Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 1 (2019). С. 72–82

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-72-82 УДК 517.988.67

РЕДУКЦИОННЫЙ МЕТОД В ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ Э. ШМИДТА

© 2019 г. **Д. Г. РАХИМОВ**

Аннотация. В данной работе рассматриваются возмущения кратных собственных значений спектральных задач Э. Шмидта. С помощью редукционного метода, предложенного в работах [10, 11], исследование кратных возмущенных собственных значений Э. Шмидта сводится к исследованию возмущений некратных собственных значений. Напоследок в качестве приложения к полученным результатам рассматривается задача о краевом возмущении для системы, состоящей из двух задач Штурма—Лиувилля со спектральным параметром Э. Шмидта.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В начале XX века в цикле работ, посвященных линейным и нелинейным интегральным уравнениям, Э. Шмидт ввел понятия [16] собственных значений λ_k оператора $B : H \to H$ в гильбертовом пространстве H с учетом их кратности и собственных элементов $\{u_k\}_1^\infty, \{v_k\}_1^\infty$, удовлетворяющих соотношениям

$$Bu_k = \lambda_k v_k, \;\; B^* v_k = \lambda_k u_k.$$

Это позволило расширить теорию Гильберта—Шмидта о несимметричных вполне непрерывных операторах в произвольных сепарабельных гильбертовых пространствах [13, 17–19]. В работе [9] упомянуты некоторые физические приложения спектральных задач Э. Шмидта; в публикации [7] представлена модификация двух версий теорем Гамильтона—Кэли—Аржаных [1, 2, 14] о матричных спектральных задачах Э. Шмидта, полиномиально зависящих от спектрального параметра, с модификацией соответствующих характеристических многочленов. В монографиях [3,6] были изучены нелинейные задачи о распространении электромагнитных волн в волноводах и резонаторах в нелинейной среде, по сути являющиеся после линеаризации спектральными задачами Э. Шмидта.

Пусть E_1, E_2 — это вещественные банаховы пространства с плотным вложением $E_1 \subset E_2 \subset H$, H — гильбертово пространство, а $B \in L(E_1, E_2)$ — замкнутый линейный оператор. Пусть также $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ — это n-кратная фредгольмова точка следующей невозмущенной спектральной задачи Э. Шмидта с соответствующими собственными элементами $(\varphi_{i0}, \psi_{i0})$:

$$B\varphi_{i0} = A(\lambda_0, 0)\psi_{i0},$$

$$B^*\psi_{i0} = A^*(\lambda_0, 0)\varphi_{i0}.$$

Это можно переписать в матричном виде в случае прямой суммы двух гильбертовых пространств $\mathcal{H} = H \dot{+} H$:

$$\mathcal{B}\left(\lambda_0, 0\right) \Phi_{i0} = \begin{pmatrix} B & -A(\lambda_0, 0) \\ -A^*(\lambda_0, 0) & B^* \end{pmatrix} \Phi_{i0},$$

где $\Phi_{i0} = (\varphi_{i0}, \psi_{i0})^{\mathrm{T}}$, а $(\varphi_{i0}, \psi_{i0})^{\mathrm{T}}$ — транспонированный вектор-столбец. Здесь рассматривается следующая возмущенная спектральная задача Э. Шмидта:

$$B\varphi(\varepsilon) = A(\lambda(\varepsilon), \varepsilon)\,\psi(\varepsilon),$$

$$B^*\psi(\varepsilon) = A^*(\lambda(\varepsilon), \varepsilon)\,\psi(\varepsilon),$$

т. е. необходимо определить бифуркационные собственные значения Э. Шмидта $\lambda = \lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \mu(\varepsilon)$ с соответствующими собственными векторами $(\varphi(\varepsilon), \psi(\varepsilon))^{\mathrm{T}} = \Phi(\varepsilon)$, где $\mu(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, а $[A(\lambda_0 + \mu, \varepsilon) - A(\lambda_0, 0)] = \sum\limits_{i+j\geqslant 1} A_{ij}\mu^i\varepsilon^j$ аналитически зависит от двух малых параметров μ и ε в виде ряда по степеням малого параметра ε. В прямой сумме $\mathcal{H} = H\dot{+}H$ со скалярным произведением

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \varphi_1, \psi_1 \rangle + \langle \varphi_2, \psi_2 \rangle$$

поставленная задача может быть переписана в следующей матричной форме:

$$\mathbf{B}(\lambda, \varepsilon)\,\Phi \equiv [\mathcal{B}(\lambda_0, 0) - \mathcal{A}(\mu(\varepsilon), \varepsilon)]\,\Phi \equiv \left[\mathcal{B}(\lambda_0, 0) - \sum_{i+j\geqslant 1} \mu^i\varepsilon^j\mathcal{A}_{ij}\right]\Phi \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} B & -A(\lambda_0, 0) \\ -A^*(\lambda_0, 0) & B^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(\varepsilon) \\ \psi(\varepsilon) \end{pmatrix} - \sum_{i+j\geqslant 1} \mu^i\varepsilon^j \begin{pmatrix} 0 & A_{ij} \\ A_{ij}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(\varepsilon) \\ \psi(\varepsilon) \end{pmatrix} = 0 \qquad (1.1)$$

с сопряженной задачей

$$\mathbf{B}^*(\lambda, \varepsilon)\,\Psi \equiv [\mathcal{B}^*(\lambda_0, 0) - \mathcal{A}(\mu, \varepsilon)]\,\Psi \equiv \left[\mathcal{B}^*(\lambda_0, 0) - \sum_{i+j\geqslant 1} \mu^i\varepsilon^j\mathcal{A}_{ij}^*\right]\Psi \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} B^* & -A(\lambda_0, 0) \\ -A^*(\lambda_0, 0) & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\varphi}(\varepsilon) \\ \overline{\psi}(\varepsilon) \end{pmatrix} - \sum_{i+j\geqslant 1} \mu^i\varepsilon^j \begin{pmatrix} 0 & A_{ij} \\ A_{ij}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\varphi}(\varepsilon) \\ \overline{\psi}(\varepsilon) \end{pmatrix} = 0. \qquad (1.2)$$

Важно отметить самосопряженность исходной задачи Э. Шмидта, т. е. $A(\lambda_0) = \lambda_0 I$.

В этой работе с помощью редукционного метода, предложенного в работах [10, 11], исследование кратных возмущенных собственных значений Э. Шмидта сводится к изучению возмущения некратных собственных значений.

В качестве приложения к полученным результатам в разделе 4 будет рассмотрена задача о краевом возмущении для системы из двух задач Штурма—Лиувилля со спектральным параметром Э. Шмидта.

Всюду далее будут использованы терминология, обозначения и определения, схожие с таковыми в монографиях [4, 15] и работах [8, 12, 20].

2. Возмущение собственных значений и редукционные методы

Введение понятия биортогональных систем для элементов нуль-пространства и подпространства дефекта $N(\mathcal{B} - \mathcal{A}(\lambda_0, 0)) = span\,\{\Phi_{k0}\}_{k=1}^n$, $\langle \Phi_{k0}, \Gamma_{s0} \rangle = \delta_{ks}$, $N^*(\mathcal{B}^* - \mathcal{A}^*(\lambda_0, 0)) = span\,\{\Psi_{k0}\}_{k=1}^n$, $\langle \mathrm{Z}_{k0}, \Psi_{s0} \rangle = \delta_{ks}$ на основании обобщенной леммы Шмидта [15] позволяет определить регуляризатор

$$\widetilde{\mathbf{B}}(\lambda_0, 0) = \mathbf{B}(\lambda_0, 0) + \sum_{k=1}^n \left\langle \cdot, \Gamma_{k0}^{(1)} \right\rangle \mathrm{Z}_{k0}^{(1)},\ \Gamma_{k0}^{(1)} = \Gamma_{k0},\ \mathrm{Z}_{k0}^{(1)} = \mathrm{Z}_{k0},$$

который непрерывно обратим, а $\mathbf{\Gamma} = \left[\widetilde{\mathbf{B}}(\lambda_0, 0)\right]^{-1}$ — замкнут [15]. Заметим, что $\mathbf{\Gamma}\mathrm{Z}_{k0}^{(1)} = \Phi_{k0}^{(1)}$, $\mathbf{\Gamma}^*\mathbf{\Gamma}_{k0}^{(1)} = \Psi_{k0}^{(1)}$, $\widetilde{\mathbf{B}}\Phi_{s0}^{(1)} = \mathrm{Z}_{s0}^{(1)}$, $\widetilde{\mathbf{B}}^*\Psi_{s0}^{(1)} = \mathbf{\Gamma}_{s0}^{(1)}$. Выбором этой биортогональной системы можно расширить пространство $\mathcal{H}$ в прямых суммах $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1^n\dot{+}\mathcal{H}_1^{\infty-n}$, $H_1^n = N(\mathcal{B} - \mathcal{A}(\lambda_0, 0))$ и $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{2,n}\dot{+}\mathcal{H}_{2,\infty-n}, \mathcal{H}_{2,n} = span\left\{\mathrm{Z}_{k0}^{(1)}\right\}_{k=1}^n$.

Пусть элементы нуль-пространства и подпространства дефекта отвечают полным биканоническим $\mathcal{A}(\mu,0)$- и $\mathcal{A}^*(\mu,0)$-жордановым множествам с цепочками Жордана с длинами $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_n$. Это означает, что справедливы соотношения

$$\mathbf{B}(\lambda_0,0)\Phi_{k0}^{(\sigma)} = \sum_{s=1}^{\sigma-1} \mathcal{A}_{s0}\Phi_{k0}{}^{(\sigma-s)}, \mathcal{A}_{s0} = \frac{1}{s!}\frac{d}{d\mu^s}\mathcal{A}(\mu,0)\,, \tag{2.1}$$

$$\mathbf{B}^*(\lambda_0,0)\Psi_{j0}^{(\sigma)} = \sum_{s=1}^{\sigma-1} \mathcal{A}_{s0}^*\Psi_{j0}^{(\sigma-s)}, \sigma = \overline{1,p_j}, j = \overline{1,n} \tag{2.2}$$

и равенства

$$\det\left[\left\langle \sum_{s=1}^{p_k} \mathcal{A}_{s0}\Phi_{k0}{}^{(p_k+1-s)}, \Psi_{j0}^{(1)} \right\rangle\right] = \delta_{kj}, k,j = \overline{1,n}, \tag{2.3}$$

$$\det\left[\left\langle \Phi_{k0}, \sum_{s=0}^{p_s} \mathcal{A}_{s0}^*\Psi_{s0}^{(p_s+1-\delta)} \right\rangle\right] = \delta_{ks}, \tag{2.4}$$

без ограничения общности. Здесь δ_{ks} — это символ Кронекера.

Жордановы цепочки определяются однозначно из условия принадлежности их элементов дополнительным подпространствам $\Phi_{k0}^{(s)} \in \mathcal{H}_1^{\infty-k}, \Psi_{k0}^{(s)} \in \mathcal{H}_{2,\infty-n}, s = \overline{2,p_k}, k = \overline{1,n}$.

Жордановы множества, удовлетворяющие соотношениям (2.1)–(2.4), называются *биканоническими* [8]. Более того, если предположить, что построенные жордановы множества удовлетворяют условиям биортогональности

$$\left\langle \Phi_{k0}^{(1)}, \Gamma_s^{(l)} \right\rangle = \delta_{ks}\cdot\delta_{jl}, \left\langle \mathrm{Z}_{k0}^{(1)}, \Psi_{s0}^{(l)} \right\rangle = \delta_{il}\cdot\delta_{ks}, \widetilde{\mathbf{B}}\Phi_{s0}^{(l)} = \sum_{s=1}^{p_0} \mathcal{A}_{s0}\mathrm{Z}_{s0}^{(p_0+1-s)},$$

то биортогональные системы (2.1) можно выбрать в таком виде, что

$$\Gamma_{s0}^{(l)} = \sum_{k=1}^{p_s+l} \mathcal{A}_{k0}^*\Psi_s^{(p_s+2-l+k)}, \mathrm{Z}_{k0}^{(j)} = \sum_{s=1} \mathcal{A}_{so}\Phi_{k0}^{(p_k+2-j-s)}. \tag{2.5}$$

Определение 2.1. Условие, при котором у операторов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}(\lambda_0,0)$ отсутствуют общие нули, далее будет называться *устранением вырожденности* (условие УВ).

Согласно редукционному методу для разрешения поставленной задачи (1.1) для всех $i = \overline{1,n}$ необходимо ввести регуляризации

$$\overline{\mathbf{B}}_i(\lambda,\varepsilon) = \mathbf{B}(\lambda,\varepsilon) + \sum_{j\neq i} \left\langle \cdot, \Gamma_{j0}^{(1)} \right\rangle \mathrm{Z}_{j0}^{(1)}. \tag{2.6}$$

Для этих регуляризаций справедлив следующий результат [10, 11].

Теорема 2.1. *Пусть выполнено условие УВ. Если собственные значения* $\lambda_i(\varepsilon) = \lambda_0 + \mu_i(\varepsilon)$ *задачи* (1.2) *имеют соответствующие собственные элементы* $\Phi_i(\varepsilon) = (\varphi_i(\varepsilon), \psi_i(\varepsilon))^{\mathrm{T}}$ *и элементы дефекта* $\Psi_i(\varepsilon) = \left(\overline{\varphi_i}(\varepsilon), \overline{\psi}_i(\varepsilon)\right)^{\mathrm{T}}$, *то для всех* $i = \overline{1,n}$ *и достаточно малого* ε *собственное значение* $\lambda_i(\varepsilon)$ *является простым* (*некратным*) *собственным значением регуляризованной задачи* (2.6) *с соответствующими собственным вектором и функционалом дефекта вида*

$$\tilde{\Phi}_i(\varepsilon) = \Phi_i(\varepsilon) + \sum_{s\neq i} c_{is}\Phi_s(\varepsilon), \quad \tilde{\Psi}_i(\varepsilon) = \Psi_i(\varepsilon) + \sum_{s\neq i} d_{is}\Psi_s(\varepsilon). \tag{2.7}$$

Доказательство этой теоремы известно [10] и приведено здесь для полноты картины.

Доказательство. Если $\lambda_i(\varepsilon)$ — это собственное значение регуляризации (2.6), то для соответствующего собственного элемента вида (2.7) будем иметь

$$0=\overline{\mathbf{B}}_i(\lambda,\varepsilon)\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)=\left[\mathbf{B}(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon)+\sum_{j\neq i}\left\langle\cdot,\Gamma_{j0}^{(1)}\right\rangle Z_{j0}^{(1)}\right]\left[\Phi_i(\varepsilon)+\sum_{s\neq i}c_{is}\Phi_s(\varepsilon)\right]=$$

$$=\mathbf{B}(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon)\Phi_i(\varepsilon)+\sum_{j\neq i}c_{ij}\mathbf{B}(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon)\Phi_j(\varepsilon)+$$

$$+\sum_{j\neq i}\left\langle\Phi_i(\varepsilon),\Gamma_{j0}^{(1)}\right\rangle Z_{j0}^{(1)}+\sum_{j\neq i}\sum_{s\neq i}c_{is}\left\langle\Phi_s(\varepsilon),\Gamma_{j0}^{(1)}\right\rangle Z_{j0}^{(1)}=$$

$$=\sum_{j\neq i}c_{ij}\mathbf{B}(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon)\Phi_j(\varepsilon)+\sum_{j\neq i}\left\langle\Phi_i(\varepsilon),\Gamma_{j0}^{(1)}\right\rangle Z_{j0}^{(1)}+\sum_{j\neq i}\sum_{s\neq i}c_{is}\left\langle\Phi_s(\varepsilon),\Gamma_{j0}^{(1)}\right\rangle Z_{j0}^{(1)},$$

или

$$0=\sum_{j\neq i}c_{ij}\mathbf{B}(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon)\Phi_j(\varepsilon)+\sum_{j\neq i}\left\langle\Phi_i(\varepsilon),\Gamma_{j0}^{(1)}\right\rangle Z_{j0}^{(1)}+\sum_{j\neq i}\sum_{s\neq i}c_{is}\left\langle\Phi_s(\varepsilon),\Gamma_{j0}^{(1)}\right\rangle Z_{j0}^{(1)}.$$

После применения функционалов ψ_{k0}, $k\neq i$, получим

$$\sum_{s\neq i}c_{is}\left[\left\langle\Phi_s(\varepsilon),\Gamma_{j0}^{(1)}\right\rangle Z_{j0}^{(1)}+\langle\mathbf{B}(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon)\Phi_s(\varepsilon),\Psi_{k0}\rangle\right]=-\left\langle\Phi_i(\varepsilon),\Gamma_{j0}^{(1)}\right\rangle Z_{j0}^{(1)},\ k\neq i. \tag{2.8}$$

Здесь

$$\mathbf{B}(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon)\Phi_s=\mathbf{B}(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon)\Phi_i+\mathbf{B}(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon)(\Phi_s-\varphi_i)=\mathbf{B}(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon)(\Phi_s-\Phi_i).$$

Затем в силу расширений $\Phi_s(\varepsilon)=\Phi_{s0}+\varepsilon\Phi_{s1}+\varepsilon^2\Phi_{s2}+\cdots$ и $\mathbf{B}(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon)=\mathbf{B}(\lambda_0;0)+O(\varepsilon)$ из [16] будем иметь

$$\mathbf{B}(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon)(\Phi_s-\Phi_i)=(\mathbf{B}(\lambda_0;0)+O(\varepsilon))(\Phi_{s0}-\Phi_{i0}+O(\varepsilon))=O(\varepsilon).$$

Так как $\left\langle\Phi_i,\Gamma_{k0}^{(1)}\right\rangle=1+O(\varepsilon)$, определитель системы (2.8) не равен нулю, следовательно, она имеет единственное решение.

Воспользуемся той же схемой для сопряженного уравнения

$$0=\overline{\mathbf{B}}_i^*(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon)\widetilde{\Psi}_i(\varepsilon). \tag{2.9}$$

Тогда

$$0=\left[\overline{\mathbf{B}}^*(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon)+\sum_{j\neq i}\left\langle Z_{j0}^{(1)},\cdot\right\rangle\Gamma_{j0}^{(1)}\right]\left[\Psi_i(\varepsilon)+\sum_{s\neq i}d_{is}\Psi_s(\varepsilon)\right]=$$

$$=\overline{\mathbf{B}}^*(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon)\Psi_i(\varepsilon)+\sum_{s\neq i}d_{is}\overline{\mathbf{B}}^*(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon)\Psi_s(\varepsilon)+$$

$$+\sum_{j\neq i}\left\langle Z_{j0}^{(1)},\Psi_i(\varepsilon)\right\rangle\Gamma_{j0}^{(1)}+\sum_{j\neq i}\sum_{s\neq i}d_{is}\left\langle Z_{j0}^{(1)},\Psi_s(\varepsilon)\right\rangle\Gamma_{j0}^{(1)}=$$

$$=\sum_{s\neq i}d_{is}\left[\overline{\mathbf{B}}^*(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon)\Psi_s(\varepsilon)+\sum_{j\neq i}\left\langle Z_{j0}^{(1)},\Psi_s(\varepsilon)\right\rangle\Gamma_{j0}^{(1)}\right]+\sum_{j\neq i}\left\langle Z_{j0}^{(1)},\Psi_i(\varepsilon)\right\rangle\Gamma_{j0}^{(1)}.$$

Применяя элементы $\Phi_{k0}, k\neq i$ к обеим частям последнего равенства, получаем

$$\sum_{s\neq i}d_{is}\left[\left\langle Z_{j0}^{(1)},\Psi_s(\varepsilon)\right\rangle+\left\langle\Phi_{k0},\overline{\mathbf{B}}^*(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon)\Psi_s(\varepsilon)\right\rangle\right]=-\left\langle Z_{k0}^{(1)},\Psi_i(\varepsilon)\right\rangle,\ k\neq i. \tag{2.10}$$

Здесь в силу расширений $\Psi_s(\varepsilon)=\Psi_{s0}+\mathrm{O}(\varepsilon)$ и $\overline{\mathbf{B}}^*(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon)=\overline{\mathbf{B}}^*(\lambda_i,0)+\mathrm{O}(\varepsilon)$ будем иметь

$$\overline{\mathbf{B}}^*(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon)(\Psi_s-\Psi_i)=\left(\overline{\mathbf{B}}^*(\lambda_0;0)+O(\varepsilon)\right)(\Psi_{s0}-\Psi_{i0}+O(\varepsilon))=O(\varepsilon),$$

откуда следует, что определитель системы не равен нулю, что доказывает единственность ее решения. □

Замечание 2.1. Аналогично доказывается, что все собственные значения операторов (2.6) также являются собственными значениями оператора $A(t;\varepsilon)$.

3. Возмущение собственных значений и собственных элементов

3.1. Пример отсутствия обобщенных жордановых цепочек $\det[\mathcal{A}_{j0}\Phi_{i0},\Psi_{j0}]\neq 0, i=\overline{1,n}$**.** В данном случае, не ограничивая общности, можно предположить $\langle\mathcal{A}_{j0}\Phi_{i0},\Psi_{i0}\rangle\neq 0$. Пусть $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)$ — это собственный элемент оператора $\mathcal{B}-\mathcal{A}(\lambda_0+\mu_i(\varepsilon),\varepsilon)$, отвечающий собственному значению λ_i. Тогда регуляризованное $[\mathcal{B}-\mathcal{A}(\mu,\varepsilon)]\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)=0$ уравнение $\overline{\mathbf{B}}_i(\lambda,\varepsilon)\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)=0$ дает

$$[\mathcal{B}-\mathcal{A}(\lambda_0,0)]\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)=\overline{\mathcal{A}}(\mu_i(\varepsilon),\varepsilon)\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)+\mathrm{H}_i(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon)\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)-\sum_{j\neq i}\langle\tilde{\Phi}_i(\varepsilon),\Gamma_{j0}\rangle\mathcal{Z}_{j0}, \tag{3.1}$$

где $\overline{\mathcal{A}}(\mu_i(\varepsilon),\varepsilon)=\mathcal{A}(\lambda_0)-\mathcal{A}(\mu_i(\varepsilon),\varepsilon), \mathrm{H}_i(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon)=\mathcal{A}(\lambda_i(\varepsilon),0)-\mathcal{A}(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon)$. После применения оператора Шмидта $\mathbf{\Gamma}=\left[\widetilde{\mathbf{B}}(\lambda_0,0)\right]^{-1}$ последнее уравнение (3.1) сводится к эквивалентной системе

$$\tilde{\mathbf{B}}(\lambda_0)\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)=\overline{\mathcal{A}}(\mu_i(\varepsilon))\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)+\mathrm{H}_i(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon)\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)+\xi_i\mathcal{Z}_{i0},\ \xi_i=\langle\tilde{\Phi}_i(\varepsilon),\Gamma_{i0}\rangle, \tag{3.2}$$

откуда следует

$$\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)=\xi_i\left[I-\mathbf{\Gamma}\overline{\mathcal{A}}(\mu_i(\varepsilon))-\mathbf{\Gamma}\mathrm{H}_i(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon)\right]^{-1}\Phi_{i0}. \tag{3.3}$$

Подстановка $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)$ во второе уравнение (3.2) дает i-ое *уравнение ветвления* (УрВ) для собственного значения λ_0:

$$\langle\left[\overline{\mathcal{A}}(\mu_i(\varepsilon))+\mathrm{H}_i(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon)\right]\left[I-\mathbf{\Gamma}\overline{\mathcal{A}}(\mu_i(\varepsilon))-\mathbf{\Gamma}\mathrm{H}_i(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon)\right]^{-1}\Phi_{i0},\Psi_{i0}\rangle=0. \tag{3.4}$$

В силу аналитической зависимости оператора $\mathcal{A}(\lambda_0+\mu_i(\varepsilon),\varepsilon)-\mathcal{A}(\lambda_0,0)$ от μ и ε в окрестности точки $(\lambda_0,0)$ после расширения (3.3) в степенном ряде будем иметь

$$\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}L_{sli}\mu_i^s\varepsilon^l=0, \tag{3.5}$$

где

$$L_{sli}=\sum_{(s,l)=(s_1,l_1)+\dots+(s_k,l_k)}\langle\mathcal{A}_{s_1l_1}\mathbf{\Gamma}\mathcal{A}_{s_2l_2}\dots\mathbf{\Gamma}\mathcal{A}_{s_kl_k}\Phi_{i0},\Psi_{i0}\rangle.$$

Коэффициент $L_{10}=\langle\mathcal{A}_{10}\Phi_{i0},\Psi_{i0}\rangle$ отличен от нуля. Следовательно, $\{\mu_i(\varepsilon), i=\overline{1,n}\}$ выражаются из уравнения (3.5) в виде ряда по целым степеням ε. Подстановка $\mu_i(\varepsilon)$ в (3.3) дает соответствующие собственные элементы $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)$ также в виде ряда по целым степеням ε. Тем самым нами доказан следующий результат:

Теорема 3.1. *Если* $\dim N(\mathcal{B}-\mathcal{A}(\lambda_0,0))=\dim N(\mathcal{B}^*-\mathcal{A}^*(\lambda_0,0))=n$ *и* $\langle\mathcal{A}_{10}\Phi_{i0},\Psi_{i0}\rangle\neq 0$ *для всех* $i=1,2,\dots,n,$*, то при достаточно малом* ε *существует ровно* n *геометрически простых собственных значений* $\lambda_i(\varepsilon)=\lambda_0+\mu_i(\varepsilon)$, $\lambda_i(0)=\lambda_0$, *с соответствующими собственными элементами* $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)$ *и функционалами дефекта* $\tilde{\Psi}_i(\varepsilon)$, *аналитически зависимыми от* ε.

3.2. Пример существования биканонических жордановых множеств. Доказательство теоремы 2.1, приведенное в [10,11], может быть преобразовано в случае существования биканонических $\mathcal{A}(\mu,0)$-жордановых множеств для завершения *полного устранения вырожденности* в терминологии В. А. Треногина [4], т. е. для описания появления $K=\sum\limits_{s=1}^{n}p_s$ собственных значений и соответствующих им собственных векторов возмущенной системы (1.1) или (1.2). Говоря конкретно, в таком случае верны следующие соотношения: $\|\Phi_s(\varepsilon)-\Phi_s(\varepsilon)\|=\|\Phi_{s0}-\Phi_{s0}\|+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{1/p_s}\right)$, где $\|\Phi\|=\sqrt{\langle\Phi,\Phi\rangle}$ — это норма в пространстве $\mathcal{H}=H\dot{+}H$.

Теорема 3.2. *Допустим существование биканонических жордановых множеств, и пусть* $L_{p_i0}=\left\langle\sum\limits_{k=1}^{p_i}\mathcal{A}_{k0}\Phi_{i0}^{(p_i+1-k)},\Psi_{i0}\right\rangle\neq 0$ *для всех* $i=\overline{1,n}$*. Если* $L_{0j}=0$, $j=\overline{1,\infty}$ *и* $L_{11}\neq 0$, *то* *существует K простых собственных значений с соответствующими им собственными элементами, представляющихся в виде ряда по степеням $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$. Если $L_{0j}=0$, $j=\overline{1,q_i-1}$, $L_{0q_i}\neq 0$, $L_{11}\neq 0$, то существует ровно K собственных значений, из которых n (с соответствующими им собственными элементами) представляются в виде ряда по целым степеням ε в зависимости от первого ненулевого коэффициента из последовательности $\{L_{1j}\}$, остальные же $K-n$ собственных значений со своими собственными элементами представляются в виде ряда по степеням $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$.*

Доказательство. Для доказательства теоремы мы применим метод диаграмм Ньютона [4].

Допустим существование биканонических жордановых множеств, и пусть
$$\left\langle \sum_{k=1}^{p_i} \mathcal{A}_{k0}\Phi_{i0}^{(p_i+1-k)}, \Psi_{i0}\right\rangle \neq 0$$
для всех $i=\overline{1,n}$. Тогда в уравнении (3.5), согласно определению биканонических жордановых множеств, для всех $i=\overline{1,n}$
$$L_{p_i0}=\langle\sum_{k=1}^{p_i} \mathcal{A}_{k0}\Phi_{i0}^{(p_i+1-k)}, \Psi_{i0}\rangle \neq 0, \left\langle \sum_{k=1}^{p_i} \mathcal{A}_{k0}\Phi_{i}^{(p_i+1-k)}, \Psi_{s0}\right\rangle = 0,\ s\neq i. \tag{3.6}$$

Убывающая часть диаграммы Ньютона, построенной для УрВ (3.5), состоит либо из отрезка, соединяющего точки $(1;1)$ и $(p_i;0)$ (это будет так, если все L_{0j} равны нулю, а $L_{11}\neq 0$), либо из двух отрезков: указанного выше и того, что соединяет точки $(1;1)$ и $(0;q_i)$, где q_i — это номер первого ненулевого члена последовательности $\{L_{0j}\}$. Первому отрезку отвечает показатель $\dfrac{1}{p_i-1}$, а второму, в любом случае, целый показатель. Следовательно, задача (1.1) при достаточно малом ε имеет ровно $K=\sum\limits_{i=1}^{n} p_i$ собственных значений $\lambda_i(\varepsilon)=\lambda_0+\mu_i(\varepsilon), \lambda_i(0)=\lambda_0$, где n собственных значений представляются в виде сходящегося ряда по целым степеням ε, а $K-n$ собственных значений — по степеням $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$. Каждому $\lambda_i(\varepsilon)$ отвечает собственный элемент $\Phi_i(\varepsilon)$, представленный в виде сходящегося ряда с той же степенью ε, что и у соответствующих $\lambda_i(\varepsilon)$. □

4. Приложение к задаче о краевом возмущении

В качестве приложения рассмотрим задачу о краевом возмущении в следующей системе Штурма—Лиувилля:
$$\begin{gathered} y''+[\lambda a(x)-p(x)]\,z=0,\\ z''+[\lambda a(x)-p(x)]\,y=0, \end{gathered} \tag{4.1}$$
$$\begin{gathered} \alpha_{11}y(0)+\alpha_{12}y'(0)=0,\ \alpha_{11}^2+\alpha_{12}^2\neq 0,\\ \alpha_{21}y(T)+\alpha_{22}y'(T)=0,\ \alpha_{21}^2+\alpha_{22}^2\neq 0,\\ \beta_{11}z(0)+\beta_{12}z'(0)=0,\ \beta_{11}^2+\beta_{12}^2\neq 0,\\ \beta_{21}z(T)+\beta_{22}z'(T)=0,\ \beta_{21}^2+\beta_{22}^2\neq 0, \end{gathered} \tag{4.2}$$
где $x\in[0,T]$, $a(x),p(x)\in A(\mathbb{R}_+)$, $T=1+\varepsilon$ ($A(\mathbb{R}_+)$ — это пространство все аналитических на $\mathbb{R}_+=[0,+\infty)$ функций.

Заменой переменных $x=T\tau, y(x)=y(\tau+\varepsilon\tau)=\varphi(\tau)$, $z(x)=z(\tau+\varepsilon\tau)=\psi(\tau)$ задача (4.1)-(4.2) сводится к системе
$$(1+\varepsilon)^{-2}\left(\frac{d^2}{d\tau^2}-\rho(\tau)\right)\varphi(\tau)-(1+\varepsilon)^{-2}\sum_{l=2}^{\infty}\varepsilon^l\frac{\tau^{l-2}}{(l-2)!}\times$$
$$\times\left[p^{(l-2)}(\tau)+\frac{2\tau}{l-1}p^{(l-1)}(\tau)+\frac{\tau^2}{l(l-1)}p^{(l)}(\tau)\right]\varphi(\tau)+\lambda\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^l\frac{\tau^l}{l!}a^{(l)}(\tau)\psi(\tau)=0,$$
$$(1+\varepsilon)^{-2}\left(\frac{d^2}{d\tau^2}-\rho(\tau)\right)\psi(\tau)-(1+\varepsilon)^{-2}\sum_{l=2}^{\infty}\varepsilon^l\frac{\tau^{l-2}}{(l-2)!}\times$$

$$\times\left[p^{(l-2)}(\tau)+\frac{2\tau}{l-1}p^{(l-1)}(\tau)+\frac{\tau^2}{l(l-1)}p^{(l)}(\tau)\right]\psi(\tau)+\lambda\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^l\frac{\tau^l}{l!}a^{(l)}(\tau)\varphi(\tau)=0 \qquad (4.3)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned}&\alpha_{11}\varphi(0)+\alpha_{12}\varphi'(0)=0,\\&\alpha_{21}\varphi(1)+\alpha_{22}\varphi'(1)=0,\\&\beta_{11}\psi(0)+\beta_{12}\psi'(0)=0,\\&\beta_{21}\psi(1)+\beta_{22}\psi'(1)=0.\end{aligned} \qquad (4.4)$$

Оператор, отвечающий задаче (4.3)-(4.4), может быть записан в следующей форме:

$$A_0\varphi=\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^jA_j\varphi+(1+\varepsilon)^{-2}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^mB_m\psi, A_0^*\psi=\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^jA_j^*\psi+(1+\varepsilon)^{-2}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^mB_m^*\varphi,$$

где

$$A_0=\tfrac{d^2}{d\tau^2}-\rho(\tau), B_1\varphi=(-2\rho(\tau)-\tau\rho'(\tau))\varphi,$$

$$B_k\varphi=-\tfrac{\tau^{k-2}}{(k-2)!}\left[\rho^{(k-2)}(\tau)+\tfrac{2\tau}{k-1}\rho^{(k-1)}(\tau)+\tfrac{\tau^2}{k(k-1)}\rho^{(k)}(\tau)\right]\varphi(\tau)=a_k(\tau)\varphi(\tau,)$$

$$B_0\psi=B(0)\psi=-a(\tau)\psi(\tau), A_l\varphi=-\tfrac{\tau^l}{l!}a^{(l)}(\tau)\varphi(\tau)=b_l(\tau)\varphi(\tau).$$

Эти соотношения можно переписать в следующем матричном виде:

$$\begin{pmatrix}A_0&0\\0&A_0^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\\psi\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j+\begin{pmatrix}A_m&0\\0&A_m^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\\psi\end{pmatrix}+$$

$$+\lambda\sum_{j=1}^{\infty}(1+\varepsilon)^2\varepsilon^m\begin{pmatrix}0&B_m\\B_m^*&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\\psi\end{pmatrix}, \qquad (4.5)$$

или

$$\mathcal{A}_0\Phi=\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j\mathcal{A}_j\Phi+\lambda\sum_{m=0}^{\infty}(1+\varepsilon)^2\varepsilon^m\mathcal{B}_m\Phi. \qquad (4.6)$$

Пусть λ_0 — это изолированная фредгольмова точка такая, что $N(\mathcal{A}_0-\lambda_0\mathcal{A}_0)=\{\Phi_{io}\}_1^2$, $N^*(\mathcal{A}_0-\lambda_0\mathcal{A}_0)=\{\Psi_{io}\}_1^2$. Пусть $\{\Gamma_{i0}\}_1^2$ и $\{\mathrm{Z}_{i0}\}_1^2$ — это соответствующие биортогональные элементы для $\{\Phi_{io}\}_1^2$ и $\{\Psi_{io}\}_1^2$.

Для каждого $i=\overline{1,n}$ введем регуляризованные операторы

$$\overline{[\mathcal{A}(\varepsilon)-\lambda\mathcal{B}(\varepsilon)]_i}\Phi=(\mathcal{A}(\varepsilon)-\lambda\mathcal{B}(\varepsilon))\Phi+\sum_{i\neq j}\langle\Phi,\Gamma_{j0}\rangle\,\mathrm{Z}_{j0} \qquad (4.7)$$

Исходя из теоремы 2.1, искомое собственное значение $\lambda_i(\varepsilon)$ является простым собственным значением оператора (4.7). Если $\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)$ — это соответствующая собственная функция, то

$$\overline{[\mathcal{A}(\varepsilon)-\lambda\mathcal{B}(\varepsilon)]_i}\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)=0,$$

или

$$(\mathcal{A}(\varepsilon)-\lambda\mathcal{B}(\varepsilon))\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)+\sum_{i\neq j}\left\langle\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon),\Gamma_{j0}\right\rangle\mathrm{Z}_{j0}=0,$$

откуда следует

$$(\mathcal{A}_0(\varepsilon)-\lambda_0\mathcal{B}_0)\widetilde{\Phi}(\varepsilon)=\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m\mathcal{A}_m\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)+(2\varepsilon+\varepsilon^2)\lambda_0B_0\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)+$$

$$+(1+2\varepsilon+\varepsilon^2)\cdot\mu_i\mathcal{B}_0\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)+(1+2\varepsilon+\varepsilon^2)(\lambda_0+\mu_i)\sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon^l\mathcal{B}_l\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)-\sum_{i\neq j}\left\langle\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon),\Gamma_{j0}\right\rangle\mathrm{Z}_{j0}. \qquad (4.8)$$

С помощью регуляризатора Э. Шмидта

$$(\mathcal{A}_0-\lambda_0\mathcal{B}_0)\Phi=(\mathcal{A}_0-\lambda_0\mathcal{B}_0)\Phi+\sum_{i=1}^{n}\langle\Phi,\Gamma_{j0}\rangle \mathrm{Z}_{j0}$$

равенство (4.8) может быть переписано в виде

$$\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)=\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m\Gamma\mathcal{B}_m\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)+(2\varepsilon+\varepsilon^2)\lambda_0\Gamma\mathcal{B}_0\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)+(1+2\varepsilon+\varepsilon^2)\cdot\mu_i\Gamma\mathcal{B}_0\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)+$$

$$+(1+2\varepsilon+\varepsilon^2)\cdot(\lambda_0+\mu_i)\sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon^l\Gamma\mathcal{B}_l\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)+\left\langle\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon),\Gamma_{i0}\right\rangle\Phi_{i0},$$

где $\Gamma=\widetilde{(A_0-\lambda_0B_0)}^{-1}$, или же в форме системы:

$$\left[I-\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m\Gamma\mathcal{A}_m-(2\varepsilon+\varepsilon^2)\lambda_0\Gamma\mathcal{B}_0-(1+2\varepsilon+\varepsilon^2)\mu_i\Gamma\mathcal{B}_0-\right.$$

$$\left.-(1+2\varepsilon+\varepsilon^2)(\lambda_0+\mu_i)\sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon^l\Gamma\mathcal{B}_l\right]\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)=\xi_i\Phi_{i0},$$

$$\xi_i=\left\langle\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon),\Gamma_{i0}\right\rangle.$$

После того, как мы выразили $\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)$ из первого уравнения

$$\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)=\xi_i\left[I-\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m\Gamma\mathcal{A}_m-(2\varepsilon+\varepsilon^2)\lambda_0\Gamma\mathcal{B}_0-(1+2\varepsilon+\varepsilon^2)\mu_i\Gamma\mathcal{B}_0-\right.$$

$$\left.-(1+2\varepsilon+\varepsilon^2)(\lambda_0+\mu_i)\sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon^l\Gamma\mathcal{B}_l\right]^{-1}\Phi_i(\varepsilon),$$

подставим ее во второе, что даст нам i-е уравнение ветвления для нахождения $\mu_i(\varepsilon)$:

$$\sum_{k+s\geqslant 1}L_{ks}^{(i)}\mu_i^k\varepsilon^s\equiv 1-\left\langle\left[I-\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m\Gamma\mathcal{A}_m-(2\varepsilon+\varepsilon^2)\lambda_0\Gamma\mathcal{B}_0-(1+2\varepsilon+\varepsilon^2)\mu_i\Gamma\mathcal{B}_0-\right.\right.$$

$$\left.\left.-(1+2\varepsilon+\varepsilon^2)(\lambda_0+\mu_i)\sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon^l\Gamma\mathcal{B}_l\right]^{-1}\Phi_{i0},\Gamma_{i0}\right\rangle=0,\quad i=1,2. \tag{4.9}$$

Здесь $L_{10}^{(i)}=\langle\mathcal{B}_0\Phi_{i0},\Psi_{i0}\rangle$, $L_{01}^{(i)}=\langle(\mathcal{A}_1-2\lambda_0\mathcal{B}_0-\lambda_0\mathcal{B}_1)\Phi_{i0},\Psi_{i0}\rangle$,

$$L_{0j}^{(i)}=\left\langle\sum_{j_1\alpha_1+j_2\alpha_2+\ldots+j_k\alpha_k=j}[\Gamma(\mathcal{A}_{j1}-\lambda_0\mathcal{B}_{j1-2}-2\lambda_0\mathcal{B}_{j1-1}-\lambda_0\mathcal{B}_{j1})]^{\alpha_1}\ldots\right.$$

$$\left.\ldots[\Gamma(\mathcal{A}_{jk}-\lambda_0\mathcal{B}_{jk-2}-2\lambda_0\mathcal{B}_{jk-1}-\lambda_0\mathcal{B}_{jk})]^{\alpha_k}\Phi_{i0},\Gamma_{i0}\right\rangle,\quad j\geqslant 2.$$

Если, например, $\langle\mathcal{B}_0\Phi_{i0},\Psi_{i0}\rangle=\int\limits_0^1 a(\tau)\left[\varphi(\tau)\overline{\psi}(\tau)+\overline{\varphi}(\tau)\psi(\tau)\right]d\tau\neq 0$, $i=1,2$, то из УрВ (4.9) будет следовать, что $L_{10}^{(i)}\neq 0$ и $\lambda_i(\varepsilon)$ представляются в виде рядов по целым степеням ε. Более того, эти ряды начинаются с ε^j, где j — это первый такой номер, при котором $L_{0j}^{(i)}\neq 0$.

Собственные функции $\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)$, $i=1,2$ также содержат лишь целые степени ε. Последующие коэффициенты в разложениях $\lambda_i(\varepsilon)$ и $\widetilde{\varphi}_i(\varepsilon)$ могут быть определены методом неопределенных коэффициентов (см. [4, § 31]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аржаных И. С.* Обобщение теоремы Гамильтона—Кэли// Докл. АН УзССР. — 1951. — № 7. — С. 3–5.
2. *Аржаных И. С., Гугнина В. И.* Распространение методов Крылова, Леверрье и Фаддеева на полиномиальные матрицы// Тр. Ин-та матем. им. В. И. Романовского. — 1962. — *24.* — С. 33–67.
3. *Аржаных И. С., Гугнина В. И.* О развертывании характеристического уравнения// Тр. Ин-та матем. им. В. И. Романовского. — 1962. — *26.* — С. 3–12.
4. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1969.
5. *Валовик Д. В., Смирнов Ю. Г.* Распространение электромагнитных волн в нелинейных слоистых средах. — Пенза: ПГУ, 2010.
6. *Ильинский А. С., Слепян Г. Я.* Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. — М.: МГУ, 1983.
7. *Логинов Б. В., Поспеев В. Е.* О собственных числах и векторах возмущенного оператора// Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1967. — № 6. — С. 29–35.
8. *Логинов Б. В., Русак Ю. Б.* Обобщенная жорданова структура в теории ветвления// В сб.: «Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными». — Ташкент: Изд-во «Фан», 1978. — С. 133–148.
9. *Могилевский Ш. И.* О представлении вполне непрерывного оператора в абстрактном гильбертовом сепарабельном пространстве// Изв. вузов. Сер. Мат. — 1958. — № 3. — С. 183–186.
10. *Рахимов Д. Г.* О возмущении фредгольмовых собственных значений линейных операторов// СВМО. — 2015. — *17*, № 3. — С. 37–43.
11. *Рахимов Д. Г.* О возмущении фредгольмовых собственных значений линейных операторов// Дифф. уравн. — 2017. — *53*, № 5. — С. 607–616.
12. *Русак Ю. Б.* Обобщенная жорданова структура аналитической оператор-функции и сопряженной к ней// Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1978. — № 2. — С. 15–19.
13. *Goursat E.* Course d'Analyse Mathematique. — Paris: Gautier-Villars, 1933.
14. *Kuvshinova A. N., Loginov B. V.* Some concequences of the generalized Hamilton—Cayley theorem for matrices polynomially dependent on E. Schmidt spectral parameter// ROMAI J. — 2014. — *10*, № 1. — С. 81–92.
15. *Loginov B. V., Rakhimov D. G.* On spectral problem for Laplace operator in domain with perturbed boundaries// ROMAI J. — 2013. — *9*, № 2. — С. 129–141.
16. *Rellich F.* Storungstheory der Spektalzerlegung, I// Math. Ann. — 1936. — *113.* — С. 600–619.
17. *Schmidt E.* Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I// Math. Ann. — 1907. — *63.* — С. 433–476.
18. *Schmidt E.* Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. II// Math. Ann. — 1907. — *64.* — С. 161–174.
19. *Schmidt E.* Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III// Math. Ann. — 1908. — *65.* — С. 370–399.
20. *Sidorov N. V., Sinitsyn A. V., Falaleev M. V.* Lyapunov—Schmidt methods in nonlinear analysis and applications. — Dordrecht: Kluwer, 2002.

Д. Г. Рахимов
Филиал Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова в Ташкенте,
Узбекистан, 100060, г. Ташкент, пр-т А. Темура, д. 22
E-mail: davranaka@yandex.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-72-82 UDC 517.988.67

Reductional Method in Perturbation Theory of Generalized Spectral E. Schmidt Problem

© 2019 **D. G. Rakhimov**

Abstract. In this a paper perturbations of multiple eigenvalues of E. Schmidt spectral problems is considered. At the usage of the reductional method suggested in the articles [10, 11] the investigation of the multiple E. Schmidt perturbation eigenvalues is reduced to the investigation of perturbation of simple ones. At the end, as application of the obtained results the problem about the boundary perturbation for the system of two Sturm–Liouville problems with E. Schmidt spectral parameter is considered.

REFERENCES

1. I. S. Arzhanykh, "Obobshchenie teoremy Gamil'tona—Keli" [Generalization of the Hamilton–Cayley theorem], *Dokl. AN UzSSR* [Rep. Acad. Sci. Uzbek SSR], 1951, No. 7, 3–5 (in Russian).
2. I. S. Arzhanykh and V. I. Gugnina, "Rasprostranenie metodov Krylova, Leverr'e i Faddeeva na polinomial'nye matritsy" [Extension of the Krylov, LeVerrier, and Faddeev methods to polynomial matrices], *Tr. In-ta matem. im. V. I. Romanovskogo* [Proc. Romanovskii Math. Univ.], 1962, **24**, 33–67 (in Russian).
3. I. S. Arzhanykh and V. I. Gugnina, "O razvertyvanii kharakteristicheskogo uravneniya" [On expansion of the characteristic equation], *Tr. In-ta matem. im. V. I. Romanovskogo* [Proc. Romanovskii Math. Univ.], 1962, **26**, 3–12 (in Russian).
4. M. M. Vainberg and V. A. Trenogin, *Teoriya vetvleniya resheniy nelineynykh uravneniy* [Theory of Branching of Solutions of Nonlinear Equations], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).
5. D. V. Valovik and Yu. G. Smirnov, *Rasprostranenie elektromagnitnykh voln v nelineynykh sloistykh sredakh* [Propagation of Electromagnetic Waves in Nonlinear Foliated Media], PGU, Penza, 2010 (in Russian).
6. A. S. Il'inskiy and G. Ya. Slepyan, *Kolebaniya i volny v elektrodinamicheskikh sistemakh s poteryami* [Oscillations and Waves in Electrodynamic Systems with Dissipation], MGU, Moscow, 1983 (in Russian).
7. B. V. Loginov and V. E. Pospeev, "O sobstvennykh chislakh i vektorakh vozmushchennogo operatora" [On eigenvalues and eigenvectors of a perturbed operator], *Izv. AN UzSSR. Ser. fiz.-mat. nauk* [Bull. Acad. Sci. Uzbek SSR. Ser. Phys.-Math. Sci.], 1967, No. 6, 29–35 (in Russian).
8. B. V. Loginov and Yu. B. Rusak, "Obobshchennaya zhordanova struktura v teorii vetvleniya" [Generalized Jordan structure in the branching theory], In: *Pryamye i obratnye zadachi dlya differentsial'nykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi* [Direct and Inverse Problems for Partial Differential Equations], Fan, Tashkent, 1978, pp. 133–148 (in Russian).
9. Sh. I. Mogilevskiy, "O predstavlenii vpolne nepreryvnogo operatora v abstraktnom gil'bertovom separabel'nom prostranstve" [On representation of a completely continuous operator in the abstract Hilbert separable space], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1958, No. 3, 183–186 (in Russian).
10. D. G. Rakhimov, "O vozmushchenii fredgol'movykh sobstvennykh znacheniy lineynykh operatorov" [On perturbation of Fredholm eigenvalues of linear operators], *SVMO* [SVMO], 2015, **17**, No. 3, 37–43 (in Russian).
11. D. G. Rakhimov, "O vozmushchenii fredgol'movykh sobstvennykh znacheniy lineynykh operatorov" [On perturbation of Fredholm eigenvalues of linear operators], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2017, **53**, No. 5, 607–616 (in Russian).
12. Yu. B. Rusak, "Obobshchennaya zhordanova struktura analiticheskoy operator-funktsii i sopryazhennoy k ney" [Generalized Jordan structure of an analytic operator-function and its conjugate one], *Izv. AN UzSSR. Ser. fiz.-mat. nauk* [Bull. Acad. Sci. Uzbek SSR. Ser. Phys.-Math. Sci.], 1978, No. 2, 15–19 (in Russian).
13. E. Goursat, *Course d'Analyse Mathematique*, Gautier-Villars, Paris, 1933.
14. A. N. Kuvshinova and B. V. Loginov, "Some concequences of the generalized Hamilton—Cayley theorem for matrices polynomially dependent on E. Schmidt spectral parameter," *ROMAI J.*, 2014, **10**, No. 1, 81–92.

15. B. V. Loginov and D. G. Rakhimov, "On spectral problem for Laplace operator in domain with perturbed boundaries," *ROMAI J.*, 2013, **9**, No. 2, 129–141.
16. F. Rellich, "Storungstheory der Spektalzerlegung, I," *Math. Ann.*, 1936, **113**, 600–619.
17. E. Schmidt, "Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I," *Math. Ann.*, 1907, **63**, 433–476.
18. E. Schmidt, "Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. II," *Math. Ann.*, 1907, **64**, 161–174.
19. E. Schmidt, "Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III," *Math. Ann.*, 1908, **65**, 370–399.
20. N. V. Sidorov, A. V. Sinitsyn, and M. V. Falaleev, *Lyapunov—Schmidt methods in nonlinear analysis and applications*, Kluwer, Dordrecht, 2002.

D. G. Rakhimov
Branch of the Lomonosov Moscow State University in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: davranaka@yandex.com