Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 1 (2019). С. 124–136

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-124-136 УДК 517.977

ε-ПОЗИЦИОННЫЕ СТРАТЕГИИ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР ПРЕСЛЕДОВАНИЯ И ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ ПОСТОЯННОГО МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© 2019 г. **М. ТУХТАСИНОВ, Х. Я. МУСТАПОКУЛОВ**

Аннотация. В настоящей работе рассмотрены две задачи. В первой задаче показано, что при выполнении предположения работы [1] и еще одного дополнительного условия на параметры игры преследование может быть завершено на любой окрестности терминального множества. При этом для завершения игры строится ε-позиционная стратегия преследователя.

Во второй задаче рассматривается вопрос об инвариантности данного многозначного отображения относительно системы с распределенными параметрами. Система описывается уравнением теплопроводности, в правой части которого в аддитивной форме находятся управления.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Для эффективного решения линейных дифференциальных игр преследования-убегания с позиции преследователя разработано несколько методов. В фундаментальной работе [11] Л. С. Понтрягин дал полное изложение своих результатов по линейным дифференциальным играм, в частности, о первом методе, к достоинством которого относится его эффективность при решении конкретных задач [5].

В работе [12] рассмотрена задача о возможности завершения преследования для момента первого поглощения. Однако существуют примеры (см. [8]), показывающие, что за время первого поглощения завершить преследование невозможно, хотя время первого попадания конечное. В работе [16] приведены достаточные условия для завершения преследования в линейных дифференциальных играх при различных модификациях методов теории дифференциальных игр. Важным результатом этой работы является то, что обобщение первого метода Понтрягина привело к созданию третьего метода. В свою очередь, третий метод Н. Ю. Сатимова был обобщен М. С. Никольским [9], А. Азамовым, Б. Т. Саматовым [1]. Заметим, что третий метод является сильнее первого, но слабее второго метода. При этом управление преследующего, гарантирующее завершение преследования, задается в виде стробоскопической стратегии. Результаты работ [4, 12, 16, 17] отличаются от работ [5, 8–11, 13, 14, 19, 20, 24] тем, что стратегия преследователя является позиционной.

В первой части показано, что при выполнении предположения работы [1] и еще одного дополнительного условия на параметры игры преследование может быть завершено на любой окрестности терминального множества.

Во второй части работы рассматриваются вопросы о сильной и слабой инвариантности постоянного многозначного отображения относительно системы с распределенными параметрами, в которых управляющее воздействие имеет импульсный характер, что выражается при помощи дельта-функции Дирака [7].

Цель изучения инвариантных множеств сводится к тому, чтобы как можно дольше удержать траекторию движения объекта в пределах заданного множества (области выживаемости). В ранее изученных задачах получены заметные успехи, в основном, для управляемых систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями [2, 15, 18, 23, 25].

В работах [2, 15, 23, 25] и других авторов были получены интересные результаты в вопросе об инвариантности заданных множеств относительно систем с сосредоточенными параметрами, а в работах [21, 22, 26] с распределенными параметрами.

В работах [21, 22] рассмотрены управляемый процесс, описываемый уравнением параболического типа, при этом управляющий параметр, на который наложены геометрическое и интегральное ограничения, участвует в правой части уравнения в аддитивной форме. Приведены условия на постоянные данные, обеспечивающие слабую или сильную инвариантность постоянного многозначного отображения.

В работе [26] получены аналогичные результаты при наличии информации с запаздыванием.

1. Задача I

1.1. Вспомогательные построения. Рассматривается линейная дифференциальная игра преследования, описываемая уравнением

$$\dot{z} = Cz - u + v,\ z \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

где z — фазовый вектор; $u, v \in \mathbb{R}^n$ — параметры управления; C — постоянная матрица порядка $n \times n$; P, Q — непустые компактные подмножества пространства $\mathbb{R}^n$, терминальным является непустое подмножество M пространства $\mathbb{R}^n$.

Уравнение (1.1) и множества P, Q, M описывают дифференциальную игру двух игроков: преследующего, который распоряжается вектором u, и убегающего, который распоряжается вектором v. Движение точки z начинается при $t = 0$ и протекает под воздействием измеримых функций $u(t) \in P$ и $v(t) \in Q$ при $t \geqslant 0$, которых называем *допустимыми управлениями* преследующего и убегающего игроков соответственно.

Вкратце, остановимся на *третьем методе* в задаче преследования.

Будем говорить, что из начального состояния $z(0) = z^0$ возможно *окончание игры* преследования, если у догоняющего есть такая допустимая стратегия $U(z^0, t, v)$, что при любом допустимом $v(t) \in Q$ и $u[t] = U(z^0, t, v(t)) \in P$, $t \geqslant 0$, существует конечный момент времени $\tau > 0$ такой, что: $z(\tau) \in M$, где $z(t)$, $t \geqslant 0$ — соответствующее решение задачи (1.1) при $u = u[t]$, $v = v(t)$, $t \geqslant 0$.

Через $\Omega(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство, состоящее из всех непустых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.1. Через $\Gamma(M)$ обозначим всю совокупность суммируемых многозначных отображений $M(\cdot) : [0, \tau] \to \Omega(\mathbb{R}^n)$, для которых имеет место включение $\int\limits_0^\tau M(s)\, ds \subset M$.

Теорема 1.1. *Если для данной начальной точки $z^0 \notin M$ при некотором моменте времени τ выполнено включение*

$$e^{\tau C} z^0 \in \bigcup_{M(\cdot) \in \Gamma(M)} \int\limits_0^\tau \left(\left(M(s) + e^{(\tau - s)C} P \right) \overset{*}{-} e^{(\tau - s)C} Q \right) ds, \tag{1.2}$$

то из точки z^0 возможно завершение преследования за время τ.

Теперь переходим к изложению нашего результата. Показывается, что если добавить еще одно условие, то игру можно закончить ε-позиционной стратегией к моменту τ на любой α-окрестности множества M.

Лемма 1.1. *Пусть* $\tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k$ — *последовательность моментов времени, где* $\tau_0 = 0$, $\tau_k = \tau$. *Тогда для данного многозначного отображения* $M(\cdot) \in \Gamma(M)$ *при условии*

$$e^{-\tau C}M(s) + e^{-sC}P \overset{*}{-} e^{-sC}Q \neq \varnothing, \quad 0 \leqslant s \leqslant \tau,$$

верно следующее включение:

$$\int\limits_0^\tau \Big(\Big(e^{-\tau C}M(s) + e^{-sC}P\Big) \overset{*}{-} e^{-sC}Q\Big)ds \subset \sum_{i=1}^k \Big(\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \Big(e^{-\tau C}M(s) + e^{-sC}P\Big)ds \overset{*}{-} \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} e^{-sC}Qds\Big). \quad (1.3)$$

Доказательство. Доказательство этой леммы следует из аддитивности интеграла и включения

$$\int\limits_a^b \Big(F(s) \overset{*}{-} G(s)\Big)\,ds \subset \int\limits_a^b F(s)\,ds \overset{*}{-} \int\limits_a^b G(s)\,ds,$$

справедливость которого, в свою очередь, вытекает из следующих рассуждений. Пусть $h \in \int\limits_a^b \Big(F(s) \overset{*}{-} G(s)\Big)\,ds$. Тогда по определению интеграла от многозначного отображения следует существование интегрируемой однозначной ветви $h(s)$, $a \leqslant s \leqslant b$, многозначного отображения $F(s) \overset{*}{-} G(s)$ такой, что имеет место равенство

$$h = \int\limits_a^b h(s)\,ds. \quad (1.4)$$

По определению операции геометрической разности, имеем $h(s) + G(s) \subset F(s)$, $a \leqslant s \leqslant b$. Проинтегрируем обе части этого включения в пределах от a до b. Тогда получаем

$$\int\limits_a^b h(s)\,ds + \int\limits_a^b G(s)\,ds \subset \int\limits_a^b F(s)\,ds,$$

или

$$\int\limits_a^b h(s)\,ds \in \int\limits_a^b F(s)\,ds \overset{*}{-} \int\limits_a^b G(s)\,ds.$$

Отсюда и из (1.4) получим доказательство леммы. □

Условие А. Для произвольных $t \geqslant 0$ и $0 \leqslant a < b$ имеет место включение

$$\int\limits_a^b e^{-sC}P\,ds \subset \int\limits_a^b e^{-(t+s)C}P\,ds.$$

Теорема. *Пусть для данного начального положения* z^0 *при некотором конечном времени* τ *выполнены включение* (1.2) *и условие* А. *Тогда для любого положительного числа* α *существует такая* ε*-позиционная стратегия* $U(z^0, t, z)$ *преследующего игрока, что при любом управлении убегающего игрока* $v(\cdot)$ *решение* $z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau$, *задачи Коши*

$$\dot z = Cz - U(z^0, t, z) + v(t), \quad z(0) = z^0$$

удовлетворяет включению $z(\tau) \in M_\alpha$, *где через* M_α *обозначена* α*-окрестность множества* M.

Доказательство. Допустим, что для момента времени τ выполнены включение (1.2) и условие А. Известно, что если $u(s) \in P$, $v(s) \in Q$, $0 \leqslant s \leqslant t$ — произвольные допустимые управления преследующего и убегающего игроков соответственно, то после подстановки их в правую часть уравнения (1.1) получим неоднородную систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot z = Cz - u(t) + v(t),$$

решение которой с начальным условием $z(0) = z^0$ представляется формулой Коши:

$$z(t) = e^{tC} z^0 - \int\limits_0^t e^{(t-s)C}\big(u(s) - v(s)\big)\, ds. \tag{1.5}$$

Для данного положительного числа α выберем натуральное число k так, чтобы имело место неравенство

$$\left| \int\limits_{(k-1)\varepsilon}^{k\varepsilon} e^{(\tau-s)C} P\, ds \right| < \frac{\alpha}{2}, \tag{1.6}$$

где $\varepsilon = \dfrac{\tau}{k}$ и для компактного множества F: $\big|F\big| = \max\big\{||f|| : f \in F\big\}$.

Из соотношений (1.2), (1.3) следует, что для данного начального положения z^0 и момента времени τ существуют многозначное отображение $\overline{M}(\cdot) \in \Gamma(M)$ и векторы $g^i \in \int\limits_{(i-1)\varepsilon}^{i\varepsilon} \big(e^{-\tau C}\ \overline{M}(s) + e^{-sC} P\big)\, ds \overset{*}{-} \int\limits_{(i-1)\varepsilon}^{i\varepsilon} e^{-sC} Q\, ds$, $i = 1, 2, \ldots, k$, для которых имеет место равенство

$$z^0 = g^1 + g^2 + \ldots + g^k. \tag{1.7}$$

Пусть теперь $v(s) \in Q$, $0 \leqslant s \leqslant \tau$ — произвольное допустимое управление убегающего игрока. На отрезке $[0, \varepsilon]$ преследующий игрок выбирает произвольное допустимое управление $u^{(1)}(s)$, $0 \leqslant s \leqslant \varepsilon$.

Далее применим метод математической индукции по i. Пусть $i = 1$. Тогда из формулы Коши (1.5) в момент времени ε имеем позицию вида

$$z(\varepsilon) = e^{\varepsilon C} z^0 - \int\limits_0^\varepsilon e^{(\varepsilon-s)C}\Big(u^{(1)}(s) - v(s)\Big)\, ds.$$

Отсюда получаем следующее равенство:

$$z(\varepsilon) - e^{\varepsilon C}\left(z^0 - g^1 - \int\limits_0^\varepsilon e^{-sC} u^{(1)}(s)\, ds\right) = e^{\varepsilon C}\left(g^1 + \int\limits_0^\varepsilon e^{-sC} v(s)\, ds\right), \tag{1.8}$$

в силу условия A имеем

$$g^1 + \int\limits_0^\varepsilon e^{-sC} v(s)\, ds \in g^1 + \int\limits_0^\varepsilon e^{-sC} Q\, ds \subset \int\limits_0^\varepsilon \big(e^{-\tau C}\ \overline{M}(s) + e^{-\varepsilon C} e^{-sC} P\big)\, ds \subset$$

$$\subset \int\limits_0^\varepsilon e^{-\tau C}\ \overline{M}(s)\, ds + \int\limits_\varepsilon^{2\varepsilon} e^{-sC} P\, ds.$$

Таким образом, из (1.8) получаем

$$z(\varepsilon) - e^{\varepsilon C}\Big(z^0 - g^1 - \int\limits_0^\varepsilon e^{-sC} u^{(1)}(s)\, ds\Big) = e^{\varepsilon C}\Big(g^1 + \int\limits_0^\varepsilon e^{-sC} v(s)\, ds\Big) \in$$

$$\in e^{\varepsilon C}\Bigg(\int\limits_0^\varepsilon e^{-\tau C}\ \overline{M}(s)\, ds + \int\limits_\varepsilon^{2\varepsilon} e^{-sC} P\, ds\Bigg).$$

Следовательно, зная $z(\varepsilon)$ и z^0, можно найти допустимое управление $u^{(2)}(s) \in P$, $\varepsilon \leqslant s \leqslant 2\varepsilon$ такое, что выполняются включения

$$z(\varepsilon) - e^{\varepsilon C}\left(z^0 - g^1 - \int\limits_0^{\varepsilon} e^{-sC}u^{(1)}(s)\,ds\right) \in e^{\varepsilon C}\Big(\int\limits_0^{\varepsilon} e^{-\tau C}\,\overline{M}(s)\,ds + \int\limits_{\varepsilon}^{2\varepsilon} e^{-sC}u^{(2)}(s)\,ds\Big),$$

$$g^1 + \int\limits_0^{\varepsilon} e^{-sC}v(s)\,ds \in \int\limits_0^{\varepsilon} e^{-\tau C}\,\overline{M}(s)\,ds + \int\limits_{\varepsilon}^{2\varepsilon} e^{-sC}u^{(2)}(s)\,ds.$$

Теперь, считая, что аналогичные соотношения верны при $i-1$, выведем соответствующие равенства для i, $1 < i < k$. Используя явный вид (1.5) решения системы (1.1), записываем его значение к моменту $i\varepsilon$:

$$z(i\varepsilon) = e^{i\varepsilon C}z^0 - \int\limits_0^{i\varepsilon} e^{(i\varepsilon - s)C}\Big(u(s) - v(s)\Big)\,ds.$$

После несложных преобразований получаем:

$$z(i\varepsilon) - e^{i\varepsilon C}\Bigg(z^0 - g^1 - g^2 - \ldots - g^i + g^1 + \int\limits_0^{\varepsilon} e^{-sC}v(s)\,ds + g^2 + \int\limits_{\varepsilon}^{2\varepsilon} e^{-sC}v(s)\,ds + \ldots$$

$$\ldots + g^{i-1} + \int\limits_{(i-2)\varepsilon}^{(i-1)\varepsilon} e^{-sC}v(s)\,ds - \int\limits_0^{\varepsilon} e^{-sC}u^{(1)}(s)\,ds - \int\limits_{\varepsilon}^{2\varepsilon} e^{-sC}u^{(2)}(s)\,ds + \int\limits_{2\varepsilon}^{3\varepsilon} e^{-sC}u^{(3)}(s)\,ds + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_{(i-1)\varepsilon}^{i\varepsilon} e^{-sC}u^{(i)}(s)\,ds\Bigg) \in e^{i\varepsilon C}\Bigg(\int\limits_0^{(i-1)\varepsilon} e^{-\tau C}\,\overline{M}(s)\,ds + g^i + \int\limits_{(i-1)\varepsilon}^{i\varepsilon} e^{-sC}v(s)\,ds\Bigg). \tag{1.9}$$

Отсюда в силу условия A имеем

$$g^i + \int\limits_{(i-1)\varepsilon}^{i\varepsilon} e^{-sC}v(s)\,ds \in g^i + \int\limits_{(i-1)\varepsilon}^{i\varepsilon} e^{-sC}Q\,ds \subset \int\limits_{(i-1)\varepsilon}^{i\varepsilon} e^{-\tau C}\,\overline{M}(s)\,ds +$$

$$+ \int\limits_{(i-1)\varepsilon}^{i\varepsilon} e^{-sC}P\,ds \subset \int\limits_{(i-1)\varepsilon}^{i\varepsilon} e^{-\tau C}\,\overline{M}(s)\,ds + \int\limits_{i\varepsilon}^{(i+1)\varepsilon} e^{-sC}P\,ds. \tag{1.10}$$

Таким образом, из (1.9) и (1.10) следует, что существует допустимое управление $u^{(i+1)}(s) \in P$, $i\varepsilon \leqslant s \leqslant (i+1)\varepsilon$ такое, что:

$$z(i\varepsilon) - e^{i\varepsilon C}\left(z^0 - g^1 - g^2 - \ldots - g^i - \int\limits_0^{\varepsilon} e^{-sC}u^{(1)}(s)\,ds\right) \in$$

$$\in e^{i\varepsilon C}\Big(\int\limits_0^{i\varepsilon} e^{-\tau C}\,\overline{M}(s)\,ds + \int\limits_{i\varepsilon}^{(i+1)\varepsilon} e^{-sC}u^{(i+1)}(s)\,ds\Big),$$

$$g^i + \int\limits_{(i-1)\varepsilon}^{i\varepsilon} e^{-sC}v(s)\,ds \in \int\limits_0^{i\varepsilon} e^{-\tau C}\,\overline{M}(s)\,ds + \int\limits_{i\varepsilon}^{(i+1)\varepsilon} e^{-sC}u^{(i+1)}(s)\,ds.$$

Если повторить все рассуждения для случая k, то из (1.9) и (1.10) получаем

$$z(k\varepsilon) - e^{k\varepsilon C}\left(z^0 - g^1 - g^2 - \ldots - g^k - \int\limits_0^{\varepsilon} e^{-sC}u^{(1)}(s)\,ds\right) = e^{k\varepsilon C}\left(g^k + \int\limits_{(k-1)\varepsilon}^{k\varepsilon} e^{-sC}v(s)\,ds\right) \in$$

$$\in e^{k\varepsilon C}\Bigg(g^k+\int\limits_{(k-1)\varepsilon}^{k\varepsilon} e^{-sC}Q\,ds\Bigg)\subset e^{k\varepsilon C}\Bigg(\int\limits_{0}^{k\varepsilon} e^{-\tau C}\;\overline{M}(s)\,ds+\int\limits_{(k-1)\varepsilon}^{k\varepsilon} e^{-sC}P\,ds\Bigg).$$

Из последнего включения и равенства (1.7) имеем

$$z(\tau)\in\int\limits_0^{\tau}\overline{M}(s)\,ds-\int\limits_0^{\varepsilon}e^{(\tau-s)C}P\,ds+\int\limits_{(k-1)\varepsilon}^{\tau}e^{(\tau-s)C}P\,ds.$$

Отсюда, учитывая то, что $\overline{M}(\cdot)\in\Gamma(M)$, и неравенства (1.6), получаем

$$z(\tau)\in M_\alpha.$$

Этим заканчивается доказательство теоремы. □

2. Задача II

2.1. Вспомогательные построения. Через A обозначим дифференциальный оператор

$$A\varphi=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\Big),\ x\in\Omega,\tag{2.1}$$

где функции $a_{ij}(x)\in L^p(\Omega)$, $p\geqslant 1$ удовлетворяют условиям:

1. $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$, $i,j=1,\dots,n$, $x\in\overline{\Omega}$;
2. существует положительная константа γ такая, что

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant\gamma\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,\tag{2.2}$$

для любых $x\in\overline{\Omega}$ и вещественных чисел $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2\neq 0$.

Неравенство (2.2) называется *условием равномерной эллиптичности* оператора A. В качестве области определения оператора A берется пространство $C^2(\overline{\Omega})$ дважды непрерывно дифференцируемых в Ω и непрерывных в $\overline{\Omega}$ функций.

Определение 2.1. Пусть $\varphi(\cdot)\in\mathring{W}_2^1(\Omega)$ — функция, не равная нулю. Число λ, при котором имеет место равенство

$$-\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_j}\,dx=\lambda\int\limits_{\Omega}\varphi(x)\psi(x)dx,$$

для произвольных функций $\psi(\cdot)\in\mathring{W}_2^1(\Omega)$, называется *собственным значением*, а $\varphi(\cdot)$ — *собственной функцией*, соответствующей λ, следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned}&A\varphi(x)=\lambda\varphi(x),\ x\in\Omega,\\&\varphi(x)=0,\ x\in\partial\Omega.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Здесь $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ — подпространство $W_2^1(\Omega)$, в котором плотным множеством является множество гладких функций, равных нулю вблизи $\partial\Omega$, а $W_2^1(\Omega)$ — гильбертово пространство, состоящее из элементов пространства $L_2(\Omega)$, имеющих квадратично суммируемые обобщенные производные φ_{x_i}, $i=1,\dots,n$.

Поскольку задача однородна, то можно считать

$$\int\limits_{\Omega}\varphi^2(x)dx=1.$$

Можно показать, что оператор (2.1) имеет дискретный спектр [6], то есть:

1. Существует счетная система собственных значений $\{\lambda_k\}$ краевой задачи (2.3) такая, что

$$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n\leqslant\ldots,\ \lambda_n\to\infty,\ n\to\infty;$$

2. Каждому собственному значению λ_k соответствует конечное число собственных функций $\varphi_k(x)$ таких, что $\int\limits_{\Omega} \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \delta_{ij}$, где
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = j, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j; \end{cases}$$
3. Система всех собственных функций $\{\varphi_k\}$ полна (замкнута) в пространстве $L_2(\Omega)$, т. е. любую функцию $f(\cdot)$ из пространства $L_2(\Omega)$ можно представить в единственном виде
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k\varphi_k(x),\ x \in \Omega, \tag{2.4}$$
где равенство понимается в смысле
$$\int\limits_{\Omega} \left[f(x) - \sum_{k=1}^{N} f_k\varphi_k(x)\right]^2 dx \to 0,\ N \to \infty.$$

Коэффициенты Фурье f_k ряда (2.4) определяются формулой
$$f_k = \int\limits_{\Omega} f(x)\varphi_k(x)dx,$$
а сам ряд (2.4) называется *рядом Фурье* функции $f(x)$. При соответствующих условиях на функции $a_{ij}(\cdot)$, $\varphi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$, формула Грина записывается в следующем виде [6]:
$$\int\limits_{\Omega} \Big(\psi A\varphi(x) - \varphi(x)A\psi\Big)dx = 0. \tag{2.5}$$

2.2. Предположения и вспомогательные утверждения. Рассмотрим следующую задачу управления теплообменом [3]:
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + Au(x,t) = F(x,t,\mu),\ \ 0 < t \leqslant T,\ \ x \in \Omega \tag{2.6}$$
с граничным и начальным условиями
$$u(x,t) = 0,\ \ 0 \leqslant t \leqslant T,\ \ x \in \partial\Omega, \tag{2.7}$$
$$u(x,0) = u^0(x),\ \ x \in \Omega. \tag{2.8}$$
Здесь $u = u(t,x)$ — неизвестная функция, T — произвольное положительное число, $F(x,t,\mu)$ и $u^0(\cdot)$ — заданные функции своих аргументов, а μ — управляющий параметр; функцией F определяется общая задача об управлении с импульсом.

Обобщенным решением краевой задачи (2.6)–(2.8) на отрезке $[0,T]$ называется функция $u(\cdot,\cdot) \in W_2^{1,1}(\Omega \times [0,T])$, удовлетворяющая тождеству
$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x_i}\frac{\partial \psi(x,\tau)}{\partial x_j}\,dx - \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega} u(x,\tau)\frac{\partial \psi(x,\tau)}{\partial \tau}dx +$$
$$+ \int\limits_{\Omega} u(x,t)\psi(x,t)dx - \int\limits_{\Omega} u(x,0)\psi(x,0)dx = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega} F(x,\tau,\mu)\psi(x,\tau)dx.$$
при любых $t \in [0,T]$, $\psi(\cdot,\cdot) \in W_2^{1,1}(\Omega \times [0,T])$ (см. [3, 6]).

Решение задачи (2.6)–(2.8) формально представим в виде ряда
$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k(x). \tag{2.9}$$

Для нахождения функций $u_k(\cdot)$, $k = 1, 2, \ldots, \infty$ умножаем (2.6) на функцию $\varphi_k(x)$, затем проинтегрируем полученные тождества по области Ω. Тогда имеем следующие тождества:

$$\int\limits_{\Omega} \Big(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + Au(x,t) - F(x,t,\mu)\Big)\varphi_k(x)dx \equiv 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \infty. \tag{2.10}$$

Согласно формуле (2.5), при $\psi = \varphi_k(x)$, $\varphi(x) = u(x,t)$, получаем

$$\int\limits_{\Omega} \varphi_k(x)Au(x,t)dx = \int\limits_{\Omega} u(x,t)A\varphi_k(x)dx. \tag{2.11}$$

Но по определению функций $u(x,t)$, $\varphi_k(x)$ с учетом (2.3) имеем

$$A\varphi_k(x) = \lambda_k\varphi_k(x), \ x \in \Omega.$$

Поэтому из (2.11) получаем

$$\int\limits_{\Omega} \varphi_k(x)Au(x,t)dx = \lambda_k u_k(t). \tag{2.12}$$

Теперь, учитывая то, что

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\varphi_k(x)dx = \frac{du_k(t)}{dt},$$

из формул (2.10) и (2.12) имеем

$$\dot{u}_k(t) + \lambda_k u_k(t) = \int\limits_{\Omega} F(x,t,\mu)\varphi_k(x)dx, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.13}$$

Так как функция (2.9) должна удовлетворять начальному условию $u(x,0) = u^0(x)$, то

$$u_k(0) = u_k^0 = \int\limits_{\Omega} u^0(x)\varphi_k(x)dx, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Имея это в виду из (2.13) находим

$$u_k(t) = e^{-\lambda_k t}u_k^0 + \int\limits_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}\int\limits_{\Omega} F(x,t,\mu)\varphi_k(x)dxd\tau, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.14}$$

Таким образом, (2.9) и (2.14) на отрезке $[0, T]$ определяют формальное решение задачи (2.6)–(2.8) в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[e^{-\lambda_k t}u_k^0 + \int\limits_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}\int\limits_{\Omega} F(x,t,\mu)\varphi_k(x)dxd\tau\right]\varphi_k(x). \tag{2.15}$$

2.3. Определения и основные результаты. Пусть $\{t_i\}_{i=0}^{\infty}$, $t_0 > 0$ — последовательность моментов времени, занумерованных в порядке возрастания, без конечных точек сгущения.

Предположим, что преследователь может воздействовать на систему (2.6) только в моменты $\{t_i\}$ и его воздействия имеют импульсный характер, что выражается при помощи дельта-функции Дирака [3, 7]:

$$F(x,t,\mu(\cdot)) = \sum_{i=0}^{\infty}\mu(x)\delta(t-t_i), \ x \in \Omega, t \geqslant 0. \tag{2.16}$$

Предположим также, что управление $\mu(\cdot)$ представляет собой измеримую функцию.

Определение 2.2. Функцию $\mu(\cdot)$, удовлетворяющую условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg(\int\limits_{\Omega}\mu(\xi)\varphi_k(\xi)ds\Bigg)^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^2 \leqslant \rho^2,$$

где ρ — некоторая положительная константа, μ_k — коэффициенты Фурье функции $\mu(\cdot)$ по системе $\{\varphi_k\}$, назовем *допустимым управлением*.

Определение 2.3 (см. [7,21,22,26]). Многозначное отображение $W : [0,T] \to 2^{\mathbb{R}}$, где $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$, называется *сильно инвариантным* на отрезке $[0,T]$ относительно задачи (2.6)–(2.8), если для любых $\langle u^0(\cdot)\rangle \in W(0)$ и допустимых $\mu(\cdot)$ выполняется включение $\langle u(\cdot,t)\rangle \in W(t)$ при всех $0 < t \leqslant T$, где $\langle\,\rangle$ — соответствующая норма, $u(x,t)$ — соответствующее решение задачи (2.6)–(2.8).

Определение 2.4. Многозначное отображение $W : [0,T] \to 2^{\mathbb{R}}$, где $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$, называется *слабо инвариантным* на отрезке $[0,T]$ относительно задачи (2.6)–(2.8), если для любого $\langle u^0(\cdot)\rangle \in W(0)$ существует допустимое управление $\mu(\cdot)$ такое, что $\langle u(\cdot,t)\rangle \in W(t)$ при всех $0 < t \leqslant T$.

В данном пункте исследуются сильная и слабая инвариантность отображения вида

$$W(t) = [0,b],\ \ 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где b — положительная константа.

Дальнейшей нашей целью является нахождение такой связи между параметрами T, b, ρ и λ_i, чтобы обеспечить сильную или слабую инвариантность отображения $W(t)$ на отрезке $[0,T]$ относительно задачи (2.6)–(2.8).

Обозначим

$$N(t) = \max\{i \in N \cup \{0\} : t_i \leqslant t \leqslant T\}.$$

А. Случай $\langle u(\cdot,t)\rangle = \|u(\cdot,t)\| = \|u(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega)}$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Здесь $\|u(\cdot,t)\|^2 = \int\limits_{\Omega} |u(\xi,t)|^2\,d\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k^2(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $u_k(\cdot)$ — коэффициенты Фурье функции $u(\cdot,\cdot)$ по системе $\{\varphi_k(\cdot)\}$.

Тогда из (2.15) и (2.16) следует

$$||u(\cdot,t)||^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left[e^{-\lambda_k t}u_k^0 + \int\limits_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=0}^{N(t)}\mu(\xi)\delta(\tau-t_i)\varphi_k(\xi)d\xi d\tau\right]^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left[e^{-\lambda_k t}u_k^0 + \mu_k\sum_{i=0}^{N(t)}\int\limits_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}\delta(\tau-t_i)d\tau\right]^2,\ t \in [0,T]. \tag{2.17}$$

Теорема 2.1.

1°. *Пусть* $t_0 > T$, *тогда при любом* $\rho \geqslant 0$ *многозначное отображение* $W(t)$ *сильно инвариантно на отрезке* $[0,T]$ *относительно задачи* (2.6)–(2.8).

2°. *Пусть* $t_0 \leqslant T$. *Если* $\rho \leqslant b\cdot\left(e^{\lambda_1 t_0}-1\right)\Big/\sum\limits_{i=0}^{N(T)} e^{\lambda_1 t_i}$, *то многозначное отображение* $W(t)$ *сильно инвариантно на отрезке* $[0,T]$ *относительно задачи* (2.6)–(2.8).

Доказательство. Покажем, что отображение $W(t)$ сильно инвариантно на отрезке $[0,T]$ относительно задачи (2.6)–(2.8). Пусть $u^0(\cdot)$ — произвольное начальное положение с условием $\|u^0(\cdot)\| \leqslant b$, а $\mu(\cdot)$ — произвольное допустимое управление.

1°. Допустим, $t_0 > T$. Тогда из (2.17) следует

$$||u(\cdot,t)||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\lambda_k t}|u_k^0|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\lambda_1 t}|u_k^0|^2 \leqslant b^2.$$

2°. Допустим, $t_0 \leqslant T$ и $\rho \leqslant b\cdot\left(e^{\lambda_1 t_0}-1\right)\Big/\sum\limits_{i=0}^{N(T)} e^{\lambda_1 t_i}$.

Пусть $t \in [0,t_0)$. Тогда можно показать аналогично 1°, что $||u(\cdot,t)|| \leqslant b$.

Пусть $t \in [t_0,T]$. Тогда

$$||u(\cdot,t)||^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left[e^{-\lambda_k t}u_k^0 + \mu_k\sum_{i=0}^{N(t)}\int\limits_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}\delta(t-t_i)d\tau\right]^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left[e^{-\lambda_k t}u_k^0 + \mu_k\sum_{i=0}^{N(t)} e^{-\lambda_k(t-t_i)}\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\left[e^{-2\lambda_k t}|u_k^0|^2 + 2e^{-\lambda_k t}|u_k^0||\mu_k|\sum_{i=0}^{N(t)} e^{-\lambda_k(t-t_i)} + |\mu_k|^2\left(\sum_{i=0}^{N(t)} e^{-\lambda_k(t-t_i)}\right)^2\right] \leqslant$$

$$\leqslant e^{-2\lambda_1 t}\left[\sum_{k=1}^{\infty}|u_k^0|^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}|u_k^0||\mu_k|\sum_{i=0}^{N(t)} e^{\lambda_1 t_i} + \sum_{k=1}^{\infty}|\mu_k|^2\Big(\sum_{i=0}^{N(t)} e^{\lambda_1 t_i}\Big)^2\right].$$

Теперь, применяя неравенство Коши—Буняковского, получим из среднего слагаемого

$$||u(\cdot,t)||^2 \leqslant e^{-2\lambda_1 t}\left[b^2 + 2b\rho\sum_{i=0}^{N(t)} e^{\lambda_1 t_i} + \rho^2\Big(\sum_{i=0}^{N(t)} e^{\lambda_1 t_i}\Big)^2\right] = e^{-2\lambda_1 t}\left[b + \rho\sum_{i=0}^{N(t)} e^{\lambda_1 t_i}\right]^2. \tag{2.18}$$

Следовательно, $||u(\cdot,t)||^2 \leqslant b^2$. Это означает, что $W(t)$, $t \in [0,T]$ сильно инвариантно относительно задачи (2.6)–(2.8).

Теорема 2.1 доказана. □

Примечание 2.1. Можно показать, что многозначное отображение $W(t)$ всегда слабо инвариантно на отрезке $[0,T]$ относительно задачи (2.6)–(2.8).

Действительно, для любых $||u^0(\cdot)|| \in W(0)$ при $\mu(t) = 0$, $t \geqslant 0$, имеем $||u(\cdot,t)|| \in W(t)$ для всех $0 < t \leqslant T$.

Б. Случай $\langle u(\cdot,\cdot)\rangle = \|u(\cdot,\cdot)\| = \|u(\cdot,\cdot)\|_{L_2(\Omega\times[0,T])}$. Здесь $\|u(\cdot,\cdot)\|^2 = \int\limits_0^T ||u(\cdot,t)||^2 dt = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_0^T u_k^2(t)dt$.

Теорема 2.2.

1°. *Пусть* $t_0 > T$ *и* $2\lambda_1 \geqslant 1$, *тогда при любом* $\rho \geqslant 0$ *многозначное отображение* $W(t)$ *сильно инвариантно на отрезке* $[0,T]$ *относительно задачи* (2.6)–(2.8).

2°. *Пусть* $t_0 \leqslant T$ *и* $\rho \leqslant b\cdot\Big(\sqrt{\dfrac{2\lambda_1}{1-e^{-2\lambda_1 T}}} - 1\Big)\Big/\sum\limits_{i=0}^{N(T)} e^{\lambda_1 t_i}$, *тогда многозначное отображение* $W(t)$ *сильно инвариантно на отрезке* $[0,T]$ *относительно задачи* (2.6)–(2.8).

Доказательство. 1°. Пусть $t_0 > T$ и $2\lambda_1 \geqslant 1$. Из (2.17) следует

$$||u(\cdot,\cdot)||^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_0^T e^{-2\lambda_k t}|u_k^0|^2 dt \leqslant \frac{1-e^{-2\lambda_1 T}}{2\lambda_1}\cdot b^2 \leqslant b^2.$$

2°. Пусть $t_0 \leqslant T$ и $\rho \leqslant b\cdot\Big(\sqrt{\dfrac{2\lambda_1}{1-e^{-2\lambda_1 T}}} - 1\Big)\Big/\sum\limits_{i=0}^{N(T)} e^{\lambda_1 t_i}$. Из (2.18) вытекает

$$||u(\cdot,\cdot)||^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_0^T\left[e^{-\lambda_k t}u_k^0 + \mu_k\Big(\sum_{i=0}^{N(t)}\int\limits_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}\delta(t-t_i)d\tau\Big)\right]^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^T e^{-2\lambda_1 t}\left[b + \rho\sum_{i=0}^{N(t)} e^{\lambda_1 t_i}\right]^2 dt \leqslant \frac{1-e^{-2\lambda_1 T}}{2\lambda_1}\left[b + \rho\sum_{i=0}^{N(T)} e^{\lambda_1 t_i}\right]^2 \leqslant b^2.$$

Следовательно, многозначное отображение $W(t)$ сильно инвариантно на отрезке $[0,T]$ относительно задачи (2.6)–(2.8).

Теорема 2.2 доказана. □

Примечание 2.2. Как и в примечании 2.1, можно показать, что многозначное отображение $W(t)$ всегда слабо инвариантно на отрезке $[0,T]$ относительно задачи (2.6)–(2.8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азамов А., Саматов Б. Т.* О модифицированном третьем методе в задаче преследования// В сб.: «Неклассические задачи математической физики». — Ташкент: Фан, 1985. — С. 174–184.
2. *Гусейнов Х. Г., Ушаков В. Н.* Сильно и слабо инвариантные множества относительно дифференциального включения// Докл. АН СССР. — 1988. — *303*, № 4. — С. 794–796.
3. *Егоров А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. — М.: Наука, 1978.
4. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974.
5. *Мезенцев А. В.* О некотором классе дифференциальных игр// Изв. АН СССР. Техн. киберн. — 1971. — № 6. — С. 3–7.
6. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. — М.: Высшая школа, 1977.
7. *Мустапокулов Х. Я.* О некоторой задаче инвариантности постоянного многозначного отображения в задаче теплопроводности с импульсным управлением// Респ. науч. конф. с участием зарубежных ученых «Актуальные проблемы динамических систем и их приложения». — Ташкент, 2017. — С. 215–216.
8. *Никольский М. С.* Пример дифференциальной игры преследования, в которой времени первого поглощения недостаточно для осуществления поимки// В сб.: «Теория оптимальных решений. Вып. 2». — Киев: Изд-во ИК АН УССР, 1969. — С. 57–60.
9. *Никольский М. С.* Об одном прямом методе решения линейных дифференциальных игр преследования—убегания// Мат. заметки. — 1983. — *33*, № 6. — С. 885–891.
10. *Никольский М. С.* Первый прямой метод Л. С. Понтрягина в дифференциальных играх. — М.: МГУ, 1984.
11. *Понтрягин Л. С.* Линейные дифференциальные игры преследования// Мат. сб. — 1980. — *112*, № 3. — С. 307–331.
12. *Пшеничный Б. Н.* Линейные дифференциальные игры// Автомат. и телемех. — 1968. — *1*. — С. 65–78.
13. *Пшеничный Б. Н., Сагайдак М. И.* О дифференциальных играх с фиксированным временем// Кибернетика. — 1970. — № 2. — С. 54–63.
14. *Пшеничный Б. Н., Чикрий А. А., Раппопорт И. С.* Эффективный метод решения дифференциальных игр со многими преследователями// Докл. АН СССР. — 1981. — *256*, № 3. — С. 530–535.
15. *Реттиев Н. С.* Инвариантные множества систем управления// Дисс. к.ф.-м.н. — Ленинград, 1979.
16. *Сатимов Н.* К задаче преследования в линейных дифференциальных играх// Дифф. уравн. — 1973. — *9*, № 11. — С. 2000–2009.
17. *Сатимов Н.* О задаче преследования по позиции в дифференциальных играх// Докл. АН СССР. — 1976. — *229*, № 4. — С. 808–811.
18. *Сатимов Н. Ю., Азамов А.* К задаче избежания столкновений в нелинейных системах// Докл. АН УзССР. — 1974. — № 6. — С. 3–5.
19. *Тухтасинов М.* Линейная дифференциальная игра преследования с импульсными и интегрально-ограниченными управлениями игроков// Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. — 2016. — *22*, № 3. — С. 273–282.
20. *Тухтасинов М.* Линейная дифференциальная игра преследования с импульсным управлением и линейным интегральным ограничением на управления игроков// Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прилож. — 2017. — *143*. — С. 24–39.
21. *Тухтасинов М., Ибрагимов У.* Об инвариантных множествах при интегральном ограничении на управления// Изв. вузов. Сер. Мат. — 2011. — № 8. — С. 69–76.
22. *Тухтасинов М., Мустапокулов Х. Я.* Об инвариантных множествах при геометрическом и интегральном ограничениях// Узб. мат. ж. — 2011. — № 3. — С. 161–168.
23. *Фазылов А. З.* Достаточные условия оптимальности для задачи выживания// Прикл. мат. мех. — 1997. — *61*, № 3. — С. 186–188.
24. *Чикрий А. А., Раппопорт И. С.* О достаточных условиях разрешимости игровых задач сближения в классе стробоскопических стратегий// Теор. оптим. рiшень. — 2005. — № 4. — С. 49–55.
25. *Feuer A., Heymann M.* Ω-invariance in control systems with bounded controls// J. Math. Anal. Appl. — 1976. — *53*. — С. 266–276.
26. *Tukhtasinov M., Ibragimov G. I., Mamadaliev N. O.* On an invariant set in the heat conductivity problem with time lag// Abstr. Appl. Anal. — 2013. — ID 108482.

М. Тухтасинов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
Узбекистан, 100174, г. Ташкент, ВУЗ городок, ул. Университетская, д. 4
E-mail: mumin51@mail.ru

Х. Я. Мустапокулов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
Узбекистан, 100174, г. Ташкент, ВУЗ городок, ул. Университетская, д. 4
E-mail: m_hamdam@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-124-136 UDC 517.977

ε-Positional Strategies in the Theory of Differential Pursuit Games and the Invariance of a Constant Multivalued Mapping in the Heat Conductivity Problem

© 2019 **M. Tukhtasinov, Kh. Ya. Mustapokulov**

Abstract. In this paper, we consider two problems. In the first problem, we prove that if the assumption from the paper [1] and one additional condition on the parameters of the game hold, then the pursuit can be finished in any neighborhood of the terminal set. To complete the game, an ε-positional pursuit strategy is constructed.

In the second problem, we study the invariance of a given multivalued mapping with respect to the system with distributed parameters. The system is described by the heat conductivity equation containing additive control terms on the right-hand side.

REFERENCES

1. A. Azamov and B. T. Samatov, “O modifitsirovannom tret’em metode v zadache presledovaniya” [On the modified third method in the pursuit problem], In: *Neklassicheskie zadachi matematicheskoy fiziki* [Nonclassical Problems of Mathematical Physics], Fan, Tashkent, 1985, pp. 174–184 (in Russian).
2. Kh. G. Guseynov and V. N. Ushakov, “Sil’no i slabo invariantnye mnozhestva otnositel’no differentsial’nogo vklyucheniya” [Strongly and weakly invariant sets with respect to differential inclusion], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1988, **303**, No. 4, 794–796 (in Russian).
3. A. I. Egorov, *Optimal’noe upravlenie teplovymi i diffuzionnymi protsessami* [Optimal Control of Heat and Diffusion Processes], Nauka, Moscow, 1978 (in Russian).
4. N. N. Krasovskiy and A. I. Subbotin, *Pozitsionnye differentsial’nye igry* [Positional Differential Games], Nauka, Moscow, 1974 (in Russian).
5. A. V. Mezentsev, “O nekotorom klasse differentsial’nykh igr” [On some class of differential games], *Izv. AN SSSR. Tekhn. kibern.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Techn. Cybern.], 1971, No. 6, 3–7 (in Russian).
6. S. G. Mikhlin, *Lineynye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Linear Partial Differential Equations], Vysshaya shkola, Moscow, 1977 (in Russian).
7. Kh. Ya. Mustapokulov, “O nekotoroy zadache invariantnosti postoyannogo mnogoznachnogo otobrazheniya v zadache teploprovodnosti s impul’snym upravleniem” [On some invariance problem for constant multivalued mapping in the heat conduction problem with impulse control], *Resp. Sci. Conf. with foreign particip. “Actual Problems of Dynamical Systems and Their Applications,”* Tashkent, 2017, pp. 215–216 (in Russian).
8. M. S. Nikol’skiy, “Primer differentsial’noy igry presledovaniya, v kotoroy vremeni pervogo pogloshcheniya nedostatochno dlya osushchestvleniya poimki” [An example of differential pursuit game where the time of first absorption is not sufficient for capturing], In: *Teoriya optimal’nykh resheniy. Vyp. 2* [Theory of Optimal Solutions. Iss. 2], IK AN USSR, Kiev, 1969, pp. 57–60 (in Russian).
9. M. S. Nikol’skiy, “Ob odnom pryamom metode resheniya lineynykh differentsial’nykh igr presledovaniya—ubeganiya” [On one direct method of solution for linear differential pursuit–escape games], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1983, **33**, No. 6, 885–891 (in Russian).
10. M. S. Nikol’skiy, *Pervyy pryamoy metod L. S. Pontryagina v differentsial’nykh igrakh* [The First Direct Pontryagin’s Method in Differential Games], MSU, Moscow, 1984 (in Russian).
11. L. S. Pontryagin, “Lineynye differentsial’nye igry presledovaniya” [Linear differential pursuit games], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1980, **112**, No. 3, 307–331 (in Russian).

12. B. N. Pshenichnyy, “Lineynye differentsial’nye igry” [Linear differential games], *Avtomat. i telemekh.* [Automat. Telemech.], 1968, **1**, 65–78 (in Russian).
13. B. N. Pshenichnyy and M. I. Sagaydak, “O differentsial’nykh igrakh s fiksirovannym vremenem” [On differential games with fixed time], *Kibernetika* [Cybernetics], 1970, No. 2, 54–63 (in Russian).
14. B. N. Pshenichnyy, A. A. Chikriy and I. S. Rappoport, “Effektivnyy metod resheniya differentsial’nykh igr so mnogimi presledovatelyami” [An effective method of solution for differential games with many pursuers], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1981, **256**, No. 3, 530–535 (in Russian).
15. N. S. Rettiev, “Invariantnye mnozhestva sistem upravleniya” [Invariant sets of control systems], *Diss. k.f.-m.n.* [PhD Thesis], Leningrad, 1979 (in Russian).
16. N. Satimov, “K zadache presledovaniya v lineynykh differentsial’nykh igrakh” [To the pursuit problem in linear differential games], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1973, **9**, No. 11, 2000–2009 (in Russian).
17. N. Satimov, “O zadache presledovaniya po pozitsii v differentsial’nykh igrakh” [On the position pursuit problem in differential games], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1976, **229**, No. 4, 808–811 (in Russian).
18. N. Yu. Satimov and A. Azamov, “K zadache izbezhaniya stolknoveniy v nelineynykh sistemakh” [To the problem of avoiding collisions in nonlinear systems], *Dokl. AN UzSSR* [Rep. Acad. Sci. Uzbek SSR], 1974, No. 6, 3–5 (in Russian).
19. M. Tukhtasinov, “Lineynaya differentsial’naya igra presledovaniya s impul’snymi i integral’no-ogranichennymi upravleniyami igrokov” [Linear differential pursuit game with impulse and integrally bounded controls of players], *Tr. In-ta mat. i mekh. UrO RAN* [Proc. Inst. Math. Mech. Ural Branch Russ. Acad. Sci.], 2016, **22**, No. 3, 273–282 (in Russian).
20. M. Tukhtasinov, “Lineynaya differentsial’naya igra presledovaniya s impul’snym upravleniem i lineynym integral’nym ogranicheniem na upravleniya igrokov” [Linear differential pursuit game with impulse control and integral restriction on the controls of players], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. mat. i ee prilozh.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2017, **143**, 24–39 (in Russian).
21. M. Tukhtasinov and U. Ibragimov, “Ob invariantnykh mnozhestvakh pri integral’nom ogranichenii na upravleniya” [On invariant sets under the integral restriction on controls], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2011, No. 8, 69–76 (in Russian).
22. M. Tukhtasinov and Kh. Ya. Mustapokulov, “Ob invariantnykh mnozhestvakh pri geometricheskom i integral’nom ogranicheniyakh” [On invariant sets under geometric and integral restrictions], *Uzb. mat. zh.* [Uzbek Math. J.], 2011, No. 3, 161–168 (in Russian).
23. A. Z. Fazylov, “Dostatochnye usloviya optimal’nosti dlya zadachi vyzhivaniya” [Sufficient conditions of optimality for the survival problem], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1997, **61**, No. 3, 186–188 (in Russian).
24. A. A. Chikriy and I. S. Rappoport, “O dostatochnykh usloviyakh razreshimosti igrovykh zadach sblizheniya v klasse stroboskopicheskikh strategiy” [On sufficient conditions of solvability for game problems of approach in the class of stroboscopic strategies], *Teor. optim. rishen’* [Theor. Optim. Solutions], 2005, No. 4, 49–55 (in Russian).
25. A. Feuer and M. Heymann, “Ω-invariance in control systems with bounded controls,” *J. Math. Anal. Appl.*, 1976, **53**, 266–276.
26. M. Tukhtasinov, G. I. Ibragimov, and N. O. Mamadaliev, “On an invariant set in the heat conductivity problem with time lag,” *Abstr. Appl. Anal.*, 2013, ID 108482.

M. Tukhtasinov
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: mumin51@mail.ru

Kh. Ya. Mustapokulov
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: m_hamdam@mail.ru