Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 1 (2019). С. 109–123

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-109-123 УДК 517.984

СПЕКТР ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ В ТРЕХЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМАХ С ПРИМЕСЬЮ В МОДЕЛИ ХАББАРДА. ВТОРОЕ ДУБЛЕТНОЕ СОСТОЯНИЕ

© 2019 г. **С. М. ТАШПУЛАТОВ**

Аннотация. В данной работе рассматриваются трехэлектронные системы с примесью в модели Хаббарда и исследуется спектр такой системы во втором дублетном состоянии в ν-мерной решетке Z^ν.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В начале 1970-х годов практически одновременно и независимо друг от друга вышли работы [5, 6, 10], в которых была представлена простая модель металла, ставшая впоследствии фундаментальной в теории сильно коррелированных электронных систем. В этой модели рассматривалась единственная невырожденная электронная зона с локальным кулоновским взаимодействием. Гамильтониан модели содержал только два параметра: матричный элемент t перескока электрона с одного узла решетки на соседний и параметр U кулоновского отталкивания двух электронов на одном узле. Во вторичном квантовании данный гамильтониан может быть записан как

$$H = t\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_m a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow}, \tag{1.1}$$

где $a^+_{m,\gamma}$ и $a_{m,\gamma}$ обозначают Ферми-операторы рождения и уничтожения электрона со спином γ в узле m, а суммирование по τ означает суммирование по ближайшим соседям в решетке.

Модель, предложенная в [5, 6, 10], была названа моделью Хаббарда в честь Джона Хаббарда, ученого, внесшего огромный вклад в изучение статистической механики данной системы, хотя локальная форма кулоновского взаимодействия была впервые введена Андерсоном для модели с примесью в металле [4]. Также следует напомнить, что модель Хаббарда представляет собой частный случай полярной модели Шубина—Вонсовского [13], которая была описана еще за 30 лет до появления работ [5,6,10]. В модели Шубина—Вонсовского наряду с кулоновским взаимодействием на одном узле рассматривается взаимодействие электронов на соседних узлах.

Модель Хаббарда является приближением, используемым в физике твердого тела для описания перехода из проводящего состояния в диэлектрическое. Она представляет собой простейшую модель, которая описывает взаимодействие элементарных частиц в решетке. Ее гамильтониан состоит лишь из двух слагаемых: кинетическое, отвечающее за туннелирование (перескок) частиц между узлами решетки, и слагаемое, отвечающее за внутриузловое взаимодействие. Частицы могут быть как фермионами (как в оригинальной работе Хаббарда), так и бозонами. Простота и достаточность гамильтониана Хаббарда сделали данную модели довольно популярной и эффективной для описания сильно коррелированных электронных систем.

Модель Хаббарда хорошо описывает поведение частиц в периодическом потенциале при достаточно низких температурах таких, что все частицы будет находиться в нижней энергетической зоне Блоха, а дальними взаимодействиями можно будет пренебречь. Если учитывается взаимодействие между частицами на различных узлах, такая модель называется расширенной моделью Хаббарда. Она была предложена для описания электронов в твердых телах, и до сих пор представляет немалый интерес при изучении высокотемпературной суперпроводимости. Позднее расширенной модели Хаббарда было найдено применение и при изучении поведения ультрахолодных атомов в оптических решетках.

При рассмотрении электронов в твердых телах модель Хаббарда можно считать усовершенствованной версией модели сильно связанных электронов, которая учитывает только слагаемое из гамильтониана, отвечающее за перескок. В случае сильных взаимодействий эти две модели могут давать существенно отличающиеся результаты. Модель Хаббарда способна точно предсказать существование так называемых изоляторов Мотта, в которых в силу сильного отталкивания между частицами отсутствует проводимость.

Модель Хаббарда в настоящее время является одной из наиболее активно изучаемых мультиэлектронных моделей металлов [1,2,11,12,15]. Однако точных результатов для спектра и волновых функций кристалла, описываемого моделью Хаббарда, по-прежнему крайне мало, следовательно, получение соответствующих утверждений представляет большой интерес. Спектр и волновые функции системы двух электронов в кристалле, описываемом гамильтонианом Хаббарда, были изучены в [2]. Известно, что двухэлектронные системы могут находиться в двух различных состояниях — триплетном и синглетном [1, 2, 11, 12, 15]. В работе [2] было доказано, что спектр гамильтониана H^t системы в триплетном состоянии чисто непрерывен и совпадает с отрезком $[m, M]$, а у оператора H^s системы в синглетном состоянии, кроме непрерывного спектра $[m, M]$, существует единственное антисвязанное состояние при некоторых значениях квазиимпульса. Для антисвязанного состояния реализуется такое коррелированное движение электронов, при котором велик вклад двоичных состояний. При этом в силу замкнутости системы энергия должна оставаться постоянной и большой. Это вынуждает электроны не расходиться на большие расстояния. Далее, существенным является то обстоятельство, что связанные состояния (их иногда называют состояниями типа рассеяния) ниже непрерывного спектра не формируются. Это вполне понятно, так как взаимодействие имеет характер отталкивания. Заметим, что при $U < 0$ верна обратная ситуация: ниже непрерывного спектра имеется связанное состояние (антисвязанные состояния отсутствуют), поскольку в этом случае электроны притягиваются друг к другу.

Для первой зоны спектр не зависит от параметра U внутриузлового кулоновского взаимодействия двух электронов и соответствует энергии двух невзаимодействующих электронов, в точности совпадая с триплетной зоной. Вторая зона определяется кулоновским взаимодействием в гораздо большей степени: от U зависят как амплитуды, так и энергия двух электронов, причем сама зона исчезает при $U \to 0$, а при $U \to \infty$ неограниченно возрастает. Вторая зона в основном соответствует одночастичному состоянию, а именно движению двойки, т. е. двухэлектронным связанным состояниям.

Спектр и волновые функции системы трех электронов в кристалле, описываемом гамильтонианом Хаббарда, были изучены в [3]. В трехэлектронных системах существуют квартетное состояние и дублетные состояния двух типов. В работе [3] было доказано, что существенный спектр системы в квартетном состоянии состоит из одного отрезка, а трехэлектронное связанное состояние отсутствует. Также было показано, что существенный спектр системы в дублетных состояниях является объединением не более чем трех отрезков, а в дублетных состояниях присутствуют трехэлектронные связанные состояния. При этом спектры таких дублетных состояний различны.

2. Оператор энергии в трехэлектронных системах с примесью в модели Хаббарда. Второе дублетное состояние

Здесь мы рассмотрим оператор энергии в трехэлектронных системах с примесью в модели Хаббарда и опишем структуру существенного и дискретного спектров системы для второго дублетного состояния. Гамильтониан выбранной модели имеет вид

$$H = A\sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_m a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow} + (A_0 - A)\sum_\gamma a^+_{0,\gamma}a_{0,\gamma}+$$
$$+(B_0 - B)\sum_{\tau,\gamma}(a^+_{0,\gamma}a_{\tau,\gamma} + a^+_{\tau,\gamma}a_{0,\gamma}) + (U_0 - U)a^+_{0,\uparrow}a_{0,\uparrow}a^+_{0,\downarrow}a_{0,\downarrow}. \tag{2.1}$$

Здесь A (A_0) — это энергия электрона на регулярном (примесном) узле решетки, B (B_0) — интеграл перехода между электронами (между электроном и примесями) на соседних узлах (для удобства предположим, что $B > 0$ $(B_0 > 0)$), $\tau = \pm e_j, j = 1, 2, \ldots, \nu$, где e_j — единичные взаимно ортогональные векторы, что означает, что суммирование ведется по ближайшим соседям, U (U_0) — параметр внутриузлового кулоновского взаимодействия двух электронов на регулярных (примесных) узлах, γ — спиновый индекс, $\gamma =\uparrow$ либо $\gamma =\downarrow$, где $\uparrow$ или $\downarrow$ обозначают значения спина $\frac{1}{2}$ или $-\frac{1}{2}$, а $a^+_{m,\gamma}$ и $a_{m,\gamma}$ — это операторы рождения и уничтожения электрона в узле $m \in Z^\nu$, соответственно.

Энергия системы зависит от значения полного спина S. В трехэлектронных системах существуют квартетное состояние и два дублетных.

Равно как и гамильтониан, N_e электронная система характеризуется полным спином S, $S = S_{max}, S_{max} - 1, \ldots, S_{min}, S_{max} = \frac{N_e}{2}, S_{min} = 0, \frac{1}{2}$.

Гамильтониан (2.1) коммутирует со всеми компонентами полного спина оператора $S = (S^+, S^-, S^z)$, и следовательно, структура собственных функций и собственных значений системы зависит от S.

Второе дублетное состояние соответствует трехэлектронным связанным состояниям с базисными функциями: ${}^2d^{1/2}_{p,q,t} = a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\uparrow}a^+_{t,\downarrow}\varphi_0$.

Подпространство ${}^2E^d_{1/2}$, отвечающее второму дублетному состоянию, является множеством всех векторов вида $\psi = \sum\limits_{p,q,t\in Z^\nu} \widetilde{f}(p,q,t){}^2d^{1/2}_{p,q,t}$, $\widetilde{f} \in l^{as}_2$, где l^{as}_2 — это подпространство антисимметричных функций в пространстве $l_2((Z^\nu)^3)$.

В данном случае гамильтониан H действует в антисимметричном пространстве Фока E_{as}. Пусть φ_0 — это вакуумный вектор в антисимметричном пространстве Фока E_{as}. Второе дублетное состояние соответствует свободному движению трех электронов по решетке и их взаимодействию.

Обозначим через ${}^2H^d_{1/2}$ сужение оператора H на пространство ${}^2E^d_{1/2}$.

Теорема 2.1. *Подпространство ${}^2E^d_{1/2}$ инвариантно относительно оператора H, а оператор ${}^2H^d_{1/2}$ является ограниченным самосопряженным. Он порождает замкнутый самосопряженный оператор ${}^2\overline{H}^d_{1/2}$, действующий в пространстве l^{as}_2 следующим образом*:

$${}^2\overline{H}^d_{1/2}\psi = 3Af(p,q,t) + B\sum_\tau[f(p+\tau,q,t) + f(p,q+\tau,t) + f(p,q,t+\tau)] + U(\delta_{p,t} + \delta_{q,t})\times$$
$$\times f(p,q,t) + (A_0 - A)[\delta_{p,0}f(p,q,t) + \delta_{q,0}f(p,q,t) + \delta_{t,0}f(p,q,t)] + (B_0 - B)\sum_\tau[\delta_{p,0}f(\tau,q,t)+$$
$$+\delta_{q,0}f(p,\tau,t) + \delta_{t,0}f(p,q,\tau) + \delta_{p,\tau}f(0,q,t) + \delta_{q,\tau}f(p,0,t) + \delta_{t,\tau}f(p,q,0)]+$$
$$+(U_0 - U)(\delta_{p,0}\delta_{t,0} + \delta_{q,0}\delta_{t,0})f(p,q,t), \tag{2.2}$$

где $\delta_{k,j}$ — это символ Кронекера. Оператор ${}^2H^d_{1/2}$ действует на вектор $\psi \in^2 E^d_{1/2}$ по формуле

$${}^2H^d_{1/2}\psi = \sum_{p,q,t}({}^2\overline{H}^d_{1/2}f)(p,q,t){}^2d^{1/2}_{p,q,t}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Применим гамильтониан H к векторам $\psi \in^2 E^d_{1/2}$, используя стандартные антикоммутационные соотношения между операторами рождения и уничтожения электронов в узлах решетки, $\{a_{m,\gamma}, a^+_{n,\beta}\} = \delta_{m,n}\delta_{\gamma,\beta}$, $\{a_{m,\gamma}, a_{n,\beta}\} = \{a^+_{m,\gamma}, a^+_{n,\beta}\} = \theta$, также учитывая, что $a_{m,\gamma}\varphi_0 = \theta$, где θ — это нулевой элемент пространства ${}^2E^d_{1/2}$. Отсюда получаем утверждение теоремы. $\square$

Обозначим $\varepsilon_1 = A_0 - A$, $\varepsilon_2 = B_0 - B$ и $\varepsilon_3 = U_0 - U$.

Лемма 2.1. *Спектры операторов* ${}^2H^d_{1/2}$ *и* ${}^2\overline{H}^d_{1/2}$ *совпадают.*

Доказательство. В силу того, что ${}^2H^d_{1/2}$ и ${}^2\overline{H}^d_{1/2}$ являются ограниченными самосопряженными операторами, имеем, что если $\lambda \in \sigma({}^2H^d_{1/2})$, то из критерия Вейля (см. [14, ч. VII, п. 3, с. 262-263]) вытекает, что существует такая последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $||\psi_n|| = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} ||({}^2H^d_{1/2} - \lambda)\psi_n|| = 0$. Положим $\psi_n = \frac{1}{\sqrt{1-\delta_{p,q}}} \sum\limits_{p,q,t} a^+_{p,\uparrow} a^+_{q,\uparrow} a^+_{t,\downarrow} \varphi_0$. Тогда

$$||({}^2H^d_{1/2} - \lambda)\psi_n||^2 = (({}^2H^d_{1/2} - \lambda)\psi_n, ({}^2H^d_{1/2} - \lambda)\psi_n) = \sum_{p,q,t} ||({}^2\overline{H}^d_{1/2} - \lambda) f_n(p,q,t)||^2 \times$$

$$\times (\frac{1}{\sqrt{1-\delta_{p,q}}} a^+_{p,\uparrow} a^+_{q,\uparrow} a^+_{t,\downarrow}\varphi_0, \frac{1}{\sqrt{1-\delta_{p,q}}} a^+_{p,\uparrow} a^+_{q,\uparrow} a^+_{t,\downarrow}\varphi_0) = \sum_{p,q,t} ||({}^2\overline{H}^d_{1/2} - \lambda) F_n(p,q,t)||^2 \times$$

$$\times (\frac{1}{1-\delta_{p,q}} a_{t,\downarrow} a_{q,\uparrow} a_{p,\uparrow} a^+_{p,\uparrow} a^+_{q,\uparrow} a^+_{t,\downarrow}\varphi_0, \varphi_0) = \sum_{p,q,t} ||({}^2\overline{H}^d_{1/2} - \lambda) F_n(p,q,t)||^2 \times$$

$\times (\frac{1}{1-\delta_{p,q}} \times (1-\delta_{p,q})\varphi_0, \varphi_0) = \sum\limits_{p,q,t} ||({}^2\overline{H}^d_{1/2} - \lambda) F_n(p,q,t)||^2 \to 0$ при $n \to \infty$, где $F_n = \sum\limits_{p,q,t} f_n(p,q,t)$. Отсюда следует, что $\lambda \in \sigma({}^2\overline{H}^d_{1/2})$. Следовательно, $\sigma({}^2H^d_{1/2}) \subset \sigma({}^2\overline{H}^d_{1/2})$. И напротив, положим $\overline{\lambda} \in \sigma({}^2\overline{H}^d_{1/2})$. Тогда, исходя из критерия Вейля, существует последовательность $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $||F_n = 1||$ и $\lim\limits_{n\to\infty} ||({}^2\overline{H}^d_{1/2} - \overline{\lambda})\psi_n|| = 0$. Положив $F_n = \sum\limits_{p,q,t} f_n(p,q,t)$, $||F_n = (\sum\limits_{p,q,t} |f_n(p,q,t)|^2)^{\frac{1}{2}}$, мы вправе заключить, что $||\psi_n|| = ||\psi_n|| = 1$ и $||({}^2\overline{H}^d_{1/2} - \overline{\lambda})F_n|| = ||({}^2\overline{H}^d_{1/2} - \overline{\lambda})\psi_n|| \to 0$ при $n \to \infty$. Это означает, что $\overline{\lambda} \in \sigma({}^2H^d_{1/2})$, и следовательно, $\sigma({}^2\overline{H}^d_{1/2}) \subset \sigma({}^2H^d_{1/2})$. Из этих двух соотношений вытекает, что $\sigma({}^2H^d_{1/2}) = \sigma({}^2\overline{H}^d_{1/2})$. □

Назовем оператор ${}^2\overline{H}^d_{1/2}$ *оператором второго дублетного состояния* трехэлектронной системы.

Пусть F обозначает преобразование Фурье: $F : l_2((Z^\nu)^3) \to L_2((T^\nu)^3) \equiv^2 \widetilde{E}^d_{1/2}$, где T^ν — это ν-мерный тор, снабженный нормированной мерой Лебега $d\lambda$, $\lambda(T^\nu) = 1$.

Положим ${}^2\widetilde{H}^d_{1/2} = F^2\overline{H}^d_{1/2}F^{-1}$. В квазиимпульсном представлении оператор ${}^2\overline{H}^d_{1/2}$ действует в гильбертовом пространстве $L_2^{as}((T^\nu)^3)$, где L_2^{as} — подпространство антисимметричных функций из $L_2((T^\nu)^3)$.

Теорема 2.2. *Преобразование Фурье оператора* ${}^2\overline{H}^d_{1/2}$ *есть оператор* ${}^2\widetilde{H}^d_{1/2} = F^2\overline{H}^d_{1/2}F^{-1}$, *действующий в пространстве* ${}^2\widetilde{E}^d_{1/2}$ *по формуле*

$$({}^2\widetilde{H}^d_{1/2}\widetilde{f})(\lambda,\mu,\gamma) = \{3A + 2B\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\lambda_i + \cos\mu_i + \cos\gamma_i]\}\widetilde{f}(\lambda,\mu,\gamma) +$$

$$+U\int\limits_{T^\nu} \widetilde{f}(s,\mu,\lambda+\gamma-s)ds + U\int\limits_{T^\nu} \widetilde{f}(\lambda,s,\mu+\gamma-s)ds + \varepsilon_1\int\limits_{T^\nu} \widetilde{f}(s,\mu,\gamma)ds +$$

$$+\varepsilon_1\int\limits_{T^\nu} \widetilde{f}(\lambda,s,\gamma)ds + \varepsilon_1\int\limits_{T^\nu} \widetilde{f}(\lambda,\mu,s)ds + 2\varepsilon_2\int\limits_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos s_i + \cos\lambda_i] \times$$

$$\times\widetilde{f}(s,\mu,\gamma)ds + 2\varepsilon_2\int\limits_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\mu_i + \cos s_i]\widetilde{f}(\lambda,s,\gamma)ds + 2\varepsilon_2\int\limits_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\gamma_i + \cos s_i] \times$$

$$\times\widetilde{f}(\lambda,\mu,s)ds+\varepsilon_3[\int\limits_{T^\nu}\int\limits_{T^\nu}\widetilde{f}(s,r,\gamma)dsdr+\int\limits_{T^\nu}\int\limits_{T^\nu}\widetilde{f}(\lambda,r,l)drdl]. \quad (2.4)$$

Теорема 2.2 доказывается непосредственным преобразованием Фурье к (2.2).

С помощью тензорных произведений гильбертовых пространств и тензорных произведений операторов в гильбертовых пространствах [14] можно убедиться в том, что оператор ${}^2\widetilde{H}^d_{1/2}$ представим в виде

$${}^2\widetilde{H}^d_{1/2}=\widetilde{H}_2\otimes I_1+I_2\otimes\widetilde{H}_1, \quad (2.5)$$

где $(\widetilde{H}_2\widetilde{f})(\lambda,\mu)=\{2A+2B\sum\limits_{i=1}^{\nu}[\cos\lambda_i+\cos\mu_i]\}\widetilde{f}(\lambda,\mu)+\varepsilon_1\int\limits_{T^\nu}\widetilde{f}(s,\mu)ds+\varepsilon_1\int\limits_{T^\nu}\widetilde{f}(\lambda,t)dt+$

$$+2\varepsilon_2\int\limits_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\lambda_i+\cos s_i]\widetilde{f}(s,\mu)ds+2\varepsilon_2\int\limits_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\mu_i+\cos t_i]\widetilde{f}(\lambda,t)dt+$$

$$+\varepsilon_3\int\limits_{T^\nu}\int\limits_{T^\nu}\widetilde{f}(s,t)dsdt+\varepsilon_3\int\limits_{T^\nu}\int\limits_{T^\nu}\widetilde{f}(t,\xi)dtd\xi,$$

и $(\widetilde{H}_1\widetilde{f})(\lambda)=\{A+2B\sum\limits_{i=1}^{\nu}\cos\gamma_i\}\widetilde{f}(\gamma)+\varepsilon_1\int\limits_{T^\nu}\widetilde{f}(\xi)d\xi+2\varepsilon_2\int\limits_{T^\nu}\sum\limits_{i=1}^{\nu}[\cos\gamma_i+\cos\xi_i]\widetilde{f}(\xi)d\xi$, а I_1 и I_2 — это тождественные операторы в соответствующих пространствах.

Для исследования спектра оператора ${}^2\widetilde{H}^d_{1/2}$ нам необходимо изучить спектры операторов $\widetilde{H}_2$ и $\widetilde{H}_1$.

Действительно, оператор $\widetilde{H}_2$ может быть представлен как

$$\widetilde{H}_2=\widetilde{H}_1\otimes I+I\otimes\widetilde{H}_1+K, \quad (2.6)$$

где $(K\widetilde{f})(\lambda,\mu)=2\varepsilon_3\int\limits_{T^\nu}\int\limits_{T^\nu}f(s,t)dsdt$ — оператор конечного ранга (т. е. конечномерный оператор). Ранг оператора K равен единице. Следовательно, существенные спектры операторов $\widetilde{H}_2$ и $\widetilde{H}_1\otimes I+I\otimes\widetilde{H}_1$ совпадают.

Спектр оператора $A\otimes I+I\otimes B$, где A и B — плотно определенные ограниченные линейные операторы, был изучен в [7–9]. Там были даны явные формулы, выражающие существенный спектр $\sigma_{ess}(A\otimes I+I\otimes B)$ и дискретный спектр $\sigma_{disc}(A\otimes I+I\otimes B)$ оператора $A\otimes I+I\otimes B$ через спектр $\sigma(A)$ и дискретный спектр $\sigma_{disc}(A)$ оператора A и через спектр $\sigma(B)$ и дискретный спектр $\sigma_{disc}(B)$ оператора B:

$$\sigma_{disc}(A\otimes I+I\otimes B)=\{\sigma(A)\backslash\sigma_{ess}(A)+\sigma(B)\backslash\sigma_{ess}(B)\}\backslash\{(\sigma_{ess}(A)+$$
$$+\sigma(B))\cup(\sigma(A)+\sigma_{ess}(B))\}, \quad (2.7)$$

$$\sigma_{ess}(A\otimes I+I\otimes B)=(\sigma_{ess}(A)+\sigma(B))\cup(\sigma(A)+\sigma_{ess}(B)). \quad (2.8)$$

Очевидно, что $\sigma(A\otimes I+I\otimes B)=\{\lambda+\mu:\lambda\in\sigma(A),\mu\in\sigma(B)\}$.

Тем самым мы провели необходимое исследование спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

3. Спектр и локальные примесные состояния оператора энергии для одноэлектронных систем с примесью в модели Хаббарда

Гамильтониан одно-магнонной примесной системы также имеет вид (2.1). Пусть E_1 обозначает гильбертово пространство, порожденное векторами вида: $\Psi=\sum\limits_p a^+_{p,\uparrow}\varphi_0$. Такое пространство называется *пространством одноэлектронных состояний* оператора H. Пространство E_1 инвариантно относительно оператора H. Пусть H_1 — сужение оператора H на пространство E_1.

Теорема 3.1. *Подпространство E_1 инвариантно относительно оператора H, а оператор H_1 является ограниченным самосопряженным. Он порождает ограниченный самосопряженный оператор $\overline{H}_1$, действующий в пространстве l_2 по формуле*

$$(\overline{H}_1f)(p)=Af(p)+B\sum_\tau f(p+\tau)+\varepsilon_1\delta_{p,0}f(p)+\varepsilon_2\sum_\tau(\delta_{p,\tau}f(0)+\delta_{p,0}f(\tau)), \quad (3.1)$$

где $\delta_{k,j}$ — символ Кронекера. Оператор H_1 действует на вектор $\psi \in E_1$ следующим образом:

$$H_1\psi = \sum_p (\overline{H}_1 f)(p) a^+_{p,\uparrow}\varphi_0. \tag{3.2}$$

Доказательство. Применим гамильтониан H к векторам $\psi \in E_1$, используя стандартные антикоммутационные соотношения между операторами рождения и уничтожения электронов в узлах решетки, также учитывая, что $a_{m,\gamma}\varphi_0 = \theta$, где θ — это нулевой элемент пространства E_1. Отсюда получаем утверждение теоремы. □

Лемма 3.1. *Спектры операторов $\overline{H}_1$ и H_1 совпадают.*

Обозначим через F преобразование Фурье: $F : l_2(Z^\nu)) \to L_2(T^\nu) \equiv \widetilde{E}_1$, где T^ν — это ν-мерный тор, снабженный нормированной мерой Лебега $d\lambda$, $\lambda(T^\nu) = 1$.

Положим $\widetilde{H}_1 = F\overline{H}_1F^{-1}$. В квазиимпульсном представлении оператор $\overline{H}_1$ действует в гильбертовом пространстве $L_2(T^\nu)$.

Теорема 3.2. *Преобразование Фурье оператора $\overline{H}_1$ есть оператор $\widetilde{H}_1 = F\overline{H}_1F^{-1}$, действующий в пространстве $\widetilde{E}_1$ по формуле*

$$(\widetilde{H}_1 f)(\lambda) = [A + 2B\sum_{i=1}^{\nu}\cos\lambda_i]f(\lambda) + \varepsilon_1\int\limits_{T^\nu} f(s)ds + 2\varepsilon_2\int\limits_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\lambda_i + \cos s_i]f(s)ds. \tag{3.3}$$

Очевидно, что непрерывный спектр оператора $\widetilde{H}_1$ не зависит от ε_1 и ε_2 и заполняет весь замкнутый интервал $G_\nu = [m_\nu, M_\nu] = [A - 2B\nu, A + 2B\nu]$, где $m_\nu = \min\limits_{x\in T^\nu} h(x)$, $M_\nu = \max\limits_{x\in T^\nu} h(x)$, а $h(x) = A + 2B\sum\limits_{i=1}^{\nu}\cos x_i$.

Положим $\Delta_\nu(z) = a(1 + \nu d) - \nu bc$, где $a = 1 + \int\limits_{T^\nu}\frac{p(s)}{h(s) - z}ds$, $b = 2\varepsilon_2\int\limits_{T^\nu}\frac{1}{h(s) - z}ds$, $c = \int\limits_{T^\nu}\frac{p(s)q(s_i)}{h(s) - z}ds$, $d = 2\varepsilon_2\int\limits_{T^\nu}\frac{q(s_i)}{h(s) - z}ds$, а $h(s) = A + 2B\sum\limits_{i=1}^{\nu}\cos s_i$, $p(s) = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2\sum\limits_{i=1}^{\nu}\cos s_i$ и $q(s_i) = \cos s_i$.

Лемма 3.2. *Величина $z_0 \notin G_\nu$ является собственным значением оператора $\widetilde{H}_1$ тогда и только тогда, когда она является нулем функции $\Delta_\nu(z)$, т. е. $\Delta_\nu(z_0) = 0$.*

Доказательство. В рассматриваемом случае уравнение для собственных значений представляет собой интегральное уравнение с вырожденным ядром. Следовательно, оно эквивалентно системе линейных однородных уравнений. Как известно, система линейных однородных алгебраических уравнений имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель этой системы равен нулю, а в данном случае определитель есть функция $\Delta_\nu(z)$. □

Теорема 3.3. *Пусть $\nu = 1$. Тогда:*

A) *Если $\varepsilon_1 \geqslant -2B$ и $\varepsilon_2 = -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $\varepsilon_1 \geqslant -2B$ и $\varepsilon_2 = -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $\varepsilon_1 \leqslant 2B$ и $\varepsilon_2 = -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $\varepsilon_1 \leqslant 2B$ и $\varepsilon_2 = -B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, то оператор $\widetilde{H}_1$ не имеет собственных значений вне непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.*

B) *Если $\varepsilon_1 > 0$ и $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, или $\varepsilon_1 > 0$ и $0 < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $-2B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ и $-2B < \varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $-2B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ и $-B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < 0$, то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет только одно собственное значение $z = z_1$ ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.*

C) *Если* $\varepsilon_1 < 0$ *и* $0 < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $\varepsilon_1 < 0$ *и* $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, *или* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $-2B < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $-B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < 0$, *то оператор* $\widetilde{H}_1$ *имеет только одно собственное значение* $z = z_2$ *выше непрерывного спектра оператора* $\widetilde{H}_1$.

D) *Если* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $\varepsilon_2 > -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $\varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, *или* $-2B \leqslant \varepsilon_1, 0$ *и* $\varepsilon_2 > -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $-2B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $\varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $-2B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $-2B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, *то оператор* $\widetilde{H}_1$ *имеет два собственных значения* $z = z_1$ *и* $z = z_2$ *ниже и выше непрерывного спектра оператора* $\widetilde{H}_1$, *соответственно.*

Доказательство. Пусть $\nu = 1$. В таком случае непрерывный спектр оператора $\widetilde{H}_1$ совпадает с отрезком $[A - 2B, A + 2B]$. Выражая все интегралы в уравнении $\Delta_\nu(z) = 0$ через интеграл $J(z) = \int\limits_{T^\nu} \frac{ds}{A + 2B\cos s - z}$, находим, что уравнение $\Delta_\nu(z) = 0$ эквивалентно уравнению

$$\{\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)\}J(z) + (B + \varepsilon_2)^2 = 0. \tag{3.4}$$

Так как функция $J(z) = \int\limits_{T^\nu} \frac{ds}{A + 2B\cos s - z}$ является непрерывной при $z \notin G_\nu$, а $[J(z)]' = \int\limits_{T^\nu} \frac{ds}{[A + 2B\cos s - z]^2} > 0$, функция $J(z)$ возрастает как функция от z при $z \notin G_\nu$. Более того, $J(z) \to 0$ при $z \to -\infty$, $J(z) \to +\infty$ при $z \to m_1 - 0$, $J(z) \to -\infty$ при $z \to M_1 + 0$ и $J(z) \to 0$ при $z \to +\infty$. Из $\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A) \neq 0$, т. е. из $z \neq A - \frac{\varepsilon_1 B^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$, получаем выражение следующего вида:

$$J(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)}. \tag{3.5}$$

Обозначим $\psi(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)}$. Функция $\psi(z)$ имеет полюс $z_0 = A - \frac{B^2\varepsilon_1}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$.

Если $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 < -2B$, то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет только одно собственное значение $z = A + \varepsilon_1$, лежащее ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. Если $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 > 2B$, то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет только одно собственное значение $z = A + \varepsilon_1$, лежащее выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

Функция $\Psi(z)$ является монотонно возрастающей, так как $\psi'(z) = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{[\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)]^2} > 0$, а $\psi(z) \to +0$ при $z \to -\infty$, $\psi(z) \to +\infty$ при $z \to z_0 - 0$, $\psi(z) \to -\infty$ при $z \to z_0 + 0$ и $\psi(z) \to -0$ при $z \to +\infty$.

Если полюс функции $\psi(z)$ совпадает с нижней границей непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, т. е. $z_0 = m_1$, то при условии, что $\varepsilon_1 \geqslant -2B$ и $\varepsilon_2 = -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$ или $\varepsilon_1 \geqslant -2B$ и $\varepsilon_2 = -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, оператор $\widetilde{H}_1$ не будет иметь собственных значений вне непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

Аналогично, если полюс функции $\psi(z)$ совпадает с верхней границей непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, т. е. $z_0 = M_1$, то при условии, что $\varepsilon_1 \leqslant 2B$ и $\varepsilon_2 = -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$ или $\varepsilon_1 \leqslant 2B$ и $\varepsilon_2 = -B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, оператор $\widetilde{H}_1$ не будет иметь собственных значений вне непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

Если полюс функции $\psi(z)$ лежит ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, т. е. $z_0 < m_1$, то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет только одно собственное значение $z_1 < m_1$, лежащее ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. Если полюс функции $\psi(z)$ лежит выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, т. е. $z_0 > M_1$, то оператор имеет только одно собственное значение $z_2 > M_1$, лежащее выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

Если полюс функции $\Psi(z)$ находится внутри непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, т. е. $m_1 < z_0 < M_1$, то оператор имеет два собственных значения $z_1 < m_1$ и $z_2 > M_1$, лежащих ниже и выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, соответственно.

Из $z_0 < m_1$ найдем условия существования единственного собственного значения оператора $\widetilde{H}_1$, лежащего ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. Этими условиями являются: $\varepsilon_1 > 0$ и $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, или $\varepsilon_1 > 0$ и $0 < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $-2B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ и $-B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < 0$, или $-2B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ и $-2B < \varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$.

Из $z_0 > M_1$ найдем условия существования единственного собственного значения оператора $\widetilde{H}_1$, лежащего выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. Этими условиями являются: $\varepsilon_1 < 0$ и $0 < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $\varepsilon_1 < 0$ и $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, или $0 < \varepsilon_1 < 2B$ и $-2B < \varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $0 < \varepsilon_1 < 2B$ и $-B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < 0$.

Из $m_1 < z_0 < M_1$ найдем условия существования двух собственных значений оператора $\widetilde{H}_1$, лежащих ниже и выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, соответственно. Этими условиями являются: $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ и $\varepsilon_2 > -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $-2B < \varepsilon_1 \leqslant 0$ и $\varepsilon_2 > -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ и $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, или $-2B < \varepsilon_1 \leqslant 0$ и $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, или $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ и $\varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $-2B < \varepsilon_1 \leqslant 0$ и $\varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $-2B < \varepsilon_1 \leqslant 0$ и $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ и $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$.

Следовательно, если

a) $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ и $\varepsilon_2 > -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $\varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, или $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$,

b) $-2B < \varepsilon_1 \leqslant 0$ и $\varepsilon_2 > -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $\varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, или $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет два собственных значения $z_1 < m_1$ и $z_2 > M_1$. □

Теперь рассмотрим двухмерный случай. В двухмерном случае также будем иметь, что уравнение $\Delta_2(z) = 0$ эквивалентно уравнению вида (3.4), а именно $J(z) = \int\limits_{T^2} \frac{ds_1 ds_2}{A + 2B(\cos s_1 + \cos s_2) - z}$.

Получены результаты, аналогичные одномерному случаю.
Теперь же рассмотрим трехмерный случай.

Теорема 3.4. *Пусть* $\nu = 3$. *Тогда*:

A) *Если* $\varepsilon_1 > 0$ *и* $0 < \varepsilon_2 \leqslant -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, *или* $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $-2B < \varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $-B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < 0$, *то оператор* $\widetilde{H}_1$ *имеет только одно собственное значение* z_1 *ниже непрерывного спектра оператора* $\widetilde{H}_1$.

B) *Если* $\varepsilon_1 < 0$ *и* $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, *или* $\varepsilon_1 < 0$ *и* $0 < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 < 6B$ *и* $-2B < \varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 < 6B$ *и* $-B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < 0$, *то оператор* $\widetilde{H}_1$ *имеет только одно собственное значение* z_2 *выше непрерывного спектра оператора* $\widetilde{H}_1$.

C) *Если* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 6B$ *и* $\varepsilon_2 > -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $\varepsilon_2 > -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 6B$ *и* $\varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $\varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 6B$ *и* $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $-6B \leqslant \varepsilon_2 < 0$ *и* $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *то оператор* $\widetilde{H}_1$ *имеет два собственных значения* z_1 *и* z_2 *ниже и выше непрерывного спектра оператора* $\widetilde{H}_1$, *соответственно.*

Доказательство. В трехмерном случае также имеем уравнение вида $(\varepsilon_2 + B)^2 + \{\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)\}J(z) = 0$, где $J(z) = \int\limits_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{A + 2B(\cos s_1 + \cos s_2 + \cos s_3) - z}$.

В трехмерном случае интеграл $\int\limits_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{3 + \cos s_1 + \cos s_2 + \cos s_2} = \int\limits_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{3 - \cos s_1 - \cos s_2 - \cos s_2}$ конечен. Выражая этот интеграл через интеграл Уотсона W, будем иметь, что $J(z) = \frac{W}{3}$.

Тогда $J(z) \to +0$ при $z \to -\infty$, $J(z) = \frac{W}{3}$ при $z = A - 6B$, $J(z) \to -0$ при $z \to +\infty$ и $J(z) = -\frac{W}{3}$ при $z = A + 6B$.

Функция $\psi(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)}$ имеет полюс $z_0 = A - \frac{B^2\varepsilon_1}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$.

Если $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 < -2B$, то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет только одно собственное значение $z = A + \varepsilon_1$, лежащее ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. Если $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 > 2B$, то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет только одно собственное значение $z = A + \varepsilon_1$, лежащее выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

Функция $\Psi(z)$ также является монотонно возрастающей, т. к. $\psi'(z) = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{[\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)]^2} > 0$, а $\psi(z) \to +0$ при $z \to -\infty$, $\psi(z) \to +\infty$ при $z \to z_0 - 0$, $\psi(z) \to -\infty$ при $z \to z_0 + 0$ и $\psi(z) \to -0$ при $z \to +\infty$.

Если $\varepsilon_1 > 0$ и $0 < \varepsilon_2 \leqslant -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, или $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ и $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, или $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ и $-2B < \varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, или $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ и $-B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1} <$

$\varepsilon_2 < 0$, то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет только одно собственное значение z_1 ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

Если $\varepsilon_1 < 0$ и $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, или $\varepsilon_1 < 0$ и $0 < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, или $0 < \varepsilon_1 < 6B$ и $-2B < \varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, или $0 < \varepsilon_1 < 6B$ и $-B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < 0$, то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет только одно собственное значение z_2 выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

Если $0 < \varepsilon_1 \leqslant 6B$ и $\varepsilon_2 > -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, или $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ и $\varepsilon_2 > -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, или $0 < \varepsilon_1 \leqslant 6B$ и $\varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, или $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ и $\varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, или $0 < \varepsilon_1 \leqslant 6B$ и $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, или $-6B \leqslant \varepsilon_2 < 0$ и $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет два собственных значения z_1 и z_2 ниже и выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, соответственно. $\square$

Из полученных результатов видно, что спектр оператора $\widetilde{H}_1$ состоит из непрерывного спектра и максимум двух собственных значений.

4. Структура существенного и дискретного спектров оператора $\widetilde{H}_2$

Теперь, используя полученные ранее результаты и представление (2.6), мы можем приступить к описанию структуры существенного и дискретного спектров оператора $\widetilde{H}_2$.

Следующие теоремы описывают структуру существенного и дискретного спектров оператора $\widetilde{H}_2$.

Теорема 4.1. *Пусть* $\nu = 1$. *Тогда*:

A) *Если* $\varepsilon_1 \geqslant -2B$ *и* $\varepsilon_2 = -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $\varepsilon_1 \geqslant -2B$ *и* $\varepsilon_2 = -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $\varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $\varepsilon_2 = -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $\varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $\varepsilon_2 = -B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *то существенный спектр оператора* $\widetilde{H}_2$ *состоит из одного интервала* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2) = [2A - 4B, 2A + 4B]$, *а дискретный — не более чем из одной точки* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2) = \{z_3\}$.

B) *Если* $\varepsilon_1 > 0$ *и* $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, *или* $\varepsilon_1 > 0$ *и* $0 < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $-2B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $-2B < \varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $-2B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $-B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < 0$, *то существенный спектр оператора* $\widetilde{H}_2$ *состоит из объединения двух интервалов* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2) = [2A - 4B, 2A + 4B] \cup [A - 2B + z_1, A + 2B + z_1]$, *а дискретный — не более чем из двух точек* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2) = \{2z_1, z_3\}$.

C) *Если* $\varepsilon_1 < 0$ *и* $0 < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $\varepsilon_1 < 0$ *и* $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, *или* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $-2B < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $-B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < 0$, *то существенный спектр оператора* $\widetilde{H}_2$ *состоит из объединения двух интервалов* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2) = [2A - 4B, 2A + 4B] \cup [A - 2B + z_2, A + 2B + z_2]$, *а дискретный — не более чем из двух точек* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2) = \{2z_2, z_3\}$.

D) *Если* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $\varepsilon_2 > -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $\varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$

и $-B-\sqrt{B^2+\frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, *или* $-2B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $\varepsilon_2 > -B+\sqrt{B^2-\frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $-2B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $\varepsilon_2 < -B-\sqrt{B^2-\frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $-2B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $-B-\sqrt{B^2-\frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B+\sqrt{B^2-\frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $-B-\sqrt{B^2-\frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, *то существенный спектр оператора* $\widetilde{H}_2$ *состоит из объединения трех интервалов* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2) = [2A-4B, 2A+4B] \cup [A-2B+z_1, A+2B+z_1] \cup [A-2B+z_2, A+2B+z_2]$, *а дискретный — не более чем из четырех точек* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2) = \{2z_1, 2z_2, z_1+z_2, z_3\}$.

Доказательство. A) Как следует из представления (2.6), формул (2.7), (2.8) и теоремы 3.3, в одномерном случае непрерывный спектр оператора $\widetilde{H}_1$ — это $\sigma_{cont}(\widetilde{H}_1) = [A-2B, A+2B$, а дискретный спектр пуст. Оператор K является одномерным. Следовательно, существенный спектр оператора $\widetilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \widetilde{H}_1$ и оператора $\widetilde{H}_2$ представляет собой отрезок $[2A-4B, 2A+4B]$. Расширив одномерный оператор K в операторе $\widetilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \widetilde{H}_1$, получим самое большее одно дополнительное собственное значение z_3. Отсюда получаем утверждение A) данной теоремы.

B) В этом случае оператор $\widetilde{H}_1$ имеет одно собственное значение z_1, лежащее ниже непрерывного спектра. Таким образом, существенный спектр оператора $\widetilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \widetilde{H}_1$ состоит из объединения двух интервалов, а дискретный — из одной точки. Отсюда следует утверждение B) данной теоремы. Остальные утверждения получаем аналогичным путем. □

Следующие теоремы описывают структуру существенного и дискретного спектров оператора $\widetilde{H}_2^s$ в трехмерном случае.

Теорема 4.2. *Пусть* $\nu = 3$. *Тогда*:

A) *Если* $\varepsilon_1 > 0$ *и* $0 < \varepsilon_2 \leqslant -B+\sqrt{B^2+\frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $-B-\sqrt{B^2+\frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, *или* $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $-2B < \varepsilon_2 < -B-\sqrt{B^2+\frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $-B+\sqrt{B^2+\frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < 0$, *то существенный спектр оператора* $\widetilde{H}_2$ *состоит из объединения двух интервалов* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2) = [2A-12B, 2A+12B] \cup [A-6B+z_1, A+6B+z_1]$, *а дискретный — не более чем из двух точек* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2) = \{2z_1, z_3\}$.

B) *Если* $\varepsilon_1 < 0$ *и* $-B-\sqrt{B^2-\frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, *или* $\varepsilon_1 < 0$ *и* $0 < \varepsilon_2 < -B+\sqrt{B^2-\frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 < 6B$ *и* $-2B < \varepsilon_2 < -B-\sqrt{B^2-\frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 < 6B$ *и* $-B+\sqrt{B^2-\frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < 0$, *то существенный спектр оператора* $\widetilde{H}_2$ *состоит из объединения двух интервалов* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2) = [2A-12B, 2A+12B] \cup [A-6B+z_2, A+6B+z_2]$, *а дискретный — не более чем из двух точек* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2) = \{2z_2, z_3\}$.

C) *Если* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 6B$ *и* $\varepsilon_2 > -B+\sqrt{B^2+\frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $\varepsilon_2 > -B+\sqrt{B^2-\frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 6B$ *и* $\varepsilon_2 < -B-\sqrt{B^2+\frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $\varepsilon_2 < -B-\sqrt{B^2-\frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 6B$ *и* $-B-\sqrt{B^2-\frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B+\sqrt{B^2-\frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $-6B \leqslant \varepsilon_2 < 0$ *и* $-B-\sqrt{B^2+\frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B+\sqrt{B^2+\frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *то существенный спектр оператора* $\widetilde{H}_2$ *состоит из объединения трех интервалов* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2) = [2A-12B, 2A+12B] \cup [A-6B+z_1, A+6B+z_1] \cup [A-6B+z_2, A+6B+z_2]$, *а дискретный — не более чем из четырех точек* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2) = \{2z_1, 2z_2, z_1+z_2, z_3\}$.

Доказательство. A). Из теоремы 3.4 следует, что для $\nu=3$, $\varepsilon_1>0$ и $0<\varepsilon_2\leqslant -B+\sqrt{B^2+\frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, или $-6B\leqslant\varepsilon_1<0$ и $-B-\sqrt{B^2+\frac{1}{6}B\varepsilon_1}<\varepsilon_2<-2B$, или $-6B\leqslant\varepsilon_1<0$ и $-2B<\varepsilon_2<-B-\sqrt{B^2+\frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, или $-6B\leqslant\varepsilon_1<0$ и $-B+\sqrt{B^2+\frac{1}{6}B\varepsilon_1}<\varepsilon_2<0$, оператор $\widetilde{H}_1$ имеет только одно собственное значение z_1, лежащее ниже непрерывного спектра. Однако непрерывный спектр оператора $\widetilde{H}_1$ состоит из отрезка $[A-6B,A+6B]$, а существенный спектр оператора $\widetilde{H}_2$, следовательно, состоит из объединения отрезков $[2A-12B,2A+12B]$ и $[z_1+A-6B,z_1+A+6B]$, т. е. $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2)=[2A-12B,2A+12B]\cup[A-6B+z_1,A+6B+z_1]$, а точка $2z_1$ является собственным значением этого оператора $\widetilde{H}_1\otimes I+I\otimes\widetilde{H}_1$, и в представлении (2.6) оператор K имеет ранг, равный единице. Таким образом, оператор $\widetilde{H}_2$ имеет не более одного дополнительного собственного значения z_3. Следовательно, оператор $\widetilde{H}_2$ имеет не более двух собственных значений $2z_1$ и z_3.

Остальные утверждения теоремы доказываются аналогично. □

5. Структура существенного и дискретного спектров оператора ${}^2\widetilde{H}^d_{1/2}$

Теперь, зная спектры операторов $\widetilde{H}_2$ и $\widetilde{H}_1$, можно описать существенный и дискретный спектры оператора ${}^2\widetilde{H}^d_{1/2}$.

Теорема 5.1. *Пусть* $\nu=1$. *Тогда*:

A) *Если* $\varepsilon_1\geqslant -2B$ *и* $\varepsilon_2=-B+\sqrt{B^2+\frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $\varepsilon_1\geqslant -2B$ *и* $\varepsilon_2=-B-\sqrt{B^2+\frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $\varepsilon_1\leqslant 2B$ *и* $\varepsilon_2=-B+\sqrt{B^2-\frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $\varepsilon_1\leqslant 2B$ *и* $\varepsilon_2=-B-\sqrt{B^2-\frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *то существенный спектр оператора* ${}^2\widetilde{H}^d_{1/2}$ *состоит из объединения не более чем двух интервалов* $\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}^d_{1/2})=[3A-6B,3A+6B]\cup[2A-4B+z_3,2A+4B+z_3]$, *а дискретный спектр пуст, т. е.* $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}^d_{1/2})=\varnothing$, *где* z_3 — *это собственное значение оператора* $\widetilde{H}_2$.

B) *Если* $\varepsilon_1>0$ *и* $-B-\sqrt{B^2+\frac{1}{2}B\varepsilon_1}<\varepsilon_2<-2B$, *или* $\varepsilon_1>0$ *и* $0<\varepsilon_2<-B+\sqrt{B^2+\frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $-2B\leqslant\varepsilon_1<0$ *и* $-2B<\varepsilon_2<-B-\sqrt{B^2+\frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $-2B\leqslant\varepsilon_1<0$ *и* $-B+\sqrt{B^2+\frac{1}{2}B\varepsilon_1}<\varepsilon_2<0$, *то существенный спектр оператора* ${}^2\widetilde{H}^d_{1/2}$ *состоит из объединения не более чем четырех интервалов* $\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}^d_{1/2})=[3A-6B,3A+6B]\cup[2A-4B+z_1,2A+4B+z_1]\cup[A-2B+z_3,A+2B+z_3]\cup[A-2B+2z_1,A+2B+2z_1]$, *а дискретный — не более чем из двух точек* $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}^d_{1/2})=\{3z_1,z_1+z_3\}$.

C) *Если* $\varepsilon_1<0$ *и* $0<\varepsilon_2<-B+\sqrt{B^2-\frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $\varepsilon_1<0$ *и* $-B-\sqrt{B^2-\frac{1}{2}B\varepsilon_1}<\varepsilon_2<-2B$, *или* $0<\varepsilon_1\leqslant 2B$ *и* $-2B<\varepsilon_2<-B+\sqrt{B^2-\frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $0<\varepsilon_1\leqslant 2B$ *и* $-B+\sqrt{B^2-\frac{1}{2}B\varepsilon_1}<\varepsilon_2<0$, *то существенный спектр оператора* ${}^2\widetilde{H}^d_{1/2}$ *состоит из объединения не более чем четырех интервалов* $\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}^d_{1/2})=[3A-6B,3A+6B]\cup[2A-4B+z_2,2A+4B+z_2]\cup[A-2B+z_3,A+2B+z_3]\cup[A-2B+2z_2,A+2B+2z_2$, *а дискретный — не более чем из двух точек* $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}^d_{1/2})=\{3z_2,z_2+z_3\}$.

D) *Если* $0<\varepsilon_1\leqslant 2B$ *и* $\varepsilon_2>-B+\sqrt{B^2+\frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $0<\varepsilon_1\leqslant 2B$ *и* $\varepsilon_2<-B-\sqrt{B^2+\frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $0<\varepsilon_1\leqslant 2B$ *и* $-B-\sqrt{B^2+\frac{1}{2}B\varepsilon_1}<\varepsilon_2<-B+\sqrt{B^2-\frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $0<\varepsilon_1\leqslant 2B$ *и* $-B-\sqrt{B^2+\frac{1}{2}B\varepsilon_1}<\varepsilon_2<-2B$, *или* $-2B\leqslant\varepsilon_1<0$ *и* $\varepsilon_2>-B+\sqrt{B^2-\frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или*

$-2B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $\varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $-2B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *or* $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, *то существенный спектр оператора* ${}^2\widetilde{H}^d_{1/2}$ *состоит из объединения не более чем семи интервалов* $\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}^d_{1/2}) = [3A-6B, 3A+6B] \cup [2A-4B+z_1, 2A+4B+z_1] \cup [2A-4B+z_2, 2A+4B+z_2] \cup [A-2B+z_3, A+2B+z_3] \cup [A-2B+2z_1, A+2B+2z_1] \cup [A-2B+z_1+z_2, A+2B+z_1+z_2] \cup [A-2B+2z_2, A+2B+2z_2]$, *а дискретный — не более чем из шести точек* $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}^d_{1/2}) = \{3z_1, 3z_2, 2z_1+z_2, z_1+2z_2, z_1+z_3, z_2+z_3\}$.

В трехмерном случае структура существенного и дискретного спектров оператора ${}^2\widetilde{H}^d_{1/2}$ описывается следующей теоремой.

Теорема 5.2. *Пусть* $\nu = 3$. *Тогда*:

A) *Если* $\varepsilon_1 > 0$ *и* $0 < \varepsilon_2 \leqslant -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, *или* $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $-2B < \varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $-B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < 0$, *то существенный спектр оператора* ${}^2\widetilde{H}^d_{1/2}$ *состоит из объединения четырех интервалов* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2) = [3A-18B, 3A+18B] \cup [2A-12B+z_1, 2A+12B+z_1] \cup [A-6B+2z_1, A+6B+2z_1] \cup [A-6B+z_3, A+6B+z_3]$, *а дискретный — не более чем из двух точек* $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}^d_{1/2}) = \{3z_1, z_1+z_3\}$.

B) *Если* $\varepsilon_1 < 0$ *и* $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, *или* $\varepsilon_1 < 0$ *и* $0 < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 < 6B$ *и* $-2B < \varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 < 6B$ *и* $-B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < 0$, *то существенный спектр оператора* ${}^2\widetilde{H}^d_{1/2}$ *состоит из объединения четырех интервалов* $\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}^d_{1/2}) = [3A-18B, 3A+18B] \cup [2A-12B+z_2, 2A+12B+z_2] \cup [A-6B+2z_2, A+6B+2z_2] \cup [A-6B+z_3, A+6B+z_3]$, *а дискретный — не более чем из двух точек* $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}^d_{1/2}) = \{3z_2, z_2+z_3\}$.

C) *Если* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 6B$ *и* $\varepsilon_2 > -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $\varepsilon_2 > -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 6B$ *и* $\varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $\varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 6B$ *и* $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $-6B \leqslant \varepsilon_2 < 0$ *и* $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *то существенный спектр оператора* ${}^2\widetilde{H}^d_{1/2}$ *состоит из объединения семи интервалов* $\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}^d_{1/2}) = [3A-18B, 3A+18B] \cup [2A-12B+z_1, 2A+12B+z_1] \cup [2A-12B+z_2, 2A+12B+z_2] \cup [A-6B+2z_1, A+6B+2z_1] \cup [A-6B+z_1+z_2, A+6B+z_1+z_2] \cup [A-6B+2z_2, A+6B+2z_2] \cup [A-6B+z_3, A+6B+z_3]$, *а дискретный — не более чем из шести точек* $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}^d_{1/2}) = \{3z_1, 3z_2, 2z_1+z_2, z_1+2z_2, z_1+z_3, z_2+z_3\}$.

Доказательство. Доказательство теорем 5.1–5.2 проводится аналогично доказательству теорем 4.1–4.2. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Изюмов Ю. А., Скрябин Ю. Н.* Статистическая механика магнитоупорядоченных систем. — М.: Наука, 1987.
2. *Карпенко Б. В., Дякин В. В., Будрина Г. Л.* Два электрона в модели Хаббарда// Физ. метал. и металловед. — 1986. — *61*, № 4. — С. 702–706.

3. *Ташпулатов С. М.* О спектральных свойствах трехэлектронных систем в модели Хаббарда// Теор. мат. физ. — 2014. — *179*, № 3. — С. 387–405.
4. *Anderson C. W.* Localized magnetic states in metals// Phys. Rev. — 1961. — *124*. — С. 41–53.
5. *Gutzwiller M. C.* Effect of correlation on the ferromagnetism of transition metals// Phys. Rev. Lett. — 1963. — *10*. — С. 159–162.
6. *Hubbard J.* Electron correlations in narrow energy bands// Proc. R. Soc. London Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. — 1963. — *276*. — С. 238–257.
7. *Ichinose T.* Spectral properties of tensor products of linear operators, 1// Trans. Am. Math. Soc. — 1978. — *235*. — С. 75–113.
8. *Ichinose T.* Spectral properties of tensor products of linear operators, 2: The approximate point spectrum and Kato essential spectrum// Trans. Am. Math. Soc. — 1978. — *237*. — С. 223–254.
9. *Ichinose T.* Tensor products of linear operators. Spectral theory// Banach Center Publ. — 1982. — *8*. — С. 294–300.
10. *Kanamori J.* Electron correlation and ferromagnetism of transition metals// Prog. Theor. Phys. — 1963. — *30*. — С. 275–289.
11. *Lieb E.* Two theorems on the Hubbard model// Phys. Rev. Lett. — 1989. — *62*. — С. 1201–1204.
12. *Mattis D.* The few-body problems on a lattice// Rev. Mod. Phys. — 1986. — *58*. — С. 370–379.
13. *Shubin S. C., Wonsowsky S. V.* On the electron theory of metals// Proc. R. Soc. London Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. — 1934. — *145*. — С. 159–180.
14. *Reed M., Simon B.* Methods of modern mathematical physics. — New York: Acad. Press, 1978.
15. *Tsvelick A. M., Wiegman C. B.* Exact results in the theory of magnetic alloys// Adv. Phys. — 1983. — *32*. — С. 453–713.

С. М. Ташпулатов
Институт ядерной физики АН Респ. Узбекистан,
Узбекистан, 702132, г. Ташкент, пос. Улугбек
E-mail: sadullatashpulatov@yandex.ru, toshpul@inp.uz

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-109-123 UDC 517.984

Spectra of the Energy Operator of Three-Electron Systems in the Impurity Hubbard Model. Second Doublet State

© 2019 **S. M. Tashpulatov**

Abstract. We consider the three-electron systems in the impurity Hubbard model and investigated the spectra of the system in the second doublet state in the ν-dimensional lattice Z^{ν}.

REFERENCES

1. Yu. A. Izyumov and Yu. N. Skryabin, *Statisticheskaya mekhanika magnitouporyadochennykh sistem* [Statistical Mechanics of Magnetically Ordered Systems], Nauka, Moscow, 1987 (in Russian).
2. B. V. Karpenko, V. V. Dyakin, and G. L. Budrina, “Dva elektrona v modeli Khabbarda” [Two electrons in the Hubbard Model], *Fiz. metal. i metalloved.* [Phys. Metal. Phys. Metallurgy], 1986, **61**, No. 4, 702–706 (in Russian).
3. S. M. Tashpulatov, “O spektral’nykh svoystvakh trekhelektronnykh sistem v modeli Khabbarda” [Spectral properties of three-electron systems in the Hubbard model], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 2014, **179**, No. 3, 387–405 (in Russian).
4. C. W. Anderson, “Localized magnetic states in metals,” *Phys. Rev.*, 1961, **124**, 41–53.
5. M. C. Gutzwiller, “Effect of correlation on the ferromagnetism of transition metals,” *Phys. Rev. Lett.*, 1963, **10**, 159–162.
6. J. Hubbard, “Electron correlations in narrow energy bands,” *Proc. R. Soc. London Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 1963, **276**, 238–257.

7. T. Ichinose, “Spectral properties of tensor products of linear operators, 1,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1978, **235**, 75–113.
8. T. Ichinose, “Spectral properties of tensor products of linear operators, 2: The approximate point spectrum and Kato essential spectrum,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1978, **237**, 223–254.
9. T. Ichinose, “Tensor products of linear operators. Spectral theory,” *Banach Center Publ.*, 1982, **8**, 294–300.
10. J. Kanamori, “Electron correlation and ferromagnetism of transition metals,” *Prog. Theor. Phys.*, 1963, **30**, 275–289.
11. E. Lieb, “Two theorems on the Hubbard model,” *Phys. Rev. Lett.*, 1989, **62**, 1201–1204.
12. D. Mattis, “The few-body problems on a lattice,” *Rev. Mod. Phys.*, 1986, **58**, 370–379.
13. S. C. Shubin and S. V. Wonsowsky, “On the electron theory of metals,” *Proc. R. Soc. London Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 1934, **145**, 159–180.
14. M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics*, Acad. Press, New York, 1978.
15. A. M. Tsvelick and C. B. Wiegman, “Exact results in the theory of magnetic alloys,” *Adv. Phys.*, 1983, **32**, 453–713.

S. M. Tashpulatov
Institute of Nuclear Physics, Acad. Sci. of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: sadullatashpulatov@yandex.ru, toshpul@inp.uz