Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 1 (2019). С. 83–94

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-83-94 УДК 517.55+517.559

# ПРОДОЛЖЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ И ПЛЮРИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПО ЗАДАННОМУ НАПРАВЛЕНИЮ МЕТОДОМ Е. М. ЧИРКИ (ОБЗОР)

© 2019 г. **А. САДУЛЛАЕВ**

Аннотация. В работе приводится обзор результатов по аналитическим и плюрисубгармоническим продолжениям функций, имеющих тонкое множество особенностей вдоль фиксированного направления. Демонстрируются возможности применения теории плюрипотенциала и рядов Якоби—Хартогса в описании особого множества рассматриваемых функций.

## ОГЛАВЛЕНИЕ



## 1. Введение

Начнем со следующей теоремы, опубликованной в совместной с Е. М. Чиркой работе [18].

**Теорема 1.1.** *Пусть функция $f$ голоморфна в поликруге $U = {}'U \times U_n \subset \mathbb{C}^{n-1}_{'z} \times \mathbb{C}_{z_n}$ и при каждом фиксированном $'a$ из некоторого не плюриполярного множества $E \subset' U$ функция $f('a, z_n)$ переменного $z_n$ продолжается до функции, голоморфной на всей плоскости за исключением некоторого полярного (дискретного) множества особенностей $S_{'a}$. Тогда $f$ голоморфно продолжается в $('U \times \mathbb{C}) \setminus S$, где $S$ — замкнутое плюриполярное (аналитическое) подмножество $'U \times \mathbb{C}$.*

Трудный момент доказательства теоремы — это описание особого множества вне $U$; априори $\bigcup\limits_{'a \in' U} S_{'a}$ может быть всюду плотным в $'U \times [\mathbb{C} \setminus U_n]$. Эти трудности преодолевается следующим путем:

1). С использованием следующего критерия принадлежности ростка $f$ классу $R^0$ А. А. Гончара в терминах тейлоровских коэффициентов, устанавливается, что $f('a, z_n)$ принадлежит $R^0$ для всех фиксированных $'a \in' U$: пусть

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \tag{1.1}$$

— росток голоморфной в точке $0 \in \mathbb{C}$ функции. Рассматривая $f(rz)$ вместо $f(z)$, мы можем считать, что в (1.1) радиус сходимости ряда $R > 1$. Тогда определены величины

$$V_m = \max_{j_1, j_2, \dots, j_m} \operatorname{mod} \begin{vmatrix} a_{j_1} & a_{j_1+1} & \dots & a_{j_1+m-1} \\ a_{j_2} & a_{j_2+1} & \dots & a_{j_2+m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j_m} & a_{j_m+1} & \dots & a_{j_m+m-1} \end{vmatrix}, \tag{1.2}$$

где $\operatorname{mod} |\cdot|$ обозначает модуль соответствующего определителя.

**Теорема 1.2** (см. [10]). *Функция $f \in \mathcal{O}(\{|z| \leqslant 1\})$ принадлежит классу $R^0$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{m\to\infty} V_m^{1/m^2} = 0$.*

Отметим, что величина $V_m$ в (1.2) по содержанию близка к модулю определителя Ганкеля

$$A_m = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m & a_{m+1} & \dots & a_{2m-1} \end{vmatrix}, \ \operatorname{mod} A_m = |A_m| \leqslant V_m.$$

Вполне вероятно, что сформулированная теорема 1.2 справедлива и в терминах определителей Ганкеля в следующем виде, что функция $f \in \mathcal{O}(\{|z| \leqslant 1\})$ принадлежит классу $R^0$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{m\to\infty} |A_m|^{1/m^2} = 0$. Однако доказательство этого утверждения пока не представляется нам возможным. Напомним, что функция $f \in \mathcal{O}(\{|z| \leqslant 1\})$ является рациональной функцией степени $m$ тогда и только тогда, когда $A_{m+1} = A_{m+2} = \ldots = 0$ или, что то же самое, $V_{m+1} = V_{m+2} = \ldots = 0$ (теорема Кронекера).

2). Поскольку множество $E \subset' U$ не является плюриполярным, то из теоремы 1.2 вытекает, что $f('a, z_n) \in R^0$, $\forall 'a \in' U$. Тогда по теореме Гончара [4, 5] $f('z, z_n)$ не имеет многозначного продолжения, т. е. ее естественная область существования $W_{(f,U)}$ однолистна, $W_{(f,U)} \subset \mathbb{C}^n$.

3). Далее в доказательстве теоремы 1.1, чтобы добраться до неизвестных особых точек функции $f$, используется один прекрасный метод, основанный на разложении ростка функций в ряд Якоби—Хартогса. Метод был разработан Е. М. Чиркой [19], где он использовал такие ряды для вычисления скорости рационального приближения.

*Ряды Якоби—Хартогса.* Рассмотрим на плоскости $\mathbb{C}$ рациональную лемнискату $G_r$, точнее, объединение нескольких связных компонент множества $|g(z)| < r$, определяемого некоторой рациональной функцией $g$. Пусть $f(z)$ голоморфна в окрестности $\overline{G}_r$. Функция

$$F(z,w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G_r} \frac{f(\xi)}{g(\xi)-w} \cdot \frac{g(\xi)-g(z)}{\xi - z} d\xi$$

голоморфна в области $G_r \times \{|w| < r\}$, причем $F(z, g(z)) \equiv f(z)$ в $G_r$ по интегральной формуле Коши. Разложим $F(z,w)$ в ряд Хартогса по $w$:

$$F(z,w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z) w^k.$$

Подставляя в него $w = g(z)$, мы получим разложение в ряд Якоби:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z) g^k(z) \tag{1.3}$$

с рациональными коэффициентами

$$c_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G_r} f(\xi) \frac{g(\xi)-g(z)}{g^{k+1}(\xi)(\xi - z)} d\xi. \tag{1.4}$$

Областью сходимости ряда (1.3) является внутренность лемнискаты $|g(z)| < R$, где радиус сходимости $R$ определяется по формуле

$$\varlimsup_{k\to\infty} \|c_k\|_K^{1/k} = \frac{1}{R}.$$

Здесь $K$ — произвольный компакт положительной емкости, не содержащий полюсов $g$, а предел в левой части равенства не зависит от выбора такого компакта.

Теперь вернемся к нашей функции $f('z, z_n) \in \mathcal{O}('U \times U_n)$, которая при каждом фиксированном $'z$ из некоторого не плюриполярного множества $E \subset' U$ по переменной $z_n$ продолжается до функции, голоморфной на всей плоскости, за исключением некоторого полярного (дискретного) множества особенностей. Фиксируем рациональную функцию вида

$$g(z_n) = \frac{z_n^m}{p_m(z_n)}, \tag{1.5}$$

где $p_m(z_n)$ — некоторый полином степени $m > 0$ с рациональными коэффициентами и $p(0) \neq 0$. Разлагаем функцию $f('z, z_n)$ в ряд Якоби—Хартогса:

$$f('z, z_n) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k('z, z_n) g^k(z_n). \tag{1.6}$$

Из формулы коэффициентов (1.4) мы видим, что $c_k('z, z_n)$ — рациональные функции по $z_n$, $\deg_{z_n} c_k('z, z_n) \leqslant m$, с коэффициентами, голоморфными в $'U$. Область сходимости этого ряда есть $G_g = \{|g(z_n)| < R_*('z)\}$, где $R_*('z) = \varliminf\limits_{'w \to 'z} R('w)$ — нижняя регуляризация функции $R('z) = R^g('z)$,

$$\frac{1}{R('z)} = \varlimsup_{k \to \infty} \|c_k('z, z_n)\|^{1/k}_{\{|z_n| \leqslant \delta\}}.$$

Отметим, что «иррегулярное» множество $I_g = \{R^g_*('z) < R^g('z)\}$ является плюриполярным множеством в $'U$.

4). Далее применяется теория плюрипотенциала: обозначим через $I = \bigcup\limits_g I_g$ счетное объединение иррегулярных множеств по всем счетным семействам рациональных функций вида (1.5). Оно является плюриполярным множеством. Следовательно, множество $E \backslash I$ не является плюриполярным. Так как функция $f$ как сумма ряда (1.6) голоморфно продолжается в область $G_g = \{|g(z_n)| < R^g_*('z)\}$, то она голоморфно продолжается и в объединение $G = \bigcup\limits_g G_g$, причем это продолжение однозначно согласно 2). Если $'a \in E \backslash I$, то нетрудно видеть, что

$$G \cap \{'z =' a\} = \bigcup_g \{|g(z_n)| < R^g_*('z)\} \cap \{'z =' a\} =$$

$$= \bigcup_g \{|g(z_n)| < R^g('z)\} \cap \{'z =' a\} = \mathbb{C} \backslash S_{'a}.$$

Таким образом, если $\hat{f}$ — голоморфное продолжение функции $f$, то ее особое множество $S$ обладает тем свойством, что пересечение $S \cap \{'z\} = S_{'z}$ — полярное (дискретное) для всех $'z \in E \backslash I$. Так как особое множество $S$, кроме того, псевдовогнутое, то утверждение теоремы непосредственно вытекает из следующих известных фактов (см. [9, 10, 24, 25, 29]): пусть $S \subset' U \times U_n$ — псевдовогнутое множество такое, что $\overline{S} \cap \{'U \times \partial U_n\} = \varnothing$ и $E$ — некоторое неплюриполярное множество в $'U$. Тогда

а) если пересечения $\{'z\} \cap S$, $\forall\, 'z \in E$ — конечные (дискретные), то они конечны (дискретны) для всех $'z \in' U$, а $S$ является аналитическим множеством в $'U \times U_n$;

б) если пересечения $\{'z\} \cap S$, $\forall\, 'z \in E$ — полярные, то они являются полярными для всех $'z \in' U$, а $S$ является плюриполярным множеством в $'U \times U_n$.

## 2. Дальнейшие развитие теоремы 1.1

Имеющие непосредственное отношения к теореме 1.1 результаты имеются в работах У. Ротштейна (мероморфное продолжение) [26] и М. Казаряна (одна особая точка) [7, 8] (см. также [21]). Дальнейшие развитие теорема 1.1 получила в серии работ автора, С. Имамкулова, Ж. Хужамова, А. Атамуратова и М. Ваисовой (см. [1–3, 6, 12, 15–17, 20, 22]), в которых разобраны и случаи граничных множеств: $f('z, z_n) \in \mathcal{O}('D \times U_n)$ и $E \in \partial' D$. В частности, верна следующая теорема.

**Теорема 2.1** (см. [16, 22]). *Пусть $'D \subset \mathbb{C}^{n-1}$ — ограниченная область с гладкой границей, $E \subset \partial D$ — подмножество положительной меры Лебега, $mes_{2n-1} E > 0$, $f('z, z_n) \in \mathcal{O}('D \times U_n) \cap C(('D \cup E) \times U_n)$, $U_n = \{|z_n| < r\}$, $r > 0$. Если при каждом фиксированном $'a \in E$ функция $f('a, z_n)$ переменной $z_n$ продолжается до функции, голоморфной на всей плоскости, за исключением некоторого полярного (дискретного) множества особенностей $S_{'a}$, то $f$ голоморфно продолжается в $('D \times \mathbb{C}) \backslash S$, где $S$ — замкнутое плюриполярное (аналитическое) подмножество $'D \times \mathbb{C}$.*

В связи с теоремой 2.1 интересным является следующий вопрос: если $E \subset \partial D$ — открытое подмножество, то сохранится ли непрерывность функции $f('z, z_n) \in \mathcal{O}('D \times U_n) \cap C\left(('D \cup E) \times U_n\right)$ вплоть до граничного множества $(E \times \mathbb{C}) \setminus \overline{S}$? Следующий пример показывает, что без дополнительного условия ограниченности функции $f$ ее непрерывность может нарушаться. В случае ограниченности функции на множестве $(('D \cup E) \times \mathbb{C}) \setminus \overline{S}$ требуемая непрерывность функции вытекает из свойств ограниченных сепаратно-аналитических функций (см. [17]).

**Пример 2.1.** Берем в бикруге

$$U \times V = \{|z| < 1\} \times \{|w| < 1\}$$

функцию

$$f(z, w) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - z) \frac{e^{k^2(z-1)}}{k^2} w^k.$$

Из неравенства

$$\left| (1 - z) \frac{e^{k^2(z-1)}}{k^2} w^k \right| \leqslant \frac{2}{k^2} e^{k^2 \operatorname{Re}(z-1)} \leqslant \frac{2}{k^2}, \ |z| \leqslant 1, \ |w| \leqslant 1,$$

следует, что ряд равномерно сходится в замкнутом поликруге $\overline{U} \times \overline{V}$ и его сумма $f(z, w) \in \mathcal{O}(U \times V) \cap C(\overline{U} \times \overline{V})$. Более того, для любого фиксированного $z^0 \in \overline{U}, \ |z^0| = 1$ функция $f(z^0, w)$ голоморфно продолжается на всю плоскость $\mathbb{C}$. Однако

$$f\left(1 - \frac{1}{j}, 2\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k^2/j^2}}{j^2 k^2} 2^k \geqslant \frac{2^j}{j^4} \to \infty$$

при $j \to \infty$, что показывает неограниченность $f(z, w)$ вблизи граничной прямой $\{z = 1\}$.

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.2** (см. [12]). *Если в условиях теоремы* 2.1 $E$ — *открытое подмножество границы* $\partial' D$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *существует открытое плотное подмножество* $E^\varepsilon \subset E$ *такое, что аналитическое продолжение* $f$, *которое голоморфно в* $('D \times \mathbb{C}) \setminus S$, *будет непрерывным в* $(('D \cup E^\varepsilon) \times \mathbb{C}) \setminus \overline{S}^{\,\varepsilon}$, *где* $\overline{S}^{\,\varepsilon}$ *есть* $\varepsilon$-*окрестность множества* $\overline{S}$.

В работе [6] С. Имамкулов несколько усилил теорему 2.1, доказав ее для порождающего многообразия $M \subset \partial' D$.

**Теорема 2.3.** *Пусть* $'D \subset \mathbb{C}^{n-1}$ — *ограниченная область с гладкой границей и* $M \subset \partial' D$ — *гладкое порождающее* $k$-*мерное многообразие,* $n - 1 \leqslant k \leqslant 2n - 3$. *Предположим, что функция* $f('z, z_n)$ *голоморфна в поликруговой области* $('D \times U_n)$, $U_n = \{|z_n| < r\}$, $r > 0$, *непрерывна на* $(\overline{'D} \times U_n)$ *и при каждом фиксированном* $'\xi$ *из некоторого множества* $E \subset M$ *положительной меры Лебега на* $M$, $m_k(E) > 0$, *функция* $f('\xi, z_n)$ *переменной* $z_n$ *продолжается до функции, голоморфной на всей плоскости, за исключением некоторого полярного* (*дискретного*) *множества особенностей. Тогда* $f('z, z_n)$ *голоморфно продолжается в* $('D \times \mathbb{C}) \setminus S$, *где* $S$ — *замкнутое плюриполярное* (*аналитическое*) *подмножество* $'D \times \mathbb{C}$.

Отметим, что в доказательствах этих теорем также существенно используется метод разложения функций в ряд Якоби—Хартогса.

## 3. Случай плюригармонических функций

Лемма Хартогса о голоморфном продолжении вдоль фиксированного направления справедлива и в случае плюригармонических ($ph$) функций: *если функция* $u('z, z_n)$ *плюригармонична в области* $U =' U \times U_n \subset \mathbb{C}^{n-1}_{'z} \times \mathbb{C}_{z_n}$ *и при каждом фиксированном* $'a \in' U$ *функция* $u('a, z_n)$ *переменного* $z_n$ *гармонически продолжается в большой круг* $\tilde{U}_n \supset U_n$, *то функция* $u('z, z_n)$ *плюригармонически продолжается в* $\tilde{U} =' U \times \tilde{U}_n$.

В самом деле, функция $f('z, z_n) = u('z, z_n) + v('z, z_n)$, где $v('z, z_n)$ — сопряженная плюригармоническая функция в $U =' U \times U_n$, будет сопряженной по $z_n$ в $\tilde{U}_n$. Следовательно, по лемме Хартогса $f$ голоморфно продолжается в $\tilde{U}$, т. е. $u('z, z_n) \in ph(\tilde{U})$.

Однако в случае, когда $u('z, z_n)$ по направлению $Oz_n$ имеет особенность, такое простое доказательство не проходит, так как сопряженная гармоническая функция в неодносвязную область может продолжаться неоднозначным образом, т. е. функция $f('z, z_n) = u('z, z_n) + v('z, z_n)$ может быть многозначной. Тем не менее, имеет место теорема.

**Теорема 3.1.** *Пусть функция $u('z, z_n)$ плюригармонична в поликруге $U =' U \times U_n \subset \mathbb{C}^{n-1}_{'z} \times \mathbb{C}_{z_n}$ и при каждом фиксированном $'a$ из некоторого неплюриполярного множества $E \subset' U$ функция $u('a, z_n)$ переменного $z_n$ продолжается до функции, гармонической на всей плоскости, за исключением некоторого полярного (дискретного) множества особенностей $S_{'a}$. Тогда $u('z, z_n)$ плюригармонически (может быть, многозначно) продолжается в $('U \times \mathbb{C})\backslash S$, где $S$ — замкнутое плюриполярное (аналитическое) подмножество $'U \times \mathbb{C}$. Более того, если $E$ всюду плотно в $'U$, то продолжение $u('z, z_n)$ является однозначным.*

*Доказательство.* Приведем ход доказательства этой теоремы, которая в работах [12, 17] доказана в частном случае. Так как $u('z, z_n) \in ph('U \times U_n)$, то в $'U \times U_n$ существует голоморфная функция $f('z, z_n) \in \mathcal{O}('U \times U_n) :\ u('z, z_n) = f('z, z_n) + \overline{f}('z, z_n)$. Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial z_n} = \frac{\partial (f + \overline{f})}{\partial z_n} = \frac{\partial f}{\partial z_n} \in \mathcal{O}('U \times U_n),$$

причем для фиксированного $'z^0 \in E$ функция $\dfrac{\partial u}{\partial z_n}('z^0, z_n)$ голоморфна в $\mathbb{C}\backslash S_{'z^0}$. По теореме 1.1 функция $\dfrac{\partial u}{\partial z_n}$ голоморфно продолжается в $('U \times \mathbb{C})\backslash S$, где $S$ является замкнутым плюриполярным (аналитическим) подмножеством $'U \times \mathbb{C}$.

Положим

$$F('z, z_n) = \int\limits_{\gamma[0, z_n]} \frac{\partial u}{\partial z_n} dz_n,$$

где $\gamma \subset \mathbb{C}\backslash S_{'z}$ — произвольный спрямляемый путь. Ясно, что $F$ представляет собой многозначную аналитическую функцию в $('U \times \overline{\mathbb{C}})\backslash S$. Кроме того,

$$2\,\mathrm{Re}\, F('z, z_n) = u('z, z_n) - u(0, z_n). \tag{3.1}$$

Действительно, если $w(z), z = x + iy$ — гладкая функция в плоской области $D \subset \mathbb{C}$ и $\gamma \subset D$ — спрямляемая кривая, соединяющая $'z, ''z \in D$, то

$$\int\limits_{\gamma} \frac{\partial w}{\partial z} dz = \frac{1}{2} \int\limits_{\gamma} \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{i}{2} \int\limits_{\gamma} \frac{\partial w}{\partial x} dy - \frac{\partial w}{\partial y} dx = \frac{1}{2}[w(''z) - w('z)] + \frac{i}{2} \int\limits_{\gamma} \frac{\partial w}{\partial x} dy - \frac{\partial w}{\partial y} dx,$$

что влечет справедливость (3.1). Следовательно, функция $u('z, z_n) = 2\,\mathrm{Re}\, F('z, z_n) - u(0, z_n)$ является многозначной плюригармонической функцией.

Функция $u('z, z_n)$ является однозначной тогда и только тогда, когда $\mathrm{Re}\, F('z, z_n)$ является однозначной, т. е. когда

$$\mathrm{Re} \oint_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial z_n} dz_n = 0 \tag{3.2}$$

для любой замкнутой спрямляемой кривой $\gamma \subset \{'z\}\backslash S_{'z}$. Для доказательства второй части теоремы нам нужно доказать равенство (3.2).

Предположим противное, что существуют точка $'z^0 \in' U$ и спрямляемая замкнутая кривая $\gamma \subset \{'z^0\}\backslash S_{'z^0}$ такие, что

$$\mathrm{Re} \oint_{\gamma} \frac{\partial u('z^0, z_n)}{\partial z_n} dz_n \neq 0.$$

Тогда существует окрестность $'V \subset' U$, $'z^0 \in' V$ такая, что $\gamma \subset \{'z\}\backslash S_{'z}$, $\forall 'z \in' V$. Интеграл

$$\oint_{\gamma} \frac{\partial u('z, z_n)}{\partial z_n} dz_n$$

представляет собой голоморфную в $'V$ функцию. Следовательно, функция

$$\operatorname{Re}\oint_\gamma \frac{\partial u('z,z_n)}{\partial z_n}dz_n$$

является плюригармонической в $'V$. Для $'z\in E$ она равна нулю, ибо функция $u('z,z_n)$ является однозначной. Из всюду плотности $E$ отсюда вытекает, что

$$\operatorname{Re}\oint_\gamma \frac{\partial u('z,z_n)}{\partial z_n}dz_n\equiv 0$$

в $'V$, что противоречит включению $'z^0\in' V$. Теорема доказана. □

**Замечание 3.1.** В случае, когда в теореме 3.1 при каждом фиксированном $'a\in E$ функция $u('a,z_n)$ переменного $z_n$ продолжается до функции, гармонической на всей плоскости, за исключением некоторого дискретного множества $S_{'a}$, теорему можно существенно усилить. А именно, для однозначности продолжения $u('a,z_n)$ от $E$ можно потребовать лишь, что $E$ не является множеством нулей плюригармонических функций (в частности, хаусдорфова мера $H_{2n-1}(E)>0$).

В самом деле, в этом случае особое множество $S\subset' U\times\mathbb{C}$ будет аналитическим множеством. Рассмотрим совокупность его регулярных точек $S_0\subset S$ такую, что в некоторой окрестности $V$ каждой точки $z^0\in S_0$ множество $V\cap S$ является графиком аналитической функции, $V\cap S=\{z_n=a('z)\}$. Тогда проекция $\pi(S\backslash S_0)$ множества $S\backslash S_0$ в $'U$ является плюриполярным множеством. Следовательно, $E\backslash\pi(S\backslash S_0)$ тоже не будет нулем никакой плюригармонической функции. Отсюда мы заключаем, что множество $\pi^{-1}(E)\cap S_0$ не является множеством нулей плюригармонических на $S_0$ функций.

Для каждой точки $z=('z,z_n)\in S_0$ определим функцию

$$\Phi('z,z_n)=\operatorname{Re}\oint_\gamma \frac{\partial u}{\partial z_n}dz_n, \tag{3.3}$$

где $\gamma\subset\{'z\}\backslash S_{'z}$ — окружность $|z_n-a('z)|=\varepsilon,\ \varepsilon>0$ такая, что внутри нее помимо $a('z)$ нет других точек сечения $S_{'z}$. Ясно, что функция $\Phi$ определена и плюригармонична на аналитическом множестве $S_0$. Если $'z^0\in E\backslash\pi(S\backslash S_0)$, то функция $u('z^0,z_n)$ является однозначной в $\pi^{-1}\left\{'z^0\right\}\backslash S_{'z^0}$. Следовательно, $\Phi('z^0,z_n)=0\ \forall z_n\in S_{'z^0}$. Таким образом, мы доказали, что $\Phi('z,z_n)=0$ на $\pi^{-1}(E)\cap S_0$. Отсюда вытекает, что $\Phi('z,z_n)\equiv 0$ на $S_0$, ибо множество $\pi^{-1}(E)\cap S_0$ не является множеством нулей плюригармонических на $S_0$ функций. Так как множество $\pi(S\backslash S_0)$ плюриполярное, а значит нигде не плотное в $'U$, то отсюда следует (3.2).

Как показывает следующий пример, в случае, когда множество $E\subset' U$ — лишь не плюриполярное, теорема 3.1 не верна.

**Пример 3.1.** Рассмотрим в поликруге $U\times V=\{|z|<1\}\times\{|w|<1\}$ функцию

$$u(z,w)=\operatorname{Re}[z\ln(w-1)].$$

Ясно, что $u(z,w)$ плюригармонична в $U\times V$. Вещественный интервал $E=(-1,1)$ является неплюриполярным множеством в $U$, причем для любого фиксированного $z=x\in E$ функция $u(x,w)=x\ln|w-1|$ является гармонической по $w$ в $\mathbb{C}\backslash\{w=1\}$. Однако $u(z,w)=\operatorname{Re}[z\ln(w-1)]$ не является однозначной плюригармонической функцией в $\mathbb{C}^2\backslash\{w=1\}$, она многозначная.

## 4. Граничный вариант

Для граничных множеств $E\subset\partial' D$, в отличие от голоморфных функций, плюригармоническое продолжение имеет ряд трудностей.

**Пример 4.1.** Рассмотрим в поликруге $U\times V=\{|z|<1\}\times\left\{|w|<\dfrac{1}{2}\right\}\subset\mathbb{C}^2$ голоморфную функцию $f(z,w)=\exp\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^2\ln(w-1)$.

Тогда функция $u(z,w) = \operatorname{Re} f(z,w) \in ph(U\times V)\cap C^\infty\left((\overline{U}\backslash\{1\})\times V\right)$, причем при фиксированном $z=\xi,\ |\xi|=1,\ \xi\neq 1$ имеем

$$u(\xi,w) = \operatorname{Re}\exp\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)^2 \ln|w-1|,$$

и эта функция по переменной $w$ является гармонической вне $\{w=1\}$. Однако $u(z,w)$ не является однозначной плюригармонической функцией в $(U\times\mathbb{C})\backslash\{w=1\}$.

Сформулируем следующую проблему, которая нам кажется правдоподобной.

**Проблема 4.1.** *Пусть $'D\subset\mathbb{C}^{n-1}$ — ограниченная область с гладкой границей, $u('z,z_n)\in ph('D\times U_n)\cap C('\overline{D}\times\overline{U})$, $U_n=\{|z_n|<r\}$, $r>0$. Если при каждом фиксированном $'\xi\in\partial' D$, функция $u('\xi,z_n)$ переменного $z_n$ продолжается до функции, гармонической на всей плоскости $\mathbb{C}$, за исключением конечного числа особых точек $S_{'z}=\{\beta_1('\xi),\beta_2('\xi),\ldots,\beta_m('\xi)\}$, $m=m('\xi)$, то $u('z,z_n)$ плюригармонически (однозначно) продолжается в $('D\times\mathbb{C})\backslash S$, где $S\subset' D\times\mathbb{C}$ — аналитическое множество.*

Отметим, что при выполнении условий, приведенных в проблеме 4.1, производная

$$\frac{\partial u}{\partial z_n} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x_n} - i\frac{\partial u}{\partial y_n}\right]$$

является голоморфной в $'D\times U_n$ и непрерывной в $'\overline{D}\times U_n$ функцией, причем для фиксированных $'z\in\partial' D$ она голоморфна на всей плоскости $\mathbb{C}$, за исключением конечного числа особых точек $S_{'z}=\{\beta_1('\xi),\beta_2('\xi),\ldots,\beta_m('\xi)\}$.

В самом деле, берем произвольный поликруг $'U\subset' D$. Так как $u('z,z_n)\in \mathrm{ph}('U\times U_n)$, то в $'U\times U_n$ существует голоморфная функция $f('z,z_n)\in('U\times U_n)$ : $u('z,z_n)=\operatorname{Re} f('z,z_n)=\frac{1}{2}[f('z,z_n)+\overline{f}('z,z_n)]$. Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial z_n} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z_n}\in\mathcal{O}('U\times U_n).$$

По формуле Шварца при фиксированном $'z\in' U$ справедливы равенства

$$f('z,z_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u('z,re^{it})\frac{re^{it}+z_n}{re^{it}-z_n}dt + i\operatorname{Im} f('z,0),\quad z_n\in U_n,$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial z_n} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z_n} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} u('z,re^{it})\frac{d}{dz_n}\left[\frac{re^{it}+z_n}{re^{it}-z_n}\right]dt,\quad ('z,z_n)\in' U\times U_n.$$

Но функция

$$\frac{\partial u}{\partial z_n} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} u('z,re^{it})\frac{d}{dz_n}\left[\frac{re^{it}+z_n}{re^{it}-z_n}\right]dt$$

определена в $'\overline{D}\times U_n$, является голоморфной в $'D\times U_n$ и непрерывной в $'\overline{D}\times U_n$, причем для $'z\in\partial' D$ она голоморфна на всей плоскости $\mathbb{C}$, за исключением конечного числа особых точек.

Отсюда и по теореме 2.1 функция $\dfrac{\partial u}{\partial z_n}$ голоморфно продолжается в $('D\times\mathbb{C})\backslash S$, где особое множество $S$ является аналитическим множеством. Как в теореме 3.1, функция

$$F('z,z_n) = \int_{\gamma[0,z_n]}\frac{\partial u}{\partial z_n}dz_n,$$

где $\gamma\subset\mathbb{C}\backslash S_{'z}$ — произвольный спрямляемый путь, представляет собой многозначную аналитическую функцию в $('D\times\overline{\mathbb{C}})\backslash S$, причем $u('z,z_n)=\operatorname{Re} F('z,z_n)+u(0,z_n)$. Эта формула дает нам многозначное плюригармоническое продолжение функции $u('z,z_n)$. Для установления справедливости сформулированной проблемы 4.1 нужно лишь доказать однозначность функции $u('z,z_n)$, используя условие ее однозначности для всех граничных точек $'z\in\partial' D$.

Ниже мы покажем, что в случае бесконечного числа особых точек $S_{'z} = \{\beta_1('\xi), \beta_2('\xi), \ldots\}$ проблема 4.1 имеет отрицательный ответ.

**Пример 4.2** (см. [12]). Рассмотрим аналитическое в $\mathbb{C}^2 \backslash \{w = 0\}$ множество

$$A = \left\{ \exp\left(1 + \frac{1}{w}\right) = z \right\} = \left\{ w = \frac{1}{-1 + lnz + 2k\pi i},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \right\}.$$

Очевидно, что его замыкание

$$\overline{A} = \left\{ \exp\left(1 + \frac{1}{w}\right) = z \right\} \cup \{w = 0\}$$

является псевдовогнутым плюриполярным множеством, т. е. $\mathbb{C}^2 \backslash \overline{A}$ является псевдовыпуклым множеством. Покажем, что $\overline{A}$ является $L$-полным, т. е. $\exists\, u(z,w) \in L : \ \overline{A} = \{u(z,w) = -\infty\}$, где $L = \{u(z,w) \in psh(\mathbb{C}^2) : \ u(z,w) \leqslant \text{const} + \ln\left(1 + (|z|^2 + |w|^2)^{1/2}\right)$. Для этого заметим, что аналитическое множество $B = \{\exp(1 + w) - z = 0\}$ является полным плюриполярным множеством, $B = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : \ \ln|\exp(1 + w) - z| = -\infty\}$. Следовательно, оно является $L$-полным, т. е. $\exists\, u(z,w) \in L : B = \{u(z,w) = -\infty\}$ (см. [14]). Положим $v(z,w) = u(z, 1/w) + 2\ln|w|$. Функция $v(z,w)$ является плюрисубгармонической в $\mathbb{C}^2 \backslash \{w = 0\}$ и, кроме того, в окрестности плоскости $w = 0$ имеет место

$$v(z,w) = u(z, 1/w) + 2\ln|w| \leqslant \text{const} + \ln\left(|w| + (1 + |zw|^2)^{1/2}\right) + \ln|w|.$$

Отсюда вытекает, что $v(z,w)$ плюрисубгармонически продолжается на $w = 0$, т. е. $v(z,w) \in psh\left(\mathbb{C}^2\right)$. Нетрудно видеть, что

$$\{v(z,w) = -\infty\} = \left\{ \exp\left(1 + \frac{1}{w}\right) = z \right\} \cup \{w = 0\} = \overline{A},$$

что означает полноту и, следовательно, $L$-полноту плюриполярного множества $\overline{A}$.

Положим $S = \overline{A} \cap (U \times \mathbb{C})$. Заметим, что $S \subset \{|z| < 1\} \times \{|w| < 1\}$ и, так как открытое множество $\{v(z,w) < \alpha\}$ является полиномиально выпуклым для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\overline{A} = \{v(z,w) = -\infty\}$, то отсюда легко следует, что компакт $\overline{S} = \overline{A} \cap (\overline{U} \times \mathbb{C})$ — полиномиально выпуклый, где $U = \{|z| < 1\}$ — единичный круг.

Покажем, что граница Шилова алгебры полиномов $P(\overline{S})$ есть топологическая граница $\partial \overline{S}$. Предположим противное, что для некоторого полинома $p(z,w)$ норма $\|p\|_S = p(z^0, w^0) = 1$, $(z^0, w^0) \in S \cap (U \times \mathbb{C})$, но $\|p\|_{\partial S} < 1$. Берем концентрический круг $U' \subset\subset U$ такой, что $\|p\|_{\partial S'} < 1$, где $S' = S \cap (U' \times \mathbb{C})$. Тогда последовательность аналитических множеств $B_k = \left\{ (z,w) \in U' \times \{|w| < 1\} : \ p(z,w) = 1 + \dfrac{1}{k} \right\}$ обладает следующими свойствами:

а) $B_k \subset U \times \mathbb{C}$ и $B_k \to B_\infty$, $\partial B_k \to \partial B_\infty$ относительно метрики Хаусдорфа, где $B_\infty = \{(z,w) \in U' \times \{|w| < 1\} : \ p(z,w) = 1\}$;

б) $B_\infty \ni (z^0, w^0)$, но $\partial B_\infty \subset\subset (U \times \mathbb{C}) \backslash S$.

По принципу непрерывности это противоречит псевдовыпуклости $(U \times \mathbb{C}) \backslash S$ в точке $(z^0, w^0) \in S$.

При фиксированном $\xi = e^{i\varphi} \in \partial U$, $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$, сечение

$$S_\xi = \left\{ \frac{1}{-1 + i\varphi + 2k\pi i},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \right\} \subset \partial S$$

состоит из бесконечного числа точек. Заметим, что аналитическая поверхность $S \backslash \{w = 0\}$ биголоморфно эквивалентна кругу $|v| < 1$:

$$\Psi(v) = \left( \exp\left(\frac{v-1}{v+1}\right), -\frac{1+v}{2} \right) : U \to S \backslash \{w = 0\}.$$

Берем на окружности $\partial U = \{e^{i\varphi}, -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi\}$ меру $\dfrac{1}{2\pi} d\varphi$. Она является представляющей мерой алгебры полиномов $P(\overline{U})$ относительно точки $0 :\ p(0) = \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial U} p(e^{i\varphi}) d\varphi,\ \forall p \in P(\overline{U})$. Образ этой меры $d\theta = \dfrac{1}{2\pi}d\Psi^-$ на $\partial S\backslash\{w=0\}$ является представляющей мерой алгебры полиномов $P(\overline{S})$ относительно точки $(e^{-1}, -1/2) \in S$. Положим

$$\mu = \frac{|\xi - e^{-1}|}{1 - |e^{-1}|^2}\theta.$$

Меру $\mu$ нам удобно представить в виде $d\mu = \dfrac{d\varphi}{2\pi}\otimes d\mu_\xi(w),\ \xi = e^{i\varphi},\ d\mu_\xi(w)$ — единичная дискретная мера, сосредоточенная на $S_\xi$. Заметим, что мера $\mu$ является аналитической, т. е. функции

$$a_k(\xi) = \int w^k d\mu_\xi(w),\ k = 1, 2, \dots,$$

голоморфно продолжаются в единичный круг $U$, причем продолжения непрерывны вплоть до границы $\partial U$. Тогда потенциал

$$U^\mu(\xi, w) = \int \ln|\eta - w| d\mu_\xi(\eta),\ \xi \in \partial U,\ w \in \mathbb{C},$$

обладает следующими свойствами:

а) функция $U^\mu(\xi, w)$ плюригармонически продолжается в $U \times \{|w| > 1\}$, причем продолжение непрерывно вплоть до $\overline{U} \times \{|w| > 1\}$;

б) функция

$$\frac{\partial U^\mu(\xi, w)}{\partial w} = \int \frac{d\mu_\xi(\eta)}{\eta - w}$$

голоморфно продолжается в $(U \times \mathbb{C})\backslash S$;

в) функция $U^\mu(\xi, w)$ гармоническая и однозначная в $\mathbb{C}\backslash S_\xi,\ \forall \xi \in \partial U$, продолжается в $(U \times \mathbb{C})\backslash S$ как многозначная $ph$ функция, которая не является однозначной.

Действительно, при $|w| > 1$ имеем

$$U^\mu(\xi, w) = \int \ln|\eta - w| d\mu_\xi(\eta) = \ln|w| + \int \ln\left|1 - \frac{\eta}{w}\right| d\mu_\xi(\eta) =$$

$$= \ln|w| - \mathrm{Re}\int \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta^k}{w^k} d\mu_\xi(\eta) = \ln|w| - \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{w^k}\int \eta^k d\mu_\xi(\eta) =$$

$$= \ln|w| - \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(\xi)}{w^k}. \tag{4.1}$$

Отметим, что меру $d\mu = \dfrac{d\varphi}{2\pi} \otimes d\mu_\xi(w)$ мы выбрали так, чтобы функция $a_k(\xi) = \int \eta^k d\mu_\xi(\eta)$ была граничным значением голоморфной в единичном круге функции $a_k(z), k = 1, 2, \dots$. Так как $d\mu$ — единичная мера, сосредоточенная на $\partial S$ и $\overline{S} \subset \{|z| \leqslant 1\}\times\{|w| \leqslant 1\}$, то $|a_k(\xi)| \leqslant 1$. Отсюда следует, что последний ряд в (4.1) равномерно сходится на компактных подмножествах $\overline{U} \times \{|w| > 1\}$ и

$$U^\mu(z, w) \in ph\,(U \times \{|w| > 1\}) \cap C\left(\overline{U} \times \{|w| > 1\}\right).$$

Утверждение б) вытекает из теоремы 2.1, а утверждение в) следует из результата Левенберга—Слодковского [23] о том, что не существует функции $V(z, w) \in psh(U \times \mathbb{C}) \cap ph((U \times \mathbb{C})\backslash S)$ : $V|_S \equiv -\infty$. Согласно этому результату, функция $U^\mu(z, w)$ не может быть однозначной в $U \times \mathbb{C}$, т. е., она многозначная.

**Пример 4.3.** Функция $u(\xi, w) = U^\mu\left(\xi, \dfrac{1}{w}\right) + \ln|w|,\ \xi \in \partial U,\ w \in \mathbb{C}$, обладает тем свойством, что она плюригармонически продолжается в $U\times\{|w| < 1\}$, причем продолжение непрерывно вплоть до $\overline{U} \times \{|w| < 1\}$. Кроме того, она гармоническая и однозначная в $\mathbb{C}\backslash S_\xi,\ \forall \xi \in \partial U$, но ее плюригармоническое продолжение в $(U \times \mathbb{C})\backslash\overline{S}$ является многозначным, не является однозначным.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Атамуратов А. А.* О мероморфном продолжении вдоль фиксированного направления// Мат. заметки. — 2009. — *86*, № 3. — С. 323–327.
2. *Атамуратов А. А.* Мероморфное продолжение функций по граничным сечениям// Uzbek Mat. Zh. — 2009. — № 1. — С. 4–9.
3. *Атамуратов А. А.* Продолжение сепаратно-мероморфных функций, заданных на части границы// Uzbek Mat. Zh. — 2009. — № 3. — С. 18–26.
4. *Гончар А. А.* Локальное условие однозначности аналитических функций// Мат. сб. — 1972. — *89*. — С. 148–164.
5. *Гончар А. А.* Локальное условие однозначности аналитических функций нескольких переменных// Мат. сб. — 1974. — *93*. — С. 296–313.
6. *Имомкулов С. А.* О голоморфном продолжении функций, заданных на граничном пучке комплексных прямых// Изв. РАН. Сер. Мат. — 2005. — *69*, № 2. — С. 125–144.
7. *Казарян М. В.* О голоморфном продолжении функций со специальными особенностями в $\mathbb{C}^n$// Докл. АН АрмССР. — 1983. — *76*. — С. 13–17.
8. *Казарян М. В.* Мероморфное продолжение по группам переменных// Мат. сб. — 1984. — *125*, № 3. — С. 384–397.
9. *Садуллаев А.* Рациональные аппроксимации и плюриполярные множества// Мат. сб. — 1982. — 119, № 1. — С. 96–118.
10. *Садуллаев А.* Критерий быстрой рациональной аппроксимации в $\mathbb{C}^n$// Мат. сб. — 1984. — *125*, № 2. — С. 269–279.
11. *Садуллаев А.* Плюрисубгармонические функции// Соврем. пробл. мат. Фундам. направл. — 1985. — *8*. — С. 65–113.
12. *Садуллаев А.* О плюригармоническом продолжении вдоль фиксированного направления// Мат. сб. — 2005. — *196*. — С. 145–156.
13. *Садуллаев А.* Об аналитических мультифункциях// Мат. заметки. — 2008. — *83*, № 5. — С. 84–95.
14. *Садуллаев А.* Теория плюрипотенциала. Применения. — Рига: Palmarium Akademic Publishing, 2012.
15. *Садуллаев А., Имомкулов С. А.* Продолжение плюригармонических функций с дискретными особенностями на параллельных сечениях// Вестн. Красноярск. гос. ун-та. — 2004. — № 5/2. — С. 3–6.
16. *Садуллаев А., Имомкулов С. А.* Продолжение сепаратно-аналитических функций, заданных на части границы области// Мат. заметки. — 2006. — *79*, № 2. — С. 234–243.
17. *Садуллаев А., Имомкулов С. А.* Продолжение голоморфных и плюригармонических функций с тонкими особенностями на параллельных сечениях// Тр. МИАН. — 2006. — *253*. — С. 158–174.
18. *Садуллаев А., Чирка Е. М.* О продолжении функций с полярными особенностями// Мат. сб. — 1987. — *132*, № 3. — С. 383–390.
19. *Чирка Е. М.* Разложение в ряды и скорость рациональных приближений для голоморфных функций с аналитическими особенностями// Мат. сб. — 1974. — *93*, № 2. — С. 314–324.
20. *Atamuratov A. A., Vaisova M. D.* On the meromorphic extension along the complex lines// TWMS J. Pure Appl. Math. — 2011. — *2*, № 1. — С. 10–16.
21. *Chirka E. M.* On the removable singularities for meromorphic mappings// Publ. Mat. — 1996. — *40*. — С. 229–232.
22. *Imomkulov S. A., Khujamov J. U.* On holomorphic continuation of functions along boundary sections// Math. Bohem. — 2005. — *130*, № 3. — С. 309–322.
23. *Levenberg N., Słodkowski Z.* Pseudoconcave pluripolar sets in $\mathbb{C}^2$// Math. Ann. — 1998. — *312*. — С. 429–443.
24. *Nishino T.* Sur les ensembles pseudo-concaves// J. Math. Kyoto Univ. — 1962. — *1*. — С. 225–245.
25. *Oka K.* Note sur les familles de fonctions analytiques multiform etc.// J. Sci. Hiroshima Univ. — 1934. — *4*. — С. 93–98.
26. *Rothstein W.* Ein neuer Beweis des Hartogsschen Hauptsatzes und seine Ausdehnung auf meromorphe Functionen// Math. Z. — 1950. — *53*. — С. 84–95.
27. *Sadullaev A.* Plurisubharmonic functions// В сб.: «Several Complex Variables II». — Berlin—Heidelberg: Springer, 1994. — С. 56–106.
28. *Sadullaev A.* On analytic multifunctions// Math. Notes. — 2008. — *83*. — С. 652–656.
29. *Slodkowski Z.* Analytic set-valued functions and spectra// Math. Ann. — 1981. — *256*, № 3. — С. 363–386.

Азимбай Садуллаев
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,

Узбекистан, 100174, г. Ташкент, ВУЗ городок, ул. Университетская, д. 4
E-mail: sadullaev@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-83-94 UDC 517.55+517.559

## Continuation of Analytic and Pluriharmonic Functions in the Given Direction by the Chirka Method: a Survey

© 2019 **A. Sadullaev**

**Abstract**. In this paper, we provide a survey of results on analytic and plurisubharmonic continuations of functions that have this set of singularities along a fixed direction. We show the advantages of using the pluripotential theory and the Jacobi–Hartogs series for description of the singular set of such functions.

## REFERENCES

1. A. A. Atamuratov, "O meromorfnom prodolzhenii vdol' fiksirovannogo napravleniya" [On meromorphic continuation along a fixed direction], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2009, **86**, No. 3, 323–327 (in Russian).
2. A. A. Atamuratov, "Meromorfnoe prodolzhenie funktsiy po granichnym secheniyam" [Meromorphic continuation of functions along boundary sections], *Uzbek Mat. Zh.* [Uzbek Mat. Zh.], 2009, No. 1, 4–9 (in Russian).
3. A. A. Atamuratov, "Prodolzhenie separatno-meromorfnykh funktsiy, zadannykh na chasti granitsy" [Continuation of separately meromorphic functions defined on a part of the boundary], *Uzbek Mat. Zh.* [Uzbek Mat. Zh.], 2009, No. 3, 18–26 (in Russian).
4. A. A. Gonchar, "Lokal'noe uslovie odnoznachnosti analiticheskikh funktsiy" [Local condition of one-valuedness of analytic functions], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1972, **89**, 148–164 (in Russian).
5. A. A. Gonchar, "Lokal'noe uslovie odnoznachnosti analiticheskikh funktsiy neskol'kikh peremennykh" [Local condition of one-valuedness of analytic functions of multiple arguments], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1974, **93**, 296–313 (in Russian).
6. S. A. Imomkulov, "O golomorfnom prodolzhenii funktsiy, zadannykh na granichnom puchke kompleksnykh pryamykh" [On holomorphic continuation of functions defined on a boundary pencil of complex lines], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2005, **69**, No. 2, 125–144 (in Russian).
7. M. V. Kazaryan, "O golomorfnom prodolzhenii funktsiy so spetsial'nymi osobennostyami v $\mathbb{C}^n$" [On holomorphic continuation of functions with special singularities to $\mathbb{C}^n$], *Dokl. AN ArmSSR* [Rep. Acad. Sci. Armenian SSR], 1983, **76**, 13–17 (in Russian).
8. M. V. Kazaryan, "Meromorfnoe prodolzhenie po gruppam peremennykh" [Meromorphic continuation with respect to groups of arguments], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1984, **125**, No. 3, 384–397 (in Russian).
9. A. Sadullaev, "Ratsional'nye approksimatsii i plyuripolyarnye mnozhestva" [Rational approximations and pluripolar sets], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1982, 119, No. 1, 96–118 (in Russian).
10. A. Sadullaev, "Kriteriy bystroy ratsional'noy approksimatsii v $\mathbb{C}^n$" [Criteria of fast rational approximation in $\mathbb{C}^n$], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1984, **125**, No. 2, 269–279 (in Russian).
11. A. Sadullaev, "Plyurisubgarmonicheskie funktsii" [Plurisubharmonic functions], *Sovrem. probl. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Probl. Math. Fundam. Directions], 1985, **8**, 65–113 (in Russian).
12. A. Sadullaev, "O plyurigarmonicheskom prodolzhenii vdol' fiksirovannogo napravleniya" [On the plurisubharmonic continuation along fixed direction], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2005, **196**, 145–156 (in Russian).
13. A. Sadullaev, "Ob analiticheskikh mul'tifunktsiyakh" [On analytic multifunctions], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2008, **83**, No. 5, 84–95 (in Russian).
14. A. Sadullaev, *Teoriya plyuripotentsiala. Primeneniya* [Pluripotential Theory: Applications], Palmarium Akademic Publishing, Riga, 2012 (in Russian).
15. A. Sadullaev and S. A. Imomkulov, "Prodolzhenie plyurigarmonicheskikh funktsiy s diskretnymi osobennostyami na parallel'nykh secheniyakh" [Continuation of pluriharmonic functions with discrete

singularities on parallel sections], *Vestn. Krasnoyarsk. gos. un-ta* [Bull. Krasnoyarsk State Univ.], 2004, No. 5/2, 3–6 (in Russian).
16. A. Sadullaev and S. A. Imomkulov, "Prodolzhenie separatno-analiticheskikh funktsiy, zadannykh na chasti granitsy oblasti" [Continuation of separately analytic functions defined on a part of the boundary], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2006, **79**, No. 2, 234–243 (in Russian).
17. A. Sadullaev and S. A. Imomkulov, "Prodolzhenie golomorfnykh i plyurigarmonicheskikh funktsiy s tonkimi osobennostyami na parallel'nykh secheniyakh" [Continuation of holomorphic and pluriharmonic functions with fine singularities on parallel sections], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2006, **253**, 158–174 (in Russian).
18. A. Sadullaev and E. M. Chirka, "O prodolzhenii funktsiy s polyarnymi osobennostyami" [On continuation of functions with polar singularities], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1987, **132**, No. 3, 383–390 (in Russian).
19. E. M. Chirka, "Razlozhenie v ryady i skorost' ratsional'nykh priblizheniy dlya golomorfnykh funktsiy s analiticheskimi osobennostyami" [Expansion into series and rate of rational approximations for holomorphic functions with analytic singularities], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1974, **93**, No. 2, 314–324 (in Russian).
20. A. A. Atamuratov and M. D. Vaisova, "On the meromorphic extension along the complex lines," *TWMS J. Pure Appl. Math.*, 2011, **2**, No. 1, 10–16.
21. E. M. Chirka, "On the removable singularities for meromorphic mappings," *Publ. Mat.*, 1996, **40**, 229–232.
22. S. A. Imomkulov and J. U. Khujamov, "On holomorphic continuation of functions along boundary sections," *Math. Bohem.*, 2005, **130**, No. 3, 309–322.
23. N. Levenberg and Z. Słodkowski, "Pseudoconcave pluripolar sets in $\mathbb{C}^2$," *Math. Ann.*, 1998, **312**, 429–443.
24. T. Nishino, "Sur les ensembles pseudo-concaves," *J. Math. Kyoto Univ.*, 1962, **1**, 225–245.
25. K. Oka, "Note sur les familles de fonctions analytiques multiform, etc.," *J. Sci. Hiroshima Univ.*, 1934, **4**, 93–98.
26. W. Rothstein, "Ein neuer Beweis des Hartogsschen Hauptsatzes und seine Ausdehnung auf meromorphe Functionen," *Math. Z.*, 1950, **53**, 84–95.
27. A. Sadullaev, "Plurisubharmonic functions," In: *Several Complex Variables II*, Springer, Berlin—Heidelberg, 1994, pp. 56–106.
28. A. Sadullaev, "On analytic multifunctions," *Math. Notes*, 2008, **83**, 652–656.
29. Z. Slodkowski, "Analytic set-valued functions and spectra," *Math. Ann.*, 1981, **256**, No. 3, 363–386.

A. Sadullaev
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: sadullaev@mail.ru