Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 1 (2019). С. 137–155

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-137-155 УДК 517.98

ЦИКЛИЧЕСКАЯ КОМПАКТНОСТЬ В БАНАХОВЫХ $C_\infty(Q)$-МОДУЛЯХ

© 2019 г. **В. И. ЧИЛИН, Ж. А. КАРИМОВ**

Аннотация. В данной работе мы изучаем класс дизъюнктно полных коммутативных унитарных регулярных алгебр $\mathcal{A}$ над произвольными полями. Мы вводим понятие паспорта $\Gamma(X)$ для точных регулярных дизъюнктно полных $\mathcal{A}$-модулей X, которое состоит из однозначно определенного разбиения единицы в булевой алгебре всех идемпотентных элементов из $\mathcal{A}$ и из множества попарно различных кардинальных чисел. Мы доказываем, что $\mathcal{A}$-модули X и Y являются изоморфными тогда и только тогда, когда $\Gamma(X) = \Gamma(Y)$. Далее мы изучаем банаховы $\mathcal{A}$-модули в случае, если $\mathcal{A} = C_\infty(Q)$ или $\mathcal{A} = C_\infty(Q) + i \cdot C_\infty(Q)$. Также мы устанавливаем отношение эквивалентности для всех норм в конечномерном (и, соответственно, σ-конечномерном) $\mathcal{A}$-модуле и доказываем $\mathcal{A}$-версию теоремы Рисса, которая дает критерий конечномерности (и σ-конечномерности, соответственно) банахова $\mathcal{A}$-модуля.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение . . . 137
2. Предварительные сведения . . . 138
3. Классификация точных l-полных $\mathcal{A}$-модулей . . . 143
4. Банаховы $C_\infty(Q)$-модули . . . 146
Список литературы . . . 152

1. Введение

С развитием бэровской теории $*$-алгебр и C^*-алгебр появилась возможность описать класс AW^*-алгебр, схожих с алгебрами фон Неймана с точки зрения их алгебраических и порядковых свойств [12] (см. также рецензию [7]). Одним из важнейших результатов в теории AW^*-алгебр является представление произвольной AW^*-алгебры $\mathcal{M}$ типа I в виде $*$-алгебры всех линейных ограниченных операторов, действующих в специальном банаховом модуле над центром $Z(\mathcal{M})$ алгебры $\mathcal{M}$ [14]. Банахова $Z(\mathcal{M})$-значная норма в данном модуле порождается скалярным произведением со значениями в коммутативной AW^*-алгебре $Z(\mathcal{M})$. Позднее такие модули стали называться *модулями Капланского—Гильберта* (МКГ).

Важными примерами бэровских $*$-алгебр являются алгебры $S(\mathcal{M})$ и $LS(\mathcal{M})$ всех измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к алгебрам фон Неймана или к AW^*-алгебрам [9, 17–19, 22]. Если $\mathcal{M}$ является алгеброй фон Неймана, то центр $Z(LS(\mathcal{M}))$ алгебры $LS(\mathcal{M})$ отождествляется с алгеброй $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ всех классов измеримых совпадающих почти всюду комплексных функций, определенных на некотором махарамовском измеримом пространстве (Ω, Σ, μ) (см. [5, п. 2.1, 2.2]). В случае же если $\mathcal{M}$ является AW^*-алгеброй, то $Z(LS(\mathcal{M}))$ — комплексная $*$-алгебра $C_\infty(Q, \mathbb{C}) = C_\infty(Q) \oplus i \cdot C_\infty(Q)$, где Q — стоуновский компакт, отвечающий булевой алгебре центральных проекторов из $\mathcal{M}$ [7]. Возникает естественный вопрос (схожий с вопросом в работе И. Капланского [13] относительно AW^*-алгебр) о возможности представления $*$-алгебр $LS(\mathcal{M})$ в виде $*$-алгебр всех линейных $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$-ограниченных (или $C_\infty(Q, \mathbb{C})$-ограниченных) операторов, действующих в соответствующих банаховых модулях над $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ или $C_\infty(Q, \mathbb{C})$, в случае если $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана (или AW^*-алгебра, соответственно) типа I. Для решения этой задачи необходимо построить подходящую теорию МКГ над алгебрами $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ и $C_\infty(Q, \mathbb{C})$. В работе [2] приводится решение этой задачи для вещественной алгебры $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$. Там же, в частности, приведено разложение МКГ над $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ в прямую сумму однородных МКГ. Для регулярных дизъюнктно полных модулей над алгеброй $C_\infty(Q)$ подобное разложение в прямую сумму строго γ-однородных модулей приводится в работе [8] (см. определения ниже в разделе 2).

Алгебра $\mathcal{A} = C_\infty(Q)$ (или $\mathcal{A} = C_\infty(Q, \mathbb{C})$, соответственно) является примером коммутативной унитарной регулярной алгебры над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ (или комплексных чисел $\mathbb{C}$, соответственно). Для данной алгебры справедливо следующее предположение о дизъюнктной полноте: для любого множества $\{a_i\}_{i\in I}$ попарно дизъюнктных элементов в $\mathcal{A}$ существует элемент $a \in \mathcal{A}$ такой, что $as(a_i) = a_i$ для всех $i \in I$, где $s(a_i)$ — это носитель элемента a_i. Данное свойство $C_\infty(Q)$ играет ключевую роль в классификации регулярных дизъюнктно полных $C_\infty(Q)$-модулей [8]. Таким образом, будет довольно естественным рассмотреть класс дизъюнктно полных коммутативных унитарных регулярных алгебр $\mathcal{A}$ над произвольными полями и установить различные варианты структурных теорем для модулей над такими алгебрами. В разделе 3 будет приведено решение этой задачи. Мы раскладываем такой $\mathcal{A}$-модуль в прямую сумму строго однородных $\mathcal{A}$-модулей. После мы определяем паспорт $\Gamma(X)$ точного регулярного дизъюнктно полного $\mathcal{A}$-модуля X, состоящего из однозначно определенного разбиения единицы в булевой алгебре идемпотентных элементов из $\mathcal{A}$ и множества попарно различных кардинальных чисел. Уже было доказано, что равенство паспортов $\Gamma(X)$ и $\Gamma(Y)$ является необходимым и достаточным условием для изоморфизма $\mathcal{A}$-модулей X и Y.

В разделе 4 мы изучаем банаховы $C_\infty(Q)$-модули и устанавливаем отношение эквивалентности для всех норм в конечномерном $C_\infty(Q)$-модуле. Кроме того, из уже доказанного варианта теоремы Рисса следует критерий конечномерности нормированного $C_\infty(Q)$-модуля.

2. Предварительные сведения

Пусть $\mathcal{A}$ — коммутативная алгебра над полем K с единицей $\mathbf{1}$, а $\nabla = \{e \in \mathcal{A} : e^2 = e\}$ — множество всех идемпотентных элементов из $\mathcal{A}$. Для всех $e, f \in \nabla$ будем писать $e \leqslant f$, если $ef = e$. Хорошо известно (см., например, [16, Prop. 1.6]), что данное бинарное отношение является частичным порядком на ∇, к тому же, ∇ — это булева алгебра относительно этого порядка. Более того, мы знаем, что $e \vee f = e + f - ef$, $e \wedge f = ef$, $Ce = \mathbf{1} - e$, где Ce — это дополнение e в ∇.

Коммутативная унитарная алгебра $\mathcal{A}$ называется *регулярной*, если соблюдены следующие эквивалентные условия [6, §2, п. 4]:

1. Для любого $a \in \mathcal{A}$ существует $b \in \mathcal{A}$ такой, что $a = a^2 b$;
2. Для любого $a \in \mathcal{A}$ существует $e \in \nabla$ такой, что $a\mathcal{A} = e\mathcal{A}$.

Регулярная алгебра $\mathcal{A}$ есть регулярная полугруппа относительно операции умножения [11, ч. I, § 1.9]. Из того, что все идемпотентные элементы в коммутативной алгебре $\mathcal{A}$ попарно коммутируют, следует, что $\mathcal{A}$ — коммутативная инверсивная полугруппа, т. е. для любого $a \in \mathcal{A}$ существует единственный элемент $i(a) \in \mathcal{A}$, являющийся единственным решением системы: $a^2 x = a$, $ax^2 = x$ (см. [11, ч I, § 1.9]). Элемент $i(a)$ называется инверсией элемента a. Очевидно, $ai(a) \in \nabla$ для любого $a \in \mathcal{A}$. Отображение $i : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ является биекцией и автоморфизмом (относительно произведения) в полугруппе $\mathcal{A}$. Кроме того, $i(i(a)) = a$ и $i(g) = g$ для всех $a \in \mathcal{A}$, $g \in \nabla$.

Идемпотентный элемент $s(a) \in \nabla$ называется *носителем* элемента $a \in \mathcal{A}$, если $s(a)a = a$ и $ga = a$, $g \in \nabla$ влечет $s(a) \leqslant g$. Ясно, что $s(a) = ai(a) = s(i(a))$. В частности, $s(e) = e$ для любого $e \in \nabla$. Легко показать, что носители элементов имеют следующие свойства.

Предложение 2.1. *Пусть $a, b \in \mathcal{A}$, тогда*:

(i) $s(ab) = s(a)s(b)$, *в частности,* $ab = 0 \Leftrightarrow s(a)s(b) = 0$;

(ii) *если* $ab = 0$, *то* $s(a + b) = s(a) + s(b)$.

Элементы a и b из коммутативной унитарной регулярной алгебры $\mathcal{A}$ называются *дизъюнктными*, если $ab = 0$. Если булева алгебра ∇ всех идемпотентных элементов из $\mathcal{A}$ полна, $a \in \mathcal{A}$ и $r(a) = \sup\{e \in \nabla : ae = 0\}$, то $s(a) = \mathbf{1} - r(a)$. В таком случае для любого разбиения единицы $\{e_i\}_{i\in I}$ в ∇, $a, b \in \mathcal{A}$ из равенств $ae_i = be_i$, $i \in I$ следует, что $r(a - b) = \mathbf{1}$, т. е. $a = b$.

Коммутативная унитарная регулярная алгебра $\mathcal{A}$ называется *дизъюнктно полной* (*l-полной*), если булева алгебра ее идемпотентных элементов полна, и для любого множества $\{a_i\}_{i\in I}$ попарно дизъюнктных элементов из $\mathcal{A}$ существует элемент $a \in \mathcal{A}$ такой, что $as(a_i) = a_i$ для всех $i \in I$. Элемент $a \in \mathcal{A}$ такой, что $as(a_i) = a_i$, $i \in I$, вообще говоря, не определяется однозначно. Однако равенство

$$a \sup_{i \in I} s(a_i) = b \sup_{i \in I} s(a_i)$$

всегда остается верным.

Приведем несколько примеров l-полных коммутативных регулярных алгебр.

1. Пусть Δ — произвольное множество, и K^Δ — декартово произведение Δ копий поля K, т. е. множество всех K-значных функций на Δ. Множество K^Δ является коммутативной унитарной регулярной алгеброй относительно поточечных алгебраических операций, и, сверх того, булева алгебра ∇ всех идемпотентных элементов из K^Δ является изоморфной дискретной булевой алгеброй всех подмножеств Δ. При этом ∇ — это полная булева алгебра. Если $\{a_j = (\alpha_q^{(j)})_{q \in \Delta}, j \in J\}$ — это семейство попарно дизъюнктных элементов из K^Δ, то, полагая $\Delta_j = \{q \in \Delta : \alpha_q^{(j)} \neq 0\}$, $j \in J$ и $a = (\alpha_q)_{q \in \Delta} \in K^\Delta$, где $\alpha_q = \alpha_q^{(j)}$ для любых $q \in \Delta_j$, $j \in J$, и $\alpha_q = 0$ для $q \in \Delta \setminus \bigcup\limits_{j \in J} \Delta_j$, мы получим, что $as(a_j) = a_j$ для всех $j \in J$. Следовательно, K^Δ есть l-полная алгебра.
2. Пусть ∇ — полная булева алгебра, и пусть $Q(\nabla)$ — стоуновский компакт, отвечающий ∇. Алгебра $C_\infty(Q(\nabla))$ всех непрерывных функций $a : Q(\nabla) \to [-\infty, +\infty]$, принимающих значения $\pm\infty$ только на нигде не плотных множествах в $Q(\nabla)$, является l-полной коммутативной регулярной алгеброй [15, п. 1.4.2].

В случае когда ∇ — это полная дискретная булева алгебра, а Δ — это множество всех элементов из ∇, $C_\infty(Q(\nabla))$ является изоморфной алгебре $\mathbb{R}^\Delta$.

Комплексификация $C_\infty(Q(\nabla), \mathbb{C}) = C_\infty(Q(\nabla)) \oplus i \cdot C_\infty(Q(\nabla))$ алгебры $C_\infty(Q(\nabla))$ также является примером l-полной коммутативной регулярной алгебры над полем $\mathbb{C}$.

Последующие примеры дизъюнктно полных коммутативных регулярных алгебр суть вариации алгебр $C_\infty(Q(\nabla))$ для различных топологических полей, в частности, для поля $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел.

Пусть K — произвольное поле, а t — хаусдорфова топология на K. Если операции $\alpha \to (-\alpha)$, $\alpha \to \alpha^{-1}$, $(\alpha, \beta) \to \alpha + \beta$, $(\alpha, \beta) \to \alpha\beta$, $\alpha, \beta \in K$, непрерывны относительно заданной топологии, то поле (K, t) называется *топологическим* (см., например, [20, Ch. 20, § 165]).

Пусть (K, t) — топологическое поле, (X, τ) — произвольное топологическое пространство, и пусть $\nabla(X)$ — булева алгебра всех открыто-замкнутых подмножеств (X, τ). Будем говорить, что отображение $\varphi : (X, \tau) \to (K, t)$ является *почти непрерывным*, если существует плотное открытое множество U в (X, τ) такое, что сужение $\varphi|_U : U \to (K, t)$ отображения φ на подмножество U непрерывно на U. Множество всех почти непрерывных отображений мы обозначим через $AC(X, K)$.

Определим поточечные алгебраические операции на $AC(X, K)$:

$$(\varphi + \psi)(t) = \varphi(t) + \psi(t),$$

$$(\alpha\varphi)(t) = \alpha\varphi(t),$$

$$(\varphi \cdot \psi)(t) = \varphi(t)\psi(t)$$

для всех $\varphi, \psi \in AC(X, K)$, $\alpha \in K$, $t \in X$.

Так как пересечение двух плотных открытых множеств из (X, τ) также является плотным открытым множеством в (X, τ), то $\varphi + \psi$, $\varphi \cdot \psi \in AC(X, K)$ для любых $\varphi, \psi \in AC(X, K)$. Очевидно, $\alpha\varphi \in AC(X, K)$ для всех $\varphi \in AC(X, K)$, $\alpha \in K$. Можно легко проверить, что $AC(X, K)$ — коммутативная алгебра над полем K с единичным элементом $\mathbf{1}(t) = 1_K$, $t \in X$, где 1_K — это единичный элемент поля K. В этом случае, алгебра $C(X, K)$ всех непрерывных отображений из (X, τ) в (K, t) является подалгеброй в $AC(X, K)$.

Рассмотрим следующий идеал алгебры $AC(X, K)$:

$$I_0(X, K) = \{\varphi \in AC(X, K) : \text{ внутренность прообраза } \varphi^{-1}(0) \text{ плотна в } (X, \tau)\}.$$

Через $C_\infty(X, K)$ обозначим фактор-алгебру $AC(X, K)/I_0(X, K)$, а через

$$\pi : AC(X, K) \to AC(X, K)/I_0(X, K)$$

соответствующий канонический гомоморфизм.

Теорема 2.1. *Фактор-алгебра $C_\infty(X,K)$ является коммутативной унитарной регулярной алгеброй над полем K. Кроме того, если (X,τ) — стоуновский компакт, то алгебра $C_\infty(X,K)$ является дизъюнктно полной, а булева алгебра ∇ всех ее идемпотентов изоморфна булевой алгебре $\nabla(X)$.*

Доказательство. Так как $AC(X,K)$ — коммутативная унитарная алгебра над K, то $C_\infty(X,K)$ — также коммутативная унитарная алгебра над K с единичным элементом $\pi(\mathbf{1})$. Теперь покажем, что $C_\infty(X,K)$ является регулярной, т. е. для любого $\varphi \in AC(X,K)$ существует $\psi \in AC(X,K)$ такой, что $\pi^2(\varphi)\pi(\psi) = \pi(\varphi)$.

Фиксируем элемент $\varphi \in AC(X,K)$ и выбираем плотное открытое множество $U \in \tau$ таким, что сужение $\varphi|_U : U \to (K,t)$ непрерывно. В силу того, что $K \setminus \{0\}$ — открытое множество в (K,t), множество $V = U \cap \varphi^{-1}(K \setminus \{0\})$ открыто в (X,τ). Совершенно ясно, что множество $W = X \setminus \overline{V}^\tau$ также открыто в (X,τ), более того, $V \cup W$ — это плотное открытое множество в (X,τ).

Определим отображение $\psi : X \to K$ следующим образом: $\psi(t) = (\varphi(t))^{-1}$, если $t \in V$, и $\psi(t) = 0$, если $t \in X \setminus V$. Видим, что $\psi \in AC(X,K)$ и $\varphi^2\psi - \varphi \in I_0(X,K)$, т. е. $\pi^2(\varphi)\pi(\psi) = \pi(\varphi)$. Следовательно, алгебра $C_\infty(X,K)$ является регулярной.

Для любого открыто-замкнутого множества $U \in \nabla(X)$ его характеристическая функция χ_U принадлежит $AC(X,K)$, в этом случае $\pi(\chi_U)^2 = \pi(\chi_U^2) = \pi(\chi_U)$, т. е. $\pi(\chi_U)$ является идемпотентом в алгебре $C_\infty(X,K)$.

Предположим, что (X,τ) — стоуновский компакт, и покажем, что для любого идемпотентного элемента $e \in C_\infty(X,K)$ существует $U \in \nabla(X)$ такой, что $e = \pi(\chi_U)$.

Если $e \in \nabla$, то $e = \pi(\varphi)$ для некоторой $\varphi \in AC(X,K)$ и $\pi(\varphi) = e^2 = \pi(\varphi^2)$, т. е. $(\varphi^2 - \varphi) \in I_0(X,K)$. Следовательно, существует плотное открытое множество V в X такое, что $\varphi^2(t) - \varphi(t) = 0$ для всех $t \in V$. Обозначим через U плотное открытое множество из X такое, что сужение $\varphi|_U : U \to K$ непрерывно. Положим $U_0 = \varphi^{-1}(\{0\}) \cap (U \cap V)$, $U_1 = \varphi^{-1}(\{1_K\}) \cap (U \cap V)$. Из того, что $U_0 \cap U_1 = \varnothing, U_0 \cup U_1 = U \cap V \in \tau$, а множества U_0, U_1 замкнуты в $U \cap V$ относительно топологии, индуцированной (X,τ), следует, что $U_0, U_1 \in \tau$. Таким образом, множество $U_\varphi = \overline{U_1}$ принадлежит булевой алгебре $\nabla(X)$, и, кроме того, $U_\varphi \cap U_0 = \varnothing$.

Так как $U_0 \cup U_1 = U \cap V$ — это плотное открытое множество в (X,τ), а $\varphi(t) = \chi_{U_\varphi}(t)$ для всех $t \in U_0 \cup U_1$, отсюда следует, что $e = \pi(\varphi) = \pi(\chi_{U_\varphi})$. Следовательно, отображение $\Phi : \nabla(X) \to \nabla$, определяемое равенством $\Phi(U) = \pi(\chi_U)$, $U \in \nabla(X)$, является сюръекцией.

Более того, для $U, V \in \nabla(X)$ справедливы следующие равенства:

$$\Phi(U \cap V) = \pi(\chi_{U\cap V}) = \pi(\chi_U\chi_V) = \pi(\chi_U)\pi(\chi_V) = \Phi(U)\Phi(V),$$

$$\Phi(X \setminus U) = \pi(\chi_{X\setminus U}) = \pi(\mathbf{1} - \chi_U) = \Phi(X) - \Phi(U).$$

Помимо всего прочего, из равенства $\Phi(U) = \Phi(V)$ следует, что непрерывные отображения χ_U и χ_V совпадают на плотном множестве в X. Поэтому $\chi_U = \chi_V$, а именно $U = V$.

Тем самым, Φ является изоморфизмом между булевой алгеброй $\nabla(X)$ и булевой алгеброй ∇ всех идемпотентных элементов из $C_\infty(X,K)$, при этом ∇ — полная булева алгебра.

Наконец, для доказательства l-полноты алгебры $C_\infty(X,K)$ покажем, что для любого семейства $\{\pi(\varphi_i) : \varphi \in AC(X,K)\}_{i\in I}$ ненулевых попарно дизъюнктных элементов из $C_\infty(X,K)$ существует $\varphi \in AC(X,K)$ такой, что $\pi(\varphi)s(\pi(\varphi_i)) = \pi(\varphi_i)$ для всех $i \in I$. Для любого $i \in I$ выберем плотное открытое множество U_i таким, что сужение $\varphi_i|_{U_i}$ будет непрерывным, и положим $V_i = U_i \cap \varphi_i^{-1}(K \setminus \{0\})$, $i \in I$. Нетрудно доказать, что $s(\pi(\varphi_i)) = \Phi(\overline{V_i})$. В частности, $V_i \cap V_j = \varnothing$, когда $i \neq j$, $i, j \in I$ (см. утверждение 2.1). Определим отображение $\varphi : X \to K$ следующим образом: $\varphi(t) = \varphi_i(t)$, если $t \in V_i$, и $\varphi(t) = 0$, если $t \in X \setminus \left(\bigcup\limits_{i\in I} V_i\right)$. Очевидно, $\varphi \in AC(X,K)$ и $\pi(\varphi)s(\pi(\varphi_i)) = \pi(\varphi\chi_{\overline{V_i}}) = \pi(\varphi_i\chi_{\overline{V_i}}) = \pi(\varphi_i)$ для всех $i \in I$. □

Пусть $\mathcal{A}$ — дизъюнктно полная коммутативная регулярная алгебра, а ∇ — булева алгебра всех идемпотентных элементов из $\mathcal{A}$. Пусть X — левый $\mathcal{A}$-модуль с алгебраическими операциями $x + y$ и $a \cdot x$, $x, y \in X$, $a \in \mathcal{A}$ (и пусть $X \neq \{0\}$). Так как алгебра $\mathcal{A}$ коммутативна, левый $\mathcal{A}$-модуль X будет правым $\mathcal{A}$-модулем X, если мы положим $x \cdot a = a \cdot x$ для всех $a \in \mathcal{A}$, $x \in X$. Следовательно, мы вправе предположить, что X — это $\mathcal{A}$-бимодуль, для которого справедливо $x \cdot a = a \cdot x$, $a \in \mathcal{A}$, $x \in X$. Далее $\mathcal{A}$-бимодуль X мы будем называть *$\mathcal{A}$-модулем*.

$\mathcal{A}$-модуль X называется *точным*, если для любого ненулевого $e \in \nabla$ существует $x \in X$ такой, что $ex \neq 0$. Ясно, что для точного $\mathcal{A}$-модуля X множество $X_e := eX$ является точным $\mathcal{A}_e$-модулем для любого $0 \neq e \in \nabla$, где $\mathcal{A}_e := e \cdot \mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$-модуль X называется *регулярным*, если для любого $x \in X$ из условия $ex = 0$ для всех $e \in L \subset \nabla$ следует $(\sup L)x = 0$. В таком случае, для $x \in X$ идемпотент

$$s(x) = \mathbf{1} - \sup\{e \in \nabla : ex = 0\}$$

называется *носителем* элемента x. Ясно, что $s(x)x = x$ и $s(ax) = s(a)s(x)$ для всех $x \in X$, $a \in \mathcal{A}$. Отметим также, что, если X — регулярный $\mathcal{A}$-модуль, то X_e является регулярным $\mathcal{A}_e$-модулем для любого ненулевого $e \in \nabla$.

Будем говорить, что $\mathcal{A}$-модуль X является *дизъюнктно полным* (*l-полным*), если для любого множества $\{x_i\}_{i\in I} \subset X$ и для любого разбиения $\{e_i\}_{i\in I}$ единицы булевой алгебры ∇ существует $x \in X$ такой, что $e_i x = e_i x_i$ для всех $i \in I$. В этом случае элемент x называется *перемешиванием* множества $\{x_i\}_{i\in I}$ относительно разбиения единицы $\{e_i\}_{i\in I}$ и обозначается как $\operatorname{mix}\limits_{i\in I}(e_i x_i)$.

Пусть $\{x_i\}_{i\in I} \subset E \subset X$, а $\{e_i\}_{i\in I}$ есть разбиение единицы в ∇. Множество всех перемешиваний $\operatorname{mix}\limits_{i\in I}(e_i x_i)$ называется *циклической оболочкой* множества E в X и обозначается как $\operatorname{mix}(E)$. Очевидно, вложение $E \subset \operatorname{mix}(E)$ всегда сохраняется. Если $E = \operatorname{mix}(E)$, то E называется *циклическим множеством* в X (ср. [4, п. 1.1.2]).

Таким образом, регулярный $\mathcal{A}$-модуль X является l-полным $\mathcal{A}$-модулем тогда и только тогда, когда X является циклическим множеством. В частности, в любом l-полном $\mathcal{A}$-модуле X его подмодуль X_e также является l-полным $\mathcal{A}_e$-модулем для любого ненулевого идемпотентного элемента e из $\mathcal{A}$.

Нам необходимы следующие свойства циклических оболочек множеств [10].

Предложение 2.2. *Пусть X — это l-полный $\mathcal{A}$-модуль, E — непустое подмножество в X, $a \in \mathcal{A}$. Тогда*:

(i) $\operatorname{mix}(aE) = a\operatorname{mix}(E)$;
(ii) $\operatorname{mix}(Y)$ — *l-полный $\mathcal{A}$-подмодуль в X для любого $\mathcal{A}$-подмодуля Y в X*;
(iii) *если U является изоморфизмом между $\mathcal{A}$-модулем X и $\mathcal{A}$-модулем Z, то Z — l-полный $\mathcal{A}$-модуль и* $\operatorname{mix}(U(E)) = U(\operatorname{mix}(E))$.

Пусть ∇ — произвольная полная булева алгебра. Для любого ненулевого элемента $e \in \nabla$ положим $\nabla_e = \{q \in \nabla : q \leqslant e\} = e \cdot \nabla$. Множество ∇_e является булевой алгеброй с единицей e относительно частичного порядка, индуцированного ∇.

Множество $B \subset \nabla$ называется *минорантным подмножеством* для ∇_e, если для любого ненулевого $q \in \nabla_e$ существует ненулевой $p \in B$ такой, что $p \leqslant q$. Нам потребуется следующее свойство полных булевых алгебр.

Теорема 2.2 (см. [15, п. 1.1.6]). *Если ∇ — полная булева алгебра, $0 \neq e \in \nabla$, а B — минорантное подмножество для ∇_e, то существует дизъюнктное подмножество $L \subset B$ такое, что* $\sup L = e$.

Булева алгебра называется *счетной* или *σ-конечной*, если любое семейство ненулевых попарно дизъюнктных элементов из ∇ не более чем счетно. Полная булева алгебра ∇ называется *мульти-σ-конечной*, если для любого ненулевого элемента $g \in \nabla$ существует $0 \neq e \in \nabla$ такой, что $e \leqslant g$, а булева алгебра ∇_e будет счетной. По теореме 2.2 мульти-σ-конечная булева алгебра ∇ всегда имеет такое разбиение $\{e_i\}_{i\in I}$ единицы $\mathbf{1}$, что булева алгебра ∇_{e_i} будет σ-конечной для всех $i \in I$.

Воспользовавшись теоремой 2.2, получим следующие полезные свойства l-полных $\mathcal{A}$-модулей (доказательство этих свойств аналогично доказательству утверждения 2.4 из [8].)

Предложение 2.3. *Пусть X — это произвольный l-полный $\mathcal{A}$-модуль, а ∇ — полная булева алгебра всех идемпотентных элементов из $\mathcal{A}$. Тогда*:

(i) *если X есть точный $\mathcal{A}$-модуль, то существует элемент $x \in X$ такой, что* $s(x) = \mathbf{1}$;
(ii) *если Y является l-полным $\mathcal{A}$-подмодулем регулярного $\mathcal{A}$-модуля X, и для любого ненулевого $e \in \nabla$ существует ненулевой $g_e \in \nabla$ такой, что $g_e \leqslant e$ и $g_e Y = g_e X$, то $Y = X$.*

Ниже приведем описание точного l-полного $\mathcal{A}$-модуля X в виде декартова произведения семейства точных l-полных $\mathcal{A}_{e_i}$-модулей, где $\{e_i\}_{i\in I}$ есть разбиение единицы в булевой алгебре ∇ всех идемпотентных элементов из $\mathcal{A}$.

Рассмотрим декартово произведение

$$\prod_{i\in I} e_i X = \{\{y_i\}_{i\in I} : y_i \in e_i X\}$$

$\mathcal{A}$-подмодулей e_iX с покоординатными алгебраическими операциями. Совершенно ясно, что $\prod\limits_{i\in I} e_iX$ есть точный l-полный $\mathcal{A}$-модуль.

Определим отображение $U : X \to \prod\limits_{i\in I} e_iX$, заданное с помощью $U(x) = \{e_ix\}_{i\in I}$. Очевидно, U является $\mathcal{A}$-линейным отображением из X на $\prod\limits_{i\in I} e_iX$. Если $U(x) = U(y)$, то $e_ix = e_iy$ для всех $i \in I$, и в силу регулярности $\mathcal{A}$-модуля X отсюда следует, что $x = y$.

Если $z = \{x_i\}_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} e_iX$, где $x_i \in e_iX \subset X$, $i \in I$, то l-полнота $\mathcal{A}$-модуля X влечет существование такого элемента $x \in X$, что $e_ix = e_ix_i = x_i$ для всех $i \in I$. Следовательно, $U(x) = z$, т. е. U — сюръекция.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Предложение 2.4. *Если X — точный l-полный $\mathcal{A}$-модуль, $\{e_i\}_{i\in I}$ — разбиение единицы в булевой алгебре ∇ всех идемпотентных элементов из $\mathcal{A}$, то $\prod\limits_{i\in I} e_iX$ также есть точный l-полный $\mathcal{A}$-модуль, а $U(x) = \{e_ix\}_{i\in I}$, $x \in X$, — изоморфизм между X и $\prod\limits_{i\in I} e_iX$.*

Пусть Y — непустое подмножество $\mathcal{A}$-модуля X. Нижеприведенный $\mathcal{A}$-подмодуль в X называется *$\mathcal{A}$-линейной оболочкой* подмножества Y:

$$\mathrm{Lin}(Y, \mathcal{A}) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i y_i : a_i \in \mathcal{A}, y_i \in Y, i = 1, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N} \right\},$$

если $\mathbb{N}$ является множеством всех натуральных чисел. Если X — l-полный $\mathcal{A}$-модуль, то в силу утверждения 2.2 (ii) $\mathrm{mix}(\mathrm{Lin}(Y, \mathcal{A}))$ также является l-полным $\mathcal{A}$-подмодулем в X.

Множество $\{x_i\}_{i\in I}$ в $\mathcal{A}$-модуле X называется *$\mathcal{A}$-линейно независимым*, если для любых $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$, $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n} \in \{x_i\}_{i\in I}$, $n \in \mathbb{N}$, из равенства $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_{i_k} = 0$ следует, что $a_1 = \ldots = a_n = 0$.

Будем говорить, что $\mathcal{A}$-линейно независимая система $\{x_i\}_{i\in I}$ в l-полном $\mathcal{A}$-модуле X является *$\mathcal{A}$-базисом Гамеля*, если $\mathrm{mix}(\mathrm{Lin}(\{x_i\}_{i\in I}, \mathcal{A})) = X$. В случае, когда $\mathcal{A}$-базис Гамеля конечен, будем его называть *$\mathcal{A}$-базисом* в X.

Используем следующий $\mathcal{A}$-вариант одного широко известного результата из линейной алгебры.

Лемма 2.1 (см. [10]). *Пусть $\{z_i\}_{i=1}^n \subset X, \{y_j\}_{j=1}^k \subset X$ и $\{ey_j\}_{j=1}^k \subset \mathrm{Lin}(\{ez_i\}_{i=1}^n, \mathcal{A}_e)$ для некоторого идемпотентного элемента $0 \neq e \in \nabla$. Если множество $\{ey_1, \ldots, ey_k\}$ $\mathcal{A}_e$-линейно независимо, то $k \leqslant n$.*

Зафиксируем некоторое кардинальное число γ. Точный l-полный $\mathcal{A}$-модуль X называется *γ-однородным*, если существует $\mathcal{A}$-базис Гамеля $\{x_i\}_{i\in I}$ в X с $\mathrm{card}\, I = \gamma$. Будем говорить, что $\mathcal{A}$-модуль X *однородный*, если он является γ-однородным $\mathcal{A}$-модулем для некоторого кардинального числа γ.

Если X — γ-однородный $\mathcal{A}$-модуль, то X_e, очевидно, также является γ-однородным $\mathcal{A}_e$-модулем для любого ненулевого идемпотентного элемента $e \in \mathcal{A}$. Помимо этого, из утверждения 2.2 (iii) следует, что если $\mathcal{A}$-модуль Y изоморфен γ-однородному $\mathcal{A}$-модулю X, то Y также γ-однородный модуль.

В [10] было установлено следующее утверждение.

Предложение 2.5. *Если X и Y являются γ-однородными $\mathcal{A}$-модулями, то X и Y изоморфны. Вдобавок к этому, для любого положительного целого n существует единственный, с точностью до изоморфизма, n-однородный $\mathcal{A}$-модуль, который изоморфен $\mathcal{A}^n$.*

Пусть X — это точный l-полный $\mathcal{A}$-модуль, являющийся одновременно γ-однородным и λ-однородным. Возникает естественный вопрос, будет ли в таком случае выполняться равенство $\gamma = \lambda$? Схожий вопрос ставился в классификации МКГ X над коммутативными AW^*-алгебрами $\mathcal{A}$ с булевой алгеброй проекций ∇. Для случая, когда ∇ есть мульти-σ-конечная булева алгебра в [14], было доказано, что для МКГ X равенство $\lambda = \gamma$ выполняется всегда. Однако данное равенство не может быть установлено для произвольной полной булевой алгебры ∇. Как следствие, в [15, п. 7.4.6] было введено понятие *строго γ-однородных* МКГ X, что дало возможность классифицировать МКГ X над произвольными коммутативными AW^*-алгебрами $\mathcal{A}$. По этой же причине ниже мы введем понятие строго γ-однородных точных l-полных модулей над дизъюнктно полными алгебрами $\mathcal{A}$. С помощью этого понятия мы получим необходимые и достаточные условия изоморфизма l-полных $\mathcal{A}$-модулей.

Пусть X — это точный l-полный $\mathcal{A}$-модуль, $0 \neq e \in \nabla$. Через $\varkappa(e)$ обозначим наименьшее кардинальное число γ такое, что $\mathcal{A}_e$-модуль X_e будет γ-однородным. Если $\mathcal{A}$-модуль X однородный, то кардинальное число $\varkappa(e)$ определено для всех ненулевых $e \in \nabla$. Кроме того, в силу [15, п. 7.4.7], предполагаем, что $\varkappa(0) = 0$.

Будем говорить, что $\mathcal{A}$-модуль X является *строго γ-однородным* (ср. [15, п. 7.4.6]), если X — γ-однородный и $\gamma = \varkappa(e)$ для всех ненулевых $e \in \nabla$. Если $\mathcal{A}$-модуль X строго γ-однороден для некоторого кардинального числа γ, то такой $\mathcal{A}$-модуль X называется *строго однородным*.

Очевидно, что любой строго γ-однородный $\mathcal{A}$-модуль также является γ-однородным $\mathcal{A}$-модулем. Из леммы 2.1 следует, что каждый n-однородный $\mathcal{A}$-модуль X является строго n-однородным. Для случая, когда ∇ — это мульти-σ-конечная булева алгебра в [8], доказано, что любой γ-однородный $\mathcal{A}$-модуль также является строго γ-однородным $\mathcal{A}$-модулем. В частности, если X — это точный l-полный $\mathcal{A}$-модуль, являющийся одновременно γ-однородным и λ-однородным, то $\lambda = \gamma$.

Отметим также, что по утверждению 2.2 (iii) всякий $\mathcal{A}$-модуль Y, изоморфный строго γ-однородному $\mathcal{A}$-модулю X, является строго γ-однородным $\mathcal{A}$-модулем.

Следующее утверждение позволяет «склеить» γ-однородные (строго γ-однородные) $\mathcal{A}$-модули (доказательство данного утверждения аналогично доказательству утверждения 3.10 из [8]).

Предложение 2.6. *Пусть $\mathcal{A}$ — l-полная коммутативная регулярная алгебра, X — l-полный $\mathcal{A}$-модуль, а $\{e_i\}_{i\in I}$ — множество попарно дизъюнктных ненулевых идемпотентных элементов из $\mathcal{A}$, и $e = \sup\limits_{i\in I} e_i$. Если X_{e_i} — γ-однородный (или строго γ-однородный) $\mathcal{A}_{e_i}$-модуль для всех $i \in I$, то $\mathcal{A}_e$-модуль X_e также будет γ-однородным (или строго γ-однородным, соответственно).*

3. Классификация точных l-полных $\mathcal{A}$-модулей

В этом разделе нами доказывается, что всякий точный дизъюнктно полный $\mathcal{A}$-модуль изоморфен декартову произведению строго однородных $\mathcal{A}$-модулей. Следующая теорема является важным шагом при доказательстве этого факта.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathcal{A}$ — l-полная коммутативная регулярная алгебра, ∇ — булева алгебра всех идемпотентных элементов из $\mathcal{A}$, а X — точный l-полный $\mathcal{A}$-модуль. Тогда существует такой ненулевой идемпотентный элемент $p \in \nabla$, что X_p будет строго однородным $\mathcal{A}_p$-модулем.*

Доказательство. Используя утверждение 2.3 (i), мы можем выбрать $x_0 \in X$ таким, что $s(x_0) = \mathbf{1}$. Если $X = \mathrm{Lin}(x_0, \mathcal{A})$, то X — строго 1-однородный модуль, и теорема 3.1 доказана.

Предположим, что $X \neq \mathrm{mix}\,(\{x_0\})$. Рассмотрим в X следующее непустое семейство подмножеств

$$\mathcal{E} = \{B \subset X : x_0 \in B,\ B — \text{это}\ \ \mathcal{A}\text{-линейно независимое множество}\}.$$

Введем на $\mathcal{E}$ частичный порядок по $B \leqslant C \Leftrightarrow B \subset C$. По лемме Цорна существует максимальный элемент D в $\mathcal{E}$. Если D — это $\mathcal{A}$-базис Гамеля в X, то X — $(\mathrm{card}\, D)$-однородный $\mathcal{A}$-модуль.

Предположим, что $X \neq \mathrm{mix}\,(\mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A}))$. Если для любого ненулевого $e \in \nabla$ существует $0 \neq q_e \in \nabla$ такой, что $q_e \cdot \mathrm{mix}\,(\mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A})) = q_e X$, то в силу утверждений 2.2 (ii) и 2.3 (ii) отсюда следует, что $X = \mathrm{mix}\,(\mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A}))$, что противоречит нашему предположению. Следовательно, существует такой ненулевой $e \in \nabla$, что выполняется следующее условие:

$$g \cdot \mathrm{mix}\,(\mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A})) \neq gX \text{ для всех ненулевых } g \in \nabla_e. \tag{1}$$

Обозначим через $\mathcal{L}$ множество всех ненулевых $e \in \nabla$ со свойством (1). Положим $e_0 = \sup \mathcal{L}$ и покажем, что $e_0 \neq \mathbf{1}$.

Предположим, что $e_0 = \mathbf{1}$. В таком случае для всякого ненулевого $q \in \nabla$ найдется $e \in \mathcal{L}$ такой, что $g = qe \neq 0$. Следовательно, $gX \neq g \cdot \mathrm{mix}\,(\mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A}))$ (см. (1)), откуда вытекает

$$qX \neq q \cdot \mathrm{mix}\,(\mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A})). \tag{2}$$

Покажем, что для любого ненулевого $q \in \nabla$ существует ненулевой идемпотентный элемент $r \leqslant q$ такой, что для любого $0 \neq g \in \nabla_r$ выполняется следующее условие:

$$\begin{gathered} \text{существует } \ x_g \in gX \quad \text{такой, что} \quad s(x_g) = g \\ \text{и } \ l \cdot x_g \notin \mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A}) \text{ для всех } 0 \neq l \in \nabla_g. \end{gathered} \tag{3}$$

Если это не так, то существует такой ненулевой $q \in \nabla$, что для всякого $0 \neq r \in \nabla_q$ найдется ненулевой идемпотент $g_r \in \nabla_r$ без свойства (3), т. е. для любого $x \in g_r X$ с $s(x) = g_r$ существует ненулевой идемпотент $e(x_g, r) \leqslant g_r \leqslant q$ такой, что $e(x_g, r)x \in e(x_g, r) \cdot \mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A}) \subset \mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A})$.

Покажем, что в таком случае $g_q X = g_q \cdot \mathrm{mix}\,(\mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A}))$. Пусть x — это ненулевой элемент из $g_q X$, в частности, $0 \neq s(x) \leqslant g_q$. Для любого ненулевого идемпотента $a \leqslant s(x)$ существует такой ненулевой идемпотент $e(ax, a) \leqslant a$, что $e(ax, a)x \in \mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A})$. По теореме 2.2, существует такое разбиение $\{e_i\}_{i \in I}$ носителя $s(x)$, что $e_i x \in s(x) \cdot \mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A})$ для всех $i \in I$. Это означает, что $x \in \mathrm{mix} \cdot (s(x)\mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A})) = s(x) \cdot \mathrm{mix}\,(\mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A}))$ (см. утверждение 2.2 (i)). Так как $s(x) \leqslant g_q$, получим, что $x \in g_q \cdot \mathrm{mix}\,(\mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A}))$, откуда следует вложение $g_q X \subset g_q \cdot \mathrm{mix}\,(\mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A}))$. С другой стороны, в силу l-полноты $\mathcal{A}_{g_q}$-модуля $g_q X$ будем иметь:

$$g_q \cdot \mathrm{mix}\,(\mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A})) \subset g_q \cdot \mathrm{mix}\,(X) = \mathrm{mix}\,(g_q X) = g_q X.$$

Тем самым, $g_q X = g_q \cdot \mathrm{mix}\,(\mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A}))$, что противоречит (2).

Таким образом, для всякого ненулевого $q \in \nabla$ найдется такой ненулевой идемпотентный элемент $r \leqslant q$, что для любого $0 \neq g \in \nabla_r$ условие (3) выполняется.

Вновь по теореме 2.2 можно выбрать разбиение $\{g_j\}_{j \in J}$ идемпотента $r \in \nabla$ и множество $\{x_{g_j}\}_{j \in J}$ в rX так, чтобы $s(x_{g_j}) = g_j$ и $lx_{g_j} \notin \mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A})$ для всех $0 \neq l \in \nabla_{g_i}$.

Так как rX — это l-полный $\mathcal{A}_r$-модуль, то существует $x \in rX$ такой, что $g_j x = x_{g_j}$. В частности, $s(x) = r$, при котором $lx \notin \mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A})$ для всех $0 \neq l \in \nabla_r$.

Опять же по теореме 2.2 выбираем разбиение $\{r_k\}_{k \in K}$ единицы $\mathbf{1}$ в булевой алгебре ∇ и множество $\{x_k\}_{k \in K}$ в X так, чтобы $s(x_k) = r_k$ и $lx_k \notin \mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A})$ для любых $0 \neq l \in \nabla_{r_k}$. В силу l-полноты $\mathcal{A}$-модуля X существует $\hat{x} \in X$ такой, что $r_k \hat{x} = x_k$ для всех $k \in K$. В таком случае $s(\hat{x}) = \mathbf{1}$ и $l\hat{x} \notin \mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A})$ для всех $0 \neq l \in \nabla$.

Теперь покажем, что множество $D \cup \{\hat{x}\}$ является $\mathcal{A}$-линейно независимым. Пусть $a_0 \hat{x} + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$, где $a_0, a_i \in \mathcal{A}$, $x_i \in D$, $i = 1, \ldots, n$. Если $a_0 = 0$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$, и в силу $\mathcal{A}$-линейной независимости D отсюда следует, что $a_i = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Если $a_0 \neq 0$, то $s(a_0) \neq 0$, и для всех $i(a_0) = h \in \mathcal{A}$ будем иметь, что $ha_0 = s(a_0)$ и $s(a_0)\hat{x} = -\sum\limits_{i=1}^{n} a_i h x_i \in \mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A})$, что не соответствует действительности. Следовательно, множество $D \cup \{\hat{x}\}$ является $\mathcal{A}$-линейно независимым в X, что противоречит максимальности множества D.

Тем самым, $e_0 \neq \mathbf{1}$ и $e = \mathbf{1} - e_0 \neq 0$. По построению идемпотентного элемента e_0 видно, что всякий ненулевой идемпотент $r \leqslant e$ не обладает свойством (1). Таким образом, для любого $0 \neq r \in \nabla_e$ существует такой ненулевой идемпотентный элемент $p_r \leqslant r$, что

$$p_r X = p_r \mathrm{mix}\,(\mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A})) = \mathrm{mix}\,(\mathrm{Lin}\,(p_r D, \mathcal{A}_{p_r})) = p_r \mathrm{mix}\,(\mathrm{Lin}\,(eD, \mathcal{A}_e)).$$

Из утверждений 2.2 (ii) и 2.3 (ii) имеем, что $eX = \mathrm{mix}\,\mathrm{Lin}\,(eD, \mathcal{A}_e))$. Поскольку eD — $\mathcal{A}_e$-линейно независимое подмножество в $\mathcal{A}_e$-модуле eX, то eD — $\mathcal{A}_e$-базис в eX, т. е. eX есть γ-однородный $\mathcal{A}_e$-модуль, где $\gamma = \mathrm{card}\,(eD)$. При этом кардинальное число $\varkappa(p)$ определено для всех ненулевых $p \in \nabla_e$. Пусть γ_e — наименьшее кардинальное число из множества кардинальных чисел $\{\varkappa(p) : 0 \neq$

$p \leqslant e\}$, т. е. $\gamma_e = \varkappa(p)$ для некоторого ненулевого $p \leqslant e$. За счет выбора идемпотентного элемента p получим, что $\gamma_e = \varkappa(p) = \varkappa(q)$ для всех $0 \neq q \in \nabla_p$. Это означает, что $\mathcal{A}_p$-модуль X_p является строго однородным. □

Теперь все готово для построения изоморфизма между точными дизъюнктно полными $\mathcal{A}$-модулями и декартовым произведением строго однородных $\mathcal{A}$-модулей.

Теорема 3.2. *Пусть $\mathcal{A}$ — это l-полная коммутативная регулярная алгебра, ∇ — булева алгебра всех идемпотентных элементов из $\mathcal{A}$, а X — точный l-полный $\mathcal{A}$-модуль. Тогда существуют определяемое единственным образом множество попарно дизъюнктных ненулевых идемпотентных элементов $\{e_i\}_{i\in I} \subset \nabla$ и множество попарно различных кардинальных чисел $\{\gamma_i\}_{i\in I}$ такие, что $\sup\limits_{i\in I} e_i = \mathbf{1}$, а X_{e_i} — строго γ_i-однородный $\mathcal{A}_{e_i}$-модуль для всех $i \in I$. В таком случае, $\mathcal{A}$-модули X и $\prod\limits_{i\in I} X_{e_i}$ будут изоморфны.*

Доказательство. По теореме 3.1 для всякого ненулевого идемпотента $e \in \mathcal{A}$ найдется такой ненулевой идемпотент $g \leqslant e$, что X_g будет строго однородным $\mathcal{A}_g$-модулем. По теореме 2.2 мы можем выбрать множество попарно дизъюнктных ненулевых идемпотентных элементов $\{q_j\}_{j\in J}$ так, чтобы $\sup\limits_{j\in J} q_j = \mathbf{1}$, а q_jX был бы строго λ_j-однородным $\mathcal{A}_{q_j}$-модулем для всех $j \in J$. Представим множество $A = \{\lambda_j\}_{j\in J}$ кардинальных чисел в виде объединения непересекающихся подмножеств A_i таким образом, чтобы каждый A_i состоял из одинаковых кардинальных чисел из A. По утверждению 2.6 имеем, что $\mathcal{A}_{e_i}$-модуль X_{e_i} является строго γ_i-однородным, где $e_i = \sup\{q_j : \lambda_j \in A_i\}$. При этом по утверждению 2.4 $\mathcal{A}$-модуль X и $\prod\limits_{i\in I} e_iX$ изоморфны.

Предположим, что существуют и другие множества попарно дизъюнктных ненулевых идемпотентов $\{g_j\}_{j\in J}$ и попарно различных кардинальных чисел $\{\mu_j\}_{j\in J}$ такие, что $\sup\limits_{j\in J} g_j = \mathbf{1}$, а X_{g_j} — строго μ_j-однородный $\mathcal{A}_{g_j}$-модуль для всех $j \in J$. Для любого фиксированного $j \in J$ из равенства $\sup\limits_{i\in I} e_i = \mathbf{1}$ следует, что $g_j = \sup\limits_{i\in I} e_ig_j$. Если существуют два различных индекса $i_1, i_2 \in I$ таких, что $e_{i_1}g_j \neq 0$ и $e_{i_2}p_j \neq 0$, то

$$\mu_j = \varkappa(g_j) = \varkappa(e_{i_1}g_j) = \varkappa(e_{i_1}) = \gamma_{i_1} \neq \gamma_{i_2} = \varkappa(e_{i_2}) = \varkappa(e_{i_2}g_j) = \mu_j.$$

Получили противоречие, из которого следует, что $e_ig_j = 0$ для всех индексов $i \in I$ кроме одного, который мы обозначим через $i(j)$. Так как $e_{i(j)}g_j \neq 0$, будем иметь, что

$$\mu_j = \varkappa(g_j) = \varkappa(e_{i(j)}g_j) = \varkappa(e_{i(j)}) = \gamma_{i(j)}.$$

Если $g_j \neq e_{i(j)}$, то ввиду равенства $\sup\limits_{j\in J} g_j = \mathbf{1}$ найдется такой индекс $j_1 \in J$, $j_1 \neq j$, что $e_{i(j)}g_{j_1} \neq 0$. Следовательно,

$$\mu_j = \gamma_{i(j)} = \varkappa(e_{i(j)}) = \varkappa(e_{i(j)}g_{j_1}) = \varkappa(g_{j_1}) = \mu_{j_1},$$

что неверно. Таким образом, $g_j = e_{i(j)}$ и $\mu_j = \gamma_{i(j)}$. По этой же причине для любого $i \in I$ существует единственный индекс $j(i)$ такой, что $e_i = g_{j(i)}$ и $\gamma_i = \mu_{j(i)}$. □

Разложение $\{e_i\}_{i\in I}$ единицы и множество кардинальных чисел $\{\gamma_i\}_{i\in I}$ из теоремы 3.2 называются паспортом для точного дизъюнктно полного $\mathcal{A}$-модуля X и обозначаются как $\Gamma(X) = \{(e_i(X), \gamma_i(X))\}_{i\in I(X)}$.

Получим критерий изоморфизма между точными l-полными $\mathcal{A}$-модулями посредством следующей теоремы и введенного понятия паспорта для этих $\mathcal{A}$-модулей.

Теорема 3.3. *Пусть $\mathcal{A}$ — это l-полная коммутативная регулярная алгебра, а X и Y — точные l-полные $\mathcal{A}$-модули. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(i) $\Gamma(X) = \Gamma(Y)$;

(ii) *$\mathcal{A}$-модули X и Y изоморфны.*

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$. Пусть

$$\{(e_i(X), \gamma_i(X))\}_{i\in I(X)} = \Gamma(X) = \Gamma(Y) = \{(e_i(Y), \gamma_i(Y))\}_{i\in I(Y)},$$

т. е. $I(X) = I(Y) := I$, $e_i(X) = e_i(Y) := e_i$ и $\gamma_i(X) = \gamma_i(Y) := \gamma_i$ для всякого $i \in I$. По теореме 3.2 существует изоморфизм $U : X \to \prod\limits_{i\in I} e_iX$ (или изоморфизм $V : Y \to \prod\limits_{i\in I} e_iY$), где $U(x) = \{e_ix\}_{i\in I}$ (или $V(y) = \{e_iy\}_{i\in I}$, соответственно) для всех $x \in X$ (или для всех $y \in Y$, соответственно).

Так как e_iX (или e_iY) является строго γ_i-однородным $\mathcal{A}_{e_i}$-модулем, то по утверждению 2.5 существует изоморфизм $U_i : e_iX \to e_iY$ для всех $i \in I$. Очевидно, что отображение $\Phi : X \to Y$, определяемое равенством

$$\Phi(x) = V^{-1}(\{U_i(e_ix)\}_{i\in I}),$$

будет изоморфизмом между $\mathcal{A}$-модулем X и $\mathcal{A}$-модулем Y.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Пусть Ψ — это изоморфизм между X и Y, а $\Gamma(X) = \{(e_i(X), \gamma_i(X))\}_{i\in I(X)}$ — это паспорт для $\mathcal{A}$-модуля X. По утверждению 2.2 (iii) $\mathcal{A}_{e_i(X)}$-модуль

$$Y_i = \Psi(e_i(X)X) = e_i(X)\Psi(X) = e_i(X)Y$$

является строго $\gamma_i(X)$-однородным. Это означает, что $\{(e_i(X), \gamma_i(X))\}_{i\in I}$ является паспортом для $\mathcal{A}$-модуля Y, т. е. $\Gamma(X) = \Gamma(Y)$. $\square$

Пусть $\mathcal{A}$ — это l-полная коммутативная регулярная алгебра, а ∇ — булева алгебра всех идемпотентных элементов из $\mathcal{A}$. Точный l-полный $\mathcal{A}$-модуль X называется *конечномерным*, если существуют конечное разбиение $e_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, k$, единицы в булевой алгебре ∇ и конечное множество натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ такие, что X_{e_i} будет n_i-однородным $\mathcal{A}_{e_i}$-модулем для всех $i = 1, \ldots, k$.

Это означает, что всякий конечномерный $\mathcal{A}$-модуль X обладает паспортом следующего вида:

$$\Gamma(X) = \{(e_i(X), n_i(X))\}_{i=1}^k, \quad \text{где} \quad e_1(X) + \ldots + e_k(X) = \mathbf{1},\ n_1(X) < \ldots < n_k(X) < \infty.$$

Нижеследующее описание конечномерных $\mathcal{A}$-модулей непосредственно вытекает из теоремы 3.2 и утверждения 2.5.

Предложение 3.1. *Если X — это конечномерный $\mathcal{A}$-модуль, то существуют определяемое единственным образом конечное разбиение $e_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, k$, единицы в булевой алгебре ∇ и конечное множество положительных целых чисел $n_1 < \ldots < n_k$ такие, что $\mathcal{A}$-модуль X будет изоморфен $\mathcal{A}$-модулю $\prod\limits_{i=1}^k \mathcal{A}_{e_i}^{n_i}$.*

Точный l-полный $\mathcal{A}$-модуль X называется *σ-конечномерным*, если существуют счетное разбиение $e_i \neq 0$, $i \in \mathbb{N}$, единицы в булевой алгебре ∇ и счетное множество положительных целых чисел $n_1 < n_2 < \ldots$ такие, что X_{e_i} будет n_i-однородным $\mathcal{A}_{e_i}$-модулем для всех $i \in \mathbb{N}$.

Из теоремы 3.2 и утверждения 2.5 получим следующее описание σ-конечномерных $\mathcal{A}$-модулей.

Предложение 3.2. *Если X — это σ-конечномерный $\mathcal{A}$-модуль, то существуют определяемое единственным образом счетное разбиение $e_i \neq 0$, $i \in \mathbb{N}$, единицы в булевой алгебре ∇ и счетное множество положительных целых чисел $n_1 < n_2 < \ldots$ такие, что $\mathcal{A}$-модуль X будет изоморфен $\mathcal{A}$-модулю $\prod\limits_{i=1}^\infty \mathcal{A}_{e_i}^{n_i}$.*

4. Банаховы $C_\infty(Q)$-модули

Пусть ∇ — полная булева алгебра, $Q(\nabla)$ — стоуновский компакт, отвечающий ∇, а $L^0_{\mathbb{R}} := C_\infty(Q(\nabla))$ — алгебра всех непрерывных функций $f : Q(\nabla) \to [-\infty, +\infty]$, принимающих значения $\pm\infty$ только на нигде не плотных множествах в $Q(\nabla)$ (см. раздел 2). Пусть $L^0_{\mathbb{C}} = L^0_{\mathbb{R}} \oplus i \cdot L^0_{\mathbb{R}}$ — это комплексификация векторной решетки $L^0_{\mathbb{R}}$. Очевидно, что $L^0_{\mathbb{C}}$ является комплексной коммутативной $*$-алгеброй всех непрерывных функций $f : Q(\nabla) \to \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, принимающих значение ∞ только на нигде не плотных множествах в $Q(\nabla)$, при этом самосопряженная часть $(L^0_{\mathbb{C}})_h = \{f \in L^0_{\mathbb{C}} : f = \overline{f}\}$ комплексной векторной решетки $L^0_{\mathbb{C}}$ совпадает с $L^0_{\mathbb{R}}$. В этом разделе будем исходить из предположения, что l-полная коммутативная алгебра $\mathcal{A}$ является вещественной алгеброй $L^0_{\mathbb{R}}$ либо комплексной алгеброй $L^0_{\mathbb{C}}$. Обозначим через $\mathcal{A}_+$ (и $\mathcal{A}_{++}$) множество всех положительных (и положительных обратимых, соответственно) элементов из $L^0_{\mathbb{R}}$. Основными задачами, требующими решения, являются:

(A). Пусть X — это конечномерный (или σ-конечномерный) $\mathcal{A}$-модуль, и пусть $\|\cdot\|_i$ — это норма со значениями в $\mathcal{A}$, $i=1,2$. Являются ли эти две нормы $\mathcal{A}$-эквивалентными?

(B). ($\mathcal{A}$-версия теоремы Рисса). Следует ли из того, что единичный шар в банаховом $\mathcal{A}$-модуле X циклически компактен, конечномерность (σ-конечномерность) модуля X?

Вспомним, что отображение $\|\cdot\| : X \to \mathcal{A}$ называется *$\mathcal{A}$-нормой* на точном $\mathcal{A}$-модуле X со значениями в $\mathcal{A}$, если выполняются следующие условия:

1. $\|x\| \geqslant 0$ для любого $x \in X$, и $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\|a \cdot x\| = |a| \cdot \|x\|$ для всех $x \in X$, $a \in \mathcal{A}$;
3. $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ для любых $x, y \in X$.

Пара $(X, \|\cdot\|)$ называется *нормированным $\mathcal{A}$-модулем*.

Сеть $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{A}_h$ называется *(o)-сходящейся* к элементу $f \in \mathcal{A}_h$, если существуют такие сети $\{g_\alpha\}_{\alpha\in A}, \{d_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{A}_h$, что $g_\alpha \leqslant f_\alpha \leqslant d_\alpha$ для любых $\alpha \in A$, и $g_\alpha \uparrow f$, $d_\alpha \downarrow f$.

Лемма 4.1 (см. [3]). *Пусть $\{e_i\}_{i\in I}$ — это разбиение единицы в булевой алгебре ∇, $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{A}_h$, $f \in \mathcal{A}_h$. Если $e_i f_\alpha \xrightarrow{(o)} e_i f$ для любых $i \in I$, то $f_\alpha \xrightarrow{(o)} f$.*

Будем говорить, что сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset X$ *(bo)-сходится* к элементу $x \in X$, если $\|x_\alpha - x\| \xrightarrow{(o)} 0$ (см. [15, ч. 2, § 2.1, п. 2.1.5]). Сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ называется *(bo)-сетью Коши*, если $\left(\sup\limits_{\alpha,\beta\geqslant\gamma} \|x_\alpha - x_\beta\|\right) \downarrow 0$. Нормированный $\mathcal{A}$-модуль называется *банаховым $\mathcal{A}$-модулем*, если всякая (bo)-сеть Коши (bo)-сходится к некоторому элементу этого модуля.

Предложение 4.1. *Если $(X, \|\cdot\|)$ — банахов $\mathcal{A}$-модуль, то X — l-полный $\mathcal{A}$-модуль.*

Доказательство. Пусть $x \in X$, $e \cdot x = 0$ для всех $e \in L \subset \nabla$, и $q = \sup L \in \nabla$. Пусть A — это направленное множество всех конечных подмножеств L, и $x_\alpha = (\sum\limits_{k=1}^n e_{i_k}) \cdot x,\ \alpha = \{i_1, \ldots, i_k\} \in A$. Так как $x_\alpha = 0$ и

$$\|q \cdot x - x_\alpha\| = \|(q - \sum_{k=1}^n e_{i_k}) \cdot x\| = (q - \sum_{k=1}^n e_{i_k})\|x\| \xrightarrow{(o)} 0,$$

то отсюда следует, что $q \cdot x = 0$. Это означает, что $\mathcal{A}$-модуль X является регулярным.

Пусть $\{x_i\}_{i\in I} \subset X$, а $\{e_i\}_{i\in I}$ — любое разбиение единицы в булевой алгебре ∇. Пусть A — это направленное множество всех конечных подмножеств I, и $x_\alpha = \sum\limits_{k=1}^n e_{i_k} \cdot x_{i_k},\ \alpha = \{i_1, \ldots, i_k\} \in A$. Очевидно, что сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ является (bo)-сетью Коши. Следовательно, существует $x \in X$ такой, что $\|x_\alpha - x\| \xrightarrow{(o)} 0$, при этом $\|e_i \cdot x_\alpha - e_i \cdot x\| = e_i \cdot \|x_\alpha - x\| \xrightarrow{(o)} 0$ для всех $i \in I$. Так как $e_i \cdot x_\alpha = e_i \cdot x_i$, если $i \in \alpha \in A$, отсюда следует, что $e_i \cdot x_i = e_i \cdot x,\ i \in I$. Таким образом, $\mathcal{A}$-модуль X является l-полным. □

Пусть ∇ — это счетная булева алгебра, а $P(\mathbb{N})$ — множество всех счетных разбиений в ∇, занумерованных положительными целыми числами $n \in \mathbb{N}$, т. е.

$$P(\mathbb{N}) = \{a : \mathbb{N} \to \nabla \ \mid a(n) \wedge a(m) = 0,\ n \neq m,\ \sup_{n\in\mathbb{N}} a(n) = \mathbf{1}\}.$$

Введем на $P(\mathbb{N})$ частичный порядок, положив $a \leqslant b$ в том и только том случае, если условие $a(n) \wedge b(m) \neq 0$ влечет $n \leqslant m$, $n, m \in \mathbb{N}$. В [15, ч. 2, § 2.2, п. 2.2.2] было показано, что введенное отношение $a \leqslant b$ является частичным порядком на $P(\mathbb{N})$, а частично упорядоченное множество $(P(\mathbb{N}), \leqslant)$ — направлением.

Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — это последовательность в X. Для каждого $a \in P(\mathbb{N})$ положим $x_a = \operatorname{mix}\limits_{n\in\mathbb{N}}(a(n)x_n)$. Всякая подсеть сети $\{x_a\}_{a\in P(\mathbb{N})}$ называется *циклической подсетью* последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Подмножество $K \subset X$ называется *циклически компактным* (соответственно, *относительно циклически компактным*), если $K = \operatorname{mix}(K)$, и любая последовательность в K имеет циклическую подсеть, которая (bo)-сходится к некоторому элементу $x \in K$ (соответственно, $x \in X$) [15, ч. 8, § 8.5, п. 8.5.1].

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — это нормированный $\mathcal{A}$-модуль, а $F \subseteq X$. Подмножество $F \subseteq X$ называется *(bo)-замкнутым*, если из условий $x_\alpha \xrightarrow{(bo)} x$, $\{x_\alpha\} \subset F$ следует, что $x \in F$. Если булева алгебра ∇ является счетной, то подмножество $F \subseteq X$ (bo)-замкнуто тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset F$, $x_n \xrightarrow{(bo)} x$ можно сделать вывод, что $x \in F$ [21, ч. VI, § 3, теорема VI.3.1]. Следовательно, множество $K \subset X$ является циклически компактным тогда и только тогда, когда K относительно циклически компактно и (bo)-замкнуто.

Вспомним следующий критерий относительной циклической компактности [15, ч. 8, § 8.5, п. 8.5.2].

Теорема 4.1. *Пусть K — любое циклическое множество в банаховом $\mathcal{A}$-модуле $(X, \|\cdot\|)$. Тогда K относительно циклически компактно тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существуют счетное разбиение $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ единицы в булевой алгебре ∇ и последовательность конечных подмножеств $E_n = \{x_1^n, \ldots, x_{k(n)}^n\} \subset K$ такие, что $e_n(\mathrm{mix}(E_n))$ будет ε-сетью для e_nK для всех $n \in \mathbb{N}$, т. е. для любого $x \in e_nK$ существует такое разбиение единицы $\{q_1^n, \ldots, q_{k(n)}^n\}$ в ∇, что*

$$\|x - \sum_{i=1}^{k(n)} e_n q_i^n x_i^n\| \leqslant \varepsilon\mathbf{1}.$$

Множество $E \subset (X, \|\cdot\|)$ называется *$\mathcal{A}$-ограниченным*, если существует $f \in \mathcal{A}_+$ такая, что $\|x\| \leqslant f$ для всех $x \in E$. Следующая теорема является $\mathcal{A}$-версией широко известного критерия компактности подмножеств в конечномерных нормированных пространствах [1].

Теорема 4.2. *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — это конечномерный (соответственно, σ-конечномерный) банахов $\mathcal{A}$-модуль, а K — циклическое множество в $(X, \|\cdot\|)$. Следующие условия являются эквивалентными:*

(i) *K — относительно циклически компактное множество (соответственно, циклически компактное множество);*

(ii) *K — $\mathcal{A}$-ограниченное множество (соответственно, $\mathcal{A}$-ограниченное и (bo)-замкнутое множество).*

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — это банаховы модули. Отображение $T : X \to Y$ называется *(bo)-непрерывным*, если для любой сети $\{x_\alpha\} \subset X$, которая (bo)-сходится к элементу x, сеть $\{T(x_\alpha)\}$ (bo)-сходится к элементу $T(x)$.

Будем говорить, что отображение $T : X \to Y$ *сохраняет перемешивание*, если $T(\mathrm{mix}_{i\in I}(e_i x_i)) = \mathrm{mix}_{i\in I}(e_i T(x_i))$ для любого разбиения $\{e_i\} \subset \mathcal{B}$ единицы и любого множества $\{x_i\} \subset X$ таких, что существует перемешивание $\mathrm{mix}_{i\in I}(e_i x_i)$.

Нам понадобится следующее свойство отображений, сохраняющих перемешивание [4, ч. 1, § 1.3, п. 1.3.6].

Предложение 4.2. *Пусть X, Y — банаховы $\mathcal{A}$-модули, а $K \subset X$ — циклически компактное множество. Если $T : X \to Y$ — (bo)-непрерывное отображение, сохраняющее перемешивание, то $T(K)$ — циклически компактное множество в Y.*

Следующая теорема является $\mathcal{A}$-версией хорошо известной теоремы Вейерштрасса [3].

Теорема 4.3. *Пусть K — циклически компактное множество в банаховом $\mathcal{A}$-модуле X, а $\Phi : K \to \mathcal{A}_h$ — (bo)-непрерывное отображение, сохраняющее перемешивание. Тогда существуют элементы $x, y \in K$ такие, что $\Phi(x) = \sup \Phi(K)$, $\Phi(y) = \inf \Phi(K)$.*

Пусть X — это $\mathcal{A}$-модуль, а $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ — две $\mathcal{A}$-нормы на X. Эти нормы называются *$\mathcal{A}$-эквивалентными* (обозначается $\|\cdot\|_1 \backsim \|\cdot\|_2$), если существуют $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_{++}$ такие, что

$$\alpha\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta\|x\|_1$$

для всех $x \in X$.

Понятно, что отношение $\|\cdot\|_1 \backsim \|\cdot\|_2$ является отношением эквивалентности на множестве всех $\mathcal{A}$-норм на $\mathcal{A}$-модуле X.

Если X — это n-однородный $\mathcal{A}$-модуль, то $X = \mathcal{A}^n$ (см. утверждение 2.5) и при этом любой элемент $x \in X$ может быть однозначно представлен как $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, где $\alpha_i \in \mathcal{A}$ и $e_i = \{0, \dots, 0, \mathbf{1}, 0, \dots, 0\}$, $i = 1, \dots, n$ (единица $\mathbf{1}$ стоит на i-ом месте).

Рассмотрим отображение $\|\cdot\|_1 : X \to \mathcal{A}_h$, определяемое правилом $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_i|$. Очевидно, что $\|\cdot\|_1$ есть $\mathcal{A}$-норма на $\mathcal{A}$-модуле X.

Теорема 4.4. *Если $\|\cdot\|_X$ — это $\mathcal{A}$-норма на $\mathcal{A}$-модуле $X = \mathcal{A}^n$, то $\|\cdot\|_X \backsim \|\cdot\|_1$.*

Доказательство. Пусть $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $\alpha_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, \dots, n$, и $\alpha_0 = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \|e_i\|_X$. Ясно видно, что $\alpha = \alpha_0 + \mathbf{1} \in \mathcal{A}_{++}$, а

$$\|x\|_X \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \cdot \|e_i\|_X \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|e_i\|_X \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leqslant \alpha \|x\|_1.$$

Следовательно, $\|x\|_X \leqslant \alpha \|x\|_1$ для всех $x \in X$, при которых $\alpha \in \mathcal{A}_{++}$.

Покажем, что множество $K = \{x \in X : \|x\|_1 = \mathbf{1}\}$ является циклически компактным множеством в $(X, \|\cdot\|_1)$. Пусть $\{q_i\}_{i \in I}$ — это любое разбиение единицы в ∇, и $\{x_i\}_{i \in I} \subset K$. Так как $X = \mathcal{A}^n$ — это l-полный $\mathcal{A}$-модуль, отсюда следует, что существует элемент $x \in X$ такой, что $q_i x = q_i x_i$ для всех $i \in I$. Из равенств

$$\|x\|_1 = \left\| \operatorname*{mix}_{i \in I} (q_i x_i) \right\|_1 = \operatorname*{mix}_{i \in I} q_i \|x_i\|_1 = \operatorname*{mix}_{i \in I} q_i = \mathbf{1},$$

получаем, что $x \in K$. Это означает, что K является циклическим множеством.

Очевидно, что подмножество $D = \prod\limits_{i=1}^{n} [-\mathbf{1}, \mathbf{1}] = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_i \in \mathcal{A},\ |\alpha_i| \leqslant \mathbf{1},\ i = 1, \dots, n\}$ содержит K и (bo)-замкнуто в $(\mathcal{A}^n, \|\cdot\|_1)$. Из теоремы 4.2 следует, что множество D циклически компактно в $(X, \|\cdot\|_1)$.

Отображение $\Phi : (X, \|\cdot\|_1) \to \mathcal{A}_h$, задаваемое с помощью $\Phi(x) = \|x\|_X$, сохраняет перемешивание; в этом случае неравенство $\big| \|x\|_X - \|y\|_X \big| \leqslant \|x - y\|_X \leqslant \alpha \|x - y\|_1$ влечет (bo)-непрерывность отображения Φ. Из теоремы 4.3 следует, что существует $y \in K$ такой, что $\Phi(y) = \inf \Phi(K)$, т. е.

$$\|y\|_X = \inf\{\|x\|_X : x \in X, \|x\|_1 = \mathbf{1}\}.$$

Так как $y \in K$, будем иметь, что $\|y\|_1 = \mathbf{1}$, и следовательно, $s(\|y\|_X) = s(y) = s(\|y\|_1) = \mathbf{1}$, в частности, $\beta = \|y\|_X \in \mathcal{A}_{++}$.

Если $x \in X$, $s(\|x\|_X) = \mathbf{1}$, то из $\|x\|_X \leqslant \alpha \|x\|_1$, $\alpha \in \mathcal{A}_{++}$ получим, что $s(\|x\|_1) = \mathbf{1}$. Тем самым, элемент $z = \|x\|_1^{-1} x \in X$ определен, и $\|z\|_1 = \mathbf{1}$, т. е. $z \in K$. Следовательно, $\|z\|_X \geqslant \|y\|_X$, т. е.

$$\|x\|_1^{-1} \|x\|_X \geqslant \|y\|_X, \quad \text{т. е.} \quad \|x\|_X \geqslant \|y\|_X \cdot \|x\|_1.$$

Таким образом, $\beta \cdot \|x\|_1 \leqslant \|x\|_X \leqslant \alpha \|x\|_1$, где $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_{++}$.

Пусть $0 \neq x \in X$, $s(\|x\|_X) \neq \mathbf{1}$, $e = \mathbf{1} - s(\|x\|_X) \neq 0$. В силу l-полноты точного $e\mathcal{A}$-модуля eX мы вправе выбрать элемент $a \in eX$ таким, чтобы $s(\|a\|_X) = s(a) = e$. Для элемента $b = x + a \in X$ имеем

$$s(b) = s(\|b\|_X) = s(\|s(x)b + eb\|_X) = s(\|s(x)b\|_X + \|eb\|_X) = s(\|x\|_X + \|a\|_X) = \mathbf{1}.$$

В силу вышенаписанного, $\beta \|b\|_1 \leqslant \|b\|_X \leqslant \alpha \|b\|_1$, т. е. $\beta(\|x\|_1 + \|a\|_1) \leqslant \|x\|_X + \|a\|_X \leqslant \alpha(\|x\|_1 + \|a\|_1)$. Умножив последнее неравенство на $s(x)$, получим $\beta \|x\|_1 \leqslant \|x\|_X \leqslant \alpha \|x\|_1$. Следовательно, $\mathcal{A}$-нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|$ являются $\mathcal{A}$-эквивалентными. $\square$

Из теоремы 4.4 немедленно следует

Следствие 4.1. *Любые две $\mathcal{A}$-нормы на n-однородном $\mathcal{A}$-модуле $\mathcal{A}$-эквивалентны.*

Теперь рассмотрим конечномерные (σ-конечномерные) $\mathcal{A}$-модули. В силу утверждения 3.1 (или утверждения 3.2, соответственно) конечномерный (или σ-конечномерный, соответственно) $\mathcal{A}$-модуль X изоморфен модулю $\prod\limits_{i=1}^{k} \mathcal{A}_{e_i}^{n_i}$ (или $\prod\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_{e_i}^{n_i}$, соответственно). В таком случае верна следующая теорема.

Теорема 4.5. *Пусть X — это σ-конечномерный или конечномерный $\mathcal{A}$-модуль. Тогда любые две $\mathcal{A}$-нормы на X будут $\mathcal{A}$-эквивалентны.*

Доказательство. Если X — это σ-конечный $\mathcal{A}$-модуль, то существует счетное разбиение $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ единицы в ∇ такое, что e_nX будет k_n-однородным $e_n\mathcal{A}$-модулем, где $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$

Пусть $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — две $\mathcal{A}$-нормы на X. Для любых $x \in e_nX$ положим

$$\|x\|_{1,n} = \|e_nx\|_1 = e_n\|x\|_1; \quad \|x\|_{2,n} = \|e_nx\|_2 = e_n\|x\|_2.$$

Очевидно, что $\|x\|_{1,n}$ и $\|x\|_{2,n}$ являются $e_n\mathcal{A}$-нормами на k_n-однородном $e_n\mathcal{A}$-модуле $e_n \cdot X$. Из следствия 4.1 вытекает, что существуют $\alpha_n, \beta_n \in (e_n\mathcal{A})_{++}$ такие, что $\alpha_n\|x\|_{1,n} \leqslant \|x\|_{2,n} \leqslant \beta_n\|x\|_{1,n}$ для всех $x \in e_nX$. Положим $\alpha = \operatorname*{mix}\limits_{n\in\mathbb{N}}(\alpha_ne_n)$, $\beta = \operatorname*{mix}\limits_{n\in\mathbb{N}}(\beta_ne_n)$. Ясно, что $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_{++}$, и для любого $x \in X$ будем иметь

$$e_n\alpha\|x\|_1 = e_n\alpha_ne_n\|x\|_1 = \alpha_n\|e_nx\|_{1,n} \leqslant \|e_nx\|_{2,n} = e_n\|x\|_2 =$$
$$= \|e_nx\|_{2,n} \leqslant \beta_n\|e_nx\|_{1,n} = e_n\beta_n\|e_nx\|_{1,n} = e_n\beta e_n\|x\|_1 = e_n\beta\|x\|_1,$$

т. е. $e_n\alpha\|x\|_1 \leqslant e_n\|x\|_2 \leqslant e_n\beta\|x\|_1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и, следовательно, $\alpha\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta\|x\|_1$, где $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_{++}$. Это означает, что $\mathcal{A}$-нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ являются $\mathcal{A}$-эквивалентными.

Для конечномерных $\mathcal{A}$-модулей доказательство аналогично. □

Следствие 4.2. *Если $(X, \|\cdot\|)_X$ — нормированный конечномерный (σ-конечномерный) $\mathcal{A}$-модуль, то $(X, \|\cdot\|)_X$ — банахов $\mathcal{A}$-модуль.*

Доказательство. Для начала предположим, что $(X, \|\cdot\|_X)$ — это n-однородный $\mathcal{A}$-модуль, и на $X = \mathcal{A}^n$ рассмотрим $\mathcal{A}$-норму $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$, $x = \{x_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{A}^n$. Пусть $x_\alpha = \{x_i^{(\alpha)}\}_{i=1}^n \subset (\mathcal{A}^n, \|\cdot\|_1)$ — (bo)-сеть Коши, т. е.

$$\sup_{\alpha,\beta\geqslant\gamma} \sum_{i=1}^{n} |x_i^{(\alpha)} - x_i^{(\beta)}| \downarrow 0.$$

Следовательно, $\sup\limits_{\alpha,\beta\geqslant\gamma} |x_i^{(\alpha)} - x_i^{(\beta)}| \downarrow 0$. Так как $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ является (bo)-полным относительно $\mathcal{A}$-нормы $\|\lambda\|_{\mathcal{A}} = |\lambda|$, $\lambda \in \mathcal{A}$, то существует $x_i^{(0)} \in \mathcal{A}$ такой, что $|x_i^{(\alpha)} - x_i^{(0)}| \xrightarrow{(o)} 0$ для любых $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i^{(\alpha)} - x_i^{(0)}| \xrightarrow{(o)} 0$.

Полагая $x = \{x_i^{(0)}\}_{i=1}^n \in \mathcal{A}^n = X$, получаем, что $\|x_\alpha - x\|_1 \xrightarrow{(o)} 0$. Так как $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_X$, то $\|x_\alpha - x\|_X \xrightarrow{(o)} 0$. Тем самым, $(X, \|\cdot\|_X)$ является (bo)-полным.

Теперь пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — σ-конечный $\mathcal{A}$-модуль. Тогда существует счетное разбиение $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ единицы в ∇ такое, что e_nX будет k_n-однородным $e_n\mathcal{A}$-модулем. Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — (bo)-сеть Коши в X, т. е. $\sup\limits_{\alpha,\beta\geqslant\gamma} \|x_\alpha - x_\beta\|_X \downarrow 0$. Очевидно, что сеть $\{e_nx_\alpha\}_{\alpha\in A}$ является (bo)-сетью Коши в k_n-однородном $e_n\mathcal{A}$-модуле e_nX. Из написанного выше следует, что существует такой элемент $x_n \in e_nX$, что $\|e_nx_\alpha - x_n\|_X \xrightarrow{(o)} 0$. Так как X — l-полный $\mathcal{A}$-модуль, то $x = \operatorname*{mix}\limits_{n\in\mathbb{N}}(e_nx_n) \in X$. В этом случае

$$e_n\|x_\alpha - x\| = \|e_nx_\alpha - e_nx\| = \|e_nx_\alpha - e_nx_n\| = \|e_nx_\alpha - x_n\| \xrightarrow{(o)} 0.$$

Используя лемму 4.1, получаем, что $\|x_\alpha - x\| \xrightarrow{(o)} 0$, т. е. $(X, \|\cdot\|_X)$ — (bo)-полный.

В случае конечномерного $\mathcal{A}$-модуля X доказательство будет аналогичным. □

Из следствия 4.2 немедленно получаем

Следствие 4.3. *Если Y является конечномерным (σ-конечномерным) $\mathcal{A}$-подмодулем в нормированном $\mathcal{A}$-модуле $(X, \|\cdot\|)_X$, то множество Y (bo)-замкнуто в $(X, \|\cdot\|)_X$.*

Используя лемму Цорна, можем установить следующую теорему о существовании $\mathcal{A}$-базиса Гамеля в точном l-полном $\mathcal{A}$-модуле.

Теорема 4.6. *В любом точном l-полном $\mathcal{A}$-модуле существует $\mathcal{A}$-базис Гамеля, т. е. существует максимальная $\mathcal{A}$-линейно независимая система $\{x_i\}_{i\in I} \subset X$ такая, что $X = \operatorname{mix}(\operatorname{Lin}(\{x_i\}_{i\in I},\ \mathcal{A}))$.*

С помощью теоремы 4.6 получим следующую теорему.

Теорема 4.7. *Если все $\mathcal{A}$-нормы на точном l-полном $\mathcal{A}$-модуле X $\mathcal{A}$-эквивалентны, то X является конечномерным или σ-конечномерным $\mathcal{A}$-модулем.*

Доказательство. Предположим, что X не является σ-конечномерным $\mathcal{A}$-модулем. Тогда по теореме 3.2 существует $0 \neq e \in \nabla$ такой, что $e \cdot X$ будет γ-однородным для некоторого неконечного кардинального числа γ, т. е. $\mathcal{A}$-базис Гамеля в $e\cdot X$ является бесконечным. Следовательно, $\mathcal{A}$-базис Гамеля $B = \{x_i\}_{i\in I}$ в X также бесконечен (см. теорему 4.6). Для всякого $x = \sum\limits_{k=1}^{n(x)} \lambda_{i_k} x_{i_k} \in \operatorname{Lin}(B, \mathcal{A})$ положим

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n(x)} |\lambda_{i_k}|, \qquad \|x\|_\infty = \sup_{1\leqslant k\leqslant n(x)} |\lambda_{i_k}|.$$

Очевидно, что $\|x\|_1$ и $\|x\|_\infty$ являются нормами на $\mathcal{A}$-модуле $\operatorname{Lin}(B, \mathcal{A})$, при этом $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1$ для любого $x \in \operatorname{Lin}(B, \mathcal{A})$.

Так как B — это $\mathcal{A}$-базис Гамеля в X, отсюда следует, что всякий $x \in X$ имеет вид $x = \operatorname{mix}\limits_{j\in J}(e_j y_j)$ для некоторого разбиения единицы $\{e_j\}_{j\in J}$ в ∇ и $\{y_j\}_{j\in J} \subset \operatorname{Lin}(B, \mathcal{A})$. Положим

$$\|x\|_1 = \operatorname{mix}_{j\in J}(e_i\|y_i\|_1), \qquad \|x\|_\infty = \operatorname{mix}_{j\in J}(e_i\|y_i\|_\infty).$$

Ясно видно, что $\|x\|_1$ и $\|x\|_\infty$ являются нормами на X, и $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1$ для всякого $x \in X$.

Из того, что $\mathcal{A}$-базис Гамеля $B = \{x_i\}_{i\in I}$ бесконечен, следует, что существует $\mathcal{A}$-линейно независимая последовательность $\{x_{i_n}\}_{n=1}^\infty \subset B$. Если $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{i_k} \in X$, то $\|y_n\|_1 = n \cdot \mathbf{1}$, $\|y_n\|_\infty = \mathbf{1}$. Следовательно, не существует такого $\gamma \in L^0_{++}$, что $\|y_n\|_1 \leqslant \gamma\|y_n\|_\infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Стало быть, нормы $\|.\|_\infty$ и $\|.\|_1$ не являются $\mathcal{A}$-эквивалентными на X. Таким образом, X является конечномерным или σ-конечномерным $\mathcal{A}$-модулем. $\square$

Из теорем 4.5 и 4.7 вытекает следствие:

Следствие 4.4. *Пусть X — точный l-полный $\mathcal{A}$-модуль. Следующие условия эквивалентны*:

(i) *X — это конечномерный или σ-конечномерный $\mathcal{A}$-модуль*;

(ii) *все $\mathcal{A}$-нормы на X $\mathcal{A}$-эквивалентны.*

Как уже было отмечено ранее в теореме 4.2, всякое $\mathcal{A}$-ограниченное, (bo)-замкнутое циклическое множество в конечномерном (σ-конечномерном) нормированном $\mathcal{A}$-модуле $(X, \|\cdot\|_X)$ является циклически компактным. В частности, циклически компактным множеством является единичный шар $B_{\mathbf{1}}(X) = \{x \in X : \|x\|_X \leqslant \mathbf{1}\}$. Нашей следующей целью является версия теоремы Рисса, которая поможет установить конечномерность (σ-конечномерность) нормированного $\mathcal{A}$-модуля $(X, \|\cdot\|_X)$ в случае, когда $B_{\mathbf{1}}(X)$ — циклически компактное множество.

Далее будем предполагать, что булева алгебра ∇ является счетной.

Предложение 4.3. *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — нормированный $\mathcal{A}$-модуль, $Y \subset X$, $Y \neq X$, — точный (bo)-замкнутый l-полный $\mathcal{A}$-подмодуль в X, а $0 < \varepsilon < 1$. Тогда существует $u_\varepsilon \in (X \setminus Y)$ такое, что $\|u_\varepsilon\| \in \nabla$ и $\|u_\varepsilon - y\| \geqslant (1-\varepsilon)\cdot e$ для всякого $y \in Y$ и некоторого ненулевого $e \in \nabla$, $e \leqslant \|u_\varepsilon\|$.*

Доказательство. Предположим, что $x_0 \in (X \setminus Y)$, и покажем, что

$$\rho(x_0, Y) = \inf_{y\in Y} \|x_0 - y\| = \alpha \neq 0, \quad \alpha \in \mathcal{A}_+.$$

Так как булева алгебра ∇ является счетной, отсюда следует, что существует такая последовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset Y$, что $\alpha = \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} \|x_0 - y_k\|$. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ существует такое конечное разбиение $\{e_i\}_{i=1}^{m}$ единицы в булевой алгебре ∇, что

$$(\inf_{1\leqslant k\leqslant m} \|x_0 - y_k\|) \cdot e_i = \|x_0 - y_i\| \cdot e_i.$$

Так как $\mathcal{A}$-подмодуль Y является l-полным, то существует $z_m \in Y$ такой, что $e_i \cdot z_m = e_i \cdot y_i$ для всех $i = 1, \ldots, m$. Следовательно,

$$\inf_{1\leqslant k\leqslant m} \|x_0 - y_k\| = \sum_{i=1}^{m} (\inf_{1\leqslant k\leqslant m} \|x_0 - y_k\|) \cdot e_i = \sum_{i=1}^{m} \|x_0 - y_i\| \cdot e_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \|e_i \cdot x_0 - e_i \cdot y_i\| = \sum_{i=1}^{m} \|e_i \cdot x_0 - e_i \cdot z_m\| = \sum_{i=1}^{m} e_i \cdot \|x_0 - z_m\| = \|x_0 - z_m\|$$

для всех $m \in \mathbb{N}$. Это означает, что $\|x_0 - z_m\| \downarrow \alpha$. Если $\alpha = 0$, то $z_m \xrightarrow{(bo)} x_0$ и $x_0 \in Y$, что неверно. Поэтому $\alpha \neq 0$. Таким образом, существуют ненулевой идемпотентный элемент $e_0 \in \nabla$ и число $m_0 \in \mathbb{N}$ такие, что $e_0 \leqslant s(\alpha)$ и $e_0 \cdot \alpha \leqslant e_0 \cdot \|x_0 - z_{m_0}\| \leqslant \dfrac{1}{1-\varepsilon} \cdot e_0 \cdot \alpha$. Положим $u_\varepsilon = (x_0 - z_{m_0}) \cdot i(\|x_0 - z_{m_0}\|)$, где $i(a)$ — инверсия элемента $a \in \mathcal{A}$ (см. раздел 2). Очевидно, что $u_\varepsilon \in (X \setminus Y)$ и $\|u_\varepsilon\| = s(x_0 - z_{m_0})$. При этом для любого $y \in Y$ имеем, что

$$\|u_\varepsilon - y\| = \|(x_0 - z_{m_0}) \cdot i(\|x_0 - z_{m_0}\|) - y\| \geqslant$$
$$\geqslant \|x_0 - z_{m_0} - y\|x_0 - z_{m_0}\| \cdot i(\|x_0 - z_{m_0}\|)\| \cdot i(\|x_0 - z_{m_0}\|) \cdot s(x_0 - z_{m_0}) \geqslant$$
$$\geqslant \alpha \cdot i(\|x_0 - z_{m_0}\|) \cdot e_0 \geqslant (1-\varepsilon) \cdot e_0.$$

□

С помощью теоремы 2.2 и утверждения 4.3 получаем следствие.

Следствие 4.5. *Пусть* $(X, \|\cdot\|)$ — *банахов* $\mathcal{A}$-*модуль,* $Y \subset X$, $Y \neq X$, — *точный* (bo)-*замкнутый* l-*полный* $\mathcal{A}$-*подмодуль в* X, *а* $0 < \varepsilon < 1$. *Если* $e \cdot X \neq e \cdot Y$ *для любого ненулевого* $e \in \nabla$, *то существует* $u_\varepsilon \in (X \setminus Y)$ *такое, что* $\|u_\varepsilon\| = \mathbf{1}$ *и* $\|u_\varepsilon - y\| \geqslant (1-\varepsilon)\cdot\mathbf{1}$ *для всякого* $y \in Y$.

Следующая теорема является $\mathcal{A}$-версией теоремы Рисса для банаховых $\mathcal{A}$-модулей.

Теорема 4.8. *Пусть* $(X, \|\cdot\|)$ — *банахов* $\mathcal{A}$-*модуль. Следующие условия эквивалентны*:

(i) X — *конечномерный или* σ-*конечномерный* $\mathcal{A}$-*модуль*;

(ii) *единичный шар* $B_{\mathbf{1}}(X)$ *является циклически компактным.*

Доказательство. Импликация $(i) \Rightarrow (ii)$ следует из теоремы 4.2.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Пусть X не является σ-конечномерным $\mathcal{A}$-модулем. Тогда существует ненулевой $e \in \nabla$ такой, что $\mathcal{A}$-модуль $e{\cdot}X$ обладает неконечным $\mathcal{A}$-базисом Гамеля $\{x_i\}_{i\in I}$. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{x_i\}_{i\in I}$, а $Y_n = \mathrm{Lin}\{x_1, \ldots, x_n, \mathcal{A}_e\}$ — это n-мерный $\mathcal{A}_e$-подмодуль в $e \cdot X$. Очевидно, что Y_n будет точным (bo)-замкнутым l-полным $\mathcal{A}_e$-модулем, при этом $Y_n \subsetneqq Y_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Из следствия 4.5 имеем, что существуют $z_n \in Y_n$ такие, что $\|z_n\| = e$ и $\|z_{n+1} - z_n\| \geqslant \dfrac{1}{2}e$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Применяя теперь теорему 4.1, получаем, что $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является относительно циклически компактным множеством. Следовательно, единичный шар $B_{\mathbf{1}}(X)$ не будет циклически компактным, что противоречит условию (ii). Таким образом, X является конечномерным или σ-конечномерным $\mathcal{A}$-модулем. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ганиев И. Г., Худайбергенов К. К.* Конечномерные модули над кольцом измеримых функций// Узб. мат. ж. — 2004. — № 4. — С. 3–9.
2. *Каримов Ж. А.* Модули Капланского—Гильберта над алгеброй измеримых функций// Узб. мат. ж. — 2010. — № 4. — С. 74–81.
3. *Каримов Ж. А.* Эквивалентность норм в конечномерных $C_\infty(Q)$-модулях// Вестн. НУУз. — 2017. — № 2/1. — С. 100–108.

4. *Кусраев А. Г.* Векторная двойственность и ее приложения. — Новосибирск: Наука, 1985.
5. *Муратов М. А., Чилин В. И.* Алгебры измеримых и локально измеримых операторов. — Киев: Iнст. мат. НАН Укр., 2007.
6. *Скорняков Л. А.* Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца. — М.: Физматгиз, 1961.
7. *Чилин В. И.* Частично упорядоченные бэровские инволютивные алгебры// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж. — 1985. — *27*. — С. 99–128.
8. *Чилин В. И., Каримов Ж. А.* Дизъюнктно полные $C_\infty(Q)$-модули// Владикавказ. мат. ж. — 2014. — *16*, № 2. — С. 69–78.
9. *Berberian S. K.* The regular ring of a finite $AW*$-algebra// Ann. Math. — 1957. — *65*, № 2. — С. 224–240.
10. *Chilin V. I., Karimov J. A.* Strictly homogeneous laterally complete modules// J. Phys. Conf. Ser. — 2016. — *697*. — 012002.
11. *Clifford A. N., Preston G. B.* The algebraic theory of semigroups. Vol. 1. — Providence: Am. Math. Soc., 1961.
12. *Kaplansky J.* Projections in Banach algebras// Ann. Math. — 1951. — *53*. — С. 235–249.
13. *Kaplansky J.* Algebras of type I// Ann. Math. — 1952. — *56*. — С. 450–472.
14. *Kaplansky J.* Modules over operator algebras// Amer. J. Math. — 1953. — *75*, № 4. — С. 839–858.
15. *Kusraev A. G.* Dominated operators. — Dordrecht: Kluwer, 2000.
16. *Maeda F.* Kontinuierliche Geometrien. — Berlin—Heidelberg: Springer, 1958.
17. *Saito K.* On the algebra of measurable operators for a general $AW*$-algebra, I// Tohoku Math. J. — 1969. — *21*, № 2. — С. 249–270.
18. *Saito K.* On the algebra of measurable operators for a general $AW*$-algebra, II// Tohoku Math. J. — 1971. — *23*, № 3. — С. 525–534.
19. *Segal I.* A noncommutative extension of abstract integration// Ann. Math. — 1953. — *57*, № 3. — С. 401–457.
20. *van der Waerdenm B. L.* Algebra. Vol. II. — New York: Springer, 1991.
21. *Vulikh B. Z.* Introduction to the theory of partially ordered spaces. — Groningen: Wolters-Noordhoff Sci. Publ., 1967.
22. *Yeadon F. J.* Convergence of measurable operators// Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1973. — *74*, № 2. — С. 257–268.

В. И. Чилин
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
Узбекистан, 100174, г. Ташкент, ВУЗ городок, ул. Университетская, д. 4
E-mail: vladimirchil@gmail.com

Ж. А. Каримов
Институт математики им. В. И. Романовского, АН Респ. Узбекистан,
100170, г. Ташкент, Узбекистан, пр-т М. Улугбека, д. 81
E-mail: karimovja@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-137-155 UDC 517.98

The Cyclical Compactness in Banach $C_\infty(Q)$-Modules

© 2019 **V. I. Chilin, J. A. Karimov**

Abstract. In this paper, we study the class of laterally complete commutative unital regular algebras $\mathcal{A}$ over arbitrary fields. We introduce a notion of passport $\Gamma(X)$ for a faithful regular laterally complete $\mathcal{A}$-modules X, which consist of uniquely defined partition of unity in the Boolean algebra of all idempotents in $\mathcal{A}$ and of the set of pairwise different cardinal numbers. We prove that $\mathcal{A}$-modules X and Y are isomorphic if and only if $\Gamma(X) = \Gamma(Y)$. Further we study Banach $\mathcal{A}$-modules in the case $\mathcal{A} = C_\infty(Q)$ or $\mathcal{A} = C_\infty(Q) + i \cdot C_\infty(Q)$. We establish the equivalence of all norms in a finite-dimensional (respectively, σ-finite-dimensional) $\mathcal{A}$-module and prove an $\mathcal{A}$-version of Riesz Theorem, which gives the criterion of a finite-dimensionality (respectively, σ-finite-dimensionality) of a Banach $\mathcal{A}$-module.

REFERENCES

1. I. G. Ganiev and K. K. Khudaybergenov, “Konechnomernye moduli nad kol’tsom izmerimykh funktsiy” [Finite-dimensional modules over the ring of measurable functions], *Uzb. mat. zh.* [Uzbek Math. J.], 2004, No. 4, 3–9 (in Russian).
2. Zh. A. Karimov, “Moduli Kaplanskogo—Gil’berta nad algebroy izmerimykh funktsiy” [Kaplanskii–Hilbert modules over the algebra of measurable functions], *Uzb. mat. zh.* [Uzbek Math. J.], 2010, No. 4, 74–81 (in Russian).
3. Zh. A. Karimov, “Ekvivalentnost’ norm v konechnomernykh $C_\infty(Q)$-modulyakh” [Equivalence of norms in finite-dimensional $C_\infty(Q)$-modules], *Vestn. NUUz* [Bull. Nat. Univ. Uzbek.], 2017, No. 2/1, 100–108 (in Russian).
4. A. G. Kusraev, *Vektornaya dvoystvennost’ i ee prilozheniya* [Vector Duality and Its Applications], Nauka, Novosibirsk, 1985 (in Russian).
5. M. A. Muratov and V. I. Chilin, *Algebry izmerimykh i lokal’no izmerimykh operatorov* [Algebras of Measurable and Locally Measurable Operators], Inst. mat. NAN Ukr., Kiev, 2007 (in Russian).
6. L. A. Skornyakov, *Dedekindovy struktury s dopolneniyami i regulyarnye kol’tsa* [Dedekind Complemented Structures and Regular Rings], Fizmatgiz, Moscow, 1961 (in Russian).
7. V. I. Chilin, “Chastichno uporyadochennye berovskie involyutivnye algebry” [Partially ordered Baire involutive algebras], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. probl. mat. Nov. dostizh.* [Totals Sci. Tech. Ser. Contemp. Probl. Math. New Progr.], 1985, **27**, 99–128 (in Russian).
8. V. I. Chilin and Zh. A. Karimov, “Dizyunktno polnye $C_\infty(Q)$-moduli” [Disjunct complete $C_\infty(Q)$-modules], *Vladikavkaz. mat. zh.* [Vladikavkaz Math. J.], 2014, **16**, No. 2, 69–78 (in Russian).
9. S. K. Berberian, “The regular ring of a finite $AW*$-algebra,” *Ann. Math.*, 1957, **65**, No. 2, 224–240.
10. V. I. Chilin and J. A. Karimov, “Strictly homogeneous laterally complete modules,” *J. Phys. Conf. Ser.*, 2016, **697**, 012002.
11. A. N. Clifford and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups. Vol. 1*, Am. Math. Soc., Providence, 1961.
12. J. Kaplansky, “Projections in Banach algebras,” *Ann. Math.*, 1951, **53**, 235–249.
13. J. Kaplansky, “Algebras of type I,” *Ann. Math.*, 1952, **56**, 450–472.
14. J. Kaplansky, “Modules over operator algebras,” *Amer. J. Math.*, 1953, **75**, No. 4, 839–858.
15. A. G. Kusraev, *Dominated operators*, Kluwer, Dordrecht, 2000.
16. F. Maeda, *Kontinuierliche Geometrien*, Springer, Berlin—Heidelberg, 1958.
17. K. Saito, “On the algebra of measurable operators for a general $AW*$-algebra, I,” *Tohoku Math. J.*, 1969, **21**, No. 2, 249–270.
18. K. Saito, “On the algebra of measurable operators for a general $AW*$-algebra, II,” *Tohoku Math. J.*, 1971, **23**, No. 3, 525–534.
19. I. Segal, “A noncommutative extension of abstract integration,” *Ann. Math.*, 1953, **57**, No. 3, 401–457.
20. B. L. van der Waerdenm, *Algebra. Vol. II*, Springer, New York, 1991.
21. B. Z. Vulikh, *Introduction to the theory of partially ordered spaces*, Wolters-Noordhoff Sci. Publ., Groningen, 1967.

22. F. J. Yeadon, "Convergence of measurable operators," *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1973, **74**, No. 2, 257–268.

V. I. Chilin
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: `vladimirchil@gmail.com`

J. A. Karimov
V. I. Romanovskii Institute of Mathematics, Acad. Sci. of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: `karimovja@mail.ru`