нормирующий множитель $\dfrac{1}{2\pi}$ вводится для того, чтобы приведенные ниже формулы имели более простой вид.

Каждая функция φ из $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ разлагается в ряд Фурье

$$\varphi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi_k z^k,$$

сходящийся в $C^\infty(\mathbb{S}^1)$, где коэффициенты Фурье суть

$$\varphi_k = \frac{1}{2\pi}\int \varphi(z) z^{-k}|dz| =< \varphi, z^{-k} >,$$

причем последовательность φ_k убывает быстрее любой степени $\dfrac{1}{|k|}$. Поэтому элементы из $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ определяются однозначно по своим значениям на функциях z^k, $k \in \mathbb{Z}$, и представляются в виде рядов Фурье

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k z^k, \tag{6.3}$$

где коэффициенты Фурье суть $C_k =< f, z^{-k} >$. Эти коэффициенты для каждого f возрастают не быстрее некоторой степени $|k|$. Распределение f как функционал действует по формуле

$$< f, \varphi >= \sum_{-\infty}^{\infty} C_k \varphi_k.$$

Например, дельта-функция δ_ξ, сосредоточенная в точке $\xi \in \mathbb{S}^1$, задается формулой $< \delta_\xi, \varphi >= \varphi(\xi)$, она разлагается в ряд

$$\delta_\xi = \sum_{-\infty}^{\infty} \xi^{-k} z^k.$$

В различных вопросах анализа активно используются рациональные функции, в частности, вида $f(z) = \dfrac{1}{(z-\xi)^n}$. При $|\xi| = 1$ такие функции неинтегрируемы на окружности, но каждой из них естественно соответствует целое семейство распределений. В частности, особый интерес представляет распределение $\mathcal{P}\Big(\dfrac{1}{z-1}\Big)$, которое задается выражением

$$< \mathcal{P}\Big(\frac{1}{z-1}\Big), \varphi >= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{S}^1} \frac{\varphi(z)}{z-1} |dz|,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Разложение этого распределения в ряд Фурье имеет вид

$$\mathcal{P}\Big(\frac{1}{z-1}\Big) = \frac{1}{2}\Bigg[\sum_{-\infty}^{-1} z^k - \sum_{0}^{+\infty} z^k\Bigg].$$

В пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ задано *дифференцирование*

$$< f', \varphi >:= - < f, \varphi' >,$$

которое в терминах коэффициентов Фурье задается формулой

$$f' = \sum_{-\infty}^{\infty} ikC_k z^k.$$

В пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ определено также *умножение* $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ на любую функцию $g \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$:

$$< gf, \varphi >=< f, g\varphi >, \quad g \in C^\infty(\mathbb{S}^1), \quad f \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1).$$

В терминах коэффициентов Фурье это произведение задается с помощью операции свертки последовательностей: если f имеет разложение (6.3), а

$$g = \sum_{-\infty}^{\infty} A_k z^k, \tag{6.4}$$

то

$$g * f = \sum_{-\infty}^{\infty} B_k z^k, \text{ где } \ B_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j A_{k-j}.$$

Пусть $|\xi| = 1$. Отображение $\alpha(z) = \xi z$ есть поворот окружности, оно порождает по формуле

$$(T_\xi \varphi)(z) = \varphi(\xi z)$$

оператор поворота, действующий в $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ и других пространствах функций на окружности. Соответственно, определен оператор поворота в пространстве распределений:

$$< T_\xi f, \varphi >=< f, T_{\overline{\xi}}\varphi >=< f, T_\xi^{-1}\varphi > .$$

Для обычных функций на окружности *операция свертки* задается формулой

$$(f * g)(z) = \frac{1}{2\pi}\int f(\xi) g\Big(\frac{z}{\xi}\Big)|d\xi|.$$

Для заданного распределения g функция

$$\psi(z) =< g, T_z\varphi >$$

принадлежит $C^\infty(\mathbb{S}^1)$. Это позволяет задать свертку распределений формулой

$$< f * g, \varphi >=< f, < g, T_z(\varphi) >> .$$

На окружности свертка существует для любой пары распределений, при разложениях (6.3) и (6.4) в ряды Фурье свертка переходит в почленное произведение коэффициентов Фурье:

$$f * g = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k A_k z^k.$$

Сингулярный интегральный оператор Коши S на окружности задается как свертка с распределением $2\mathcal{P}\Big(\frac{1}{z-1}\Big)$, при разложении (6.3) этот оператор действует по формуле

$$Sf = \sum_{-\infty}^{-1} C_k z^k - \sum_{0}^{+\infty} C_k z^k. \tag{6.5}$$

Очевидно, что $S^2 = I$, поэтому операторы

$$P^\pm = \frac{1}{2}[I \pm S]$$

являются проекторами. Пространство периодических распределений описано в [4, 5, 7, 10], например.

7. Алгебра мнемофункций на окружности и вложения распределений в эту алгебру

7.1. Конструкция алгебры. Построим одну из возможных алгебр мнемофункций, соответствующих пространству $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$.

При построении искомой алгебры будем исходить из того, что при типичных методах аппроксимации семейства вида $u_\varepsilon = R_\varepsilon u$ удовлетворяют оценкам вида

$$p_m(u_\varepsilon) \leqslant \frac{C}{\varepsilon^{m+\nu}}.$$

Пространство, состоящее из семейств, удовлетворяющих таким оценкам, не является алгеброй, поэтому построим более широкое пространство.

Рассмотрим семейства $\{f_\varepsilon\}$, зависящие от малого параметра ε и состоящие из бесконечно дифференцируемых функций f_ε на $\mathbb{S}^1$, такие, что для каждого $\{f_\varepsilon\}$ существуют числа μ и ν, при которых имеет место оценка

$$p_m(f_\varepsilon) \leqslant \frac{C}{\varepsilon^{\mu m+\nu}}. \tag{7.1}$$

Здесь и ниже через C будем обозначать разные константы, так как их явный вид в рассматриваемых вопросах несуществен. Обозначим множество, состоящее из всех таких семейств, через $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$.

Лемма 7.1. *В пространстве $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$ определены естественные операции умножения и дифференцирования*:

$$\{f_\varepsilon\} \times \{g_\varepsilon\} = \{f_\varepsilon g_\varepsilon\}, \quad \{f_\varepsilon\}' = \{f_\varepsilon{}'\}.$$

Это пространство с введенными операциями является дифференциальной алгеброй.

Доказательство. Утверждение следует из того, что для норм (6.1) выполнено неравенство

$$p_m(fg) \leqslant Cp_m(f)p_m(g),$$

отражающее непрерывность умножения в пространстве $C^m(\mathbb{S}^1)$.

Поэтому, если для f_ε выполнена оценка (7.1), а для g_ε — оценка

$$p_m(g_\varepsilon) \leqslant \frac{C}{\varepsilon^{\mu_1 m+\nu_1}},$$

то

$$p_m(f_\varepsilon g_\varepsilon) \leqslant \frac{C}{\varepsilon^{(\mu+\mu_1)m+(\nu+\nu_1)}}.$$

Замкнутость пространства относительно дифференцирования следует из неравенства

$$p_m(f'_\varepsilon) \leqslant p_{m+1}(f_\varepsilon).$$

□

Пространство $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$ весьма обширно, поэтому для получения более обозримого пространства вводится отношение эквивалентности и рассматривается фактор-пространство, состоящее из классов эквивалентности. В векторных пространствах всегда рассматриваются отношения эквивалентности следующего вида: f и g *эквивалентны*, если $f - g \in L$, где L есть некоторое заданное подпространство. Это позволяет корректно задать операции сложения и умножения на число. Но, чтобы на фактор-пространстве алгебры по подпространству L можно было задать операцию умножения, L должно быть идеалом.

Пусть $\mathcal{N}_0$ есть подпространство, состоящее из семейств, сходящихся к нулю в $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$:

$$\mathcal{N}_0 = \{f_\varepsilon : \lim_{\varepsilon\to 0} < f_\varepsilon, \varphi >= 0 \ \text{ для любого } \varphi \in C^\infty(\mathbb{S}^1)\}.$$

Семейства f_ε и g_ε называют *слабо эквивалентными*, если $f_\varepsilon - g_\varepsilon \in \mathcal{N}_0$. Такое отношение эквивалентности естественно в теории распределений, но множество $\mathcal{N}_0$ не является идеалом в $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$, откуда следует, что при таком отношении эквивалентности на фактор-пространстве невозможно корректно задать операцию умножения. Более того, $\mathcal{N}_0$ не является даже подалгеброй.

В алгебре $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$ существует много идеалов, с помощью каждого из них можно задавать отношения эквивалентности. Из ряда соображений следует, что эквивалентные семейства должны быть слабо эквивалентными. Это выполнено, если искомый идеал принадлежит подпространству $\mathcal{N}_0$, т. е. он достаточно малый. С другой стороны, чем меньше идеал, тем больше фактор-алгебра, поэтому желательно выбрать идеал по возможности большим.

С теоретической точки зрения здесь наиболее подходящим является какой-нибудь максимальный идеал в $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$, при таком выборе идеала фактор-алгебра является расширением пространства гладких функций в смысле нестандартного анализа. Однако максимальные идеалы не выписываются в явном виде, поэтому в соответствующей фактор-алгебре нельзя провести конкретные вычисления.

Более удобным оказывается подпространство

$$J(\mathbb{S}^1) = \{g_\varepsilon : \forall p \text{ и } m \ \exists\ C : p_m(g_\varepsilon) \leqslant C\varepsilon^p\}.$$

Лемма 7.2. *Подпространство $J(\mathbb{S}^1)$ является дифференциальным идеалом в алгебре $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$.*

Доказательство. То, что $J(\mathbb{S}^1)$ является подпространством, инвариантным относительно дифференцирования, очевидно.

Если $f_\varepsilon \in \widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$, $g_\varepsilon \in J(\mathbb{S}^1)$, то для произведения имеем оценку

$$p_m(f_\varepsilon g_\varepsilon) \leqslant p_m(f_\varepsilon)p_m(g_\varepsilon) \leqslant \frac{C}{\varepsilon^{\mu m+\nu}} \times C\varepsilon^p = C\varepsilon^{p-\mu m-\nu}.$$

Так как число p произвольное, получаем, что это произведение принадлежит $J(\mathbb{S}^1)$. □

Алгебра мнемофункций на окружности $G(\mathbb{S}^1)$ определяется как фактор-алгебра

$$G(\mathbb{S}^1) = \widetilde{G(\mathbb{S}^1)}/J(\mathbb{S}^1).$$

С описанной конструкцией связана *алгебра обобщенных комплексных чисел* $\widetilde{\mathbb{C}} \subset G(\mathbb{S}^1)$. Она порождена семействами f_ε постоянных (не зависящих от z). Эта алгебра содержит, в частности, элементы вида ε^k, причем при $k > 0$ это бесконечно малые величины, а при $k < 0$ — бесконечно большие. Алгебра $G(\mathbb{S}^1)$ является модулем над алгеброй $\widetilde{\mathbb{C}}$.

Для пояснения взаимосвязи построенной алгебры с пространством распределений напомним другую конструкцию пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$. Рассмотрим подпространство $\widetilde{\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)}$ в $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$, состоящее из таких семейств f_ε, что для каждого $\varphi \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} < f_\varepsilon, \varphi >$.

Теорема 7.1. *Фактор-пространство* $\widetilde{\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)}/\mathcal{N}_0$ *изоморфно пространству распределений* $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$.

Этот способ введения распределений детально описан в [7], где содержится доказательство теоремы 7.1. В этой книге и других работах этих авторов использовались последовательности гладких функций, т. е. случай, когда малый параметр принимает только значения $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, в связи с чем такая конструкция распределений названа *секвенциальным подходом*.

Эта конструкция пространства распределений позволяет пояснить истоки некорректности задачи об умножении классических обобщенных функций:

1. пространство $\widetilde{\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)}$ не является алгеброй, это приводит к тому, что в фактор-пространстве нет элементов, которые могли бы служить кандидатами на произведение для произвольной пары элементов;
2. подпространство $\mathcal{N}_0$ не является идеалом в алгебре $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$, это приводит к тому, что произведения представителей из одного класса эквивалентности попадают в разные классы, т. е. не определяется корректно произведение классов;
3. то, что $\mathcal{N}_0$ не является подалгеброй, приводит к утверждениям типа $0 \times 0 \neq 0$: произведение двух элементов из нулевого класса эквивалентности может не принадлежать этому классу.

Как видно из вышесказанного, построение алгебры мнемофункций можно считать модификацией секвенциального подхода к построению пространства распределений: в обоих случаях строится пространство, состоящее из классов эквивалентности семейств гладких функций, удовлетворяющих оценкам вида (7.1), а модификация заключается в следующем:

- вместо пространства $\widetilde{\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)}$ рассмотрено более широкое пространство $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$, являющееся алгеброй;
- отношение эквивалентности задано не с помощью подпространства $\mathcal{N}_0$, а с помощью идеала $J(\mathbb{S}^1)$, содержащегося в этом подпространстве.

Эти отличия приводят к тому, что в $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ все семейства из $\mathcal{N}_0$ отождествляются с нулем, а в алгебре мнемофункций они порождают бесконечно малые величины. Но именно учет таких бесконечно малых позволяет корректно определить операцию умножения.

В работе Ю. В. Егорова [15] была предложена несколько другая, но родственная конструкция. Применительно к рассматриваемому случаю окружности, Ю. В. Егоров рассмотрел более широкую алгебру $\widetilde{G_E(\mathbb{S}^1)}$, состоящую из произвольных семейств $\{f_\varepsilon\}$, не требуя выполнения оценок (7.1). В этой более широкой алгебре множество $J(\mathbb{S}^1)$ не является идеалом, поэтому Ю. В. Егоров использовал идеал

$$J_0(\mathbb{S}^1) = \{f_\varepsilon : \forall p \text{ и } m\ \exists \varepsilon_0 > 0 : f_\varepsilon = 0 \ \text{ при } \ \varepsilon < \varepsilon_0\}.$$

Соответствующая фактор-алгебра $G_E(\mathbb{S}^1) := \widetilde{G_E(\mathbb{S}^1)}/J_0(\mathbb{S}^1)$ есть *алгебра новых обобщенных функций по Егорову.*

Заметим, что множество $J_0(\mathbb{S}^1)$ является идеалом в алгебре $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$ и с его помощью можно построить еще одну алгебру мнемофункций $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}/J_0(\mathbb{S}^1)$. Но эта алгебра практически не отличается от первоначальной алгебры $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$.

7.2. Отношение ассоциированности и асимптотические разложения мнемофункций. Основной интерес представляют взаимосвязи построенной алгебры мнемофункций с пространством распределений. Прежде всего устанавливается отношение *ассоциированности*. Поскольку $J(\mathbb{S}^1) \subset \mathcal{N}_0$, то если семейство f_ε сходится в $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ к f, то любое эквивалентное семейство также сходится к f.

Будем говорить, что класс эквивалентности $[f_\varepsilon]$, содержащий f_ε, *ассоциирован с распределением* f, если семейство f_ε сходится в $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ к f. Обозначим через $G_{as}(\mathbb{S}^1)$ подпространство в $G(\mathbb{S}^1)$, состоящее из семейств, ассоциированных с распределениями. По построению имеем, что G_{as} есть фактор-пространство: $G_{as}(\mathbb{S}^1) = \widetilde{\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)}/J(\mathbb{S}^1)$. На $G_{as}(\mathbb{S}^1)$ отношение ассоциированности порождает отображение перехода к пределу

$$Lim : G_{as}(\mathbb{S}^1) \ni [f_\varepsilon] \to Lim([f_\varepsilon]) := \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1).$$

Отображение Lim сюръективно, но не является инъективным: с каждым распределением u связано обширное множество $G_{as}(u)$, состоящее из мнемофункций, ассоциированных с u, которое является аффинным подпространством в $G_{as}(\mathbb{S}^1)$. Если в $G_{as}(u)$ выбрать произвольный элемент f_0, то отображение

$$G_{as}(u) \ni f \to f - f_0 \in G_{as}(0)$$

задает изоморфизм между $G_{as}(u)$ и векторным пространством $G_{as}(0)$, которое по построению изоморфно фактор-пространству $\mathcal{N}_0/J(\mathbb{S}^1)$. Обратим внимание на то, что такой изоморфизм не является каноническим, так как в общем случае нет оснований выделить в аффинном подпространстве $G_{as}(u)$ один из элементов, который следует объявить нулевым. Таким образом, степень неоднозначности соответствия между $G_{as}(\mathbb{S}^1)$ и $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ определяется тем, насколько подпространство $\mathcal{N}_0$ больше идеала $J(\mathbb{S}^1)$. Как отмечалось выше, элементы фактор-пространства $\mathcal{N}_0/J(\mathbb{S}^1)$ есть бесконечно малые, т. е. два элемента из $G_{as}(u)$ отличаются на бесконечно малую мнемофункцию.

Дополнительную информацию о свойствах мнемофункции можно получить с помощью анализа асимптотического поведения величин $< f_\varepsilon, \varphi >$. Фактически выражение $< F, \varphi > := < f_\varepsilon, \varphi >$ задает обобщенный линейный функционал F на $C^\infty(\mathbb{S}^1)$, т. е. функционал со значениями в алгебре обобщенных чисел $\widetilde{\mathbb{C}}$. В частности, для $f_\varepsilon \in \mathcal{N}_0$ имеем $< f_\varepsilon, \varphi > \to 0$, т. е. значения соответствующего функционала являются бесконечно малыми.

При вычислениях в алгебре мнемофункций часто встречаются случаи, когда такое семейство функционалов допускает асимптотическое разложение по степеням ε в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$:

$$< f_\varepsilon, \varphi > = \sum_{k=k_0}^{\infty} < u_k, \varphi > \varepsilon^k, \text{ где } \ u_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1). \tag{7.2}$$

Обратим внимание на то, что здесь речь идет именно об асимптотических разложениях, т. е. равенство в (7.2) означает, что последовательность конечных сумм

$$< F_N, \varphi > = \sum_{k=k_0}^{N} < u_k, \varphi > \varepsilon^k$$

сходится к $< f_\varepsilon, \varphi >$ асимптотически, т. е. их разность убывает быстрее, чем ε^N.

При этом асимптотическое разложение может начинаться с отрицательной степени ε, т. е. главным членом разложения может оказаться некоторое распределение с бесконечно большим коэффициентом.

Таким образом, наглядная информация о поведении мнемофункции содержится в ее асимптотическом разложении в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$, при этом асимптотическое разложение у бесконечно малых мнемофункций начинается с положительной степени ε, а асимптотическое разложение семейства f_ε, ассоциированного с u, имеет вид

$$< f_\varepsilon, \varphi > = < u, \varphi > + < u_1, \varphi > \varepsilon + < u_2, \varphi > \varepsilon^2 + \dots . \tag{7.3}$$

Заметим, что в идейном плане связь между $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ и G_{as} аналогична связи между многообразием M и его касательным расслоением TM.

Действительно, рассмотрим множество гладких кривых $f(\varepsilon)$, проходящих через заданную точку a многообразия M, т. е. таких, что $f(0) = a$. Если на этом множестве ввести отношение эквивалентности $f(\varepsilon) \sim g(\varepsilon)$ для $f(\varepsilon) - g(\varepsilon) = o(\varepsilon)$, то множество классов эквивалентности есть касательное пространство TM_a в точке $a \in M$, а объединение всех касательных пространств есть касательное расслоение TM.

Согласно определению, касательный вектор есть класс эквивалентных кривых, приближающихся к точке по одному направлению, т. е. такой класс сохраняет информацию («помнит») только об этом направлении.

Аналогично, семейство f_ε, допускающее разложение (7.3), можно рассматривать как «кривую» в пространстве распределений $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$, проходящую через точку u. Тогда распределение u_1 из асимптотического разложения (7.3) описывает, по какому направлению «кривая» приближается к u. А остальные члены разложения более детально описывают путь, по которому «кривая» приближается к f. По определению, два семейства гладких функций попадают в один класс эквивалентности, если они «очень похоже» ведут себя при $\varepsilon \to 0$, т. е. класс эквивалентности *помнит* о том, как элементы этих семейств приближались к своему пределу, в связи с чем для них было предложено название «мнемофункции» (от греческого «мнемо» — память).

Приходится отметить, что асимптотическое разложение содержит только часть информации о поведении мнемофункции, в общем случае даже полное (по всем степеням ε) асимптотическое разложение не позволяет однозначно определить f_ε; в частности, асимптотические разложения для f_ε и g_ε не определяют однозначно их произведение. Это проводит к тому, что при решении конкретных задач промежуточные вычисления следует проводить в алгебре мнемофункций, а асимптотическое разложение полезно построить только для окончательного результата, чтобы придать ему наглядность.

7.3. Вложения распределений в алгебру мнемофункций. Более детальная связь с распределениями устанавливается с помощью построения правых обратных к отображению Lim. Это линейные отображения $R : \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1) \to G_{as} \subset G(\mathbb{S}^1)$, такие, что $LimR(u) = u$. Согласно определению, образ $R(u)$ распределения u есть семейство гладких функций, сходящееся к u, т. е. такое отображение R задает способ аппроксимации распределений гладкими функциями и является вложением (инъективным отображением) $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ в алгебру мнемофункций.

Заметим, что существует много правых обратных к отображению Lim: если R есть один из правых обратных, то оператор $R_1 : \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1) \to G_{as} \subset G(\mathbb{S}^1)$ является правым обратным тогда и только тогда, когда оператор $R - R_1$ отображает $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ в $\mathcal{N}_0$.

Взятое в обратном порядке произведение отображений $RLim : G_{as} \to G_{as}$ является проектором в G_{as}. Поэтому формула $f = RLimf + (f - RLimf)$ задает разложение пространства G_{as} в прямую сумму

$$G_{as} = Im(R) \oplus G_{as}(0).$$

Поскольку образ $Im(R)$ изоморфен $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$, получаем разложение

$$G_{as} = \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1) \oplus G_{as}(0),$$

при котором проекция на первую координату есть отображение ассоциированности Lim.

Обратим внимание на то, что полученное разложение определяется вложением R: в аффинном подпространстве $G_{as}(u)$ нулевым элементом объявляется $R(u)$.

Как уже отмечалось, при заданном R произведение произвольных распределений есть, по определению, мнемофункция

$$u \otimes v := R(u)R(v) \in G(\mathbb{S}^1).$$

Для описания свойств такого произведения обычно требуется установить его связь с распределениями. Если произведение $R(u)R(v)$ ассоциировано с распределением h, то естественно считать это h произведением uv, порожденным заданным способом аппроксимации R.

Как сказано выше, более детальную информацию о мнемофункции $R(u)R(v)$ дает ее асимптотическое разложение в пространстве распределений, которое может существовать и тогда, когда произведение $R(u)R(v)$ не ассоциировано с каким-нибудь распределением. Таким образом, задача описания произведения распределений в значительной степени сводится к построению асимптотического разложения для $R(u)R(v)$. При этом могут возникнуть асимптотические разложения с бесконечно большими и с бесконечно малыми коэффициентами, причем последние также играют существенную роль в рассматриваемых вопросах.

7.4. Свойства вложений. Поскольку существует много способов вложения распределений в алгебру мнемофункций $R : \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1) \to G(\mathbb{S}^1)$, выясним, какими дополнительными свойствами могут обладать разные вложения [4].

7.4.1. Инвариантность относительно вращений. В случае окружности одним из естественных требований на вложение является его инвариантность относительно вращений. В случае распределений на прямой рассматривается инвариантность относительно сдвигов.

Пусть $|\xi| = 1$. Как отмечалось ранее, поворот окружности, заданный формулой $\alpha(z) = \xi z$, порождает оператор поворота, действующий в $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ по формуле $(T_\xi\varphi)(z) = \varphi(\xi z)$. Соответственно, оператор поворота действует в алгебре мнемофункций и в пространстве распределений.

Свойство инвариантности вложения R заключается в перестановочности с поворотом: если $R(f) = f_\varepsilon$, то

$$R(T_\xi f) = T_\xi f_\varepsilon.$$

Из этого следует специальный вид такого оператора. Запишем разложения образов функций z^k при действии R:

$$R(z^k) = \sum_j A_{jk} z^j.$$

При повороте окружности образ z^k есть $T_\xi z^k = \xi^k z^k$. Если R есть произвольный оператор, перестановочный с поворотами, то выполняется равенство $R(\xi^k z^k) = \xi^k R z^k$. При разложении в ряд Фурье получаем

$$\sum_j A_{jk}\xi^k z^j = \sum_j A_{jk}\xi^j z^j,$$

откуда $A_{jk}[\xi^j - \xi^k] = 0$ и, следовательно, $A_{jk} = 0$ при $k \neq j$. Если обозначить $A_{kk} = A_k$, получаем, что оператор действует по формуле

$$Rf = \sum_j A_k C_k z^k,$$

т. е. оператор R есть свертка с распределением, для которого A_k являются коэффициентами разложения в ряд Фурье. В частности, равенство $R(z^k) = A_k(\varepsilon) z^k$, т. е. перестановочность с поворотами, означает, что функции z^k являются собственными функциями оператора R.

Применяя сказанное, при каждом фиксированном ε получаем, что каждый способ аппроксимации, инвариантный относительно вращений, имеет вид

$$R(f) = f_\varepsilon = f * \psi_\varepsilon, \tag{7.4}$$

где $*$ — операция свертки в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$, а ψ_ε есть некоторое семейство распределений.

Операция свертки использует групповую структуру окружности, при этом точка 1 выделяется, так как она является нейтральным элементом группы и свертка с δ_1 есть единичный оператор. Поэтому $\delta_1 * \psi_\varepsilon = \psi_\varepsilon$, откуда получаем, что ψ_ε есть семейство гладких функций, сходящееся к δ_1. Таким образом, при выполнении условия инвариантности способ аппроксимации однозначно определяется по аппроксимациям δ_1.

Если использовать разложения Фурье

$$\psi_\varepsilon(z) = \sum A_k(\varepsilon) z^k,$$

то

$$R(f) = f_\varepsilon(z) = \sum_k A_k(\varepsilon) C_k z^k, \tag{7.5}$$

где при фиксированном ε коэффициенты $A_k(\varepsilon)$ убывают быстрее любой степени $\dfrac{1}{k}$, а при фиксированном k из сходимости ψ_ε к δ_1 следует, что $A_k(\varepsilon) \to 1$ при $\varepsilon \to 0$.

В приложениях существенно свойство (3.1) — перестановочность вложения с дифференцированием:

$$R(f') = R(f)'. \tag{7.6}$$

Лемма 7.3. *Вложение R перестановочно с дифференцированием тогда и только тогда, когда оно инвариантно относительно поворотов.*

Доказательство. Операция свертки перестановочна с дифференцированием, поэтому из (7.4) следует (7.6).

Пусть выполнено (7.6). Рассмотрим разложение образа $R(z^k) = \sum_j B_j(\varepsilon)z^j$. Из (7.6) получаем, что $ik\sum_j B_j(\varepsilon)z^j = \sum_j B_j(\varepsilon)ij\ z^j$, откуда следует, что $B_j(\varepsilon) = 0$ при $j \neq k$, т. е. $R(z^k) = B_k(\varepsilon)z^k$, что и требовалось. □

Наиболее простым и естественным является способ аппроксимации, задаваемый с помощью частичных сумм ряда Фурье. Так как каждое распределение f разлагается в ряд (6.3), формула

$$R_F(f) = f_n = \sum_{-n}^{n} C_k z^k \tag{7.7}$$

задает вложение $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ в $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$. В этом примере через $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$ обозначается алгебра мнемофункций, порожденная последовательностями гладких функций.

С точки зрения теории рядов Фурье, формулы вида (7.5) задают методы суммирования таких рядов. Задача суммирования рядов связана, например, с тем, что для непрерывной функции f последовательность частичных сумм (7.7) может не сходиться равномерно. Но существует много методов суммирования вида (7.5), которые улучшают сходимость — при которых $f_\varepsilon(z)$ равномерно сходятся к f. Аналогично, способы аппроксимации, заданные формулами вида (7.5), могут обладать свойствами, которых нет у вложения (7.7), порожденного частичными суммами ряда Фурье.

Ниже рассматриваются вложения, инвариантные относительно поворотов.

7.4.2. Локальность умножения. Для распределения не определено значение в заданной точке, но можно говорить о его значении на открытом множестве. Говорят, что распределения f и g *равны на открытом подмножестве* U, если $< f,\varphi >=< g,\varphi >$ для всех φ, у которых носитель принадлежит U. Это соответствует тому, что значение f на открытом подмножестве U определятся как сужение функционала f на подпространство, состоящее из таких φ.

Носителем распределения f называется наименьшее замкнутое множество $\operatorname{supp} f$, на дополнении к которому $f = 0$.

Свойство локальности умножения распределения f на гладкую функцию g заключается в том, что произведение gf на каждом открытом множестве U зависит только от значений g и f на нем. В частности, если $g = 0$ на U или $f = 0$ на U, то произведение gf также есть нуль на U.

Будем говорить, что для вложения R выполняется *свойство локальности умножения*, если из условия $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g = \varnothing$ следует, что $R(f)R(g) = 0$.

На первый взгляд может показаться, что это свойство всегда выполнено. Это «подтверждается» следующим рассуждением. Если $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g = \varnothing$, то существует гладкая функция γ, такая, что $\gamma(z) = 1$ на $\operatorname{supp} f$ и $\gamma(z) = 0$ на $\operatorname{supp} g$. Тогда $f = \gamma f$, $g = (1-\gamma)f$, откуда $R(f)R(g) = R[\gamma(1-\gamma)]R(f)R(g) = 0$.

Однако эти вычисления предполагают, что выполнено равенство

$$R(\gamma f) = R(\gamma)R(f) \text{ для любых } \ \gamma \in C^\infty(\mathbb{S}^1),\ f \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1). \tag{7.8}$$

Но, согласно известному примеру Л. Шварца, пространство распределений не может быть вложено в ассоциативную коммутативную алгебру таким образом, чтобы сохранялось произведение гладкой функции на распределение. Это означает, что при любом вложении R пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ в (произвольную) алгебру равенство (7.8) не может быть выполнено для всех $\gamma \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ и $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$. Таким образом, приведенное рассуждение некорректно и, в общем случае, если $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g = \varnothing$, то произведение $R(g)R(f)$ может быть отличным от нуля в $G(\mathbb{S}^1)$.

7.4.3. Согласованность вложения с умножением в $C^\infty(\mathbb{S}^1)$. В работах Ж. Ф. Коломбо [31, 32], которые имели наибольший резонанс в этой тематике, рассматривалась задача о построении вложения, удовлетворяющего условию согласованности с умножением в $C^\infty(\mathbb{S}^1)$. Это условие является ослаблением условия (7.8), которое не может быть выполнено. В рассматриваемом случае задача Коломбо формулируется следующим образом.

Существует естественное вложение R_0 алгебры $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ в $G(\mathbb{S}^1)$, при котором функции $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ ставится в соответствие стационарное семейство $f_\varepsilon = f$, т. е. не зависящее от ε.

Задача Коломбо. *Требуется построить дифференциальную алгебру G и вложение R пространства распределений в G, которое для бесконечно дифференцируемых функций совпадает с естественным вложением R_0 в G.*

Применительно к рассматриваемому пространству распределений на окружности, в задаче Коломбо требуется построить вложение, при котором

$$R(f) = R_0(f) \quad \text{для} \quad f \in C^\infty(\mathbb{S}^1). \tag{7.9}$$

Это условие означает, что для гладких функций f рассматриваемые аппроксимации должны быстро сходится к f.

При выполнении (7.9) $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ вкладывается не только как подпространство, но и как алгебра, т. е.

$$R(fg) = R(f)R(g) \text{ для всех } f,\ g \in C^\infty(\mathbb{S}^1). \tag{7.10}$$

Основной результат Ж. Ф. Коломбо заключается в построении искомой алгебры для пространств распределений на $\mathbb{R}^m$. При этом алгебра, построенная Коломбо, устроена существенно сложнее описанной выше.

Ниже показано, что особенностью случая распределений на окружности, описанного в данной работе, является то, что вложения, для которых выполнено (7.9) и (7.10), существуют для рассмотренной более простой алгебры мнемофункций $G(\mathbb{S}^1)$.

8. Вложения $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ в $G(\mathbb{S}^1)$

Рассмотрим конкретные классы вложений вида (7.4) с точки зрения выполнения указанных выше свойств.

8.1. Вложения, удовлетворяющие условию локальности умножения.

Произведение $R(\delta_\xi) \times R(\delta_1) = \psi_\varepsilon\left(\frac{z}{\xi}\right) \times \psi_\varepsilon(z)$ двух δ-функций, сосредоточенных в разных точках, в общем случае отлично от нуля. Но если носители функций $\psi_\varepsilon(z)$ стягиваются к точке 1 при $\varepsilon \to 0$, то при достаточно малых ε последнее произведение есть нуль и выполнено свойство локальности умножения. Оно выполняется также, если значения $\psi_\varepsilon(z)$ при $z \neq 1$ быстро стремятся к нулю, тогда произведение $\psi_\varepsilon(z) \times \psi_\varepsilon\left(\frac{z}{\xi}\right)$ принадлежит идеалу $J(\mathbb{S}^1)$.

Лемма 8.1. *Если носители функций $\psi_\varepsilon(z)$, задающих вложение по формуле* (7.4)*, стягиваются к точке* 1*, то свойство локальности умножения выполнено для произвольных распределений.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g = \varnothing$. Условие, что носители функций $\psi_\varepsilon(z)$ стягиваются к точке 1, означает, что $\psi_\varepsilon(z) = 0$ при $|z-1| > \gamma(\varepsilon)$, где $\gamma(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Поскольку $f_\varepsilon = f * \psi_\varepsilon$, $f_\varepsilon(z) = 0$ вне $\gamma(\varepsilon)$-окрестности замкнутого множества $\operatorname{supp} f$. Аналогично $g_\varepsilon(z) = 0$ вне $\gamma(\varepsilon)$-окрестности замкнутого множества $\operatorname{supp} g$. При достаточно малом ε такие окрестности не пересекаются, т. е. объединение их дополнений есть $\mathbb{S}^1$. Поэтому при достаточно малом ε имеем $f_\varepsilon(z) \times g_\varepsilon(z) \equiv 0$, что и требовалось. □

Способы аппроксимации, которые обычно рассматриваются в пространствах распределений на прямой, задаются формулами вида (3.4) следующим образом. Выбирается функция $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, такая, что $\int\limits_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 1$. Тогда семейство

$$\psi_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\psi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \tag{8.1}$$

сходится к δ_0 и их носители стягиваются к точке 0. Соответствующий способ аппроксимации задается выражением (7.4), где $*$ есть операция свертки в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. При таком способе аппроксимации очевидно выполнено свойство локальности умножения.

Здесь семейство (8.1) порождено одной фиксированной функцией ψ, называемой *профилем*. Такие аппроксимации удобны для исследования благодаря тому, что свойства аппроксимирующего семейства f_ε описываются через ψ, в частности, с использованием моментов этой функции.

В случае периодических распределений (распределений на окружности) нет полной аналогии этой конструкции, так как, например, если функция $\psi(t)$ периодическая, то семейство вида (8.1) не сходится к δ-функции. Чтобы задать описанную выше аппроксимацию с помощью свертки на окружности, нужно модифицировать конструкцию.

Пусть $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\int\limits_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 1$, и носитель расположен внутри интервала $(-\pi, \pi)$. При каждом ε зададим функцию $\dfrac{1}{\varepsilon}\psi\Big(\dfrac{t}{\varepsilon}\Big)$ при $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$ и продолжим на $\mathbb{R}$ с периодом 2π, т. е. рассмотрим функцию

$$\psi_\varepsilon(t) = \sum_j \frac{1}{\varepsilon}\psi\Big(\frac{t+2j\pi}{\varepsilon}\Big). \tag{8.2}$$

Тогда формула

$$R(f) = f_\varepsilon = f * \psi_\varepsilon, \tag{8.3}$$

где $*$ — уже операция свертки в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$, задает тот же способ аппроксимации, обладающий свойством локальности умножения.

Но детальный анализ этого способа аппроксимации на окружности усложняется по сравнению со случаем на прямой. Это связано с тем, что нет непосредственной связи между коэффициентами Фурье функций ψ_ε при разных ε, так как

$$\psi_\varepsilon(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(2\pi k\varepsilon)e^{ikt},$$

где $\hat{\psi}$ есть преобразование Фурье функции ψ на $\mathbb{R}$.

Таким образом, условие локальности умножения приводит к усложнению конструкции вложения. Заметим также, что требование локальности умножения не всегда оправдано с физической точки зрения. Например, δ-функция моделирует ситуацию, когда вещество распределено так, что основная часть массы сосредоточена в малой окрестности заданной точки. При умножении двух плотностей, соответствующих таким дельта-функциям, сосредоточенным в разных точках, возникает произведение большой плотности на малую, а такое произведение может дать конечный эффект, т. е. ненулевую плотность. Поэтому не всегда произведение двух дельта-функций, сосредоточенных в разных точках, следует считать нулем.

8.2. Согласованность с умножением гладких функций. Препятствием к построению вложения, согласованного с умножением гладких функций, является следующий факт.

Теорема 8.1. *Если вложение периодических распределений построено с помощью свертки с функциями вида* (8.1)*, где ψ финитная функция, то выполнено условие локальности умножения, а условия* (7.9) *и* (7.10) *согласованности с умножением гладких функций не выполняются.*

Это утверждение следует из двух лемм.

Лемма 8.2. *Пусть $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ — гладкая быстро убывающая функция на $\mathbb{R}$, в частности, финитная, $M_0(\psi) = \int \psi(t)dt = 1$, и f — бесконечно дифференцируемая периодическая функция. Семейство гладких функций $f_\varepsilon = f * \psi_\varepsilon$, где $\psi_\varepsilon(t) = \dfrac{1}{\varepsilon}\psi\Big(\dfrac{t}{\varepsilon}\Big)$, имеет асимптотическое разложение*

$$f_\varepsilon(t) \sim f(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} f(t)^{(j)} M_j(\psi)\varepsilon^j, \tag{8.4}$$

где

$$M_j(\psi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^j\psi(t)dt,\ j \in \mathbb{N}$$

— моменты функции ψ.

Доказательство. Согласно формуле Тейлора

$$f(s) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} f(t)^{(j)} (s-t)^j + r_n(s-t),$$

где остаточный член оценивается через производную $f(t)^{(n+1)}$. Так как эта производная ограничена, имеем оценку $|r_n(s-t)| \leqslant C|s-t|^{n+1}$. Поэтому

$$f_\varepsilon(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s) \frac{1}{\varepsilon} \psi\Big(\frac{t-s}{\varepsilon}\Big) ds =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} f(t)^{(j)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (s-t)^j \frac{1}{\varepsilon} \psi\Big(\frac{t-s}{\varepsilon}\Big) ds + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} r_n(s-t) \frac{1}{\varepsilon} \psi\Big(\frac{t-s}{\varepsilon}\Big) ds =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} f(t)^{(j)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (-\varepsilon\tau)^j \psi(\tau) d\tau + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} r_n(-\varepsilon\tau) \psi(\tau) d\tau =$$

$$= f(t) + \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} f(t)^{(j)} M_j(\psi) \varepsilon^j + o(\varepsilon^n), \tag{8.5}$$

что и требовалось. □

Лемма 8.3. *Если $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и $\psi \neq 0$, то бесконечное множество моментов $M_j(\psi)$ отлично от нуля.*

Доказательство. Предположим, что $M_j(\psi) = 0$ для всех j, за исключением конечного числа. В силу компактности носителя ψ, преобразование Фурье $\hat{\psi}$ является аналитической функцией, причем она стремится к нулю на бесконечности в силу гладкости ψ. При преобразовании Фурье моменты переходят (с точностью до множителя) в значения соответствующих производных. Поэтому $\hat{\psi}^{(j)}(0) = 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$, за исключением конечного числа. Тогда из аналитичности $\hat{\psi}$ следует, что эта функция является ненулевым многочленом и, следовательно, не стремится к нулю на бесконечности, что приводит к противоречию. □

Доказательство теоремы 8.1. Пусть $M_p(\psi)$ есть ненулевой момент с наименьшим номером. Тогда, согласно (8.5), разность $f(t) - f_\varepsilon(t)$ ведет себя как ε^p и, следовательно, не принадлежит идеалу $J(\mathbb{S}^1)$, т. е. равенство (7.9) не выполнено.

Аналогично, для двух гладких функций имеем, согласно (8.5),

$$f_\varepsilon(t) \times g_\varepsilon(t) - (fg)_\varepsilon(t) = \frac{(-1)^p \varepsilon^p}{p!} \big[f(t) g(t)^{(p)} + f(t)^{(p)} g(t) - (f(t)g(t))^{(p)}\big] M_p(\psi) + o(\varepsilon^p).$$

Здесь при $p > 1$ выражение в квадратной скобке отлично от нуля, из чего следует, что рассматриваемая разность не принадлежит идеалу $J(\mathbb{S}^1)$. При $p = 1$ получаем, что разность $f(t) - f_\varepsilon(t)$ ведет себя как ε^{p_2}, где $M_{p_2}(\psi)$ есть второй из отличных от нуля моментов. □

Таким образом, если использовать методы аппроксимации, порожденные финитными функциями, то для выполнения условия (7.9) требуется строить алгебры, устроенные более сложно, чем $G(\mathbb{S}^1)$. Именно такие алгебры были впервые построены Ж. Ф. Коломбо. Опишем модификацию его конструкции, приводящую к построении алгебры, устроенной несколько проще, чем алгебра Коломбо.

Рассмотрим семейства бесконечно дифференцируемых функций $\{f_{q,\varepsilon}\}$, зависящие от двух параметров ε и $q \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\widetilde{G_C(\mathbb{S}^1)}$ множество, состоящее из всех таких семейств, для каждого из которых существуют μ и ν, при которых имеет место оценка

$$p_m(f_{q,\varepsilon}) \leqslant \frac{C}{\varepsilon^{\mu m + \nu}}. \tag{8.6}$$

Аналогично предыдущему, это множество является дифференциальной алгеброй.

Пусть

$$J_C(\mathbb{S}^1) = \{g_{q,\varepsilon} : \exists \ \ \mu_1 \ \text{ и } \ \nu_1, \quad \text{что} \quad p_m(g_{q,\varepsilon}) \leqslant C\varepsilon^{q-\mu_1 m-\nu_1} \ \ \}.$$

Лемма 8.4. *Множество $J_C(\mathbb{S}^1)$ является дифференциальным идеалом в алгебре $\widetilde{G_C(\mathbb{S}^1)}$.*

Доказательство. Пусть $f_{q,\varepsilon} \in \widetilde{G_C(\mathbb{S}^1)}$ и $g_{q,\varepsilon} \in J_C(\mathbb{S}^1)$. Тогда

$$p_m(f_{q,\varepsilon} \times g_{q,\varepsilon}) \leqslant \frac{C_1}{\varepsilon^{\mu m+\nu}} C_2 \varepsilon^{q-\mu_1 m-\nu_1} = C\varepsilon^{q-(\mu+\mu_1)m-(\nu+\nu_1)},$$

т. е. это произведение принадлежит $J_C(\mathbb{S}^1)$. □

В силу леммы 8.4 фактор-пространство

$$G_C(\mathbb{S}^1) = \widetilde{G_C(\mathbb{S}^1)}/J_C(\mathbb{S}^1)$$

является дифференциальной алгеброй, которую будем называть *модифицированной алгеброй Коломбо*.

Для построения вложения в эту алгебру выберем последовательность финитных функций ψ_q, таких, что их носители лежат в окрестности точки 0 и $M_j(\psi_q) = 0$ при $1 \leqslant j < q$.

Теорема 8.2. *Отображение $R_C : f \to f_{q,\varepsilon} = f * \psi_{q,\varepsilon}$ задает вложение $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ в $G_C(\mathbb{S}^1)$, для которого выполнено условие* (7.9) *согласования с умножением гладких функций и свойство локальности умножения.*

Доказательство. В силу условий на ψ_q получаем, что

$$p_m(f * \psi_{q,\varepsilon}) \leqslant \frac{C}{\varepsilon^{m+\nu}}.$$

Если $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$, то, согласно (8.5), разность $f(t) - f_{q,\varepsilon}(t)$ убывает как ε^q. Поскольку свертка перестановочна с дифференцированием, аналогично ведет себя разность производных этих функций. Отсюда получаем, что

$$p_m(f - f * \psi_{q,\varepsilon}) \leqslant C\varepsilon^{q-m}$$

и разность $f - f_{q,\varepsilon}$ принадлежит идеалу $J_C(\mathbb{S}^1)$. □

Как было отмечено выше, условие (7.9) означает, что аппроксимации гладкой функции быстро сходятся к ней. Это выполнено для вложения (7.7), построенного с помощью последовательности частичных сумм ряда Фурье. Это отображение R_F инвариантно относительно поворотов и представляется в виде свертки:

$$f_n = f * \psi_n, \text{ где } \ \psi_n(z) = \sum_{-n}^{n} z^k = \begin{cases} \dfrac{z^{n+1} - z^{-n}}{z-1}, & z \neq 1, \\ 2n+1, & z = 1. \end{cases}$$

Теорема 8.3. *Отображение R_F является вложением $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ в алгебру мнемофункций, для которого выполнено условие согласования с умножением, т. е. равенства* (7.9) *и* (7.10)*, а свойство локальности умножения не выполняется.*

Доказательство. То, что последовательность f_n принадлежит $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$, следует из степенной оценки коэффициентов C_k. Действительно, для коэффициентов Фурье распределения f справедлива оценка $|C_k| \leqslant C(1+|k|)^p$. Поэтому

$$p_m(f_n) \leqslant \sum_{|k|\leqslant n} C(1+|k|)^{p+m} \leqslant C(2n+1)(1+n)^{p+m} \sim n^{p+m+1}.$$

Выполнение (7.9) следует из известного факта, что ряд Фурье функции $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ быстро сходится, т. е. $f - f_n \in J(\mathbb{S}^1)$.

Заметим, что при этом способе для гладких функций $f_n(z)g_n(z) \neq (fg)_n$, а равенство (7.10) выполняется только в фактор-алгебре, т. е. $f_n(z)g_n(z) - (fg)_n \in J(\mathbb{S}^1)$.

Распределению δ_ξ соответствует аппроксимирующая последовательность

$$\psi_n(\xi z) = \sum_{-n}^{n} \xi^{-k} z^k = \frac{\xi^{2n+1} - z^{2n+1}}{(\xi z)^n (\xi - z)}.$$

Поэтому произведению $\delta_\xi\ \delta_1$ соответствует последовательность

$$\psi_n(\xi z)\psi_n(z) = \frac{\xi^{2n+1} - z^{2n+1}}{(\xi z)^n (\xi - z)} \times \frac{z^{n+1} - z^{-n}}{z - 1},$$

которая не стремится к нулю и, следовательно, не принадлежит идеалу $J(\mathbb{S}^1)$. □

8.3. Совместная локальность и согласованность с умножением гладких функций. Согласно результатам предыдущего раздела, если рассматривать вложения, порожденные финитными функциями, то выполнено свойство локальности умножения, но для существования вложения, при котором также имеет место согласование с умножением (условие (7.9)), требуется алгебра, устроенная более сложно, чем $G(\mathbb{S}^1)$. А вложение, порожденное частичными суммами ряда Фурье, согласовано с умножением, но не обладает свойством локальности. Покажем, что существуют вложения в $G(\mathbb{S}^1)$, обладающие одновременно двумя указанными свойствами. Такие вложения удается построить, если отказаться от требования финитности функции ψ.

Рассмотрим пространство Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, т. е. множество функций, бесконечно дифференцируемых и убывающих на бесконечности быстрее любой степени $\dfrac{1}{t}$. Для функций из этого пространства ситуация отлична от описанной в лемме 8.2.

Лемма 8.5. *В пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{S}^1)$ существуют функции ψ, такие, что*

$$M_0(\psi) = 1, \quad M_j(\psi) = 0 \quad \textit{для } j \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Преобразование Фурье биективно отображает пространство $\mathcal{S}(\mathbb{S}^1)$ в себя. В этом пространстве существуют такие функции, что $\varphi(\xi) = 1$ в некоторой окрестности $(-\gamma, \gamma)$ точки 0. Тогда для функции ψ, которая является обратным преобразованием Фурье такой φ, выполнены свойства из утверждения леммы. Действительно, как уже отмечалось, при преобразовании Фурье моменты функции ψ переходят в производные в нуле функции φ, которые есть нуль. □

Ниже для упрощения выражений считаем, что $\gamma = 1$. Отметим, что, в отличие от функций из $\mathcal{D}(\mathbb{S}^1)$, преобразование Фурье функции из $\mathcal{S}(\mathbb{S}^1)$ может быть бесконечно дифференцируемой, но не аналитической функцией. Именно такой является выбранная выше функция φ.

Выберем функцию ψ со свойствами, описанными в лемме 8.5, построим семейство функций

$$\psi_\varepsilon(z) = \sum_j \frac{1}{\varepsilon}\psi\Big(\frac{t + 2j\pi}{\varepsilon}\Big) \tag{8.7}$$

и зададим способ аппроксимации формулой (7.4), где свертка понимается в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$. В терминах коэффициентов Фурье это отображение действует по правилу

$$R_\psi : f = \sum_k C_k z^k \to f_\varepsilon = \sum_k \varphi(2\pi k\varepsilon) C_k z^k, \tag{8.8}$$

где φ есть преобразование Фурье функции ψ.

Теорема 8.4. *При указанном выборе функции ψ_0 для вложения* (8.8) *выполнено условие согласования* (7.9) *и свойство локальности умножения.*

Доказательство. В рассматриваемом случае, согласно лемме 8.2, асимптотическое разложение имеет вид $f_\varepsilon \sim f$. Это означает, что разность $f - f_\varepsilon$ убывает быстрее любой степени ε. Так как это верно для всех производных функции, получаем, что $f - f_\varepsilon$ принадлежит идеалу.

Для проверки локальности умножения рассмотрим свойства функции ψ_ε из (8.7) на периоде — отрезке $[-\pi, \pi]$. Пусть $(-\gamma, \gamma)$ окрестность точки 0. Так как для любого p выполнено неравенство

$$|\psi(t)| \leqslant \frac{C}{(1 + |t|)^p},$$

для слагаемого из (8.7) имеем оценку

$$\Big|\frac{1}{\varepsilon}\psi\Big(\frac{t+2j\pi}{\varepsilon}\Big)\Big| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\frac{C}{\big(1+\frac{|t+2j\pi|}{\varepsilon}\big)^p} \leqslant \frac{C}{|t+2j\pi|^p}\varepsilon^{p-1}.$$

Поэтому

$$\sum_{j\neq 0}\frac{1}{\varepsilon}\psi\Big(\frac{t+2j\pi}{\varepsilon}\Big) \leqslant C\sum_{j\neq 0}\frac{1}{|t+2j\pi|^p}\varepsilon^{p-1} = C_1\varepsilon^{p-1}.$$

При $j=0$ для соответствующего слагаемого получаем

$$\frac{1}{\varepsilon}\Big|\psi\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)\Big| \leqslant \begin{cases} \dfrac{C_2}{\varepsilon}, & |t|\leqslant\gamma,\\ \dfrac{C}{\gamma}\varepsilon^{p-1}, & |t|\geqslant\gamma. \end{cases}$$

Таким образом, вне любой окрестности нуля функции ψ_ε убывают быстрее любой степени ε. Поэтому при любом $t_0\neq 0$ произведение $\psi_\varepsilon(t)\times\psi_\varepsilon(t-t_0)$ убывает быстрее любой степени ε и, следовательно, принадлежит идеалу. □

9. Аналитическое представление распределений и порожденное им умножение

Рассмотрим еще один способ аппроксимации, часто используемый в анализе, основанный на известном аналитическом представлении распределений [9]. При таких аппроксимациях удается получить более явные результаты в задаче умножения распределений. В случае окружности аналитическое представление задается следующим образом. Рассмотрим разложение произвольного распределения f в ряд Фурье и запишем два оператора

$$(P^+f)(z) := f^+(z) = \sum_0^\infty C_k z^k, \tag{9.1}$$

$$(P^-f)(z) := f^-(z) = \sum_{-\infty}^{-1} C_k z^k. \tag{9.2}$$

Из оценки коэффициентов C_k следует, что для любого $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{S}_1)$ ряд (9.1) сходится в круге $|z|<1$, его сумма $f^+(z)$ является аналитической функцией, а ряд (9.2) сходится при $|z|>1$ и его сумма $f^-(z)$ является функцией, аналитической при $|z|>1$ и стремящейся к нулю на бесконечности.

Таким образом, определено вложение $f\to(P^+f,P^-f)=(f^+,f^-)$ пространства распределений в пространство $\mathcal{A}(\mathbb{S}^1)$ кусочно аналитических функций, т. е. пар (f^+,f^-), где функция $f^+(z)$ аналитическая при $|z|<1$, а $f^-(z)$ — при $|z|>1$. При этом аналитические функции $f^\pm(z)$ не произвольные, а такие, что при их разложении в степенной ряд коэффициенты растут не быстрее некоторой степени k.

Пара функций (f^+,f^-) называется *аналитическим представлением* распределения f, так как f выражается через эти функции по формуле

$$< f,\varphi >= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{S}^1}\Big[f^+((1-\varepsilon)z)+f^-\Big(\frac{z}{1-\varepsilon}\Big)\Big]\varphi(z)|dz|. \tag{9.3}$$

Распределения, имеющие аналитическое представление $(f^+,0)$ будем называть *положительными*, а имеющие представление $(0,f^-)$ — *отрицательными*.

Не любая пара (f^+,f^-), где функция $f^+(z)$ аналитическая при $|z|<1$, а $f^-(z)$ — при $|z|>1$, задает аналитическое представление распределения на окружности. Покажем, что функции $f^\pm(z)$, задающие такое представление, могут быть охарактеризованы в терминах скорости роста при $|z|\to 1$, а именно, это функции степенного роста, т. е. допускающие оценку

$$|f(z)| \leqslant \frac{M}{(1-|z|)^m}. \tag{9.4}$$

Рассматриваемый вопрос есть частный случай общей задачи об установлении связей между поведением аналитической функции и поведением коэффициентов соответствующего степенного ряда.

Наиболее известный результат в этом направлении заключается в установлении связи между порядком и типом целой функции и поведением коэффициентов при ее разложении [20]. Для функций, аналитических в круге, аналогичный результат получен в [6]. Для функций, аналитических в круге и имеющих степенной рост, описание поведения коэффициентов считается известным, но не включено в стандартную литературу по теории аналитических функций. Для полноты изложения приведем здесь соответствующее утверждение с доказательством.

Теорема 9.1. *Пусть* $f(z)=\sum\limits_0^\infty a_k z^k$ *причем ряд сходится при* $|z|<1$. *Последовательность коэффициентов допускает степенную оценку тогда и только тогда, когда при* $|z|\to 1$ *функция* f *имеет рост не выше степенного.*

Доказательство. Пусть выполнена оценка (9.4). Тогда, согласно неравенству Коши,

$$|C_k|\leqslant\frac{M}{(1-|z|)^m|z|^k}.$$

В частности, положив $z=1-\dfrac{1}{k}$, получаем

$$|C_k|\leqslant\frac{Mk^m}{(1-\frac{1}{k})^k}\leqslant 4Mk^m.$$

Для получения утверждения в обратную сторону, воспользуемся утверждением из [14], говорящим, что сумма ряда

$$\sum_1^\infty k^\alpha z^k,\ \alpha>0,$$

является аналитической функцией при $|z|=1, z\neq 1$ и асимптотически ведет себя в окрестности точки $z=1$ как

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-|z|)^{\alpha+1}}.$$

Поэтому, если имеет место оценка $|C_k|\leqslant Mk^m,\ k>0$, то

$$|f(z)|\leqslant|a_0|+\sum_1^\infty Mk^m|z|^k\leqslant M_0+\frac{\widetilde{M}}{(1-|z|)^{m+1}},$$

т. е. функция имеет рост не выше степенного. □

Аналитическое представление порождает естественную аппроксимацию распределения f: равенство (9.3) означает, что семейство гладких функций

$$R_a(f)=f_\varepsilon(z)=f^+((1-\varepsilon)z)+f^-\Big(\frac{z}{1-\varepsilon}\Big) \tag{9.5}$$

сходится к f.

Теорема 9.2. *Формула* $R_a(f)=f_\varepsilon(z)$, *где функции* $f_\varepsilon(z)$ *заданы* (9.5), *задает инвариантное вложение пространства* $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ *в алгебру мнемофункций. Условие согласования с умножением* (7.10) *выполнено для пар положительных распределений, имеющих представление* $f=(f^+,0)$, $g=(g^+,0)$, *где функции* f^+ *и* g^+ *непрерывны в замкнутом круге, а также для пар отрицательных распределений вида* $f=(0,f^-)$, $g=(0,g^-)$, *где* f^- *и* g^- *непрерывны при* $|z|\geqslant 1$.

Доказательство. Из теоремы 9.1 следует, что семейство гладких функций $f_\varepsilon(z)$ имеет степенной рост и, значит, задает мнемофункцию.

Для функций $z^k,\ k\geqslant 0$ равенство (7.10) проверяется непосредственно. Действительно, пусть $f(z)=z^k$, $g(z)=z^m$, $f(z)g(z)=z^{k+m}$. Тогда $R_a(f)=(1-\varepsilon)^kz^k$, $R_a(g)=(1-\varepsilon)^mz^m$, $R_a(fg)=(1-\varepsilon)^{k+m}z^{k+m}$, и равенство $R_a(fg)=R_a(f)R_a(g)$, очевидно, выполнено. Из этого следует, что требуемое равенство выполнено для многочленов, откуда, переходя к пределу, получаем требуемое свойство для функций f^+ и g^+, непрерывных в замкнутом круге. Для пар функций, имеющих представление $f=(0,f^-)$, $g=(0,g^-)$, доказывается аналогично. □

Для дельта-функции рассматриваемое аппроксимирующее семейство имеет вид

$$R_a(\delta_1) = \psi_\varepsilon(z) = \frac{1}{1-(1-\varepsilon)z} + \frac{1-\varepsilon}{z-(1-\varepsilon)}, \tag{9.6}$$

поэтому рассматриваемый способ аппроксимации задается как свертка $R_a(f) = f * \psi_\varepsilon$.

Отметим, что при рассматриваемом способе аппроксимации равенство (7.9) не выполнено. Действительно, функции $f(z) = z$ соответствует мнемофункция $f_\varepsilon(z) = (1-\varepsilon)z$, при этом $f(z) - f_\varepsilon(z) = \varepsilon z$, откуда следует, что эта разность не принадлежит идеалу — она стремится к нулю как ε, а элементы идеала стремятся к нулю быстрее любой степени ε.

Из доказательства теоремы видно, что здесь равенство (7.10) выполнено не только в фактор-алгебре, но и на уровне представителей из классов эквивалентности, т. е. для непрерывных f^+ и g^+ имеем

$$(f^+ * \psi_\varepsilon) \times (g^+ * \psi_\varepsilon) = (f^+g^+) * \psi_\varepsilon.$$

Возникает вопрос: существуют ли другие функции $\gamma \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$, такие, что

$$(f^+ * \gamma) \times (g^+ * \gamma) = (f^+g^+) * \gamma? \tag{9.7}$$

Следующая теорема утверждает, что это практически единственный случай.

Теорема 9.3. *Если функция $\gamma(z)$ такова, что равенство* (9.7) *выполнено для всех гладких функций $f = (f^+, 0)$, то при некоторых ε и ξ, $|\xi| = 1$, имеем*

$$\gamma(z) = \frac{1}{1-(1-\varepsilon)\xi z} + g(z),$$

где $g = (0, g^-)$.

Доказательство. Пусть $\gamma(z) = \sum A_k z^k$. Заметим, что для функции f указанного вида свертка с $\gamma(z)$ не зависит от коэффициентов разложения $\gamma(z)$ с отрицательными номерами. Поэтому функцию

$$g^-(z) = \sum_{-\infty}^{-1} A_k z^k$$

можно выбирать произвольным образом. Тогда $z^k * \gamma(z) = A_k z^k$, $z^m * \gamma(z) = A_m z^m$, $z^{k+m} * \gamma(z) = A_{k+m} z^{k+m}$. Из (9.7) следует, что для коэффициентов разложения выполнено $A_{k+m} = A_k A_m$. При $k = 0$ получаем, что $A_0 = 1$. Пусть $A_1 = r\xi$, где $|\xi| = 1$, тогда $A_k = r^k \xi^k$, причем для сходимости ряда должно быть $r < 1$. Таким образом, обозначив $1 - r = \varepsilon$, получаем требуемое представление $\gamma(z)$. □

При аналитическом представлении пространство распределений отождествляется с множеством пар аналитических функций (f^+, f^-), описанных выше. Произведение мнемофункций $f_\varepsilon(z) g_\varepsilon(z)$ при каждом ε также имеет аналитическое представление $(h_\varepsilon^+(z), h_\varepsilon^-(z))$, где функции $h_\varepsilon^\pm(z)$ аналитически зависят от z.

Рассмотрим такое произведение более детально. Так как вложение фиксировано, то произведение распределений f и g будем обозначать $f \times g$ или fg. Тогда результат умножения распределений $(f^+, f^-) \times (g^+, g^-)$ может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} R_a(f)R_a(g) &= \Big[f^+((1-\varepsilon)z) + f^-\Big(\frac{z}{1-\varepsilon}\Big)\Big]\Big[g^+((1-\varepsilon)z) + g^-\Big(\frac{z}{1-\varepsilon}\Big)\Big] = \\ &= f^+((1-\varepsilon)z)g^+((1-\varepsilon)z) + f^-\Big(\frac{z}{1-\varepsilon}\Big)g^+((1-\varepsilon)z) + \\ &\quad + f^+((1-\varepsilon)z)g^-\Big(\frac{z}{1-\varepsilon}\Big) + f^-\Big(\frac{z}{1-\varepsilon}\Big)g^-\Big(\frac{z}{1-\varepsilon}\Big). \end{aligned} \tag{9.8}$$

Здесь

$$f^+((1-\varepsilon)z)g^+((1-\varepsilon)z) = R_a(f^+g^+, 0),$$

$$f^-\Big(\frac{z}{1-\varepsilon}\Big)g^-\Big(\frac{z}{1-\varepsilon}\Big) = R_a(0, f^-g^-),$$

т. е. сумма первого и четвертого слагаемых есть аналитическое представление распределения, заданного парой (f^+g^+, f^-g^-). При фиксированном ε сумма двух остальных слагаемых

$$\gamma_\varepsilon(z) := f^-\Big(\frac{z}{1-\varepsilon}\Big)g^+((1-\varepsilon)z) + f^+((1-\varepsilon)z)g^-\Big(\frac{z}{1-\varepsilon}\Big) \tag{9.9}$$

есть функция, аналитическая в кольце

$$K_\varepsilon = \Big\{z:\ 1-\varepsilon < |z| < \frac{1}{1-\varepsilon}\Big\}.$$

Ее аналитическое представление задается с помощью применения операторов $P^\pm$. Таким образом, в пространстве $\mathcal{A}(\mathbb{S}^1)$ кусочно аналитических функций, т. е. пар (f^+, f^-), задающих аналитическое представление, умножение действует по следующему правилу.

Теорема 9.4. *В пространстве кусочно аналитических функций, т. е. пар (f^+, f^-), задающих аналитическое представление, результат умножения $(f^+, f^-)\times(g^+, g^-)$ может быть представлен в виде*

$$R_a(f)R_a(g) = h^+_\varepsilon(z) + h^-_\varepsilon(z), \tag{9.10}$$

где

$$h^+_\varepsilon(z) = R_a(f^+g^+, 0) + P^+(\gamma_\varepsilon(z)), \tag{9.11}$$

$$h^-_\varepsilon(z) = R_a(0, f^-g^-) + P^-(\gamma_\varepsilon(z)). \tag{9.12}$$

Следствие 9.1. *Если $f = (f^+, 0)$, $g = (g^+, 0)$, то $(f^+, 0)\times(g^+, 0) = (f^+g^+, 0)$.*

Следствие 9.2. *Если $f = (0, f^-)$, $g = (0, g^-)$, то $(0, f^-)\times(0, g^-) = (0, f^-g^-)$.*

10. Алгебра рациональных мнемофункций на окружности

Распределение $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ будем называть *рациональным*, если при его аналитическом представлении функции $f^\pm$ являются рациональными. Заметим, что любая пара рациональных функций $f^\pm$, таких, что f^+ аналитична при $|z|<1$, а f^- аналитична при $|z|>1$, задает аналитическое представление некоторого распределения. Поэтому подпространство $\mathcal{D}'_R(\mathbb{S}^1)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$, состоящее из рациональных распределений, изоморфно пространству пар (f^+, f^-) указанных рациональных функций.

Выделение таких распределений мотивируется двумя причинами. Во-первых, многие наиболее употребительные распределения являются рациональными, и в приложениях вопрос о придании смысла произведению возникает именно для таких распределений. В частности, аналитическое представление δ_ξ есть

$$\delta_\xi = \Big(-\frac{\xi}{z-\xi}, \frac{\xi}{z-\xi}\Big), \tag{10.1}$$

а аналитическое представление $\mathcal{P}\Big(\dfrac{1}{z-\xi}\Big)$ есть

$$\mathcal{P}\Big(\frac{1}{z-\xi}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{z-\xi}, \frac{1}{z-\xi}\Big), \tag{10.2}$$

откуда видно, что эти распределения являются рациональными.

Во-вторых, как будет показано ниже, правило умножения таких распределений задается в явном виде, что позволяет получить более конкретные результаты, чем в общем случае.

Рациональное распределение с аналитическим представлением $\Big(\dfrac{1}{(z-\xi)^n}, 0\Big)$, $|\xi|\geqslant 1$, будем обозначать $\dfrac{1}{(z-\xi)^{n+}}$, а через $\dfrac{1}{(z-\eta)^{m-}}$ — распределение с аналитическим представлением $\Big(0, \dfrac{1}{(z-\eta)^m}\Big)$, $|\eta|\leqslant 1$. Для многочленов $p(z)$ рассматриваем вложение в алгебру с помощью аналитического представления $(p(z), 0)$, тогда соответствующая мнемофункция есть $p_\varepsilon(z) = p((1-\varepsilon)z)$.

Согласно следствию 9.1, произведение $(f^+, 0)\times(g^+, 0)$ определено для любых функций f^+ и g^+, аналитических в области $|z|<1$, и при этом

$$(f^+, 0)\times(g^+, 0) = (f^+g^+, 0). \tag{10.3}$$

В частности
$$(z,0)\times\Big(\frac{1}{z-\xi},0\Big)=\Big(\frac{z}{z-\xi},0\Big).$$
Обратим внимание на то, что
$$\frac{z}{z-\xi}=1+\frac{\xi}{z-\xi},$$
т. е. умножение на z сводится к умножению на постоянную и добавлению 1. Используя эту формулу, получаем далее
$$(z^2,0)\times\Big(\frac{1}{z-\xi},0\Big)=(z,0)\times\Big(1+\frac{\xi}{z-\xi},0\Big)=\Big(z+\xi\Big(1+\frac{\xi}{z-\xi}\Big),0\Big)=\Big(z+\xi+\frac{\xi^2}{z-\xi},0\Big).$$

Аналогично, по следствию 9.2
$$(0,f^-)\times(0,g^-)=(0,f^-g^-) \tag{10.4}$$
для любых функций f^- и g^-, аналитических в области $|z|>1$.

Поэтому для задания правила умножения рациональных распределений достаточно найти произведение элементов вида $(f^+,0)\times(0,g^-)$.

Рассмотрим сначала произведения распределений $\dfrac{1}{(z-\xi)^+}$ и $\dfrac{1}{(z-\eta)^-}$. Напомним, что разложения в ряд Фурье для этих распределений имеют вид
$$\frac{1}{(z-\xi)^+}=-\sum_{0}^{+\infty}\xi^{-k-1}z^k;\quad \frac{1}{(z-\eta)^-}=\sum_{-\infty}^{-1}\eta^{-k-1}z^k. \tag{10.5}$$
Следующая лемма описывает произведение таких распределений.

Лемма 10.1. *Если* $|\xi|\leqslant 1$, $|\eta|\geqslant 1$ *то*
$$\Big(\frac{1}{z-\xi},0\Big)\times\Big(0,\frac{1}{z-\eta}\Big)=\Big(\frac{C_1(r;\xi;\eta)}{z-\xi},\frac{C_2(r;\xi;\eta)}{z-\eta}\Big), \tag{10.6}$$
где $C_1(r;\xi;\eta)=\dfrac{r^2}{\xi-\eta r^2}$, $C_2(r;\xi;\eta)=\dfrac{1}{\eta r^2-\xi}$.

Доказательство. Мнемофункция, соответствующая распределению $\dfrac{1}{(z-\xi)^+}$, имеет вид
$$R_a\Big(\frac{1}{(z-\xi)^+}\Big)=\frac{1}{rz-\xi},$$
где $r=1-\varepsilon$. Для $\dfrac{1}{(z-\eta)^-}$ мнемофункция, или аппроксимирующее семейство, есть
$$R_a\Big(\frac{1}{(z-\eta)^-}\Big)=\frac{1}{\frac{z}{r}-\eta}.$$

Их произведение есть семейство гладких функций на окружности
$$R_a\Big(\frac{1}{(z-\xi)^+}\Big)R_a\Big(\frac{1}{(z-\eta)^-}\Big)=\frac{1}{rz-\xi}\frac{1}{\frac{z}{r}-\eta}. \tag{10.7}$$

Согласно правилу умножения в пространстве кусочно-аналитических функций (теореме 9.4), при каждом ε для функции (10.7) нужно построить аналитическое представление, т. е. применить операторы $P^{\pm}$. Основное упрощение для рассматриваемых функций заключается в том, что применение этих операторов равносильно разложению произведения конкретных рациональных функций на сумму элементарных дробей, что осуществляется с помощью простых вычислений. В результате получаем
$$\frac{1}{rz-\xi}\frac{1}{\frac{z}{r}-\eta}=C_1(r;\xi;\eta)\frac{1}{rz-\xi}+C_2(r;\xi;\eta)\frac{1}{\frac{z}{r}-\eta}, \tag{10.8}$$
где
$$C_1(r;\xi;\eta)=\frac{r^2}{\xi-\eta r^2};\quad C_2(r;\xi;\eta)=\frac{1}{\eta r^2-\xi}$$

и эти коэффициенты связаны соотношением $C_1(r;\xi;\eta) = -r^2C_2(r;\xi;\eta)$. Правая часть равенства (10.8) есть аппроксимирующее семейство для (10.6), что и требовалось показать. □

Рассмотрим отдельно произведение в смысле мнемофункций для распределений z^+ и $\dfrac{1}{(z-\eta)^-}$, так как оно не согласованно с обычным умножением гладкой функции на распределение.

Лемма 10.2. *Если* $|\eta| \leqslant 1$, *то*

$$(z,0)\times\Big(0,\frac{1}{z-\eta}\Big) = \Big(r^2, \frac{\eta r^2}{z-\eta}\Big); \tag{10.9}$$

$$(z^n,0)\times\Big(0,\frac{1}{z-\eta}\Big) = \Big(\sum_{k=0}^{n-1} z^k r^{2(n-k)}\eta^{n-k-1}, \frac{\eta^n r^{2n}}{z-\eta}\Big). \tag{10.10}$$

Доказательство. Рассмотрим произведение аппроксимирующих семейств

$$R_a(z^+)R_a\Big(\frac{1}{(z-\eta)^-}\Big) = rz\frac{1}{\frac{z}{r}-\eta} = r^2 + \frac{\eta r^2}{\frac{z}{r}-\eta}.$$

Последнее равенство здесь соответствует применению операторов $P^{\pm}$.

При вычислении произведения $(z^n,0)\times\Big(0,\dfrac{1}{z-\eta}\Big)$ возникают другие выражения. Аппроксимирующее семейство для распределения $(z^n,0)$ есть r^nz^n, поэтому при умножении аппроксимаций получаем семейство гладких функций

$$r^nz^n\times\frac{1}{\frac{z}{r}-\eta},$$

аналитическое представление которых содержит положительные и отрицательные компоненты. Здесь искомый результат можно получить с помощью процедуры деления многочленов с остатком:

$$r^n\times\frac{z^n}{\frac{z}{r}-\eta} = p_{n-1}(rz) + M\frac{1}{\frac{z}{r\eta}-1},$$

где число $M=\eta^n r^{2n}$, а $p_{n-1}(z)$ есть многочлен степени $n-1$ переменной z с коэффициентами, зависящими от r и от η. Эти коэффициенты могут быть найдены непосредственным делением или с помощью метода неопределенных коэффициентов, но наиболее просто требуемое выражение получается с помощью разложения в ряд Фурье. Если

$$\frac{1}{(z-\eta)^-} = \sum_{-\infty}^{-1}\eta^{-k-1}z^k,$$

то

$$r^nz^n\times\frac{1}{\frac{z}{r}-\eta} = \sum_{k=0}^{n-1}(rz)^k r^{2(n-k)}\eta^{n-1-k} + r^{2n}\eta^n\frac{1}{\frac{z}{r\eta}-1}.$$

Последнее выражение является аппроксимирующим семейством для распределения с аналитическим представлением (10.10). □

Следующая теорема полностью описывает алгебру, порожденную рациональными мнемофункциями.

Теорема 10.1. *Векторное пространство* $\mathcal{R}(\mathbb{S}^1)$, *состоящее из элементов вида*

$$\sum_{k=0}^{m}A_k^+(\varepsilon)(1-\varepsilon)^kz^k + \sum_{k=1}^{n^+}\sum_{j=1}^{p_k^+}\frac{B_{kj}^+(\varepsilon)}{((1-\varepsilon)z-\xi_k)^j} + \sum_{k=1}^{n^-}\sum_{k=1}^{p_k^-}\frac{B_{kj}^-(\varepsilon)}{(\frac{z}{1-\varepsilon}-\eta_k)^j}, \tag{10.11}$$

где $|\xi_k|\geqslant 1$, $|\eta_k|\leqslant 1$, $A_k^+(\varepsilon)$, $B_{kj}^+(\varepsilon)$, $B_{kj}^-(\varepsilon)\in\mathbb{C}^*$, *является наименьшей алгеброй, содержащей все мнемофункции* $R_a(f)$, $f\in\mathcal{D}'_R(\mathbb{S}^1)$, *и обобщенные числа. В этой алгебре элементы вида* $\dfrac{1}{(z-\xi)^+}$, $\dfrac{1}{(z-\eta)^-}$ *и* z^+ *являются образующими, а закон умножения задается однозначно соотношениями* (10.3), (10.4), (10.6), (10.9).

Доказательство. Так как над полем комплексных чисел только многочлен первой степени является неприводимым, то любую рациональную функцию можно представить в виде линейной комбинации элементарных дробей: если

$$Q(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - z_i)^{p_i},$$

то

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{0}^{m} A_k z^k + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \frac{B_{ij}}{(z - z_i)^j}, \qquad A_k,\ B_{ij} \in \mathbb{C},\ z_i \in \mathbb{C}.$$

При аналитическом представлении рационального распределения $f = (f^+, f^-)$ функция f^+ является аналитической при $|z| < 1$, поэтому, если она рациональна, ее разложение на элементарные дроби имеет вид

$$f^+(z) = \sum_{0}^{m} A_k^+ z^k + \sum_{k=1}^{n^+} \sum_{j=1}^{p_k^+} \frac{B_{kj}^+}{(z - \xi_k)^j}, \quad \text{где} \quad |\xi_k| \geqslant 1. \tag{10.12}$$

Рациональная функция f^- является аналитической при $|z| > 1$ и стремится к нулю на бесконечности, поэтому ее разложение на элементарные дроби следующее:

$$f^-(z) = \sum_{k=1}^{n^-} \sum_{j=1}^{p_k^-} \frac{B_{kj}^-}{(z - \eta_k)^j}, \quad \text{где} \quad |\eta_k| \leqslant 1. \tag{10.13}$$

Таким образом, умножение аппроксимаций, порожденных аналитическими представлениями рациональных распределений, сводится к вычислению произведений (в указанном выше смысле) слагаемых в приведенных формулах (10.12) и (10.13), т. е. элементарных дробей и z^k.

Как было отмечено ранее, для положительных распределений имеем

$$(f^+, 0) \times (g^+, 0) = (f^+ g^+, 0).$$

Соответственно,

$$(0, f^-) \times (0, g^-) = (0, f^- g^-).$$

Поэтому вопрос сводится к вычислению произведений положительных элементов на отрицательные. В рассматриваемом случае рациональных распределений это произведения вида $(f^+, 0) \times (0, g^-)$, где f^+ есть элементарная дробь или функция z^k, а g^- есть элементарная дробь.

Для случая, когда $f^+ = \dfrac{1}{z - \xi}$, $g^- = \dfrac{1}{z - \eta}$, такое произведение описано в лемме 10.1 и находится по формуле (10.6). Произведения элементарных дробей других степеней, т. е. когда $f^+ = \dfrac{1}{(z - \xi)^n}$, $g^- = \dfrac{1}{(z - \eta)^m}$, вычисляются с помощью рекуррентных соотношений через произведения первых степеней, т. е. с помощью равенства (10.6). Например, при $n = 1$, $m = 2$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-\xi)^+} \frac{1}{(z-\eta)^{2-}} &= \left[\frac{1}{(z-\xi)^+} \frac{1}{(z-\eta)^-} \right] \frac{1}{(z-\eta)^-} = \left(\frac{c_1(\varepsilon;\xi;\eta)}{z-\xi}, \frac{c_2(\varepsilon;\xi;\eta)}{z-\eta} \right) \times \left(0, \frac{1}{z-\eta} \right) = \\ &= \left(\frac{c_1^2(\varepsilon;\xi;\eta)}{z-\xi}, \frac{c_1(\varepsilon;\xi;\eta) c_2(\varepsilon;\xi;\eta)}{z-\eta} + \frac{c_2(\varepsilon;\xi;\eta)}{(z-\eta)^2} \right). \end{aligned} \tag{10.14}$$

А при $n = 2$, $m = 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-\xi)^{2+}} \frac{1}{(z-\eta)^-} &= \left(\frac{c_1(\varepsilon;\xi;\eta)}{z-\xi}, \frac{c_2(\varepsilon;\xi;\eta)}{z-\eta} \right) \times \left(\frac{1}{z-\xi}, 0 \right) = \\ &= \left(\frac{c_1(\varepsilon;\xi;\eta)}{(z-\xi)^2} + \frac{c_1(\varepsilon;\xi;\eta) c_2(\varepsilon;\xi;\eta)}{z-\xi}, \frac{c_2^2(\varepsilon;\xi;\eta)}{z-\eta} \right). \end{aligned}$$

Значит, равенство (10.6) задает правило умножения распределений $\dfrac{1}{(z-\xi)^{n+}}$, $\dfrac{1}{(z-\eta)^{m-}}$.

Правило умножения z^+ на $\dfrac{1}{(z-\eta)^-}$ описано в лемме 10.2 и находится через соотношение (10.9). Тут и далее $r=1-\varepsilon$. Как было показано ранее, из него получаем формулу умножения на степень z^+, соотношение (10.10), и формулы для умножения z на степени $\dfrac{1}{(z-\eta)^-}$, например,

$$z^+\times\frac{1}{(z-\eta)^{2-}}=\Big[z^+\frac{1}{(z-\eta)^-}\Big]\frac{1}{(z-\eta)^-}=\Big(r^2,\frac{\eta r^2}{z-\eta}\Big)\times\Big(0,\frac{1}{z-\eta}\Big)=\Big(0,\frac{\eta r^2}{(z-\eta)^2}+\frac{r^2}{z-\eta}\Big).$$

Произведения других степеней определяются аналогично.

Таким образом, произведение элементов вида (10.11) вычисляется на основе соотношений (10.6), (10.9) и является элементом из $\mathcal{R}(\mathbb{S}^1)$. Так как элементы вида (10.11) принадлежат любой алгебре, содержащей все мнемофункции $R_a(f),\ f\in\mathcal{D}'_R(\mathbb{S}^1)$ и обобщенные числа, получаем, что $\mathcal{R}(\mathbb{S}^1)$ есть наименьшая такая подалгебра. □

Как отмечалось при описании общего подхода, наглядное описание произведения дает его асимптотическое разложение. Начнем с исследования поведения найденных выше произведений вида $\dfrac{1}{(z-\xi)^+}\times\dfrac{1}{(z-\eta)^-}$.

Утверждение 10.1. *Если $\xi\neq\eta$, то имеет место асимптотическое разложения произведения*

$$\frac{1}{(z-\xi)^+}\times\frac{1}{(z-\eta)^-}=u_0+\varepsilon u_1+\dots,$$

где u_0 есть распределение с аналитическим представлением

$$u_0=\Big(\frac{1}{\xi-\eta}\frac{1}{z-\xi},\frac{1}{\eta-\xi}\frac{1}{z-\eta}\Big),$$

а распределение u_1 имеет аналитическое представление

$$u_1=\Big(-\frac{2\xi}{(\xi-\eta)^2}\frac{1}{z-\xi},\frac{2\eta}{(\xi-\eta)^2}\frac{1}{z-\eta}\Big).$$

Доказательство. Если $\xi\neq\eta$, то существует конечный предел коэффициентов $C_1(r;\xi;\eta)$ и $C_2(r;\xi;\eta)$ при $r\to1$, т. е. их разложения начинаются с (конечного) числа, а именно

$$C_1(r;\xi;\eta)=\frac{r^2}{\xi-\eta r^2}=\frac{1}{\xi-\eta}-\frac{2\xi}{(\xi-\eta)^2}\varepsilon+\dots;$$

$$C_2(r;\xi;\eta)=\frac{1}{\eta r^2-\xi}=\frac{1}{\eta-\xi}+\frac{2\eta}{(\xi-\eta)^2}\varepsilon+\dots.$$

Поэтому при условии, что $\xi\neq\eta$, мнемофункция вида (10.7) ассоциирована с распределением u_0, имеющим аналитическое представление

$$u_0=\Big(\frac{1}{\xi-\eta}\frac{1}{z-\xi},\frac{1}{\eta-\xi}\frac{1}{z-\eta}\Big),$$

а второй член разложения в пространстве мнемофункции имеет вид $\varepsilon R_a(u_1)$, где u_1 имеет аналитическое представление

$$u_1=\Big(-\frac{2\xi}{(\xi-\eta)^2}\frac{1}{z-\xi},\frac{2\eta}{(\xi-\eta)^2}\frac{1}{z-\eta}\Big).$$

□

Здесь обратим внимание на то, что если $|\xi|>1$, то $f(z)=\dfrac{1}{z-\xi}$ является гладкой функцией на окружности и первый член разложения u_0 есть произведение распределения $g=\dfrac{1}{(z-\eta)^-}$ на эту гладкую функцию в смысле умножения в пространстве распределений. Таким образом, здесь разность $R_a(fg)-R_a(f)R_a(g)$ отлична от нуля, но является бесконечно малой. Это еще раз показывает, что при рассматриваемом вложении нет согласованности с умножением в пространстве распределений (условие (7.8) не выполнено), но указанная разность ассоциирована с нулем, т. е. при переходе к алгебре мнемофункций умножение корректируется с помощью добавления бесконечно малых.

Если $|\xi|>1$, а $|\eta|<1$, то обе функции f и g являются гладкими на окружности, но из сказанного выше следует, что при рассматриваемом вложении условие Коломбо (7.10) согласованности с умножением гладких функций также не выполнено.

Обратим внимание также на случай, когда $\xi\neq\eta$, но при этом $|\xi|=1$ и $|\eta|=1$. Тогда оба распределения f и g имеют сингулярности на окружности, их произведение в смысле распределений не определено, но произведение в смысле мнемофункций ассоциировано с распределением u_0. Это является подтверждением общепринятого мнения, что если множества точек сингулярности двух распределений не пересекаются, то их произведение можно определить достаточно естественным образом. Однако следует отметить, что произведение может быть определено и в том случае, когда два распределения имеют общие особенности, например, если эти распределения положительны.

Качественно другую ситуацию имеем, если $\xi=\eta$, что возможно только в случае, когда $|\xi|=1$ и $|\eta|=1$. Тогда оба сомножителя имеют особенность в одной и той же точке.

Утверждение 10.2. *Произведение* $\dfrac{1}{(z-\xi)^+}\times\dfrac{1}{(z-\xi)^-}$ *имеет асимптотическое разложение*
$$\frac{1}{(z-\xi)^+}\times\frac{1}{(z-\xi)^-}=-\frac{1}{2\xi\varepsilon}\delta_\xi-\frac{3}{4\xi}\frac{1}{(z-\xi)^+}-\frac{1}{4\xi}\frac{1}{(z-\xi)^-}+o(1),$$
в котором главным членом является δ-функция с бесконечно большим коэффициентом.

Доказательство. В рассматриваемом случае коэффициенты $C_1(r)$ и $C_2(r)$ являются бесконечно большими при $r\to 1$ и имеют разложение
$$c_1(\varepsilon;\xi)=\frac{(1-\varepsilon)^2}{\xi(1-(1-\varepsilon)^2)}=\frac{1}{2\xi\varepsilon}-\frac{3}{4\xi}+\frac{1}{8\xi}\varepsilon+\frac{3}{16\xi}\varepsilon^2+\ldots;$$
$$c_2(\varepsilon;\xi)=\frac{1}{\xi((1-\varepsilon)^2-1)}=-\frac{1}{2\xi\varepsilon}-\frac{1}{4\xi}-\frac{1}{8\xi}\varepsilon-\frac{1}{16\xi}\varepsilon^2+\ldots. \tag{10.15}$$
Отсюда получаем асимптотическое разложение для произведения
$$\frac{1}{(z-\xi)^+}\frac{1}{(z-\xi)^-}=c_1(\varepsilon;\xi)\frac{1}{(z-\xi)^+}+c_2(\varepsilon;\xi)\frac{1}{(z-\xi)^-}= \tag{10.16}$$
$$=\frac{1}{2\xi\varepsilon}\Big[\frac{1}{(z-\xi)^+}-\frac{1}{(z-\xi)^-}\Big]-\frac{3}{4\xi}\frac{1}{(z-\xi)^+}-\frac{1}{4\xi}\frac{1}{(z-\xi)^-}+o\Big(1\Big)=$$
$$=-\frac{1}{2\xi\varepsilon}\delta_\xi-\frac{3}{4\xi}\frac{1}{(z-\xi)^+}-\frac{1}{4\xi}\frac{1}{(z-\xi)^-}+o(1).$$
□

11. Произведения, ассоциированные с распределениями

В общем случае произведение распределений f и g, порожденное заданным вложением, есть мнемофункция. В литературе особо выделяются пары распределений f и g, произведение которых ассоциировано с некоторым распределением u, так как тогда можно считать, что $f\times g=u$, т. е. произведением распределений является снова распределение. В общем случае вряд ли можно получить явное описание таких пар распределений. Но для пар рациональных распределений могут быть описаны все случаи, когда их произведение ассоциировано с распределением.

Как уже отмечалось, произведение рациональных распределений есть линейная комбинация произведений элементарных рациональных мнемофункций вида $\dfrac{1}{(z-\xi)^{n+}}$, $\dfrac{1}{(z-\eta)^{n-}}$ и z^{n+}. Согласно полученным выше утверждениям, каждое произведение $\dfrac{1}{(z-\xi)^{n+}}\times\dfrac{1}{(z-\eta)^{n-}}$ представляется в виде линейной комбинации элементарных рациональных мнемофункций с коэффициентами, зависящими от ε. При этом, если в соответствующее выражение для произведения входят члены вида $\dfrac{1}{(z-\xi)^{n+}}\times\dfrac{1}{(z-\xi)^{m-}}$, возникают слагаемые с бесконечно большими коэффициентами, которые не ассоциированы с распределениями. Однако такие слагаемые могут войти в окончательное представление для произведения несколько раз с разными коэффициентами. Таким образом, условие существования распределения, ассоциированного с соответствующим произведением, заключается в том, что сумма коэффициентов при каждом произведении указанного вида имеет конечный предел.

Отметим сразу один случай, когда это условие выполнено для произвольных мнемофункций. Если

$$f = f^+ + f^-, \quad g = t(f^+ - f^-), \text{ где } \quad t \in \mathbb{C}, \tag{11.1}$$

то $f \times g = t(f^+)^2 - t(f^-)^2$ и это произведение есть распределение, имеющее аналитическое представление $(t(f^+)^2, -t(f^-)^2)$.

В общем случае связь (11.1) между распределениями достаточна, но не является необходимой для того, чтобы произведение было ассоциировано с распределением. Сначала рассмотрим пример рациональных распределений, имеющих особенность только в одной точке, для которых условие (11.1) является и необходимым.

Теорема 11.1. *Пусть* $f = (f^+, f^-)$, $g = (g^+, g^-)$, *где*

$$f^\pm = \frac{A_1^\pm}{(z-1)^\pm} + \frac{A_2^\pm}{(z-1)^{2\pm}} \neq 0; \quad g^\pm = \frac{B_1^\pm}{(z-1)^\pm} + \frac{B_2^\pm}{(z-1)^{2\pm}}.$$

Произведение распределений f и g ассоциировано с некоторым распределением u_0 тогда и только тогда, когда при некотором t для коэффициентов выполнены соотношения

$$B_1^+ = tA_1^+, \quad B_2^+ = tA_2^+, \quad B_1^- = -tA_1^-, \quad B_2^- = -tA_2^-. \tag{11.2}$$

При выполнении этих условий распределение u_0 имеет аналитическое представление

$$u_0 = (f^+g^+, f^-g^-).$$

Доказательство. Имеем

$$f \times g = (f^+ + f^-) \times (g^+ + g^-) = f^+g^+ + f^-g^- + f^+g^- + g^+f^-.$$

Сумма $f^+g^+ + f^-g^-$ ассоциирована с распределением u_0, имеющим аналитическое представление $u_0 = (f^+g^+, f^-g^-)$, а бесконечно большие слагаемые появляются только в сумме двух последних слагаемых, которая имеет вид

$$f^+g^- + g^+f^- = \frac{A_2^+B_2^- + A_2^-B_2^+}{(z-1)^{2+}(z-1)^{2-}} +$$

$$+ \frac{A_2^+B_1^- + A_1^-B_2^+}{(z-1)^{2+}(z-1)^{-}} + \frac{A_1^+B_2^- + A_2^-B_1^+}{(z-1)^{+}(z-1)^{2-}} + \frac{A_1^+B_1^- + A_1^-B_1^+}{(z-1)^{+}(z-1)^{-}}.$$

Полученное выражение есть нуль, если все числа в числителях дробей являются нулями:

$$\begin{cases} A_2^+B_2^- + A_2^-B_2^+ = 0, \\ A_2^+B_1^- + A_1^-B_2^+ = 0, \\ A_1^+B_2^- + A_2^-B_1^+ = 0, \\ A_1^+B_1^- + A_1^-B_1^+ = 0. \end{cases} \tag{11.3}$$

Систему (11.3) можно исследовать следующим образом. Рассмотрим многочлены

$$f^+(x) = A_1^+x + A_2^+x^2; \quad f^-(y) = A_1^-y + A_2^-y^2;$$

$$g^+(x) = B_1^+x + B_2^+x^2; \quad g^-(y) = B_1^-y + B_2^-y^2.$$

Тогда система (11.3) равносильна условию, что

$$f^+(x)g^-(y) + g^+(x)f^-(y) = 0,$$

из которого, разделяя переменные, получаем условия пропорциональности многочленов

$$\frac{g^+(x)}{f^+(x)} = -\frac{g^-(y)}{f^-(y)} = t = const.$$

Далее покажем, что если равенства (11.3) не выполнены, то разложение $f^+g^- + g^+f^-$ содержит члены с бесконечно большими коэффициентами и, следовательно, не ассоциировано с каким-нибудь распределением. Действительно, согласно правилу умножения

$$f^+g^- + g^+f^- = (A_2^+B_2^- + A_2^-B_2^+)\left(\frac{c_1^2(\varepsilon)}{(z-1)^{2+}} + \frac{2c_1^2(\varepsilon)c_2(\varepsilon)}{(z-1)^+} + \frac{2c_1(\varepsilon)c_2^2(\varepsilon)}{(z-1)^-} + \frac{c_2^2(\varepsilon)}{(z-1)^{2-}}\right) +$$

$$+\Big[c_2(\varepsilon)(A_2^+B_1^- + A_1^-B_2^+) + c_1(\varepsilon)(A_1^+B_2^- + A_2^-B_1^+)\Big]\left(\frac{c_1(\varepsilon)}{(z-1)^+} + \frac{c_2(\varepsilon)}{(z-1)^-}\right) +$$

$$+(A_1^+B_1^- + A_1^-B_1^+)\left(\frac{c_1(\varepsilon)}{(z-1)^+} + \frac{c_2(\varepsilon)}{(z-1)^-}\right) + (A_2^+B_1^- + A_1^-B_2^+)\frac{c_1(\varepsilon)}{(z-1)^{2+}} + (A_1^+B_2^- + A_2^-B_1^+)\frac{c_2(\varepsilon)}{(z-1)^{2-}}.$$

Здесь слагаемые

$$\frac{2c_1(\varepsilon)c_2^2(\varepsilon)}{(z-1)^-} \quad \text{и} \quad \frac{2c_1^2(\varepsilon)c_2(\varepsilon)}{(z-1)^+}$$

линейно независимы и, так как коэффициенты $c_1(\varepsilon)$ и $c_2(\varepsilon)$ ведут себя как $\dfrac{1}{\varepsilon}$, только эти слагаемые имеют наибольшую скорость роста $\dfrac{1}{\varepsilon^3}$. Поэтому для существования ассоциированного распределения необходимо обращение в нуль коэффициента перед этими слагаемыми:

$$A_2^+B_2^- + A_2^-B_2^+ = 0.$$

Аналогично, слагаемые

$$(A_2^+B_1^- + A_1^-B_2^+)\frac{c_1(\varepsilon)}{(z-1)^{2+}} + (A_1^+B_2^- + A_2^-B_1^+)\frac{c_2(\varepsilon)}{(z-1)^{2-}}$$

растут как $\dfrac{1}{\varepsilon}$, линейно независимы между собой и с остальными слагаемыми, поэтому необходимо, чтобы

$$A_2^+B_1^- + A_1^-B_2^+ = 0, \quad A_1^+B_2^- + A_2^-B_1^+ = 0.$$

При выполнении этих условий остается только выражение

$$\frac{c_1(\varepsilon)}{(z-1)^+} + \frac{c_2(\varepsilon)}{(z-1)^-},$$

растущее как $\dfrac{1}{\varepsilon}$. Поэтому для существования распределения, ассоциированного с произведением, коэффициент при этом выражении также должен обратиться в нуль:

$$A_1^+B_1^- + A_1^-B_1^+ = 0.$$

Таким образом получаем, что условие (11.2) необходимо и достаточно для того, чтобы рассматриваемое произведение было ассоциировано с распределением u_0. □

Аналогично получаем необходимые и достаточные условия существования ассоциированного распределения для произведения произвольной пары рациональных распределений.

Пусть задан конечный набор комплексных чисел $\{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$, где $|z_k| = 1$. Как показано выше, вопрос о существовании ассоциированного распределения для произведения сводится к исследованию произведений рациональных распределений f и g с аналитическими представлениями вида

$$f = \Big(\sum_{k=1}^m f_k^+(z), \sum_{k=1}^m f_k^-(z)\Big), \tag{11.4}$$

где

$$f_k^+(z) = \sum_{j=1}^p \frac{A_{kj}^+}{(z-z_k)^j}, \quad f_k^-(z) = \sum_{j=1}^p \frac{A_{ij}^-}{(z-z_k)^j},$$

и

$$g = \Big(\sum_{k=1}^m g_k^+(z), \sum_{k=1}^m g_k^-(z)\Big), \tag{11.5}$$

где

$$g_k^+(z) = \sum_{j=1}^{p} \frac{B_{kj}^+}{(z-z_k)^j}, \quad g_k^-(z) = \sum_{j=1}^{p} \frac{B_{ij}^-}{(z-z_k)^j}.$$

Теорема 11.2. *Произведение fg рациональных мнемофункций* (11.4) *и* (11.5) *ассоциировано с некоторым распределением тогда и только тогда, когда для каждого $k, 1 \leqslant k \leqslant m$, существует число t_k, такое, что*

$$B_{kj}^+ = t_k A_{kj}^+, \quad B_{kj}^- = -t_k A_{kj}^-.$$

В книге [7] приведены только три примера конечных произведений, т. е. когда результатом произведения распределений является распределение. На окружности аналогами этих примеров будут произведения

$$\Big(\delta_1 + 2i\mathcal{P}\Big(\frac{1}{z-1}\Big)\Big)\Big(\delta_1 - 2i\mathcal{P}\Big(\frac{1}{z-1}\Big)\Big), \quad \delta_1 \mathcal{P}\Big(\frac{1}{z-1}\Big), \quad \Big(\delta_1 \pm 2\mathcal{P}\Big(\frac{1}{z-1}\Big)\Big)^2.$$

Все эти произведения удовлетворяют полученному в теореме условию, при этом можно привести много других примеров.

В заключение этого раздела рассмотрим пример Шварца на окружности и выясним, что представляет входящее в этот пример произведение распределений $\mathcal{P}\Big(\dfrac{1}{z-1}\Big)$, $z-1$ и δ_1. При умножении в пространстве распределений такое произведение принимает разные значения при разной расстановке скобок. А именно

$$\Big\{\mathcal{P}\Big(\frac{1}{z-1}\Big) \times (z-1)\Big\} \times \delta_1 = 1 \times \delta_1 = \delta_1,$$

но при этом

$$\mathcal{P}\Big(\frac{1}{z-1}\Big) \times \{(z-1) \times \delta_1\} = \mathcal{P}\Big(\frac{1}{z-1}\Big) \times 0 = 0.$$

А при перестановке порядка сомножителей получаем выражение, которое не определено

$$\Big\{\mathcal{P}\Big(\frac{1}{z-1}\Big) \times \delta_1\Big\} \times (z-1).$$

В силу формул (10.1) и (10.2) получаем, что

$$R_a\Big(\mathcal{P}(\frac{1}{z-1})\Big) R_a((z-1)) R_a(\delta_1) =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\frac{z}{r}-1} - \frac{1}{rz-1}\Big) - \varepsilon\Big(\frac{1}{\frac{z}{r}-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(\frac{z}{r}-1)^2}\Big) + \frac{\varepsilon^2}{2}\Big(\frac{1}{\frac{z}{r}-1} + \frac{1}{(\frac{z}{r}-1)^2}\Big),$$

откуда видно, что асимптотическое разложение этого произведения имеет вид

$$\frac{1}{2}\delta_1 - \varepsilon \frac{1}{(z-1)^-} - \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{(z-1)^{2-}} + o(\varepsilon).$$

Таким образом, произведение из примера Шварца ассоциировано с $\dfrac{1}{2}\delta_1$.

12. Об уравнениях с обобщенными коэффициентами

12.1. Аппроксимационный подход. Рассмотрение вложения сразу всего пространства распределений в алгебру мнемофункций представляет интерес в первую очередь с теоретической точки зрения как решение поставленной Л. Шварцем проблемы. Но в конкретных задачах, в которых появляются произведения распределений, возникают и другие вопросы, связанные с теорией мнемофункций. Среди таких задач в первую очередь отметим теорию нелинейных уравнений и дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами.

С точки зрения приложений в указанных задачах основная сложность заключается в том, что первично поставленная задача некорректна — математическая модель исследуемого процесса слишком грубая, это проявляется в том, что для соответствующего уравнения не определено понятие решения. Общий подход основан на уточнении постановки задачи с помощью добавления бесконечно малых, которые в первичной постановке не учитывались. Такое уточнение есть внесение дополнительной информации, которая извлекается из предметной области и обычно не содержится в первично поставленной задаче.

Например, в теории нелинейных уравнений специальный интерес представляют разрывные решения типа ударных волн [12, 37]. Соответствующие уравнения содержат нелинейные слагаемые, например, вида $u'_x u$, а для разрывной функции u такое произведение не определено, тем самым не определено понятие разрывного решения.

Уточнение постановки задачи заключается в добавлении к нелинейному уравнению членов, содержащих малый параметр ε. Решение такого возмущенного уравнения есть семейство гладких функций u_ε, т. е. некоторая мнемофункция. Решением исходного уравнения объявляется предел решений u_ε при $\varepsilon \to 0$, т. е. распределение u, ассоциированное с этой мнемофункцией.

Таким образом, в этих задачах способ аппроксимации искомого решения (семейство u_ε) возникает из уточненного уравнения и диктуется физическим смыслом задачи. В классических примерах из гидродинамики исходное уравнение обычно соответствует случаю идеальной жидкости, а добавочный член отражает учет малой (порядка ε) вязкости, поэтому такой подход называют *методом исчезающей вязкости*.

Общая схема аппроксимационного подхода при исследовании линейных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами также содержит уточнение постановки задачи и заключается в следующем. Пусть L есть линейное дифференциальное выражение с обобщенными коэффициентами. Это выражение формально — оно содержит слагаемые, которые не определены, и задача заключается в построении оператора в подходящем функциональном пространстве, соответствующего рассматриваемому L, что эквивалентно введению понятия решения для уравнения $Lu = f$. Обычно исходное выражение непосредственно задает оператор A_0, определенный только на некотором довольно узком подпространстве, а задача заключается в построении расширения A этого оператора. Исследованию свойств соответствующих операторов A для различных типов дифференциальных выражений с обобщенными коэффициентами посвящена обширная литература, но мы здесь ограничимся только обсуждением некоторых вопросов, связанных с построением таких расширений.

Аппроксимационный подход к исследованию рассматриваемых уравнений заключается в замене коэффициентов, являющихся обобщенными функциями, на ассоциированные с ними мнемофункции. Здесь выбор соответствующих мнемофункций есть внесение дополнительной информации, уточняющей постановку задачи. Получаем семейство L_ε (корректно определенных) дифференциальных операторов с гладкими коэффициентами в подходящем пространстве. Поскольку для каждого распределения существует много ассоциированных мнемофункций, возникает много различных семейств операторов L_ε, ассоциированных с исходным выражением. Во многих случаях решения u_ε соответствующих уравнений $L_\varepsilon u_\varepsilon = f$ сходятся к некоторой функции (или распределению) u. Тогда u естественно считать *решением исходного уравнения, соответствующим выбранному способу аппроксимации коэффициентов*.

С более общей точки зрения здесь удобнее исследовать семейство операторов со спектральным параметром $L_\varepsilon - \lambda I$. Тогда решения соответствующих уравнений есть

$$u_\varepsilon = (L_\varepsilon - \lambda I)^{-1} f$$

и задача сводится к доказательству сильной сходимости резольвент $(L_\varepsilon - \lambda I)^{-1}$. При этом предел резольвент есть резольвента некоторого оператора A, который называется *пределом семейства L_ε в смысле резольвентой сходимости*. Рассмотрение операторов со спектральным параметром позволяет получить более общие результаты, так как при конкретном фиксированном значении λ_0 может оказаться, что это число является спектральным значением для A, и тогда не существует предел семейства функций $(L_\varepsilon - \lambda_0 I)^{-1} f$.

Преимущество такого подхода заключается в том, что обычно семейство L_ε не сходится в пространстве операторов и оператор A нельзя определить как предел L_ε при других типах сходимости.

Основная техническая сложность при этом заключается, разумеется, в исследовании поведения семейства u_ε решений ассоциированного уравнения в пространстве мнемофункций и нахождении предела — оператора A. Здесь в первую очередь возникают следующие вопросы.

1. Для каких формальных дифференциальных выражений L с обобщенными коэффициентами и каких аппроксимаций этих коэффициентов существует предел семейства L_ε в смысле резольвентной сходимости?
2. Какие операторы могут быть пределами аппроксимирующих семейств при разных способах аппроксимации, и в каких случаях предел не зависит от выбранного способа аппроксимации коэффициентов?

12.2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Для пояснения возникающих здесь проблем и возможных вариантов ответов рассмотрим наиболее простой случай — линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$u' - au = f \tag{12.1}$$

с обобщенным коэффициентом a. На этом модельном примере удобно продемонстрировать возникающие эффекты и отличия от классической теории дифференциальных уравнений, причем можно результаты сформулировать явно. Для уравнений более высокого порядка и уравнений с частными производными имеют место аналогичные эффекты, но получение соответствующих утверждений требует значительно более тонких вычислений.

Напомним, что решение однородного уравнения (12.1) с интегрируемым коэффициентом a задается формулой

$$V(x) = \exp\Big[\int_{-1}^{x} a(s)ds\Big], \tag{12.2}$$

а решение задачи Коши для неоднородного уравнения с условием $u(-1) = M$ — формулой

$$u(x) = MV(x) + V(x)\int_{-1}^{x} \frac{1}{V(t)} f(t)dt. \tag{12.3}$$

Сразу обратим внимание на то, что нахождение V состоит из двух шагов: нахождения первообразной $g(x)$ от a и вычисления экспоненты $\exp g(x)$, а формула (12.3) дополнительно включает умножение и интегрирование. Поэтому если a и f являются обобщенными функциями, то для получения аналогичной формулы нужно придать смысл этим операциям. Для обобщенной функции a первообразная (такое распределение, что $g' = a$) существует. Поэтому придание смысла формуле (12.2), т. е. введение понятия решения для однородного уравнения с обобщенным коэффициентом, связано с определением экспоненты от распределения g.

Согласно общему подходу будем вместо распределений a и f рассматривать их аппроксимации гладкими функциями a_ε и f_ε. Получаем уравнение с малым параметром (уравнение в пространстве мнемофункций)

$$u'_\varepsilon - a_\varepsilon u_\varepsilon = f_\varepsilon, \tag{12.4}$$

для которого решение задачи Коши есть

$$u_\varepsilon(x) = M\exp\Big[\int_{-1}^{x} a_\varepsilon(s)ds\Big] + \exp\Big[\int_{-1}^{x} a(s)ds\Big]\int_{-1}^{x}\exp\Big[-\int_{-1}^{t} a_\varepsilon(s)ds\Big] f_\varepsilon(t)dt. \tag{12.5}$$

Если это семейство гладких функций u_ε сходится (в пространстве распределений или в заданном функциональном пространстве), то его предел u будем называть *решением исходного уравнения, порожденным выбранным способом аппроксимации*. Покажем на примерах, что возможно много качественно различных случаев поведения семейства решений (12.5).

Пример 12.1. Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u' - b\delta u = f, \quad b = const,$$

в пространстве $L_2([-1,1])$. Задача заключается в определении понятия решения для этого уравнения, содержащего формальное выражение с обобщенным коэффициентом.

Так как $\delta = 0$ вне любой окрестности нуля, решение однородного уравнения, при любом его разумном определении как функции, должно иметь вид

$$u(x) = \begin{cases} C, & x < 0; \\ C_1, & x > 0, \end{cases} \tag{12.6}$$

или, в другой записи,

$$u(x) = C + (C_1 - C)\Theta(x).$$

При подстановке такой функции в уравнение возникает произведение $\delta\Theta$, которое не определено, и из уравнения нельзя найти C_1. Это еще раз показывает, что в рамках классической теории понятие решения для данного уравнения не определено.

Заменим δ-функцию на ее аппроксимацию вида $\varphi_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon}\varphi\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$. Ввиду того, что для малых ε носители функций $\varphi_\varepsilon(x)$ будут содержаться в отрезке $[-1, 1]$, обозначим

$$\Phi(x) = \int_{-1}^{x} \varphi(t)dt,$$

и тогда решение уравнения с $\varphi_\varepsilon(x)$ есть

$$V_\varepsilon(x) = C\exp\Big[b\Phi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big].$$

Из этого выражения видно, что $V_\varepsilon(x)$ сходятся к функции

$$V(x) = C\big[1 + (e^b - 1)\Theta(x)\big]. \tag{12.7}$$

Таким образом, решением однородного уравнения является кусочно постоянная функция (12.7), удовлетворяющая условию на скачок в точке 0, зависящему от коэффициента b:

$$u(+0) = e^b u(-0).$$

Обратим внимание на то, что первообразные для δ есть обычные функции вида $g(x) = \Theta(x) + \widetilde{C}$, и, подставляя их в (12.2), т. е. вычисляя экспоненту формально, получаем те же самые решения.

Замечание 12.1. При подстановке (12.7) в уравнение получаем равенство

$$C(e^b - 1)\delta = bC[\delta + (e^b - 1)\delta\Theta(x)],$$

из которого находим произведение

$$\delta\Theta = \frac{e^b - 1 - b}{b(e^b - 1)}\ \delta.$$

Обратим внимание на то, что полученное значение для $\delta\Theta$ зависит от коэффициента b уравнения. Это объясняется тем, что в приведенных вычислениях используется аппроксимация для $\Theta(x)$, которая диктуется рассматриваемым уравнением и аппроксимацией δ, что и приводит к зависимости результата от b. Это рассуждение еще раз показывает, что нельзя однозначно определить произведение $\delta\Theta$.

Если f есть функция из $L_2[-1, 1]$, то решения аппроксимирующего уравнения

$$u' - b\frac{1}{\varepsilon}\varphi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) = f,$$

удовлетворяющие условию $u(-1) = C$, суть

$$u_\varepsilon(x) = C\exp\Big[b\Phi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big] + \exp\Big[b\Phi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big]\int_{-1}^{x} \exp\Big[-b\Phi\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)\Big]f(t)dt.$$

Здесь тоже можно перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$; в результате получаем, что

$$u_\varepsilon(x) \to u(x) = \begin{cases} C + \int_{-1}^{x} f(t)dt, & x < 0; \\ Ce^b + \int_{-1}^{x} f(t)dt, & x > 0. \end{cases}$$

Если обозначить

$$u_0(x) = C + \int\limits_{-1}^{x} f(t)dt, \;\; x \in [-1,1],$$

то полученное решение можно записать в виде

$$u(x) = u_0(x) + u_0(-1)(e^b - 1)\Theta(x).$$

Рассмотрим, какой оператор ставится в соответствие формальному выражению $Lu = u' - b\delta u$ в результате проведенных вычислений.

Оператор дифференцирования определен на подпространстве $H^1[-1,1] \subset L_2[-1,1]$, состоящем из абсолютно непрерывных функций, у которых производные принадлежат $L_2[-1,1]$. Для такой функции $\delta u = u(0)\delta$, и это произведение принадлежит $L_2[-1,1]$ только в случае $u(0) = 0$. Таким образом, формальное выражение задает оператор A_0 в $L_2[-1,1]$, определенный только на подпространстве $D(A_0) = \{u \in H^1[-1,1] : u(0) = 0\}$ и действующий как дифференцирование. Поэтому любой оператор, который естественно поставить в соответствие формальному выражению, должен быть некоторым расширением A_0.

Полученная выше формула решения означает, что в данном случае мы формальному выражению $Lu = u' - b\delta u$ поставили в соответствие оператор A_b, определенный на подпространстве $D(A_b) \subset H^1[-1,0] \oplus H^1[0,1]$ вида

$$D(A) = \big\{u(x) = u_0(x) + u_0(-1)(e^b - 1)\Theta(x) : u_0 \in H^1[-1,1]\big\}$$

и действующий по формуле $A_b u(x) = u_0'(x)$.

Обратим внимание на два обстоятельства. Прежде всего заметим, что в данном примере оператор A_b не зависит от выбранного способа аппроксимации δ-функции. Также отметим, что построенный оператор не является замыканием A_0.

Рассмотрим, что изменится, если строить оператор в немного более широком пространстве, а именно, в пространстве

$$F[-1,1] = \{f + M\delta; f \in L_2[-1,1], \;\; M \in \mathbb{C}\},$$

содержащем дельта-функцию. Пусть $\psi_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon}\psi\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$ есть аппроксимация δ из правой части уравнения, порожденная функцией $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Тогда решение аппроксимирующего уравнения

$$u' - b\varphi_\varepsilon u = f + M\psi_\varepsilon,$$

удовлетворяющие условию $u(-1) = C$, есть

$$u_\varepsilon(x) = C\exp\Big[b\Phi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big] + \exp\Big[b\Phi\Big(\frac{s}{\varepsilon}\Big)\Big]\int\limits_{-1}^{x}\exp\Big[-b\Phi\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)\Big]f(t)dt +$$

$$+M\exp\Big[b\Phi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big]\int\limits_{-1}^{x}\exp\Big[-b\Phi\Big(\frac{s}{\varepsilon}\Big)\Big]\frac{1}{\varepsilon}\psi\Big(\frac{s}{\varepsilon}\Big)ds.$$

Сделав замену переменных $t = \dfrac{s}{\varepsilon}$ в интеграле из последнего слагаемого, получаем для него выражение

$$h_\varepsilon(x) = M\exp\Big[b\Phi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big]\int\limits_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{x}{\varepsilon}}\exp[-b\Phi(t)]\psi(t)dt,$$

в котором можно перейти к пределу:

$$h_\varepsilon(x) \to h(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ Me^b\Gamma, & x > 0, \end{cases}$$

где

$$\Gamma = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp[-b\Phi(t)]\psi(t)dt.$$

Таким образом, решения u_ε сходятся к функции

$$u(x) = \begin{cases} C + \int\limits_{-1}^{x} f(t)dt, & x < 0; \\ Ce^b + Me^b\Gamma + \int\limits_{-1}^{x} f(t)dt, & x > 0. \end{cases}$$

С операторной точки зрения здесь формальному выражению поставлен в соответствие оператор A в пространстве $F[-1,1]$ с областью определения

$$D(A) = H^1[-1,0] \oplus H^1[0,1],$$

каждая функция u из которой представляется в виде

$$u = u_0 + \lambda\Theta = u_0 + u_0(-1)(e^b - 1)\Theta + \mu\Theta, \text{ где } \mu = \lambda - u_0(-1)(e^b-1), \; u_0 \in H^1[-1,1].$$

Действие оператора задается формулой

$$Au = u_0' + \frac{\mu}{e^b\Gamma}\delta.$$

Прежде всего отметим принципиальное отличие — в результат входит число Γ, которое зависит от способов аппроксимации коэффициента и правой части. Таким образом, при определении понятия решения уравнения в пространстве L_2 использование мнемофункций играло техническую роль, но в более широком пространстве, включающем распределения, уже само решение зависит от способов аппроксимации.

Пример 12.2. Что изменится, если рассмотреть уравнение

$$u' - b\delta' u = 0, \quad b = const,$$

в котором коэффициент есть производная δ-функции?

Так как первообразная для δ' есть распределение δ, то формальное решение, удовлетворяющее условию $u(-1) = C$, задается согласно формуле (12.2) выражением вида $Ce^{b\delta}$, которое не определено. Это указывает на то, что здесь могут быть препятствия к построению решения в каком-либо смысле.

Заменив δ' на ее аппроксимацию $\delta'_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon^2}\varphi'\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$, получаем решения аппроксимирующего однородного уравнения

$$V_\varepsilon(x) = C\exp\Big[b\frac{1}{\varepsilon}\varphi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big].$$

Это семейство функций вне любой окрестности нуля равномерно сходится к постоянной C. Но при этом семейство $V_\varepsilon(x)$ может экспоненциально возрастать в окрестности точки 0 и не сходится к постоянной C в пространстве распределений.

Ограничимся здесь выводом, что уравнения, коэффициенты которых имеют больший порядок сингулярности, устроены сложнее, и для их исследования нужны другие подходы.

Пример 12.3. Классические решения дифференциального уравнения

$$u' + \frac{1}{x}u = 0 \tag{12.8}$$

суть функции вида

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{C}{x}, & x < 0; \\ \dfrac{C_1}{x}, & x > 0. \end{cases} \tag{12.9}$$

Обратим внимание на то, что для этого уравнения решение задачи Коши с условием $u(-1) = -C$ есть $u(x) = \dfrac{C}{x}$ при $x < 0$. Это решение уходит на бесконечность при $x \to -0$ и в классической теории дифференциальных уравнений нет методов, позволяющих естественным образом продолжить это решение на положительную полуось.

Рассмотрим, что можно считать решением уравнения (12.8) с точки зрения теории мнемофункций.

Прежде всего напомним, что функции $\dfrac{1}{x}$ соответствует целое семейство распределений вида $a = P\Big(\dfrac{1}{x}\Big) + M\delta$, поэтому с уравнением (12.8) связано семейство уравнений с обобщенными коэффициентами. Первое уточнение постановки задачи заключается в том, что мы должны выбрать одно из этих распределений a и рассмотреть соответствующее формальное уравнение.

Для рассматриваемого распределения a первообразная есть локально интегрируемая функция

$$g(x) = \ln|x| + M\Theta(x),$$

т. е. это распределение имеет первый порядок сингулярности. Тогда формальным решением уравнения (12.8) в пространстве распределений является функция

$$u(x) = -C\exp[-g(x) + g(-1)] = \begin{cases} C\dfrac{1}{x}, & x < 0; \\ -Ce^{-M}\frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

Это функция вида (12.9), у которой $C_1 = -Ce^{-M}$. Обратим внимание, что наиболее естественное решение, у которого $C_1 = C$, получаем в двух случаях: когда $a = P\Big(\dfrac{1}{x}\Big) \pm i\pi\delta$.

Можно ли построенную функцию u считать решением в смысле теории распределений или теории мнемофункций? Прежде всего обратим внимание на то, что этой функции, как и $\dfrac{1}{x}$, соответствует целое семейство распределений. Поэтому для получения корректного ответа нужно выяснить, какое распределение U из этого семейства соответствует построенному решению u и можно ли говорить о выполнении равенства

$$U' + aU = 0, \tag{12.10}$$

причем следует уточнить, в каком смысле это равенство понимается. В частности, так как U' является распределением, равенство может быть выполнено только в особых случаях, когда a и U есть пара сингулярных распределений, для которых произведение снова является распределением.

Точный смысл сказанному придается с помощью общего подхода, согласно которому обобщенный коэффициент a следует заменить на его аппроксимацию гладкими функциями a_ε, рассмотреть соответствующее уравнение

$$u_\varepsilon'(x) + a_\varepsilon(x)u_\varepsilon(x) = 0 \tag{12.11}$$

и исследовать поведение семейства его решений

$$u_\varepsilon(x) = -C\exp\Big[\int\limits_{-1}^{x} a_\varepsilon(s)ds\Big].$$

Если $u_\varepsilon \to U$, то из уравнения получаем, что $a_\varepsilon u_\varepsilon \to -U'$, т. е. произведение заданных аппроксимаций для a и U ассоциировано с распределением.

Наиболее просто исследовать сходимость, если ограничиться рассмотрением аппроксимаций, порожденных аналитическими представлениями распределений на прямой. Для рассматриваемых a такие аппроксимации имеют вид

$$a_\varepsilon(x) = \lambda\frac{1}{x + i\varepsilon} + (1-\lambda)\frac{1}{x - i\varepsilon}.$$

На прямой справедлив аналог теоремы 11.1, согласно которому произведение aU ассоциировано с некоторым распределением тогда и только тогда, когда

$$U_\varepsilon(x) = -C\Big[\lambda\frac{1}{x + i\varepsilon} - (1-\lambda)\frac{1}{x - i\varepsilon}\Big]$$

и в этом случае

$$a_\varepsilon(x)u_\varepsilon(x) = -C\Big[\lambda^2\frac{1}{(x + i\varepsilon)^2} - (1-\lambda)^2\frac{1}{(x - i\varepsilon)^2}\Big].$$

Так как при этом

$$U'_\varepsilon(x) = -C[-\lambda\frac{1}{(x+i\varepsilon)^2} + (1-\lambda)\frac{1}{(x-i\varepsilon)^2}],$$

равенство $U' + aU = 0$ выполнено только если $\lambda = \lambda^2$. При $\lambda = 1$ получаем $a_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{x+i\varepsilon}$, и это есть аппроксимация распределения $P\Big(\dfrac{1}{x}\Big) - i\pi\delta$; при $\lambda = 0$ имеем $a_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{x-i\varepsilon} \to P\Big(\dfrac{1}{x}\Big) + i\pi\delta$.

Таким образом, в пространстве рациональных распределений решения уравнения (12.10) при рассматриваемых распределениях a существуют только для двух распределений $a = P\Big(\dfrac{1}{x}\Big) \pm i\pi\delta$, и тогда $U = Ca$.

Пример 12.4. В рассматриваемый круг вопросов вписываются также уравнения, в которых коэффициенты совершают высокочастотные колебания. Мы упоминаем здесь эту тематику только чтобы отметить, что теория усреднения для уравнений с высокочастотными слагаемыми имеет идейные связи с теорией мнемофункций. В теории уравнений с высокочастотными слагаемыми обычно рассматриваются дифференциальные уравнения с малым параметром, а основные результаты утверждают, что соответствующие решения u_ε сходятся к решению т. н. усредненного дифференциального уравнения. В простых случаях усредненное уравнение строится по исходному уравнению прямым усреднением [22] (например, переменные коэффициенты заменяются на их средние значения), но наиболее интересны ситуации, когда усредненное уравнение получается с помощью более сложной процедуры [16, 19, 23] (коэффициенты заменяются на постоянные, отличные от средних значений).

Рассмотрим простейшее уравнение из этого класса. Пусть a есть гладкая периодическая функция с периодом τ. Тогда мнемофункция $a_\varepsilon(x) = a\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$, совершающая высокочастотные колебания, сходится в смысле распределений к среднему значению функции a — постоянной

$$A = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau a(s)ds.$$

Поэтому уравнение

$$u'_\varepsilon(x) - a\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)u_\varepsilon(x) = f(x) \tag{12.12}$$

можно рассматривать как одно из уравнений в пространстве мнемофункций, ассоциированных с усредненным уравнением

$$u'(x) - Au(x) = f(x)$$

с постоянным коэффициентом A.

Возникающие здесь эффекты продемонстрируем на примере решения задачи Коши с условием $u(0) = 1$ для однородного уравнения.

Обозначив

$$F_\varepsilon(x) = \int_0^x a\Big(\frac{s}{\varepsilon}\Big)ds,$$

получаем, что

$$V_\varepsilon(x) = \exp F_\varepsilon(x),$$

и вопрос заключается в описании асимптотического поведения этого семейства функций. Введенная функция имеет вид $F_\varepsilon(x) = Ax + \varepsilon\omega\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$, где $\omega(x)$ есть периодическая функция с периодом τ и нулевым средним. Например, если $a_\varepsilon(x) = 1 + \cos\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$, то $F_\varepsilon(x) = x + \varepsilon\sin\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$. Поэтому решение можно представить в виде

$$u_\varepsilon(x) = \exp[Ax]\exp\Big[\varepsilon\omega\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big] = \exp[Ax]\Big[1 + \varepsilon\omega\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) + \frac{1}{2}\Big[\varepsilon\omega\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big]^2 + \dots\Big],$$

откуда получаем простейший случай утверждений из теории усреднения для дифференциальных уравнений [22]: решения $u_\varepsilon(x)$ сходятся равномерно на каждом конечном промежутке к функции $\exp Ax$ — решению задачи Коши для усредненного уравнения.

Но поведение решений меняется, если амплитуда высокочастотных колебаний при $\varepsilon \to 0$ растет. Пусть, например,

$$a_\varepsilon(x) = A + \frac{1}{\varepsilon^d} a_0\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big),$$

где a_0 периодическая функция с нулевым средним значением. Тогда

$$F_\varepsilon(x) = Ax + \frac{1}{\varepsilon^{d-1}} \omega\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big),$$

где $\omega(x)$ есть периодическая функция с периодом τ и нулевым средним. Здесь при $d < 1$, как и выше, решения $u_\varepsilon(x)$ сходятся к $\exp Ax$, при $d > 1$ множитель $\dfrac{1}{\varepsilon^{d-1}}$ растет и предела не существует. Поэтому наиболее интересным является случай показателя $d = 1$. Тогда

$$u_\varepsilon(x) = \exp Ax \exp \omega\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big).$$

Особенность этого случая заключается в том, что здесь семейство периодических функций $\exp \omega\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$ сходится в смысле распределений к среднему значению функции $\exp \omega(x)$, а это среднее значение больше, чем 1.

Например, если $a(x) = \dfrac{1}{\varepsilon} \cos x$, то

$$u_\varepsilon(x) = \exp\Big[\sin\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big]$$

и среднее значение есть

$$\widetilde{A} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \exp[\sin(x)]dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [\sin(x)]^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{64} + \dots .$$

Таким образом, в этом примере наблюдаем качественно новый эффект: решение задачи Коши для усредненного уравнения есть $u(x) \equiv 1$, а решения u_ε сходятся в пространстве распределений к некоторой постоянной $\widetilde{A} > 1$.

Рассмотрим в качестве еще одного примера задачу Коши с условием $u(0) = 0$ для уравнения

$$u'_\varepsilon(x) - a_\varepsilon(x) u_\varepsilon(x) = 1$$

с $a_\varepsilon(x) = 1 + \dfrac{1}{\varepsilon} \cos\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$. Здесь решение задачи Коши для уравнения

$$u'(x) - u(x) = 1,$$

в котором коэффициент заменен на его среднее значение, есть $u(x) = e^x - 1$. При этом

$$u_\varepsilon(x) = \exp\Big[x + \sin\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big] \int\limits_0^x \exp\Big[-x - \sin\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)\Big] dt,$$

и можно показать, что это семейство сходится в пространстве распределений к $\widetilde{A}^2(e^x - 1)$. Поскольку $\widetilde{A} > 1$, то построенное решение растет быстрее, чем решение задачи Коши для формально усредненного уравнения.

12.3. Оператор Шредингера с точечным взаимодействием. Среди дифференциальных выражений с обобщенными коэффициентами особую роль играют выражения вида

$$-\Delta + \sum_{y \in Y} a_y \delta_y,$$

где Δ — лапласиан в $\mathbb{R}^d$, Y — дискретное (конечное или счетное) подмножество в $\mathbb{R}^d$, δ_y — функция Дирака, сосредоточенная в точке y. Такие выражения эвристически описывают квантово-механические системы, порожденные точечными источниками, расположенными в точках y, где коэффициенты a_y суть т. н. константы связи, характеризующие интенсивность соответствующих источников. История вопроса и обширная библиография содержатся в известной монографии [1].

Ограничимся несколькими замечаниями, поясняющими связь рассматриваемого вопроса с теорией мнемофункций. Первой математически строгой работой, посвященной построению по формальному выражению $-\Delta + a_y\delta_y$ самосопряженного оператора в $L_2(\mathbb{R}^3)$, была статья Березина и Фаддеева [8].

Пусть $N_y \subset L_2(\mathbb{R}^d$ есть подпространство, состоящее из гладких функций, обращающихся в нуль в некоторой окрестности точки y. На N_y оператор, который может соответствовать формальному выражению $-\Delta + a_y\delta_y$, должен совпадать с $-\Delta$, и, следовательно, должен быть одним из самосопряженных расширений оператора $-\Delta_y$, определяемого как сужение $-\Delta$ на N_y. При $d = 1$ у оператора $-\Delta_y$ существует четырехпараметрическое семейство самосопряженных расширений, при $d = 2$ и $d = 3$ семейство самосопряженных расширений однопараметрическое, а при $d \geqslant 4$ существует только одно самосопряженное расширение — оператор $-\Delta$.

Чтобы по формальному выражению построить соответствующий самосопряженный оператор, нужно, согласно общему подходу, заменить коэффициент δ_y аппроксимирующим семейством гладких функций и для полученного семейства корректно заданных операторов L_ε найти предел в смысле резольвентной сходимости.

При $d = 3$ оказалось, что предел в смысле резольвентной сходимости, отличный от $-\Delta$, существует только при бесконечно малых коэффициентах вида $a_y = a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2$, у которых a_1 принадлежит некоторому дискретному множеству, зависящему от выбранного способа аппроксимации дельта-функции. В результате оказывается, что построенный предельный оператор не определяется по формальному выражению, а зависит от способа аппроксимации дельта-функции.

В рассматриваемом выражении δ-функция задает оператор умножения, действующий на гладких функциях по формуле $\delta_y u = u(y)\delta_y$, который является оператором ранга 1, не определенным в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Но его можно аппроксимировать (многими способами) семействами операторов конечного ранга в $L_2(\mathbb{R}^d)$, в результате чего также получаем семейство корректно заданных операторов, для которого нужно найти предел в смысле резольвентной сходимости. Здесь резольвенты аппроксимирующих операторов выписываются в явном виде, что упрощает нахождение предела резольвент. Такой подход описан, например, в [3].

При $d = 1$ оператор, соответствующий формальному выражению, может быть найден из эвристических соображений. У уравнения

$$u'' + a\delta u = f$$

обычно рассматриваются непрерывные решения, у которых первая производная может иметь в точке 0 скачок $u'(+0) - u'(-0)$. При дифференцировании в пространстве распределений получаем

$$u'' + a\delta u = u''(x) + [u'(+0) - u'(-0)]\delta + a\delta u(0),$$

где $u''(x)$ есть обычная производная, вычисленная при $x \neq 0$. Чтобы полученное распределение принадлежало пространству $L_2(\mathbb{R})$, члены, содержащие δ, должны уничтожиться, откуда возникает условие сопряжения

$$u'(+0) - u'(-0) + au(0) = 0.$$

К этому же результату можно прийти с помощью анализа резольвент аппроксимирующих операторов.

При построении оператора, соответствующего более сложному выражению

$$-u'' + \sum_{y \in Y} a_y \delta_y u,$$

функции из области определения также должны удовлетворять условиям сопряжения

$$u'(y+0) - u'(y-0) + a_y u(y) = 0 \quad \text{для каждого} \quad y \in Y.$$

Соответствующие операторы подробно исследованы в [34], причем обнаружено, что оператор, заданный условиями сопряжения, может оказаться несамосопряженным.

13. Заключение

В работе была рассмотрена проблема умножения обобщенных функций и описан общий подход к ее решению. Проведен анализ различных способов вложения пространств распределений в алгебру мнемофункций. С ряда точек зрения наиболее естественным является способ вложения с помощью аналитического представления распределений. При таком вложении для рациональных распределений правило умножения задается в явном виде и удается описать все случаи, когда произведение является распределением.

Отмечена связь задачи умножения распределений с таким направлениями, как расширения линейных операторов, нестандартный анализ, квантовая механика, теория уравнений с обобщенными коэффициентами, теория уравнений с малым параметром.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Альбеверио С., Гестези Ф., Хеэг-Крон Р., Холден Х.* Решаемые модели в квантовой механике. — М.: Мир, 1991.
2. *Антоневич А. Б., Радыно Я. В.* Об общем методе построения алгебр обобщенных функций// Докл. АН СССР. — 1991. — *43*, № 3. — С. 680–684.
3. *Антоневич А. Б., Романчук Т. А.* Уравнения с дельта-образными коэффициентами: метод конечномерных аппроксимаций. — Saarbrucken: LAP Lambert, 2012.
4. *Антоневич А. Б., Шагова Т. Г.* Вложения распределений в алгебру мнемофункций на окружности// Пробл. физ. мат. и техн. — 2018. — *37*, № 4. — С. 52–61.
5. *Антоневич А. Б., Шагова Т. Г., Шкадинская Е. В.* Алгебра мнемофункций на окружности// Пробл. физ. мат. и техн. — 2018. — *36*, № 3. — С. 55–62.
6. *Антоневич А. Б., Шукур Али А.* О росте аналитической функции в круге// Докл. НАН Беларуси. — 2016. — *60*, № 5. — С. 41–45.
7. *Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р.* Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход. — М.: Мир, 1976.
8. *Березин Ф. А., Фаддеев Л. Д.* Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом// Докл. АН СССР. — 1961. — *137*, № 5. — С. 1011–1014.
9. *Бремерман Г.* Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. — М.: Мир, 1965.
10. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979.
11. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. — М.: Физматлит, 1959.
12. *Данилов В. Г., Маслов В. П., Шелкович В. М.* Алгебры особенностей сингулярных решений квазилинейных строго гиперболических систем первого порядка// Теор. мат. физ. — 1998. — *114*, № 1. — С. 3–55.
13. *Девис М.* Прикладной нестандартный анализ. — М.: Мир, 1980.
14. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. — М.: Гостехиздат, 1957.
15. *Егоров Ю. В.* К теории обобщенных функций// Усп. мат. наук. — 1990. — *45*, № 5. — С. 3–40.
16. *Жиков В. В., Пастухова С. Е.* Об операторных оценках в теории усреднения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 3. — С. 27–122.
17. *Завалищин С. Т., Сесекин А. Н.* Импульсные процессы. Модели и приложения. — М.: Наука, 1991.
18. *Иванов В. К.* Гиперраспределения и умножение распределений Шварца// Докл. АН СССР. — 1972. — *204*, № 5. — С. 1045–1048.
19. *Левенштам В. Б.* Дифференциальные уравнения с большими высокочастотными слагаемыми (усреднения и асимптотики). — Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2010.
20. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1950.
21. *Мельникова И. В., Бовкун В. А., Алексеева У. А.* Решение квазилинейных стохастических задач в абстрактных алгебрах Коломбо// Дифф. уравн. — 2017. — *53*, № 12. — С. 1653–1663.
22. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. — Киев: Наукова думка, 1971.
23. *Суслина Т. А.* Усреднение задачи Дирихле для эллиптических уравнений высокого порядка с периодическими коэффициентами// Алгебра и анализ. — 2017. — *29*, № 2. — С. 139–192.
24. *Antonevich A., Burachewskij A., Radyno Ya.* On closability of nonclosable operators// Panamer. Math. J. — 1997. — *7*, № 4. — С. 37–51.
25. *Antonevich A. B., Radyno Ya. V.* On the problem of distributions multiplication// 10th Conf. «Problems and Methods in Mathematical Physics», Chemnitz, Germany, Sep. 13–17. — Leipzig: Teubner, 1994. — С. 9–14.
26. *Baglini L. L., Giordano P.* The Category of Colombeau algebras// Monatsh. Math. — 2017. — *182*. — С. 649–674.
27. *Christov Ch., Damianov B.* Asymptotic functions — a new class of generalized functions. I// Bulgar. J. Phys. — 1978. — *6*. — С. 543–556.
28. *Christov Ch., Damianov B.* Asymptotic functions — a new class of generalized functions. II// Bulgar. J. Phys. — 1979. — *1*. — С. 3–23.

29. *Christov Ch., Damianov B.* Asymptotic functions — a new class of generalized functions. III// Bulgar. J. Phys. — 1979. — *3.* — C. 245–256.
30. *Christov Ch., Damianov B.* Asymptotic functions — a new class of generalized functions. IV// Bulgar. J. Phys. — 1979. — *4.* — C. 377–397.
31. *Colombeau J. F.* A multiplication of distributions// J. Math. Anal. Appl. — 1983. — *94.* — C. 96–115.
32. *Colombeau J. F.* New generalized functions and multiplication of distributions. — Amsterdam: North-Holland, 1984.
33. *Grosser M., Kunzinger M., Oberguggenberger M., Steinbauer R.* Geometric theory of generalized functions with applications to general relativity. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.
34. *Kostenko A. S., Malamud M. M.* 1-D Schrödinger operator with local point interaction on a discrete set// J. Differ. Equ. — 2010. — *249.* — C. 253–304.
35. *Nedeljkov M., Pilipovic S., Scarpalezos D.* Linear theory of Colombeau's generalized functions. — Harlow: Addison-Wesley Longman, 1998.
36. *Oberguggenberger M.* Multiplication of distributions and application to partial differential equations. — Harlow: Longman Higher Education, 1992.
37. *Rosinger E. E.* Generalized solutions of nonlinear partial differential equations. — North-Holland: Mathematics Studies, 1987.
38. *Schwartz L.* Théorie des distributions: en 2 vol. — Paris: Hermann, 1950.
39. *Schwartz L.* Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions// C. R. Acad. Sci. Paris. — 1954. — *239.* — C. 847–848.

А. Б. Антоневич
Белорусский государственный университет,
Беларусь, 220030, г. Минск, пр. Независимости, д. 4
E-mail: antonevich@bsu.by

Т. Г. Шагова
Белорусский государственный университет,
Беларусь, 220030, г. Минск, пр. Независимости, д. 4
E-mail: tanya.shagova@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-3-339-389 UDC 517.9

Multiplication of Distributions and Algebras of Mnemofunctions

© 2019 **A. B. Antonevich, T. G. Shagova**

Abstract. In this paper, we discuss methods and approaches for definition of multiplication of distributions, which is not defined in general in the classical theory. We show that this problem is related to the fact that the operator of multiplication by a smooth function is nonclosable in the space of distributions. We give the general method of construction of new objects called new distributions, or mnemofunctions, that preserve essential properties of usual distributions and produce algebras as well. We describe various methods of embedding of distribution spaces into algebras of mnemofunctions. All ideas and considerations are illustrated by the simplest example of the distribution space on a circle. Some effects arising in study of equations with distributions as coefficients are demonstrated by example of a linear first-order differential equation.

REFERENCES

1. S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Krohn Hoegh, and H. Holden, *Reshaemye modeli v kvantovoy mekhanike* [Solvable Models in Quantum Mechanics], Mir, Moscow, 1991 (Russian translation).
2. A. B. Antonevich and Ya. V. Radyno, "Ob obshchem metode postroeniya algebr obobshchennykh funktsiy" [On general method of construction of distribution algebras], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1991, **43**, No. 3, 680–684 (in Russian).

3. A. B. Antonevich and T. A. Romanchuk, *Uravneniya s del'ta-obraznymi koeffitsientami: metod konechnomernykh approksimatsiy* [Equations with Delta-Like Coefficients: Finite-Dimensional Approximation Method], LAP Lambert, Saarbrucken, 2012 (in Russian).
4. A. B. Antonevich and T. G. Shagova, "Vlozheniya raspredeleniy v algebru mnemofunktsiy na okruzhnosti" [Embeddings of distributions into the algebra of mnemofunctions on a circle], *Probl. fiz. mat. i tekhn.* [Probl. Phys. Math. Tech.], 2018, **37**, No. 4, 52–61 (in Russian).
5. A. B. Antonevich, T. G. Shagova, and E. V. Shkadinskaya, "Algebra mnemofunktsiy na okruzhnosti" [Algebra of mnemofunctions on a circle], *Probl. fiz. mat. i tekhn.* [Probl. Phys. Math. Tech.], 2018, **36**, No. 3, 55–62 (in Russian).
6. A. B. Antonevich and A. Shukur Ali, "O roste analiticheskoy funktsii v kruge" [On grows of an analytical function in a circle], *Dokl. NAN Belarusi* [Rep. Nat. Acad. Sci. Belarus], 2016, **60**, No. 5, 41–45 (in Russian).
7. P. Antosik, Ya. Mikusinskiy, and R. Sikorskiy, *Teoriya obobshchennykh funktsiy. Sekventsial'nyy podkhod* [Theory of Distributions. Sequential Approach], Mir, Moscow, 1976 (in Russian).
8. F. A. Berezin and L. D. Faddeev, "Zamechanie ob uravnenii Shredingera s singulyarnym potentsialom" [A note on the Schrödinger equation with singular potential], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1961, **137**, No. 5, 1011–1014 (in Russian).
9. G. Bremerman, *Raspredeleniya, kompleksnye peremennye i preobrazovaniya Fur'e* [Distributions, complex variables and Fourier transforms], Mir, Moscow, 1965 (Russian translation).
10. V. S. Vladimirov, *Obobshchennye funktsii v matematicheskoy fizike* [Distributions in Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1979 (in Russian).
11. I. M. Gel'fand and G. E. Shilov, *Obobshchennye funktsii i deystviya nad nimi* [Distributions and Operations over Them], Fizmatlit, Moscow, 1959 (in Russian).
12. V. G. Danilov, V. P. Maslov, and V. M. Shelkovich, "Algebry osobennostey singulyarnykh resheniy kvazilineynykh strogo giperbolicheskikh sistem pervogo poryadka" [Algebras of singularities of singular solutions to first-order quasilinear strictly hyperbolic systems], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 1998, **114**, No. 1, 3–55 (in Russian).
13. M. Davis, *Prikladnoy nestandartnyy analiz* [Applied Nonstandard Analysis], Mir, Moscow, 1980 (Russian translation).
14. M. A. Evgrafov, *Asimptoticheskie otsenki i tselye funktsii* [Asymptotic Estimates and Whole Functions], Gostekhizdat, Moscow, 1957 (in Russian).
15. Yu. V. Egorov, "K teorii obobshchennykh funktsiy" [To the theory of distributions], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1990, **45**, No. 5, 3–40 (in Russian).
16. V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova, "Ob operatornykh otsenkakh v teorii usredneniya" [On operator estimates in the averaging theory], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 3, 27–122 (in Russian).
17. S. T. Zavalishchin and A. N. Sesekin, *Impul'snye protsessy. Modeli i prilozheniya* [Impulse Processes. Models and Applications], Nauka, Moscow, 1991 (in Russian).
18. V. K. Ivanov, "Giperraspredeleniya i umnozhenie raspredeleniy Shvartsa" [Hyperdistributions and multiplication of Schwarz distributions], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1972, **204**, No. 5, 1045–1048 (in Russian).
19. V. B. Levenshtam, *Differentsial'nye uravneniya s bol'shimi vysokochastotnymi slagaemymi (usredneniya i asimptotiki)* [Differential Equations with Large High-Frequency Terms (Averages and Asymptotics)], YUFU, Rostov-na-Donu, 2010 (in Russian).
20. A. I. Markushevich, *Teoriya analiticheskikh funktsiy* [Theory of Analytic Functions], GITTL, Moscow—Leningrad, 1950 (in Russian).
21. I. V. Mel'nikova, V. A. Bovkun, and U. A. Alekseeva, "Reshenie kvazilineynykh stokhasticheskikh zadach v abstraktnykh algebrakh Kolombo" [Solution of quasilinear stochastic problems in abstract Colombo algebras], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2017, **53**, No. 12, 1653–1663 (in Russian).
22. Yu. A. Mitropol'skiy, *Metod usredneniya v nelineynoy mekhanike* [Averaging Method in Nonlinear Mechanics], Naukova dumka, Kiev, 1971 (in Russian).
23. T. A. Suslina, "Usrednenie zadachi Dirikhle dlya ellipticheskikh uravneniy vysokogo poryadka s periodicheskimi koeffitsientami" [Averaging of the Dirichlet problem for higher-order elliptic equations with periodic coefficients], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2017, **29**, No. 2, 139–192 (in Russian).
24. A. Antonevich, A. Burachewskij, and Ya. Radyno, "On closability of nonclosable operators," *Panamer. Math. J.*, 1997, **7**, No. 4, 37–51.

25. A. B. Antonevich and Ya. V. Radyno, “On the problem of distributions multiplication,” 10*th Conf. Problems and Methods in Mathematical Physics, Chemnitz, Germany, Sep.* 13–17, Teubner, Leipzig, 1994, pp. 9–14.
26. L. L. Baglini and P. Giordano, “The Category of Colombeau algebras,” *Monatsh. Math.*, 2017, **182**, 649–674.
27. Ch. Christov and B. Damianov, “Asymptotic functions — a new class of generalized functions. I,” *Bulgar. J. Phys.*, 1978, **6**, 543–556.
28. Ch. Christov and B. Damianov, “Asymptotic functions — a new class of generalized functions. II,” *Bulgar. J. Phys.*, 1979, **1**, 3–23.
29. Ch. Christov and B. Damianov, “Asymptotic functions — a new class of generalized functions. III,” *Bulgar. J. Phys.*, 1979, **3**, 245–256.
30. Ch. Christov and B. Damianov, “Asymptotic functions — a new class of generalized functions. IV,” *Bulgar. J. Phys.*, 1979, **4**, 377–397.
31. J. F. Colombeau, “A multiplication of distributions,” *J. Math. Anal. Appl.*, 1983, **94**, 96–115.
32. J. F. Colombeau, *New generalized functions and multiplication of distributions*, North-Holland, Amsterdam, 1984.
33. M. Grosser, M. Kunzinger, M. Oberguggenberger, and R. Steinbauer, *Geometric theory of generalized functions with applications to general relativity*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.
34. A. S. Kostenko and M. M. Malamud, “1-D Schrödinger operator with local point interaction on a discrete set,” *J. Differ. Equ.*, 2010, **249**, 253–304.
35. M. Nedeljkov, S. Pilipovic, and D. Scarpalezos, *Linear theory of Colombeau’s generalized functions*, Addison-Wesley Longman, Harlow, 1998.
36. M. Oberguggenberger, *Multiplication of distributions and application to partial differential equations*, Longman Higher Education, Harlow, 1992.
37. E. E. Rosinger, *Generalized solutions of nonlinear partial differential equations*, Mathematics Studies, North-Holland, 1987.
38. L. Schwartz, *Théorie des distributions: en 2 vol*, Hermann, Paris, 1950.
39. L. Schwartz, “Sur l’impossibilité de la multiplication des distributions,” *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1954, **239**, 847–848.

A. B. Antonevich
Belarusian State University, Minsk, Belarus
E-mail: antonevich@bsu.by

T. G. Shagova
Belarusian State University, Minsk, Belarus
E-mail: tanya.shagova@gmail.com