Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 1 (2019). С. 95–108

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-95-108 УДК 517.946

ФОРМУЛА КАРЛЕМАНА ДЛЯ РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ КОШИ—РИМАНА В МНОГОМЕРНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОБЛАСТИ

© 2019 г. **Э. Н. САТТОРОВ, Ф. Э. ЭРМАМАТОВА**

Аннотация. В работе рассматривается задача восстановления решений обобщенной системы Коши—Римана в многомерной пространственной области по их значениям на куске границы этой области, т. е. задача Коши. Строится приближенное решение этой задачи, основанное на методе матрицы Карлемана.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В монографии И. Н. Векуа [5] существенно расширяются рамки классической теории аналитических функций и ее применений. В ней рассматривается класс функций, который объединяет семейства решений весьма широкого класса эллиптических систем дифференциальных уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными. Это — обобщенная система Коши—Римана, для решений которой сохраняется ряд основных свойств аналитических функций одной комплексной переменной.

В настоящей работе рассматривается задача восстановления решения системы уравнений [17,18]

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}+H_i\right)=0,$$
$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k}-\frac{\partial F_k}{\partial x_j}-H_kF_j+H_jF_k=0, \quad i,k,j=1,\dots,n, \tag{1.1}$$

которая является n-мерным аналогом обобщенной системы Коши—Римана, по ее известным значениям на части границы этой области, т. е. задача Коши. Когда все $H_i=0$, то система (1.1) является системой Рисса [24, с. 106]. Как известно, система Коши—Римана в физических приложениях привела к далеко идущим обобщениям [6, 7, 32].

Задача Коши для обобщенной системы Коши—Римана, как и многие задачи Коши нахождения регулярных решений эллиптических уравнений и систем, в общем случае оказывается неустойчивой относительно равномерно малых изменений начальных данных. Таким образом, эти задачи некорректно поставлены [1, с. 39].

В монографиях Л. А. Айзенберга [2] и Н. Тарханова [34] рассматривается регуляризация задачи Коши для системы Коши—Римана и для системы с инъективным символом, там же приведена обширная библиография.

При исследовании задачи Коши для системы (1.1) будем априори предполагать существование ее решения. Более того, предполагается, что решение принадлежит некоторому заданному подмножеству функционального пространства, обычно компактному [12, с. 4]. Единственность решения

©Российский университет дружбы народов, 2019

следует из общей теоремы Холмгрена [4, с. 58]. В этих условиях устанавливается явная формула восстановления, которая является аналогом классической формулы Б. Римана, В. Вольтерра и Ж. Адамара, построенной ими для решения задачи Коши в теории гиперболических уравнений [20, теорема 2.1]. Если при указанных условиях вместо данных Коши заданы их непрерывные приближения с уклонением в равномерной метрике, заданным положительным числом, при условии, что решение ограничено на части поверхности конуса $T \equiv \partial G_\rho = \partial\Omega_\rho \setminus S$, то предполагается явная формула регуляризации [20, теорема 2.2].

Метод получения указанных результатов основан на построении в явном виде матрицы фундаментального решения обобщенной системы Коши—Римана, зависящей от положительного параметра, исчезающего при стремлении параметра к бесконечности на $T \equiv \partial G_\rho$, когда полюс фундаментального решения лежит в полупространстве $y_n > 0$ (см. [20, лемма 1.2]). Следуя М. М. Лаврентьеву и Ш. Ярмухамедову, матрицу фундаментальных решений с указанным свойством назовем *матрицей Карлемана для полупространства* (см. [12, с. 34], [28]). После построения матрицы Карлемана в явном виде формула продолжения, а также регуляризация решения задачи Коши, выписываются в виде обобщенной пространственной интегральной формулы Коши. Полученная в [20, теорема 2.1] формула продолжения позволяет формулировать критерий разрешимости задачи Коши [20, теорема 3.1].

На протяжении последних десятилетий сохранился интерес к классическим некорректным задачам математической физики. Это направление в исследовании свойств решений задачи Коши для уравнения Лапласа начато в работах [9–14] и развивалось впоследствии в [3–30].

2. Постановка задачи и матрицы Карлемана

Пусть $\mathbb{R}^n$ — вещественное n-мерное евклидово пространство,

$$x = (x_1, \dots, x_n),\ \ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,\ \ x' = (x_1, \dots, x_{n-1}),\ \ y' = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1},$$

$$s = \alpha^2 = |y' - x'| = (y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_{n-1} - x_{n-1})^2,\ \ r^2 = s + (y_n - x_n)^2 = |y - x|^2, \tau = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2\rho},\ \ \rho > 1,$$

$$G_\rho = \{y : |y'| < \tau y_1,\ \ y_1 > 0\},\ \ \partial G_\rho = \{y : |y'| = \tau y_1,\ \ y_1 > 0\},\ \ \overline{G}_\rho = G_\rho \cup \partial G_\rho,$$

ε, ε_1и ε_2 — достаточно малые постоянные положительные числа,

$$G^\varepsilon_\rho = \{y : |y'| < \tau(y_1 - \varepsilon)\},\ \ \partial G^\varepsilon_\rho = \{y : |y'| = \tau(y_1 - \varepsilon)\}\ \ \overline{G}^\varepsilon_\rho = G^\varepsilon_\rho \cup \partial G^\varepsilon_\rho,$$

$$C = \{\varsigma : \varsigma = \xi + i\eta, -\infty < \xi < \infty, -\infty < \eta < \infty\},$$

Ω_ρ — ограниченная односвязная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega_\rho$, состоящей из части поверхности конуса $T \equiv \partial G_\rho$ и гладкого куска поверхности S, лежащего на конусе $\overline{G}_\rho$. Случай $\rho = 1$ предельный. В этом случае ∂G_1 — плоскость $\mathbb{R}^{n-1}$ и G_1 — полупространство $y_1 > 0$, Ω_1 — односвязная ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей, состоящей из части плоскости $\mathbb{R}^{n-1}$ и гладкого куска поверхности S, лежащей в полупространстве $y_1 \geqslant 0$, $\overline{\Omega}_\rho = \Omega_\rho \cup \partial\Omega_\rho$, S_0 — внутренние точки поверхности S. $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))$ — вектор-функция, которая имеет в этой области непрерывные производные первого порядка. $A(\Omega_\rho)$ — совокупность вектор-функций класса $C^1(\Omega_\rho)$, удовлетворяющий эллиптической системе (1.1) и непрерывной на $\overline{\Omega}_\rho = \Omega_\rho \cup \partial\Omega_\rho$, $H = (H_1, H_2, \dots, H_n)$ — заданный постоянный вектор.

Легко можно показать, что F_i — решение системы (1.1), удовлетворяют уравнению

$$\triangle\varphi - |H^2|\varphi = 0. \tag{2.1}$$

Вводим следующие обозначения:

$$L_{kj}(X_1, X_2, \dots, X_n; H) = L_{jk}(X_1, X_2, \dots, X_n; H) =$$
$$= (X_j - H_j)F_k - (X_k - H_k)F_j + \delta_{kj}(X_i + H_i)F_i, \quad k \leqslant j,$$
$$L_k(X, H)F = (L_{k1}F, L_{k1}F, \dots, L_{kn}F), \quad k = 1, \dots, n, \tag{2.2}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Тогда систему (1.1) можно записать в виде:

$$L_k(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}; H)F = 0, \quad k = 1, \dots, n. \tag{2.3}$$

Для каждого векторного оператора L_k определяем сопряженный векторный оператор L_k^* равенством:

$$V \cdot L_k(\frac{\partial}{\partial x}; H) + FL_k^*(\frac{\partial}{\partial x}) = \operatorname{div} F_k. \tag{2.4}$$

Тогда легко получить, что

$$L_k^*(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}; H)F =$$

$$= L_k(-\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial}{\partial x_{k-1}}, \frac{\partial}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}; -H_1, \dots, -H_k, H_{k+1}, \dots, H_n)F. \tag{2.5}$$

Постановка задачи (задача Коши). Известны данные Коши решения системы (2.3) на поверхности S:

$$F(y) = f(y), y \in S, \tag{2.6}$$

где $f(y) = (f_1(y), \dots, f_n(y))$ — заданная на S непрерывная вектор-функция. Требуется восстановить вектор-функцию $F(x)$ в Ω_ρ, исходя из заданной f, т. е. решить задачу аналитического продолжения решения обобщенной системы Коши—Римана в многомерной евклидовой пространственной области по ее значениям на гладком куске S границы.

Если вместо $f(y)$ заданы ее приближения $f_\delta(y)$ с точностью $\delta \in (0,1)$ в метрике $C(S)$, а также число B — размер компакта, которому принадлежат решения, то речь идет о построении семейства вектор-функций $F(x, f_\delta) = F_{\sigma\delta}$ (регуляризация), сходящихся к точному решению задачи (2.3), (2.6) в Ω при подходящем выборе параметра регуляризации $\sigma = \sigma(\delta)$ и $\delta \to 0$ (см. [4]).

Следуя [26], функцию $F_{\sigma\delta}$ назовем *регуляризованным решением* задачи Коши для обобщенной системы Коши—Римана. Регуляризованное решение определяет устойчивость метода приближенного решения задачи.

В данной работе на основе результатов работ [12, с. 4], [28, 30] по задаче Коши для уравнений Лапласа и Гельмгольца построена матрица Карлемана в явном виде и на ее основе — регуляризованное решение задачи Коши для системы (2.3). В [25] приведены теоремы существования матрицы Карлемана и критерий разрешимости более широкого класса краевых задач для эллиптических систем. Ранее в [3,25] доказано, что матрица Карлемана существует во всякой задаче Коши для решений эллиптических систем, если только данные Коши задаются на граничном множестве положительной меры. Поскольку в данной статье речь идет о явных формулах, то построение матрицы Карлемана в элементарных и специальных функциях представляет значительный интерес.

Функция Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа и в близких к нему случаях, когда $\partial\Omega \setminus S$ — часть поверхности конуса, построена в [28]. Матрицу Карлемана для уравнения Коши—Римана в случае, когда S — произвольное множество положительной меры, построил Л. А. Айзенберг [3]. Развивая идею С. Е. Мергеляна [14], указавшего способ построения функции Карлемана в задаче Коши для уравнения Лапласа в случае, когда S — кусок с гладким краем границы односвязной области, на основе теорем об аппроксимации в [26] построена матрица Карлемана для эллиптических систем.

В том случае, когда $n = 2$, $H = 0$, рассматриваемая система (2.3) будет обобщенной системой Коши—Римана, теория которой разработана Векуа [5], а формула продолжения решения по ее значениям на куске границы получена Т. Ишанкуловым [10]. Если $n = 3$, то $F(y)$ будет обобщенным потенциальным вектором, в котором система (2.3) (ряд аналитических фактов) изучена в [16], а формула продолжения решения по ее значениям на куске границы и аналог теоремы Фок—Куни получена в работе [20]. В настоящей работе утверждается, что все результаты, полученные в трехмерном случае в [22], остаются справедливыми для системы (2.3). Именно, в этом случае явно строится фундаментальная матрица, которая является ядром обобщенных интегралов Коши и типа Коши. Пусть $U^k = (u_1^k, \dots, u_n^k)$ — фундаментальное решение системы [17, 18]:

$$L_k^*(\frac{\partial}{\partial x}; H)U^k = 0, \tag{2.7}$$

где u_k^i определяются равенствами:

$$u_k^i(y, x) = (\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_k} - H_k \Phi_0) \cdot \operatorname{sign}(k - i), \quad i \neq k,$$

$$u_i^i(y,x) = (\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_i} + H_i \Phi_0), \tag{2.8}$$

где Φ_0 — классическое фундаментальное решение уравнения (1.1). Справедливо

Определение 2.1. Матрица $M_0(y,x;H)$ называется *матрицей фундаментальных решений* системы (2.3), где

$$M_0(y,x;H) = \|L_k^*(\alpha;0)U^k\|, \tag{2.9}$$

а U^k определяется согласно (2.8).

Следуя [28], приведем

Определение 2.2. *Матрицей Карлемана* задачи (2.3), (2.6) называется матрица $M_\sigma(y,x;H)$ размера $n \times n$, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1. $M_\sigma(y,x;H) = M_0(y,x;H) + G_\sigma(y,x;H)$, где σ — положительный числовой параметр, матрица $G_\sigma(y,x;H)$ по переменной y удовлетворяет системе (2.3) всюду в области Ω_ρ, $M_0(y,x;H)$ — матрица фундаментальных решений уравнений (2.3);
2. $\int\limits_{\partial G_\rho} |M_\sigma(y,x;H)| dS_y \leqslant \varepsilon(\sigma)$ при фиксированном $x \in \Omega_\rho$, где $\varepsilon(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to \infty$; здесь и далее $|M_\sigma|$ означает евклидову норму матрицы $M_\sigma = ||M_{ij}||$, т. е. $|M_\sigma| = \left(\sum\limits_{ij=1}^{3} M_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$, в частности, $|F| = \left(\sum\limits_{i}^{n} F_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ для вектора F.

Для $F(y) \in A(\Omega_\rho)$ справедлива обобщенная пространственная интегральная формула Коши [17]:

$$\int\limits_{\partial \Omega_\rho} M_0(y,x;H) F(y) dS_y = \begin{cases} 0, & x \notin \overline{\Omega_\rho}, \\ F(x), & x \in \Omega_\rho, \end{cases} \tag{2.10}$$

а также получен аналог интеграла типа Коши, даны изящные формулы скачков для предельных значений этого интеграла [18].

Поскольку матрица Карлемана отличается от матрицы фундаментальных решений на решение транспонированной системы, то обобщенная интегральная формула Коши остается справедливой, если в ней заменить фундаментальное решение на матрицу Карлемана.

С целью построения приближенного решения задачи (2.3), (2.6) рассмотрим матрицу

$$M_\sigma(y,x;H) = \|L_k^*(\alpha;0)V^k\|, \tag{2.11}$$

где $V^k = (v_1^1, \ldots, v_n^k)$ определяется равенством

$$v_k^i(y,x) = (\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial x_k} - H_k \Phi_\sigma) \cdot \operatorname{sign}(k-i) \quad \text{при} \quad i \neq k, \quad v_i^i(y,x) = (\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial x_i} + H_i \Phi_\sigma), \tag{2.12}$$

а функция $\Phi_\sigma(y,x;\lambda)$ при $s \geqslant 0, v \geqslant 1$ определяется следующим равенством:

$$C_n K(x_n) \Phi_\sigma(y,x;\lambda) = \frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \int\limits_0^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{K(w)}{w}\right] \frac{\psi(\lambda u)}{\sqrt{u^2+\alpha^2}} du, w = i\sqrt{u^2+\alpha^2} + y_n, \tag{2.13}$$

где

$$\psi(\lambda u) = \begin{cases} u J_0(\lambda u), & n = 2m, \ m \geqslant 1, \\ \cos(\lambda u), & n = 2m+1, \ m \geqslant 1, \end{cases}$$

$J_0(\lambda u)$ — функция Бесселя нулевого порядка; здесь берется регулярная ветвь аналитической функции $J_0(\lambda)$ в $C^{(n)}(\Omega_\rho)$, $n = 2m$, вещественная при $\lambda > 0, \lambda = |H|^2$,

$$C_n = \begin{cases} (-1)^m 2^(- 1)(m-2)!(n-2)\omega_n, & n = 2m, \ m \geqslant 2, \\ (-1)^m 2^(- 2n+1)(m-1)!(n-2)\pi\omega_n, & n = 2m+1, \ m \geqslant 1, \end{cases}$$

ω_n — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $K(w)$ — целая функция комплексного переменного, вещественная при вещественном w ($w = u + iv$, u, v — действительные числа), $K(u) \neq \infty$, $|u| < \infty$, удовлетворяющая условиям

$$\sup_{v \geqslant 1} |K^{(p)}(u + iv)\exp(v)|\operatorname{Im}\lambda|| = M(u) < \infty, p = 0, 1, \ldots \tag{2.14}$$

При вещественном w из вещественности $K(w)$ имеем $\overline{K(\overline{w})} = K(w)$. Так как

$$\operatorname{Im}\left(\frac{K(w)}{w}\right) = \frac{1}{2i}\left\{\frac{K(w)}{w} - \frac{K(\overline{w})}{\overline{w}}\right\} = \frac{\overline{w}K(w) - wK(\overline{w})}{2i(r^2 + u^2)} =$$

$$= \frac{(y_n - x_n)\operatorname{Im}K(w) - \sqrt{s + u^2}\operatorname{Re}K(w)}{r^2 + u^2}, \tag{2.15}$$

то (2.13) имеет вид

$$C_n K(x_n)\Phi(y, x; \lambda) = \frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \int\limits_0^\infty \left\{\frac{(y_n - x_n)\operatorname{Im}K(w)}{\sqrt{s + u^2}} - \operatorname{Re}K(w)\right\} \frac{\psi(\lambda u)}{r^2 + u^2} du. \tag{2.16}$$

Из (2.14) и (2.16) следует, что при $y \neq x$ интеграл в (2.13) абсолютно сходится.

Если $K(w) \equiv 1$, то функция $\Phi_\sigma(y, x; \lambda)$ является *классическим фундаментальным решением* уравнения Гельмгольца, то есть

$$\Phi_\sigma(y, x; \lambda) \equiv \Phi_0(y, x; \lambda) = C_n \frac{1}{r^{n-2}} e^{-\lambda r}.$$

Согласно [20], можно показать, что

$$\frac{1}{r^{n-2}} e^{-\lambda r} = \frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \int\limits_0^\infty \frac{\psi(\lambda u)}{r^2 + u^2} du.$$

В [11] доказана

Лемма 2.1. *Функция* $\Phi_\sigma(y, x; \lambda)$, *определенная формулой* (2.13), *представима в виде*

$$\Phi_\sigma(y, x; \lambda) = \Phi_0(r; \lambda) + g_\sigma(y, x; \lambda), \tag{2.17}$$

где $\Phi_0(r; \lambda)$ — *классическое фундаментальное решение уравнения* (1.1):

$$\Phi_0(r; \lambda) = A_m \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{n}{2} - 1} K_{\frac{n}{2} - 1}(\lambda r), A_{2m} = (-1)^m 2^{m-1}, A_{2m+1} = (-1)^m 2^{-m - \frac{1}{2}},$$

$K_0(\lambda)$ — *функция Макдональда* [15, 27], $g_\sigma(y, x; \lambda)$ — *регулярные решения* (2.3) *по* y *в* $\mathbb{R}^n$ *для* $\lambda \in C^n(\Omega.)$

Верна аналогичная лемма для системы (2.3).

Лемма 2.2. *Матрица* $M_\sigma(y, x; H)$, *определенная формулой* (2.11), *является матрицей Карлемана задачи* (2.3), (2.6), *т. е. представима в виде*

$$M_\sigma(y, x; H) = M_0(r; \lambda) + G_\sigma(y, x; H), \tag{2.18}$$

где $G_\sigma = ||G_{ij\sigma}(y, x, \sigma)||_{n \times n}$ — *матрица, определенная для всех значений* y, x *и по переменной* y *удовлетворяющая системе* (2.3) *во всем пространстве* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Из леммы 2.1 и определения 2.1 следует (2.15). Так как $\Delta\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right) g_\sigma - \lambda^2 g_\sigma = 0$, то отсюда нетрудно видеть, что матрица $G_\sigma(y, x; H)$ удовлетворяет уравнению (2.3), т. е. она есть регулярное решение по переменной y, включая и точку $y = x$.

Из формулы (2.13) видно, что на ∂G_ρ функция $\Phi_\sigma(y, x; \lambda)$ и ее градиент $\nabla\Phi_\sigma(y, x; \lambda)$ при $\sigma \to \infty$ экспоненциально стремятся к нулю при всех $y_1, \ldots, y_{n-1}$ и $x \in \mathbb{R}^n, x > 0$. Тогда при $\sigma \to \infty$ матрица $M_\sigma(y, x; H)$, также стремится к нулю при всех $y_1, \ldots, y_{n-1}$ и $x \in \mathbb{R}^n, x > 0$. Согласно определению 2.1 матрица $M_\sigma(y, x; H)$, определенная формулой (2.11), является матрицей Карлемана для области Ω_ρ и части ∂G_ρ. □

3. Целая функция Миттаг-Леффлера и некоторые ее свойства

При решении задачи (2.3), (2.6) формула продолжения выражается через целую функцию Миттаг-Леффлера, поэтому приведем без доказательства основные ее свойства. Они даны в [8, гл. 3, § 2] с подробными доказательствами.

Целая функция Миттаг-Леффлера определяется рядом

$$E_\rho(w)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{\Gamma(1+n/\rho)},\quad \rho>0,\quad w\in C,\quad E_1(w)=\exp(w),$$

где Γ — гамма-функция Эйлера. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $\rho>1$. Обозначим через $\gamma=\gamma(1,\beta)$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{\rho}$, $\rho>1$, контур в комплексной плоскости w, пробегаемый в направлении неубывания $\arg w$ и состоящий из луча $\arg w=-\beta$, $|w|\geqslant 1$, дуги $-\beta\leqslant \arg w\leqslant\beta$, окружности $|w|=1$ и луча $\arg w=\beta$, $|w|\geqslant 1$. Контур γ разбивает C на две односвязные бесконечные области Ω^- и Ω^+, лежащие слева и справа от γ соответственно. Будем предполагать, что $\dfrac{\pi}{2\rho}<\beta<\dfrac{\pi}{\rho}$, $\rho>1$.

При этих условиях справедливы следующие интегральные представления:

$$E_\rho(w)=\rho\exp(w^\rho)+\psi_\rho(w),\ \ w\in\Omega^+, \tag{3.1}$$

$$E_\rho(w)=\psi_\rho(w),\ \ E'_\rho(w)=\psi'_\rho(w),\ \ w\in\Omega^-, \tag{3.2}$$

где

$$\psi_\rho(w)=\frac{\rho}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\exp(\varsigma^\rho)}{\varsigma-w}d\varsigma,\ \ \psi'_\rho(w)=\frac{\rho}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\exp(\varsigma^\rho)}{(\varsigma-w)^2}d\varsigma. \tag{3.3}$$

Так как $E_\rho(w)$ вещественно при вещественном w, имеем

$$\operatorname{Re}\psi_\rho(w)=\frac{\psi_\rho(w)+\psi_\rho(\overline{w})}{2}=\frac{\rho}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\exp(\varsigma^\rho)(\varsigma-\operatorname{Re}w)}{(\varsigma-w)(\varsigma-\overline{w})}d\varsigma, \tag{3.4}$$

$$\operatorname{Im}\psi_\rho(w)=\frac{\psi_\rho(w)-\psi_\rho(\overline{w})}{2i}=\frac{\rho\operatorname{Im}w}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\exp(\varsigma^\rho)}{(\varsigma-w)(\varsigma-\overline{w})}d\varsigma. \tag{3.5}$$

$$\operatorname{Im}\frac{\psi'_\rho(w)}{\operatorname{Im}w}=\frac{\rho}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{2\exp(\varsigma^\rho)(\varsigma-\operatorname{Re}w)}{(\varsigma-w)^2(\varsigma-\overline{w})^2}d\varsigma. \tag{3.6}$$

Всюду в дальнейшем в определении контура $\gamma(1,\beta)$ будем брать $\beta=\dfrac{\pi}{2\rho}+\dfrac{\varepsilon_2}{2}$, $\rho>1$. Ясно, что если

$$\frac{\pi}{2\rho}+\varepsilon_2\leqslant|\arg w|\leqslant\pi, \tag{3.7}$$

то $w\in\Omega^-_\rho$ и $E_\rho(w)=\psi_\rho(w)$.

Обозначим

$$T_{k,p}(w)=\frac{\rho}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\varsigma^p e^{\varsigma^p}}{(\varsigma-w)^k(\varsigma-\overline{w})^k}d\varsigma,\quad k=1,2,\ldots,\quad p=0,1,\ldots$$

При $\dfrac{\pi}{2\rho}+\varepsilon_2\leqslant|\arg w|\leqslant\pi$ справедливы неравенства

$$|E_\rho(w)|\leqslant\frac{C_1}{1+|w|},\quad |E'_\rho(w)|\leqslant\frac{C_2}{1+|w|^2},\quad |T_{k,p}(w)|\leqslant\frac{C_3}{1+|w|^{2k}}, \tag{3.8}$$

где C_1,C_2,C_3 — постоянные, не зависящие от w. Выберем в (3.4) $\beta=\dfrac{\pi}{2\rho}+\dfrac{\varepsilon_2}{2}<\dfrac{\pi}{\rho}$, $\rho>1$. Тогда $E_\rho(w)=\psi_\rho(w)$, где $\psi_\rho(w)$ определяется из (3.3). При этом заметим, что $\cos\rho\beta<0$ и интеграл сходится:

$$\int\limits_{\gamma}|\zeta|^p\exp[\cos\rho\beta|\zeta|^\rho]|d\varsigma|<\infty,\quad p=0,1,\ldots \tag{3.9}$$

Далее, при достаточно большом $|w|(w \in \Omega^+,\ \overline{w} \in \Omega^-)$ имеем

$$\min_{\varsigma\in\gamma} |\varsigma - w| \geqslant |w| \sin\frac{\varepsilon_2}{2}, \quad \min_{\varsigma\in\gamma} |\varsigma - \overline{w}| \geqslant |w| \sin\frac{\varepsilon_2}{2}. \tag{3.10}$$

Теперь из (3.2) и разложения

$$\frac{1}{\varsigma - w} = -\frac{1}{w} + \frac{\zeta}{w(\varsigma - w)}, \quad \frac{1}{\varsigma - \overline{w}} = -\frac{1}{w} + \frac{\zeta}{\overline{w}(\varsigma - \overline{w})} \tag{3.11}$$

для больших $|w|$ получаем

$$\left|E_\rho(w) - \Gamma^{-1}(1 - \frac{1}{\rho})\frac{1}{w}\right| \leqslant \frac{\rho}{2\pi \sin\dfrac{\varepsilon_2}{2}} \frac{1}{|w|^2} \int\limits_\gamma |\varsigma| \exp[\cos\rho\beta|\varsigma|^\rho]|d\varsigma| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{|w|^2},$$

$$\Gamma^{-1}(1 - \frac{1}{\rho}) = \frac{\rho}{2\pi i} \int\limits_\gamma \exp(\varsigma^\rho) d\varsigma.$$

Отсюда следует первое из неравенств (3.8). Из (3.10), (3.3) и разложения

$$\frac{1}{(\varsigma - w)^2} = \frac{1}{w^2} - 2\frac{\varsigma}{w^2(\varsigma - w)} + \frac{\varsigma^2}{w^2(\varsigma - w)^2}$$

при больших $|w|$ аналогично выводим неравенство

$$\left|E'_\rho(w) - \Gamma^{-1}(1 - \frac{1}{\rho})\frac{1}{w^2}\right| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{|w|^3}.$$

Второе неравенство из (3.8) доказано.

4. Формула Карлемана

В формуле (2.16) в качестве $K(w)$ выберем целую функцию Миттаг-Леффлера

$$K(w) = \exp(aw^2)E_\rho(\sigma w),$$

где $\rho > 1, w = i\sqrt{u^2 + s} + y_1 - x_1$, $a > 0$ и $\sigma \geqslant 0$. Полученное при этом фундаментальное решение уравнения Гельмгольца $\Phi_\sigma(y - x; \lambda)$ и его производные по переменной σ имеют вид $\Phi_\sigma(y - x; \lambda)$ и $P_\sigma(y - x; \lambda) = \dfrac{d\Phi_\sigma(y - x; \lambda)}{d\sigma}$ соответственно. Из леммы 2.1 следует, что $F_\sigma(y - x; \lambda)$ является регулярным решением уравнения Гельмгольца в $\mathbb{R}^n$, однако

$$\Phi_\sigma(y - x; \lambda) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^\infty \mathrm{Im}\left[\frac{e^{aw^2} E_\rho(\sigma w)}{w}\right] \frac{\psi(\lambda u) du}{\sqrt{u^2 + s}}, \tag{4.1}$$

$$P_\sigma(y - x; \lambda) = \frac{d\Phi_\sigma(y - x, \lambda)}{d\sigma} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^\infty \mathrm{Im}\left[e^{aw^2} E'_\rho(\sigma w)\right] \frac{\psi(\lambda u) du}{\sqrt{u^2 + s}}. \tag{4.2}$$

Согласно (2.16), выделяя мнимые части в (4.1), (4.2) будем иметь:

$$\Phi_\sigma(y - x; \lambda) = \frac{1}{4\pi} e^{-as + a(y_1 - x_1)^2} \int\limits_0^\infty \varphi_\sigma(y, x, \lambda, u) \frac{e^{-au^2} \psi(\lambda u) du}{u^2 + r^2}, \tag{4.3}$$

где

$$\varphi_\sigma(y, x, \lambda, u) = \left[\frac{(y_1 - x_1)}{\sqrt{u^2 + s}} \mathrm{Im}\, E_\rho(\sigma w) - \mathrm{Re}\, E_\rho(\sigma w)\right] \cos(\lambda\sqrt{u^2 + s}) +$$

$$+ \left[\mathrm{Im}\, E_\rho(\sigma w) + \frac{(y_1 - x_1)}{\sqrt{u^2 + s}} \mathrm{Re}\, E_\rho(\sigma w)\right] \sin(\lambda\sqrt{u^2 + s}), \quad \lambda = 2a(y_1 - x_1), \tag{4.4}$$

$$P_\sigma(y - x; \lambda) = \frac{1}{4\pi} e^{-as + a(y_1 - x_1)^2} \int\limits_0^\infty \phi_\sigma(y, x, k, u) e^{-au^2} \psi(\lambda u) du, \tag{4.5}$$

где

$$\phi_\sigma(y,x,k,u)=\frac{1}{\sqrt{u^2+s}}(\sin(\lambda\sqrt{u^2+s})\operatorname{Re}E'_\rho(\sigma w)+\cos(\lambda\sqrt{u^2+s})\operatorname{Im}E'_\rho(\sigma w)). \tag{4.6}$$

Если $\sigma=0$ и $K(0)=E_\rho(0)=1$, тогда функция $\Phi_0(y-x;\lambda)$ из (3.1) определяет классическое фундаментальное решение уравнения Гельмгольца.

Следствие 4.1. *Матрица $M_{1\sigma}(y,x;H)$ при $y\neq x$, определенная формулой*

$$M_{1\sigma}(y,x;H)=\frac{\partial}{\partial\sigma}M_\sigma(y,x;H), \tag{4.7}$$

соответственно удовлетворяет системе (2.3) *по переменной y в $\mathbb{R}^n$, включая точку $y=x$.*

В точке $(0,0,\ldots,0)\in\partial\Omega_\rho$ нормальная производная не определена. Так как $F(y)$, $\Phi_\sigma(y-x;\lambda)$, $M_\sigma(y-x;H)$ $(x\in\Omega_\rho)$ имеют непрерывные частные производные вплоть до $\partial\Omega_\rho$,

$$\frac{\partial F}{\partial n}(0)=\frac{\partial F}{\partial y_n}(0),\quad \frac{\partial M_\sigma}{\partial n}(0,x)=\frac{\partial M_\sigma}{\partial y_n}(0,x),\quad x\in\Omega_\rho.$$

При фиксированном $x\in\Omega_\rho$ обозначим через S^* ту часть S, на которой $|y'|=\tau y_1-|x'|\geqslant\alpha$. Если $x=x_0\in\Omega_\rho$, то $S=S^*$ (в этом случае $|y'|=\tau y_1-|x'|=\tau y_1$, $\alpha=|y'|$ и неравенство означает, что y лежит внутри или на конусе $|y'|=\tau y_1-|x'|$).

Предположим, что $F(y)\in A(\Omega_\rho)$ ограничена на $\partial\Omega_\rho$:

$$|F(y)|\leqslant B, y\in T=\partial\Omega_\rho\setminus S, \tag{4.8}$$

где B — заданное положительное число. В этом предположении верна обобщенная интегральная формула Коши

$$F(x)=\int\limits_{\partial\Omega_\rho}M_\sigma(y-x;H)F(y)dS_y,\quad x\in\Omega_\rho. \tag{4.9}$$

Обозначим

$$F_\sigma(x)=\int\limits_S M_\sigma(y-x;H)F(y)dS_y,\quad x\in\Omega_\rho, \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial F_\sigma}{\partial x_j}(x)=\int\limits_S\frac{\partial M_\sigma}{\partial x_j}(y-x;H)F(y)dS_y,\quad x\in\Omega_\rho. \tag{4.11}$$

Замечание 4.1. Из-за присутствия $\alpha_0=\sqrt{x_2^2+\ldots+x_n^2}$ в $\beta=\tau y_1-\alpha_0$ функция $\Phi_\sigma(y-x;\lambda)$, $y\in\partial\Omega_\rho$ не имеет производных по x_j, $j=2,\ldots,n$, в точках $x=x_0=(x_1,0,\ldots,0)\in\Omega_\rho$. Поэтому $\dfrac{\partial F_\sigma}{\partial x_j}(x)$ определены всюду в Ω_ρ, кроме точек $x=x_0$. Доопределим в точках $x=x_0$ производные следующим образом. В (4.10), (4.11) величину $\beta=\tau y_1$ полагаем равной $\beta=\tau y_1$ $(\gamma=\tau x_1)$. Тогда $\Phi_\sigma(y-x;\lambda)$, $y\in\partial\Omega_\rho$ дифференцируема по переменной x всюду в Ω_ρ. Таким образом, при $x\neq x_0\in\Omega_\rho$ производные $\dfrac{\partial F_\sigma}{\partial x_j}(x)$ определяются по формуле (4.11), где $\beta=\tau y_1-\alpha_0$. Затем в правой части (4.11) положим $\alpha_0=0$ $(\beta=\tau y_1)$ и вычислим производные по формуле $\dfrac{\partial F_\sigma}{\partial x_j}(x)$.

Теорема 4.1. *Пусть $F(y)\in A(\Omega_\rho)$ и $F(y)=f(y)$, где $f(y)$ — заданные на S вектор-функции класса $C(S)$. Тогда для любого $x\in\Omega_\rho$ справедливы формулы Карлемана*:

$$F(x)=\lim_{\sigma\to\infty}F_\sigma(x)=\lim_{\sigma\to\infty}\int\limits_S M_\sigma(y,x;H)f(y)dS_y,$$

$$\frac{\partial F_\sigma}{\partial x_j}(x)=\lim_{\sigma\to\infty}\frac{\partial F_\sigma}{\partial x_j}(x)=\lim_{\sigma\to\infty}\int\limits_S\frac{\partial M_\sigma}{\partial x_j}(y-x;H)F(y)dS_y. \tag{4.12}$$

Доказательство. Согласно формуле (4.9), имеем

$$F(x)=\int\limits_{S} M_\sigma(y,x;H)f(y)dS_y+\int\limits_{\partial\Omega_\rho\backslash S} M_\sigma(y,x;H)f(y)dS_y, \partial\Omega_\rho=S\cup(\partial\Omega_\rho\backslash S). \tag{4.13}$$

Оценим $M_\sigma(y,x;H)$. Для этого необходимо оценить

$$\Phi_\sigma(y-x;\lambda),\ \ \frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_i}(y-x;\lambda),\ \ i=1,\dots,n.$$

По построению

$$\Phi_\sigma(y-x;\lambda)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty\left[-\operatorname{Re}E_\rho(\sigma w)+(y_1-x_1)\frac{\operatorname{Im}E_\rho(\sigma w)}{\sqrt{u^2+s}}\right]\frac{\psi(\lambda u)du}{u^2+r^2}, \tag{4.14}$$

$$P_\sigma(y-x;\lambda)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty\operatorname{Im}E'_\rho(\sigma w)\frac{\psi(\lambda u)du}{\sqrt{u^2+s}},$$

$$P_\sigma(y-x;\lambda)=\frac{\partial\Phi_\sigma(y-x;\lambda)}{\partial\sigma}.$$

□

Аналогично [31], приводим следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Пусть K — компакт в G_ρ, δ — расстояние от K до ∂G_ρ. Тогда для $\sigma\geqslant 0$ при $x\in K$, $y\in\mathbb{R}^n\backslash G_\rho$ $(|y'|\geqslant\tau y_1)$ справедливы неравенства*

$$|\Phi_\sigma(y-x;\lambda)|+\left|\frac{\partial}{\partial y_i}\Phi_\sigma(y-x;\lambda)\right|\leqslant\frac{C_4(\rho,\delta)r}{1+\sigma\delta}, \tag{4.15}$$

$$|P_\sigma(y-x;\lambda)|+\left|\frac{\partial}{\partial y_i}P_\sigma(y-x;\lambda)\right|\leqslant\frac{C_5(\rho,\delta)r}{1+\sigma^2\delta^2},\ \ r\geqslant\delta>0. \tag{4.16}$$

Из леммы 4.1 следует утверждение теоремы. Действительно, если K — компакт в Ω_ρ, то $K\subset G_\rho$. Поэтому неравенства для $\Phi_\sigma(y,x;\lambda)$ и ее производных из леммы сохраняются и в том случае, когда $x\in K\subset\Omega_\rho$ и $y\in\partial\Omega_\rho\backslash S\subset\partial G_\rho$ (в этом случае δ — расстояние от компакта $K\subset\Omega_\rho$ до $\partial\Omega_\rho$.) Теперь устремим σ к бесконечности. Тогда предел интеграла в (4.13) по части $\partial\Omega_\rho\backslash S$ границы $\partial\Omega_\rho$ равен нулю, и получаем формулы (4.12).

Доказательство. Нужно оценить интеграл справа в равенстве (4.14) и его производные. С этой целью выберем $\varepsilon>0$ такое, чтобы $K\subset\overline{G}^\varepsilon_\rho(|x'|\leqslant\tau(x_1-\varepsilon))$, $\overline{G}^\varepsilon_\rho\subset G_\rho$. Так как расстояние от $\partial G^\varepsilon_\rho$ до ∂G_ρ равно $\varepsilon\tau_1$, то $\delta\geqslant\varepsilon\tau_1$. В условиях леммы имеем

$$\tau w=i\tau\sqrt{u^2+s}+\tau y_1-\tau x_1=\sqrt{u^2+s}(i\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\rho}+\frac{\tau y_1-\tau x_1}{\sqrt{u^2+s}}),\ \ u\geqslant 0,\ \ \rho>1,$$

$$\frac{\tau y_1-\tau x_1}{\sqrt{u^2+s}}\leqslant\frac{|y'|-|x'|-\varepsilon\tau}{|y'-x'|}\leqslant 1-\varepsilon_1,\ \ y'\neq x',\ \ |\arg(a\pm\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\rho})|\geqslant\frac{\pi}{2\rho};\ \ a\leqslant 1.$$

Таким образом выполняется (3.7): $\frac{\pi}{2}+\varepsilon_2\leqslant|\arg w|\leqslant\pi$, $\rho>1$, $\arg(\tau w)=\arg w$, $\operatorname{Re}w<0$ при $y'=x'$, неравенство подавно выполняется. Поэтому $E_\rho(w)=\psi_\rho(w)$, $w\in\Omega^-_\rho$, где $\beta=\frac{\pi}{2\rho}+\frac{\varepsilon_2}{2}$. Интегралы оцениваем согласно неравенствам (3.8):

$$|\operatorname{Re}E_\rho(\sigma w)|\leqslant\frac{C_6(\rho,\delta)\sigma r}{1+\sigma^2|w|^2}, \tag{4.17}$$

$$|w|^2=u^2+r^2\geqslant r^2\geqslant\delta^2,\ \ \delta\geqslant\tau_1\varepsilon,$$

$$\left|\frac{\operatorname{Im}E_\rho(\sigma w)}{\sqrt{u^2+s}}\right|\leqslant\frac{C_7(\rho,\delta)\sigma r}{1+\sigma^2|w|^2}, \tag{4.18}$$

где постоянные C_6, C_7 не зависят от σ, x, y.

Вычислим производные функции, определенные равенствами (3.4), (3.5) по переменным y_i, $i=1,2,\dots,n$ и заметим, что оценки (4.17) и (4.18) для них сохраняются, но с другими постоянными. Тогда получим неравенства (4.15).

Оценка (4.16) для $P_\sigma(y-x;\lambda)$ и ее производных следует из второй формулы (4.14) и неравенств (3.8), где $E'_\rho(w)=\psi'_\rho(w)$, а также формулы (3.6). $\square$

Формулы (4.12) можно написать в эквивалентной форме:

$$F(x)=\int\limits_0^\infty J_{1\sigma}(x,H)d\sigma+\int\limits_S M_0(y,x;H)f(y)dS_y, \tag{4.19}$$

где

$$J_{1\sigma}(x;H)=-\int\limits_S M_{1\sigma}(y,x;H)f(y)dS_y, \quad M_{1\sigma}(y,x;H)=\frac{d}{d\sigma}M_\sigma(y,x;H). \tag{4.20}$$

Теорема 4.2. *Пусть $S\subset C^2$, $f(y)\in C(S_0)\cap L(S)$. Тогда для существования решений $F(y)\in A(\Omega_\rho)$ таких, что $F(y)=f(y)$, $y\in S_0$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x\in G_\rho$ сходился несобственный интеграл* (*равномерно на компактах из G_ρ*):

$$\left|\int\limits_0^\infty J_{1\sigma}(x;H)d\sigma\right|<\infty, \tag{4.21}$$

где $J_{1\sigma}(x;H)$ определяется формулой (4.20).

Если условие (4.21) *выполнено, то аналитическое продолжение осуществляется эквивалентными формулами* (4.12) *и* (4.19).

Доказательство. Необходимость. Пусть $F(y)\in A(D_\rho)\cup S_0)\cap L(S)$ с условием (2.6), K — компакт в G_ρ и $\varepsilon>0$ такое, что $K\subset\overline{G}^{2\varepsilon}_\rho\subset\overline{G}^{\varepsilon}_\rho\subset G_\rho$. Ясно, что расстояние от K до $\partial G^\varepsilon_\rho$ не меньше $\varepsilon\tau_1$, а расстояние от $\partial G^{2\varepsilon}_\rho$ до $\partial G^\varepsilon_\rho$ равно $\varepsilon\tau_1$.

Пусть теперь $y\in\mathbb{R}^n/G^\varepsilon_\rho$ $(|y'|\geqslant\tau(y_1-\varepsilon),\ y_1>\varepsilon)$, $x\in K$ $(|x'|\leqslant\tau(x_1-2\varepsilon),\ x_1>2\varepsilon)$. Тогда $\arg w=\arg(\sigma w)=\arg(i\tau\sqrt{u^2+s}+\tau y_1-\tau x_1)$ и

$$\frac{\tau y_1-\tau x_1}{\sqrt{u^2+s}}\leqslant\frac{|y'|-|x'|-\varepsilon}{|y'-x'|}\leqslant 1-\varepsilon_1,\ \ u\geqslant 0,\ \ y'\neq x',\ \ \tau=\frac{\pi}{2\rho},\ \ \rho>1.$$

Поэтому для $\arg w$ справедливо неравенство (3.7), при этом если $y'=x'$, то $\operatorname{Re}w<0$ и это неравенство имеет место. Следовательно, для $\Phi_\sigma(y-x;\lambda)$, $P_\sigma(y-x;\lambda)$ справедливы оценки (4.15), (4.16) из леммы 4.1, где $\delta\geqslant\varepsilon\tau_1$. Обозначим $S_\varepsilon=\overline{G}^\varepsilon_\rho\cap S$, при этом часть $S_\varepsilon\subset S$ вместе с частью T_ε поверхности конуса $\partial G^\varepsilon_\rho$ в объединении состоит из замкнутой кусочно-гладкой поверхности $S_\varepsilon\cup T_\varepsilon$ (направление внешней нормали согласовано), являющейся границей односвязной ограниченной области. Интеграл в правой части формулы (4.20) представим в виде суммы двух интегралов согласно представлению $S=S_\varepsilon\cup(S\setminus S_\varepsilon)$. Так как функция $P_\sigma(y-x;\lambda)$ является регулярным решением системы (2.3), в силу формулы Стрэттона—Чу, интеграл по части S_ε равен интегралу по T_ε, причем $y\in T_\varepsilon$, $x\in K$, для $P_\sigma(y-x;\lambda)$ справедливы неравенства (4.16) и продолжение функции $F(y)$ ограничено постоянными числами, зависящими от ε. Поэтому модуль интеграла по части S_ε не превосходит величины $\dfrac{\mathrm{const}}{1+\delta^2\sigma^2}$ с постоянной, зависящей от ρ,ε,δ и диаметра области D_ρ. Так как $|y|\geqslant\tau(y_1-\varepsilon)$, $y_1\geqslant\varepsilon$, когда $y\in S\setminus S_\varepsilon$ и $x\in K$, $f(y)\in C(S_0)\cap L(S)$, то эти неравенства сохраняются для модуля интеграла по части $S\setminus S_\varepsilon$. Отсюда следует (4.21).

Достаточность. В условиях теоремы функции $F(x)$ определим для $x\in G_\rho\setminus S_0$ правыми частями (4.20). Рассмотрим первое слагаемое в правой части равенства (3.7). Так как $P_\sigma(y-x;\lambda)$ — решение системы (2.3) при $\sigma\geqslant 0$ в G_ρ, функции $J_1(x,\sigma)$ при $\sigma\geqslant 0$ также являются решением системы (2.3) в G_ρ. Поэтому из (4.21) заключаем, что первое слагаемое в правой части (4.20) представляет собой решение системы (2.3) в G_ρ как предел равномерно сходящейся последовательности решений системы уравнений (2.3) функций

$$F_n(x) = \int_0^n J_{1\sigma}(x; H) d\sigma, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Второе слагаемое является интегралом типа Коши и представляет одно решение в Ω_ρ, а другое в $\Omega'_\rho = G_\rho / \overline{\Omega}_\rho$. Поэтому правая часть в (4.20) определяет в Ω_ρ и Ω'_ρ два различных решения $F^+(x)$ и $F^-(x)$ соответственно. Это следует из (2.18). Если x_1, x_2 — две точки на нормали в точке $x \in S_0$, симметричные относительно точки x, то

$$\lim_{x_1 \to x} [F^+(x_1) - F^-(x_2)] = f(x), \tag{4.22}$$

причем предельные соотношения выполняются равномерно относительно x на каждой компактной части S_0. Если $\max y_1 < x_1$ где $y \in S,\ x \in G_\rho$, то $\operatorname{Re} w = y_1 - x_1 < 0$ и для $\Phi_\sigma(y - x; \lambda)$ и ее производных справедливы неравенства (4.15), (4.16). Видим, что $P^-(x) = 0$, и согласно теореме единственности $F^-(x) \equiv 0,\ x \in \Omega_\rho$. Ясно, что $F^-(x)$ гладко продолжается на $\Omega'_\rho \cup S_0$. Тогда $F^+(x)$ также гладко продолжается как функция класса $C(\Omega_\rho \cup S_0)$ (см. [17]). Следовательно, $F^+(x) = f(x),\ x \in S_0$. Теперь положим $F(x) = F^+(x),\ x \in \Omega_\rho \cup S_0$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. — М.: Наука, 1978.
2. *Айзенберг Л. А.* Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения. — Новосибирск: Наука, 1990.
3. *Айзенберг Л. А., Тарханов Н. Н.* Абстрактная формула Карлемана// Докл. АН СССР. — 1988. — *298*, № 6. — С. 1292–1296.
4. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1966.
5. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. — М.: Физматгиз, 1988.
6. *Владимиров В. С., Волович И. В.* Суперанализ I. Дифференциальное исчисление// Теор. мат. физ. — 1984. — *59*, № 1. — С. 3–27.
7. *Владимиров В. С., Волович И. В.* Суперанализ II. Интегральное исчисление// Теор. мат. физ. — 1984. — *60*, № 2. — С. 169–198.
8. *Джарбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функции в комплексной области. — М.: Наука, 1966.
9. *Иванов В. К.* Задача Коши для уравнения Лапласа в бесконечной полосе// Дифф. уравн. — 1965. — *1*, № 1. — С. 131–136.
10. *Ишанкулов Т. И.* О возможности обобщенно-аналитического продолжения в область функций, заданных на куске ее границы// Сиб. мат. ж. — 2000. — *41*, № 6. — С. 1350–1356.
11. *Лаврентьев М. М.* О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений второго порядка// Докл. АН СССР. — 1957. — *112*, № 2. — С. 195–197.
12. *Лаврентьев М. М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. — Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1962.
13. *Махмудов О. И.* Задача Коши для системы уравнений теории упругости и термоупругости в пространстве// Изв. вузов. Сер. Мат. — 2004. — *501*, № 2. — С. 43–53.
14. *Мергелян С. Н.* Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа// Усп. мат. наук. — 1956. — *11*, № 5. — С. 3–26.
15. *Никифоров Л. Ф., Уваров В. Б.* Основы теории специальных функций. — М.: Наука, 1974.
16. *Оболашвили Е. И.* Пространственный аналог обобщенных аналитических функций// Сообщ. АН ГССР. — 1974. — *73*, № 1. — С. 20–24.
17. *Оболашвили Е. И.* Обобщенная система Коши—Римана в многомерном евклидовом пространстве// Сб. докл. Межд. конф. по компл. анализу и его применениям к уравн. с частн. производными (Галле, ГДР, 18–24 октября 1976 г.). — Галле, 1977. — С. 36–39.
18. *Оболашвили Е. И.* Обобщенная система Коши—Римана в многомерном пространстве// Тр. Тбилис. мат. ин-та. — 1978. — *58*. — С. 168–173.
19. *Сатторов Э. Н.* Регуляризация решения задачи Коши для обобщенной системы Моисила—Теодореску// Дифф. уравн. — 2008. — *44*, № 8. — С. 1100–1110.

20. *Сатторов Э. Н.* О продолжении решений обобщенной системы Коши—Римана в пространстве// Мат. заметки. — 2009. — *85*, № 5. — С. 768–781.
21. *Сатторов Э. Н.* Регуляризация решения задачи Коши для системы уравнений Максвелла в бесконечной области// Мат. заметки. — 2009. — *86*, № 6. — С. 445–455.
22. *Сатторов Э. Н.* О восстановлении решений обобщенной системы Моисила—Теодореску в пространственной области по их значениям на куске границы// Изв. вузов. Сер. Мат. — 2011. — *1*. — С. 72–84.
23. *Сатторов Э. Н., Мардонов Дж. А.* Задача Коши для системы уравнений Максвелла// Сиб. мат. ж. — 2003. — *44*, № 4. — С. 851–861.
24. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. — М.: Мир, 1974.
25. *Тарханов Н. Н.* О матрице Карлемана для эллиптических систем// Докл. АН СССР. — 1985. — *284*, № 2. — С. 294–297.
26. *Тихонов А. Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации// Докл. АН СССР. — 1963. — *151*, № 3. — С. 501–504.
27. *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных. — М.: ИЛ, 1957.
28. *Ярмухамедов Ш.* О задаче Коши для уравнения Лапласа// Докл. АН СССР. — 1977. — *235*, № 2. — С. 281–283.
29. *Ярмухамедов Ш.* Об аналитическом продолжении голоморфного вектора по его граничным значениям на куске границы// Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1980. — *6*. — С. 34–40.
30. *Ярмухамедов Ш.* О продолжении решения уравнения Гельмгольца// Докл. РАН. — 1997. — *357*, № 3. — С. 320–323.
31. *Ярмухаммедов Ш.* Функция Карлемана и задача Коши для уравнения Лапласа// Сиб. мат. ж. — 2004. — *45*, № 3. — С. 702–719.
32. *Brackx F., Delanghe K., Sommen F.* Clifford analysis. — Boston—London—Melbourne: Pitman, 1982.
33. *Makhmudov O., Niyozov I., Tarkhanov N.* The Cauchy problem of couple-stress elasticity// Contemp. Math. — 2008. — *455*. — С. 297–310.
34. *Tarkhanov N. N.* Cauchy problem for solutions of elliptic equations. — Berlin: Akademie-Verlag, 1995.

Э. Н. Сатторов
Самаркандский государственный университет им. А. Навои,
Узбекистан, 140104, г. Самарканд, Университетский б-р, д. 15
E-mail: Sattorov-e@rambler.ru

Ф. Э. Эрмаматова
Самаркандский государственный университет им. А. Навои,
Узбекистан, 140104, г. Самарканд, Университетский б-р, д. 15
E-mail: Fotima-e@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-95-108 UDC 517.946

Carleman's Formula for Solutions of the Generalized Cauchy–Riemann System in Multidimensional Spatial Domain

© 2019 **E. N. Sattorov, F. E. Ermamatova**

Abstract. In this paper, we consider the restoration problem for solutions of the generalized Cauchy–Riemann system in a multidimensional spatial domain using their values on a piece of the boundary of the domain, i. e., the Cauchy problem. We construct an approximate solution of this problem based on the Carleman matrix method.

©Peoples' Friendship University of Russia, 2019

REFERENCES

1. J. Hadamard, *Zadacha Koshi dlya lineynykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi giperbolicheskogo tipa* [Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations of Hyperbolic Type], Nauka, Moscow, 1978 (Russian translation).
2. L. A. Eisenberg, *Formuly Karlemana v kompleksnom analize. Pervye prilozheniya* [Carleman's Formulas in Complex Analysis. First Applications], Nauka, Novosibirsk, 1990 (in Russian).
3. L. A. Eisenberg and N. N. Tarkhanov, "Abstraktnaya formula Karlemana" [Abstract Carlemans Formula], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1988, **298**, No. 6, 1292–1296 (in Russian).
4. L. Bers, F. John, and M. Schechter, *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi* [Partial Differential Equations], Mir, Moscow, 1966 (Russian translations).
5. I. N. Vekua, *Obobshchennye analiticheskie funktsii* [Generalized Analytic Functions], Fizmatgiz, Moscow, 1988 (in Russian).
6. V. S. Vladimirov and I. V. Volovich, "Superanaliz I. Differentsial'noe ischislenie" [Superanalysis I. Differential Calculus], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 1984, **59**, No. 1, 3–27 (in Russian).
7. V. S. Vladimirov and I. V. Volovich, "Superanaliz II. Integral'noe ischislenie" [Superanalysis II. Integral Calculus], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 1984, **60**, No. 2, 169–198 (in Russian).
8. M. M. Dzharbashyan, *Integral'nye preobrazovaniya i predstavleniya funktsii v kompleksnoy oblasti* [Integral Transformations and Representations of Functions in Complex Domain], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
9. V. K. Ivanov, "Zadacha Koshi dlya uravneniya Laplasa v beskonechnoy polose" [The Cauchy problem for the Laplace equations in infinite strip], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1965, **1**, No. 1, 131–136 (in Russian).
10. T. I. Ishankulov, "O vozmozhnosti obobshchenno-analiticheskogo prodolzheniya v oblast' funktsiy, zadannykh na kuske ee granitsy" [On generalized analytic continuation into the domain for functions defined on a part of its boundary], *Sib. mat. zh.* [Sib. Math. J.], 2000, **41**, No. 6, 1350–1356 (in Russian).
11. M. M. Lavrent'ev, "O zadache Koshi dlya lineynykh ellipticheskikh uravneniy vtorogo poryadka" [On the Cauchy problem for second-order linear elliptic equations], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1957, **112**, No. 2, 195–197 (in Russian).
12. M. M. Lavrent'ev, *O nekotorykh nekorrektnykh zadachakh matematicheskoy fiziki* [On Some Ill-Posed Problems of Mathematical Physics], VTS SO AN SSSR, Novosibirsk, 1962 (in Russian).
13. O. I. Makhmudov, "Zadacha Koshi dlya sistemy uravneniy teorii uprugosti i termouprugosti v prostranstve" [The Cauchy problem for a system of equations from the elasticity and thermoelasticity theory in the space], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2004, **501**, No. 2, 43–53 (in Russian).
14. S. N. Mergelyan, "Garmonicheskaya approksimatsiya i priblizhennoe reshenie zadachi Koshi dlya uravneniya Laplasa" [Harmonic approximation and approximate solution of the Cauchy problem for the Laplace equation], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1956, **11**, No. 5, 3–26 (in Russian).
15. L. F. Nikiforov and V. B. Uvarov, *Osnovy teorii spetsial'nykh funktsiy* [Foundations of the Theory of Special Functions], Nauka, Moscow, 1974 (in Russian).
16. E. I. Obolashvili, "Prostranstvennyy analog obobshchennykh analiticheskikh funktsiy" [Spatial analog of generalized analytic functions], *Soobshch. AN GSSR* [Rep. Acad. Sci. Georgian SSR], 1974, **73**, No. 1, 20–24 (in Russian).
17. E. I. Obolashvili, "Obobshchennaya sistema Koshi—Rimana v mnogomernom evklidovom prostranstve" [Generalized Cauchy–Riemann system in multidimensional Euclidean space], *Sb. dokl. Mezhd. konf. po kompl. analizu i ego primeneniyam k uravn. s chastn. proizvodnymi* (Galle, GDR, 18–24 Oct. 1976), Galle, 1977, pp. 36–39 (in Russian).
18. E. I. Obolashvili, "Obobshchennaya sistema Koshi—Rimana v mnogomernom prostranstve" [Generalized Cauchy–Riemann system in multidimensional space], *Tr. Tbilis. mat. in-ta* [Proc. Tbilisi Math. Inst.], 1978, **58**, 168–173 (in Russian).
19. E. N. Sattorov, "Regulyarizatsiya resheniya zadachi Koshi dlya obobshchennoy sistemy Moisila—Teodoresku" [Regularization of solution of the Cauchy problem for the generalized Moisil–Theodorescu system], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2008, **44**, No. 8, 1100–1110 (in Russian).
20. E. N. Sattorov, "O prodolzhenii resheniy obobshchennoy sistemy Koshi—Rimana v prostranstve" [On continuation of solutions of the generalized Cauchy–Riemann system in the space], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2009, **85**, No. 5, 768–781 (in Russian).
21. E. N. Sattorov, "Regulyarizatsiya resheniya zadachi Koshi dlya sistemy uravneniy Maksvella v beskonechnoy oblasti" [Regularization of solution of the Cauchy problem for the Maxwell system of equations in infinite domain], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2009, **86**, No. 6, 445–455 (in Russian).

22. E. N. Sattorov, “O vosstanovlenii resheniy obobshchennoy sistemy Moisila—Teodoresku v prostranstvennoy oblasti po ikh znacheniyam na kuske granitsy” [On restoration of solutions of the generalized Moisil–Theodorescu system in a spatial domain by their values of a part of the boundary], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2011, **1**, 72–84 (in Russian).
23. E. N. Sattorov and Dzh. A. Mardonov, “Zadacha Koshi dlya sistemy uravneniy Maksvella” [The Cauchy problem for the Maxwell system of equations], *Sib. mat. zh.* [Sib. Math. J.], 2003, **44**, No. 4, 851–861 (in Russian).
24. E. Stein and G. Weiss, *Vvedenie v garmonicheskiy analiz na evklidovykh prostranstvakh* [Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces], Mir, Moscow, 1974 (Russian translation).
25. N. N. Tarkhanov, “O matritse Karlemana dlya ellipticheskikh sistem” [On the Carleman matrix for elliptic systems], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1985, **284**, No. 2, 294–297 (in Russian).
26. A. N. Tikhonov, “O reshenii nekorrektno postavlennykh zadach i metode regulyarizatsii” [On solution of ill-posed problems and the regularization method], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1963, **151**, No. 3, 501–504 (in Russian).
27. F. Tricomi, *Lektsii po uravneniyam v chastnykh proizvodnykh* [Lezioni sulle equazioni a derivate parziali], IL, Moscow, 1957 (Russian translation).
28. Sh. Yarmukhamedov, “O zadache Koshi dlya uravneniya Laplasa” [On the Cauchy problem for the Laplace equation], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1977, **235**, No. 2, 281–283 (in Russian).
29. Sh. Yarmukhamedov, “Ob analiticheskom prodolzhenii golomorfnogo vektora po ego granichnym znacheniyam na kuske granitsy” [On analytic continuation of a holomorphic vector by its boundary values on a part of the boundary], *Izv. AN UzSSR. Ser. fiz.-mat. nauk* [Bull. Acad. Sci. Uzbek SSR. Ser. Phys.-Math. Sci.], 1980, **6**, 34–40 (in Russian).
30. Sh. Yarmukhamedov, “O prodolzhenii resheniya uravneniya Gel’mgol’tsa” [On continuation of solution of the Helmholtz equation], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1997, **357**, No. 3, 320–323 (in Russian).
31. Sh. Yarmukhammedov, “Funktsiya Karlemana i zadacha Koshi dlya uravneniya Laplasa” [Carleman’s function and the Cauchy problem for the Laplace equation], *Sib. mat. zh.* [Sib. Math. J.], 2004, **45**, No. 3, 702–719 (in Russian).
32. F. Brackx, K. Delanghe, and F. Sommen, *Clifford analysis*, Pitman, Boston—London—Melbourne, 1982.
33. O. Makhmudov, I. Niyozov, and N. Tarkhanov, “The Cauchy problem of couple-stress elasticity,” *Contemp. Math.*, 2008, **455**, 297–310.
34. N. N. Tarkhanov, *Cauchy problem for solutions of elliptic equations*, Akademie-Verlag, Berlin, 1995.

E. N. Sattorov
Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan
E-mail: Sattorov-e@rambler.ru

F. E. Ermamatova
Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan
E-mail: Fotima-e@mail.ru