Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 1 (2019). С. 33–43

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-33-43 УДК 517.958

ПРИМЕНЕНИЕ A-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ ПОРОУПРУГОЙ СИСТЕМЫ

© 2019 г. **Х. Х. ИМОМНАЗАРОВ, Н. М. ЖАББОРОВ**

Аннотация. В этой работе нами была получена замкнутая система динамических уравнений второго порядка относительно вектора смещения упругого пористого тела и порового давления в обратимом гидродинамическом приближении. Также была рассмотрена задача Коши для полученной системы пороупругих уравнений в стационарном случае; в том числе для рассматриваемой задачи была построена формула Карлемана.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Теория пороупругости широко используется в геомеханике, биофизике и других областях науки и технологий. Теория Френкеля—Био являет собой замкнутую систему дифференциальных уравнений второго порядка относительно векторов смещения упругих пористых тел и вытеснения жидкости [12, 15]. Такая система описывает распространение сейсмических волн в пористой среде и в изотропном случае содержит четыре независимых параметра упругости. Линеаризованная теория В. Н. Доровского являет собой замкнутую систему дифференциальных уравнений второго порядка относительно векторов скорости смещения упругих пористых тел и скорости потока жидкости [17, 19]. Как и теория Френкеля—Био, линеаризованная теория описывает распространение сейсмических волн в пористой среде, однако в отличие от системы из теории Френкеля—Био в изотропном случае описывается тремя независимыми параметрами упругости. В [18] была получена замкнутая система дифференциальных уравнений второго порядка относительно вектора смещений упругого пористого тела и порового давления во временной области. Для частотной области такая система была описана в [21]. В нашей же работе мы получаем замкнутую систему динамических уравнений второго порядка относительно вектора смещения упругого пористого тела и порового давления в случае, когда в системе не происходит потерь энергии. Далее мы рассматриваем задачу Коши для стационарной пороупругой системы на плоскости, а затем строим формулу Карлемана для данной задачи.

2. Задачи Коши для эллиптической системы на плоскости

Пусть Ω — это произвольная ограниченная односвязная область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с границей класса C^{∞}, а $M \subset \partial\Omega$ — объединение конечного числа замкнутых дуг. Рассмотрим

Данная работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 16-01-00729).

задачу Коши для эллиптической системы второго порядка в Ω:

$$\mathcal{A}\frac{\partial^2}{\partial x^2}V+2\mathcal{B}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}V+\mathcal{C}\frac{\partial^2}{\partial y^2}V=0,\qquad V:\Omega\to\mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

$$V\left(x,y\right)|_M=G\left(x,y\right),P_\partial V\left(x,y\right)|_M=H\left(x,y\right), \tag{2.2}$$

где $G(x,y)$, $F(x,y)\in C(\Omega;\mathbb{R}^n)$ — заданные функции, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ — матрицы постоянных элементов размера $n\times n$, а P_∂ — некоторый дифференциальный оператор первого порядка (например, оператор напряжения для системы уравнений Ламе или производная по нормали). Система является эллиптической, т. е. матрицы $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ обратимы, а характеристический многочлен

$$\det\left\|\mathcal{A}+2\mathcal{B}\lambda+\mathcal{C}\lambda^2\right\|=0$$

не имеет вещественных корней.

Известны два классических метода исследования подобных эллиптических краевых задач: метод потенциалов и теоретически-функциональный метод. Фундаментальные результаты относительно решения эллиптических задач общего вида методом потенциалов были получены в [20].

Второй метод основывается на представлении решений эллиптических уравнений через аналитические функции, что делает возможным сведение нашей задачи к изучению краевых задач с точки зрения теории функций. Для эллиптических уравнений на плоскости с вещественными аналитическими коэффициентами такой метод был предложен И. Н. Векуа [5]; для эллиптических систем с постоянными коэффициентами — А. В. Бицадзе [16] (см. также [8, 11]).

Метод, предложенный Бицадзе, основывается на выражении регулярных решений системы (2.1) через аналитические векторнозначные функции и их производные с точностью до определенного порядка [3]. Такое представление существенно упрощается [9], если аналитические функции заменяются на решения канонических эллиптических систем первого порядка.

Для случая эллиптических систем первого порядка (с двумя неизвестными функциями, $s=2$) данная теория была описана в работах И. Н. Векуа [6] и Л. Берса [14] и теперь известна как теория обобщенных аналитических функций. В свою очередь, А. П. Солдатов [10] показал, что вышеописанное представление может быть записано в виде

$$V=\operatorname{Re}\Theta u, \tag{2.3}$$

где $u:\Omega\to\mathbb{C}^n$ — A-аналитическая функция переменного $z_\lambda=x+\lambda y$, где λ — это корень характеристического уравнения, элементы матрицы A и Θ выражаются через коэффициенты системы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, а A — нильпотентная матрица: $A^n=0$.

Определение 2.1 (см. [13]). Пусть A — квадратная матрица размерности n. Вектор-функция $u\left(z\right)\in C^1\left(\Omega,\mathbb{C}^n\right)$ называется *A-аналитической функцией* в Ω, если

$$\bar\partial_A u(z):=\partial_{\bar z}u\left(z\right)-A\partial_z u\left(z\right)=0,\ z=x+iy\in\Omega. \tag{2.4}$$

Таким образом, задача (2.1) становится эквивалентной задаче определения A-аналитической функции, заданной на части границы.

В [10] для определения матрицы Θ система (2.1) была представлена в виде эквивалентной ей системы дифференциальных уравнений первого порядка, где затем матрица итоговой системы была сведена к жордановой форме.

В [2] для случая $n=2$ было показано, что аналогичный результат можно получить с помощью свойств A-аналитических функций.

3. Система дифференциальных уравнений в смысле смещений упругого пористого тела и порового давления

Линеаризованная система уравнений для континуальной теории фильтрации в обратимом приближении имеет вид [17, 19]:

$$\rho_s\frac{\partial u_i}{\partial t}+\partial_k h_{ik}+\frac{\rho_s}{\rho}\partial_i P=0,$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\partial_i P=0,$$

$$\frac{\partial h_{ik}}{\partial t} + \mu\left(\partial_k u_i + \partial_i u_k\right) + \left(\lambda - \frac{\rho_s}{\rho}K\right)\delta_{ik}\mathrm{div}\mathbf{u} - \frac{\rho_l}{\rho}K\delta_{ik}\mathrm{div}\mathbf{v} = 0, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \left(K - \alpha\rho\rho_s\right)\mathrm{div}\mathbf{u} + \alpha\rho\rho_l\mathrm{div}\mathbf{v} = 0$$

В формулах (3.1) $\rho = \rho_s + \rho_l$, а $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ и $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ — векторы смещения упругого пористого тела и жидкости с соответствующими парциальными плотностями $\rho_s = \rho_s^f(1 - d_0)$ и $\rho_l = \rho_l^f d_0$, где d_0 — это пористость, P — поровое давление, h_{ik} — тензор напряжения, ρ_s^f и ρ_l^f — физические плотности упругого пористого тела и жидкости, соответственно, λ, μ — константы Ламе, $\alpha = \rho\alpha_3 + K/\rho^2$ (см. [17,19]), $K = \lambda + 2\mu/3$, $\rho^3 \cdot \alpha_3 > 0$ — модуль объемного сжатия жидкого компонента гетерофазной среды, δ_{ik} — символ Кронекера, $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$. Упругие константы К, μ, α_3 выражаются через скорость распределения поперечной волны c_s и две скорости продольных волн c_{p_1}, c_{p_2} по следующим формулам [22]:

$$\mu = \rho_s c_s^2,$$

$$K = \frac{\rho}{2}\frac{\rho_s}{\rho_l}\left(c_{p_1}^2 + c_{p_2}^2 - \frac{8}{3}\frac{\rho_l}{\rho}c_s^2 - \sqrt{\left(c_{p_1}^2 - c_{p_2}^2\right)^2 - \frac{64}{9}\frac{\rho_l\rho_s}{\rho^2}c_s^4}\right),$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2\rho^2}\left(c_{p_1}^2 + c_{p_2}^2 - \frac{8}{3}\frac{\rho_l}{\rho}c_s^2 + \sqrt{\left(c_{p_1}^2 - c_{p_2}^2\right)^2 - \frac{64}{9}\frac{\rho_l\rho_s}{\rho^2}c_s^4}\right).$$

Далее для простоты рассмотрим систему (3.1) с нулевыми начальными условиями. Из второго уравнения системы (3.1) получим формулу:

$$\frac{\partial\mathrm{div}\mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\Delta P.$$

Исключая дивергенцию смещения жидкости из третьего уравнения системы (3.1) и учитывая четвертое, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial h_{ik}}{\partial t} + \mu\left(\partial_k u_i + \partial_i u_k\right) + \left(\lambda - \frac{K^2}{\alpha\rho^2}\right)\delta_{ik}\mathrm{div}\mathbf{u} + \frac{K^2}{\alpha\rho^2}\delta_{ik}\frac{\partial P}{\partial t} = 0. \tag{3.2}$$

Избавимся от смещения жидкости в четвертом уравнении системы (3.1) с помощью второго. В итоге будем иметь дифференциальное уравнение второго порядка относительно порового давления P и смещения упругого пористого тела u:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \alpha\rho_l\Delta P - \left(K - \alpha\rho\rho_s\right)\mathrm{div}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = 0. \tag{3.3}$$

Теперь исключим тензор напряжения из уравнения (3.1), для чего продифференцируем первое уравнение системы (3.1) по времени:

$$\rho_s\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \partial_k\frac{\partial h_{ik}}{\partial t} + \frac{\rho_s}{\rho}\partial_i\frac{\partial P}{\partial t} = 0.$$

Исходя из этого и принимая во внимание (3.2), получаем следующее уравнение относительно смещений упругого пористого тела u:

$$\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\rho_s}\Delta\mathbf{u} - \frac{\lambda + \mu - K^2/(\alpha\rho^2)}{\rho_s}\nabla\mathrm{div}\mathbf{u} - \frac{K - \alpha\rho\rho_s}{\alpha\rho^2\rho_s}\nabla\frac{\partial P}{\partial t} = 0. \tag{3.4}$$

Система (3.3)-(3.4) будет замкнутой относительно смещения упругого пористого тела u и порового давления P. Последнее описывает распространение сейсмических волн в пористой насыщенной жидкостью среде в обратимом гидродинамическом приближении.

4. Задача Коши для стационарной системы пороупругих уравнений

Система уравнений пористости (3.3)-(3.4) в стационарном смысле удовлетворяет

$$\mu\Delta\mathbf{u}+\left(\tilde{\lambda}+\mu\right)\nabla\mathrm{div}\mathbf{u}=0, \tag{4.1}$$

$$\Delta P=0, \tag{4.2}$$

где $\tilde{\lambda}=\lambda-K^2/(\alpha\rho^2)$.

Рассмотрим задачу Коши для заданной стационарной системы пороупругих уравнений относительно $(\mathbf{u}, p)$, описывая положение плоской изотропной упруго-деформируемой среды в некоторой области $\Omega=\{z|\,Imz>0\}\subset\mathbb{C}$: предположим, что на части границы $M\subset\partial\Omega$ заданы вектор смещения упругого пористого тела, тензор напряжения и поровое давление:

$$\mathbf{u}\,|_M=\mathbf{G}\,(x)\,,\quad T_\partial\mathbf{u}\,|_M=\mathbf{H}\,(x)\,,\quad \frac{\rho_l}{\rho}P\,|_M=P_0\,(x)\,,\quad \left.\frac{\partial P}{\partial\nu}\right|_M=0, \tag{4.3}$$

где $H_j\,(x)=\tilde{H}_j\,(x)-\nu_j\dfrac{\rho K-\rho_s\alpha}{\rho_s\alpha}P_0(x),\ j=1,2,\ \mathbf{G}\,(x)\,,\ \mathbf{H}\,(x)\,,\ P_0\,(x)$ — это заданные функции, а $\nu=(\nu_1,\nu_2)$ — вектор внешней нормали.

Необходимо определить функции $\mathbf{u}(x,y)\in C^3(\Omega;\mathbb{R}^2)\cap C^2(\Omega;\mathbb{R}^2)$ и $P(x,y)\in C^2(\Omega;\mathbb{R}^n)\cap C^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$. Оператор напряжения определяется как

$$T_\partial\mathbf{V}\,|_M=\sigma\mathbf{u}\,|_m\,,$$

где σ — это оператор напряжения, элементы которого связаны с вектором смещения $\mathbf{u}$ посредством законов Гука:

$$\begin{gathered}\sigma_{xx}=\tilde{\lambda}\left(\partial_x u_1+\partial_y u_2\right)+2\mu\partial_x u_1,\\ \sigma_{yy}=\tilde{\lambda}\left(\partial_x u_1+\partial_y u_2\right)+2\mu\partial_y u_2,\\ \sigma_{xy}=\sigma_{yx}=\mu\left(\partial_y u_1+\partial_x u_2\right).\end{gathered}$$

Легко показать, что

$$T_\partial=\begin{pmatrix}\left(\tilde{\lambda}+2\mu\right)\upsilon_1 & \mu\upsilon_2\\ \tilde{\lambda}\upsilon_2 & \mu\upsilon_1\end{pmatrix}\partial_x+\begin{pmatrix}\mu\upsilon_2 & \tilde{\lambda}\upsilon_1\\ \mu\upsilon_1 & \left(\tilde{\lambda}+2\mu\right)\upsilon_2\end{pmatrix}\partial_y.$$

Переходя от вектора нормали к вектору касательной $\tau=(\tau_1,\tau_2)$, можем записать оператор T_∂ в виде

$$\begin{gathered}T_\partial=\tau_1\begin{pmatrix}0 & -\mu\\ -\tilde{\lambda} & 0\end{pmatrix}\partial_x+\tau_1\begin{pmatrix}-\mu & 0\\ 0 & -\left(\tilde{\lambda}+2\mu\right)\end{pmatrix}\partial_y+\\ +\tau_2\begin{pmatrix}\tilde{\lambda}+2\mu & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}\partial_x+\tau_2\begin{pmatrix}0 & \tilde{\lambda}\\ \mu & 0\end{pmatrix}\partial_y=\\ =T_{11}\tau_1\partial_x+T_{12}\tau_1\partial_y+T_{21}\tau_2\partial_x+T_{22}\tau_2\partial_y.\end{gathered}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть функции* $\mathbf{u}\,(x,y)\in C^2\left(\Omega;\mathbb{R}^2\right)\cap C^1\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}^2\right),\ P(x,y)\in C^2(\Omega;\mathbb{R}^2)\cap C^1(\bar{\Omega};\mathbb{R}^2)$ *являются решением задачи* (4.1)–(4.3). *Тогда* $\mathbf{u}\,(x,y)\,,\ P(x,y)$ *могут быть найдены по формуле*

$$\mathbf{u}=\mathrm{Re}\,\Theta\tilde{\mathbf{u}},\quad P=\mathrm{Re}\,\tilde{P}$$

где

$$\Theta=\begin{pmatrix}i & i\\ -1 & 2k-1\end{pmatrix},\qquad k=\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu},$$

при этом $\tilde{P}(z)$ *— аналитическая функция, а* $\tilde{\mathbf{u}}\,(z)$ *— A-аналитическая для* $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, *принимающая на множестве M значения* $\tilde{u}\,|_M=\mathbf{f}=\mathbf{g}+i\mathbf{h}$. *В таком случае функции* $\mathbf{g}\,(z)\,,\ \mathbf{h}\,(z)$ *выражаются из системы*

$$\begin{pmatrix}\mathrm{Re}\,\Theta & -\mathrm{Im}\,\Theta\\ \mathrm{Re}\,\Theta' & -\mathrm{Im}\,\Theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{g}\,(x)\\ \mathbf{h}\,(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{G}\,(x)\\ \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\mathbf{H}\,(x,y)\,ds\end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

где

$$\Theta' = 2\mu \begin{pmatrix} 1 & 2-k \\ i & -ik \end{pmatrix}.$$

Значения функции $\tilde{\mathbf{u}}(z)$, $z = x+iy \in \Omega$, *вычисляются по формулам Карлемановского типа*:

$$\tilde{\mathbf{u}}(z) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \times$$

$$\times \left(\int\limits_M \left(e^{N(\phi_0(\zeta)-\phi_0(z))} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}(\zeta) + \left(N\left(\partial\phi_0(\zeta)\bar{\zeta} - \partial\phi_0(z)\bar{z}\right) + \frac{\overline{\zeta - z}}{\zeta - z} \right) \begin{pmatrix} f_2 \\ 0 \end{pmatrix}(\zeta) \right) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \right.$$

$$\left. - \int\limits_M e^{N(\phi_0(\zeta)-\phi_0(z))} \begin{pmatrix} f_2 \\ 0 \end{pmatrix}(\zeta) \frac{d\bar{\zeta}}{\zeta - z} \right),$$

$$\tilde{P}(z) = \frac{\rho}{2\pi\rho_l i} \lim_{N\to\infty} \int\limits_M P_0(\tau) \left[\frac{(\zeta - z_2)(z - z_1)}{(\zeta - z_1)(z - z_2)} \right]^{\frac{N}{\pi i}} \frac{d\tau}{\zeta - z}.$$

Доказательство. Запишем систему для u в развернутой форме:

$$\mu\left(\partial_{xx}u_1 + \partial_{yy}u_1\right) + \left(\tilde{\lambda} + \mu\right)\partial_x\left(\partial_x u_1 + \partial_y u_2\right) = 0,$$

$$\mu\left(\partial_{xx}u_2 + \partial_{yy}u_2\right) + \left(\tilde{\lambda} + \mu\right)\partial_y\left(\partial_x u_1 + \partial_y u_2\right) = 0.$$

Отсюда выпишем матричные коэффициенты системы:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda} + 2\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \qquad 2\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\lambda} + \mu \\ \tilde{\lambda} + \mu & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda} + 2\mu \end{pmatrix}.$$

Найдем корни характеристического многочлена:

$$\det\left\|\mathcal{A} + 2\mathcal{B}\lambda_0 + \mathcal{C}\lambda_0^2\right\| = \begin{vmatrix} \tilde{\lambda} + 2\mu + \mu\lambda_0^2 & \left(\tilde{\lambda} + \mu\right)\lambda_0 \\ \left(\tilde{\lambda} + \mu\right)\lambda_0 & \mu + \left(\tilde{\lambda} + 2\mu\right)\lambda_0^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\tilde{\lambda} + 2\mu + \mu\lambda_0^2\right)\left(\mu + \left(\tilde{\lambda} + 2\mu\right)\lambda_0^2\right) - \left(\tilde{\lambda} + \mu\right)^2 \lambda_0^2 =$$

$$= \left(\tilde{\lambda} + 2\mu\right)\mu + \left(\tilde{\lambda} + 2\mu\right)^2 \lambda_0^2 + \mu^2\lambda_0^2 + \mu + \left(\tilde{\lambda} + 2\mu\right)\lambda_0^4 - \left(\tilde{\lambda} + \mu\right)^2 \lambda_0^2 =$$

$$= \left(\tilde{\lambda} + 2\mu\right)\mu + \left(\left(\tilde{\lambda} + 2\mu\right)^2 + \mu^2 - \left(\tilde{\lambda} + \mu\right)^2\right)\lambda_0^2 + \left(\tilde{\lambda} + 2\mu\right)\mu\lambda_0^4 =$$

$$= \left(\tilde{\lambda} + 2\mu\right)\mu + \left(2\tilde{\lambda}\mu + 4\mu^2\right)\lambda_0^2 + \left(\tilde{\lambda} + 2\mu\right)\mu\lambda_0^4 =$$

$$= \left(\tilde{\lambda} + 2\mu\right)\mu\left(1 + 2\lambda_0^2 + \lambda_0^4\right) = 0.$$

Так как система является эллиптической, матрицы $\mathcal{A}, \mathcal{C}$ обратимы, следовательно,

$$\left(\tilde{\lambda} + 2\mu\right) \neq 0, \qquad \mu \neq 0,$$

иначе говоря, корни находятся из уравнения

$$1 + 2\lambda_0^2 + \lambda_0^4 = \left(1 + \lambda_0^2\right)^2 = 0.$$

Тем самым в верхней полуплоскости будем иметь корень кратности 2.

Решение системы (4.1), (4.3) находится из [2]:

$$u = \operatorname{Re}\Theta\tilde{u},$$

где функция $\tilde{u}(z)$ — это решение уравнения

$$\left(\partial_x - \frac{1}{\lambda_0}\partial_y\right)\tilde{u}(z) - A\left(\partial_x + \frac{1}{\lambda_0}\partial_y\right)\tilde{u}(z) = 0$$

с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{i-i}{2i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

или

$$\bar{\partial}\tilde{u}\,(z) = A\partial\tilde{u}\,(z)\,.$$

Столбцы матрицы Θ определяются из системы [2], которая в данном случае имеет вид

$$(\lambda+\mu)\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}\Theta_1 = 0, \qquad (\lambda+\mu)\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}\Theta_2 + 2\,(\lambda+3\mu)\,\Theta_1 = 0.$$

Таким образом, если мы возьмем

$$\Theta_1 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}\Theta_2 = -2\frac{\tilde{\lambda}+3\mu}{\tilde{\lambda}+\mu}\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} = -2k\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$$

и

$$\Theta_2 = \begin{pmatrix} i \\ -2k-1 \end{pmatrix}.$$

Как было показано в [10], решение системы (4.1) представимо в виде $u = \operatorname{Re}\Theta' u'$, где $u'\,(z)$ есть A'-аналитическая функция:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta' = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -k-1 & i \end{pmatrix}, \qquad k = \frac{\tilde{\lambda}+3\mu}{\tilde{\lambda}+\mu}.$$

Если мы возьмем функцию $u = Du'$, то

$$\bar{\partial}u = D\bar{\partial}u' = DA'\partial u' = DA'D^{-1}\partial u,$$

что означает, что функция $u = Du'$ является A-аналитической функцией с $A = DA'D^{-1}$.

Если

$$D = \begin{pmatrix} 1/2 & -i \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

будем иметь

$$A = DA'D^{-1} = -2i\begin{pmatrix} 1/2 & -i \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= -2i\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В таком случае решение системы Ламе задается формулой

$$u = \operatorname{Re}\Theta' D^{-1}Du' = \Theta\tilde{u},$$

где

$$\Theta = \Theta' D^{-1} = -2i\begin{pmatrix} i & 1 \\ -k-1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & -2k-1 \end{pmatrix},$$

При этом $\tilde{u}\,(z)$ — это A-аналитическая функция с вещественной матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; получили тот же результат, как и в методе, описанном в [10].

Однако при решении задачи Коши для системы уравнений Ламе, в которой оператор напряжения находится в краевом условии, удобнее будет перейти к A-аналитическим функциям с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае при вычислении краевых значений A-аналитической функции [2] мы можем использовать матрицы T_{ij}, определенные в операторе напряжения.

Действительно, если $u = \operatorname{Re}\Theta\tilde{u}$, где

$$\Theta = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & -2k-1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\partial}\tilde{u}(z) = A\partial\tilde{u}(z), \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то

$$V = \operatorname{Re}\Theta^{-}u^{-} = \operatorname{Re}\Theta D^{-1}Du$$

с матрицей

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$\bar{\partial}u^{-}(z) = A^{-}\partial u^{-}(z),$$

$$A^{-} = DAD^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$\Theta^{-} = \Theta D^{-1} = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & -2k-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 2k-1 \end{pmatrix}.$$

Для определения краевых значений A-аналитической функции $\tilde{u}(z)$ с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ вычислим матрицу Θ' из [2]. Имеем

$$A_0(E-A)^{-1}(E+A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$T_{11}\Theta + iT_{12}\Theta A_0^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ -\tilde{\lambda} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & i \\ -1 & -2k-1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -\left(\tilde{\lambda}+2\mu\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 2k-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mu & -\mu(2k-1) \\ -i\tilde{\lambda} & -i\tilde{\lambda} \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -\left(\tilde{\lambda}+2\mu\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 3i \\ -1 & 2k-3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mu & -\mu(2k-1) \\ -i\tilde{\lambda} & -i\tilde{\lambda} \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -i\mu & -i3\mu \\ \tilde{\lambda}+2\mu & -\left(\tilde{\lambda}+2\mu\right)(2k-3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\mu & 2\mu(2-k) \\ i2\mu & -i\left(\tilde{\lambda}+\left(\tilde{\lambda}+2\mu\right)(2k-3)\right) \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\tilde{\lambda}+\left(\tilde{\lambda}+2\mu\right)(2k-3) = \tilde{\lambda}+\left(\tilde{\lambda}+2\mu\right)\left(2\frac{\tilde{\lambda}+3\mu}{\tilde{\lambda}+\mu}-3\right) = \tilde{\lambda}+\left(\tilde{\lambda}+2\mu\right)\frac{-\tilde{\lambda}+3\mu}{\tilde{\lambda}+\mu} == \frac{2\tilde{\lambda}\mu+6\mu^2}{\tilde{\lambda}+\mu} = 2\mu k,$$

то

$$T_{11} + iT_{12}\Theta A_0^{-1} = 2\mu\begin{pmatrix} 1 & 2-k \\ i & -ik \end{pmatrix}.$$

Аналогично,

$$T_{22}\Theta - iT_{21}\Theta A_0 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\lambda} \\ \mu & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 2k-1 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} \tilde{\lambda}+2\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 2k-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2\mu\begin{pmatrix} 1 & 2-k \\ i & -ik \end{pmatrix} = \Theta'.$$

Теперь найдем $\det\tilde{\Theta} = \det\begin{pmatrix} \operatorname{Re}\Theta & -\operatorname{Im}\Theta \\ \operatorname{Re}\Theta' & -\operatorname{Im}\Theta' \end{pmatrix}$; тогда будем иметь

$$\tilde{\Theta} = \begin{pmatrix} \substack{0 \\ -1} & \substack{0 \\ 2k-1} & \substack{-1 \\ 0} & \substack{-1 \\ 0} \\ \substack{2\mu \\ 0} & \substack{2\mu(2-k) \\ 0} & \substack{0 \\ -2\mu} & \substack{0 \\ 2\mu k} \end{pmatrix}.$$

Из этого следует, что

$$\det\tilde{\Theta} = 4\mu\,(1+k)^2 \neq 0,$$

и краевые значения функции $f(z)$ определяются однозначным образом из начального условия (4.1), (4.3). Следовательно, задача Коши для системы уравнений Ламе эквивалентна задаче A-аналитического продолжения с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя полученные значения функций $g(x), h(x)$ на множестве M из начальных условий $G(x), H(x)$, можем восстановить функцию $\tilde{u}\,(z)$ по формулам карлемановского типа из [2]. Тогда с помощью $\tilde{u}\,(z)$ найдем решение исходной задачи.

Вычислив функцию $\Phi_N(z)$ из [2] для конкретной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

получим

$$\phi\,(z) = \phi_0\,(z) + \partial\phi_0\,(z)\,\bar{z}A = \begin{pmatrix} \phi_0\,(z) & -\partial\phi_0\,(z)\,\bar{z} \\ 0 & \phi_0\,(z) \end{pmatrix}$$

и

$$\Phi_N^{-1}\,(z)\,\Phi_N\,(\zeta) = e^{N(\phi_0(\zeta)-\phi_0(z))}\begin{pmatrix} 1 & N\left(\partial\phi_0\,(\zeta)\,\bar{\zeta} - \partial\phi_0\,(z)\,\bar{z}\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подставив это значение в формулу Карлемана [13], придем к следующей формуле, которая даст нам решение задачи A-аналитического продолжения:

$$\mathbf{\tilde{u}}\,(z) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\times$$

$$\times\left(\int\limits_M e^{N(\phi_0(\zeta)-\phi_0(z))}\left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}(\zeta) + \left(N\left(\partial\phi_0\,(\zeta)\,\bar{\zeta} - \partial\phi_0\,(z)\,\bar{z}\right) + \frac{\overline{\zeta - z}}{\zeta - z}\right)\begin{pmatrix} f_2 \\ 0 \end{pmatrix}(\zeta)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{d\zeta}{\zeta - z} - \int\limits_M e^{N(\phi_0(\zeta)-\phi_0(z))}\begin{pmatrix} f_2 \\ 0 \end{pmatrix}(\zeta)\,\frac{d\bar{\zeta}}{\zeta - z}\right).$$

Решение задачи Коши для уравнения Лапласа было получено в [1, 23].

Таким образом, теорема доказана.

В таком случае, оценивая интеграл по $\partial\Omega\backslash M$, нетрудно показать, что его можно сделать меньше, чем ε при $N > N_\varepsilon$, где

$$N_\varepsilon = \frac{2e}{(1-e)\,\psi\,(z)}\ln\left(\frac{\pi\rho_{\partial\Omega\backslash M}\,(z)\,\psi^2\,(z)\,\varepsilon}{16\omega\,|\partial\Omega\backslash M|\,\|f\|_{\partial\Omega\backslash M}}\right),$$

здесь $\omega = 2\sup\limits_{z\in\partial\Omega}|\partial\phi_0\,(z)\,\bar{z}|$, $|\partial\Omega\backslash M|$ — это длина дуги $\Omega\backslash M$, $\rho_{\partial\Omega\backslash M}\,(z)$ — расстояние от точки z до множества $\Omega\backslash M$.

Из ранее полученных формул Карлемановского типа следует оценка условной устойчивости [4]:

$$\|u\,(x,y)\| \leqslant \varepsilon l\,(f\,(z)) + c\,(\varepsilon)\,\|f\,(z)\|_M\,,$$

где $f\,(z)$ — это краевое значение функции $\tilde{u}\,(z)$,

$$l\,(f\,(z)) = \|f\,(z)\|_{(\partial\Omega\backslash M;\mathbb{C}^2)}\,,\qquad c\,(\varepsilon) = C\varepsilon^{1-\frac{c}{\psi(z)(e-1)}},$$

а $\psi\,(z)$ — гармоническая мера множества M.

Если, используя формулу Карлемана, мы приближенно вычислим значение функции $\mathbf{u}_N(x, y)$ для $N > N_\varepsilon$, то ошибка будет оцениваться следующей величиной:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\| \leqslant \|\Theta\| \, \varepsilon;$$

если же начальные условия $G(z), H(z)$ определены с ошибкой, не превышающей ε_0, то

$$\varepsilon_0 \leqslant C_1 \varepsilon^{\frac{2e}{(e-1)\psi(x)}},$$

$$C_1 = \frac{\rho_M(z)}{|M|} \left(\frac{|\partial\Omega \backslash M|}{\rho_{\partial\Omega\backslash M}(z)} \|f\| \right)^{1-\frac{2e}{(e-1)\psi(z)}} \left(\frac{\pi\psi^2(z)}{8\omega} \right)^{\frac{2e}{(e-1)\psi(z)}} \left\| \tilde{\Theta} \right\|.$$

В [7] при помощи формул Карлемана было получено решение задачи Коши для системы уравнений Ламе в областях специального вида.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айзенберг Л. А.* Формулы Карлемана в комплексном анализе. — Новосибирск: Наука, 1990.
2. *Арбузов Э. В.* Задача Коши для эллиптических систем второго порядка на плоскости// Сиб. мат. ж. — 2003. — *44*, № 1. — С. 3–20.
3. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981.
4. *Бухгейм А. Л.* Введение в теорию обратных задач. — Новосибирск: Наука, 1988.
5. *Векуа И. Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. — М.: ОГИЗ, 1948.
6. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. — М.: Наука, 1988.
7. *Ниезов И. Э.* Задача Коши для системы теории упругости на плоскости// Узб. мат. ж. — 1996. — № 1. — С. 27–34.
8. *Сакс Р. С.* Краевые задачи для эллиптических систем дифференциальных уравнений. — Новосибирск: НГУ, 1975.
9. *Солдатов А. П.* Эллиптические системы высокого порядка// Дифф. уравн. — 1989. — *25*, № 1. — С. 136–144.
10. *Солдатов А. П.* Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. — М.: Высшая школа, 1991.
11. *Товмасян Н. Е.* Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами// Дифф. уравн. — 1966. — *2*, № 2. — С. 163–171.
12. *Френкель Я. И.* К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве// Изв. АН СССР. Сер. географ. геофиз. — 1944. — *8*, № 4. — С. 133–150.
13. *Arbuzov E. V., Bukhgeim A. L.* Carleman's formulas for A-analytic functions in a half-plane// J. Inverse Ill-Posed Probl. — 1997. — *5*, № 6. — С. 491–505.
14. *Bers L.* Theory of pseudo-analytic functions. — N.Y.: Lecture Notes, 1953.
15. *Biot M. A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range// J. Acoust. Soc. Am. — 1956. — *28*, № 2. — С. 168–178.
16. *Bitsadze A. V.* Boundary value problems for second-order elliptic equations. — Amsterdam: North-Holland, 1968.
17. *Blokhin A. M., Dorovsky V. N.* Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum. — New York: Nova Science, 1995.
18. *Bonnet G.* Basic singular solutions for a poroelastic medium in the dynamic range// J. Acoust. Soc. Am. — 1987. — *82*. — С. 1758–1762.
19. *Dorovsky V. N., Perepechko Yu. V., Romensky E. I.* Wave processes in saturated porous elastically deformed media// Combustion, Explosion and Shock Waves. — 1993. — *29*, № 1. — С. 93–103.
20. *Giraud G.* Nouvelles methode pour traiter certaines problemes relatifs aux equations du type elliptique// J. de Math. — 1939. — *18*. — С. 111–143.
21. *Gorog S., Panneton R., Atalla N.* Mixed displacement-pressure formulation for acoustic anisotropic open porous media// J. Appl. Phys. — 1997. — *82*. — С. 4192–4196.
22. *Imomnazarov Kh. Kh.* Some remarks on the Biot system of equations describing wave propagation in a porous medium// Appl. Math. Lett. — 2000. — *13*, № 3. — С. 33–35.
23. *Lavrentiev M. M.* Some improperly posed problems in mathematical physics. — Berlin: Springer, 1967.

Х. Х. Имомназаров
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
630090, г. Новосибирск, пр-т Академика Лаврентьева, д. 6
E-mail: `imom@omzg.sscc.ru`

Н. М. Жабборов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, кафедра математики,
Узбекистан, 100174, г. Ташкент, ВУЗ городок, ул. Университетская, д. 4
E-mail: jabborov61@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-33-43 UDC 517.958

Application of A-analytic Functions to the Investigation of the Cauchy Problem for a Stationary Poroelasticity System

© 2019 **Kh. Kh. Imomnazarov, N. M. Jabborov**

Abstract. In a reversible hydrodynamic approximation, a closed system of second-order dynamic equations with respect to the displacement vector of an elastic porous body and pore pressure has been obtained. The Cauchy problem for the obtained system of poroelasticity equations in the stationary case is considered. The Carleman formula for the Cauchy problem under consideration has been constructed.

REFERENCES

1. L. A. Aizenberg, *Formuly Karlemana v kompleksnom analize* [Formuly Karlemana v kompleksnom analize], Nauka, Novosibirsk, 1990 (in Russian).
2. E. V. Arbuzov, "Zadacha Koshi dlya ellipticheskikh sistem vtorogo poryadka na ploskosti" [The Cauchy problem for second-order elliptic systems on a plane], *Cib. mat. zh.* [Sib. Math. J.], 2003, **44**, No. 1, 3–20 (in Russian).
3. A. V. Bitsadze, *Nekotorye klassy uravneniy v chastnykh proizvodnykh* [Some Classes of Partial Differential Equations], Nauka, Moscow, 1981 (in Russian).
4. A. L. Bukhgeym, *Vvedenie v teoriyu obratnykh zadach* [Introduction to the Theory of Inverse Problems], Nauka, Novosibirsk, 1988 (in Russian).
5. I. N. Vekua, *Novye metody resheniya ellipticheskikh uravneniy* [New Methods for Solving of Elliptic Equations], OGIZ, Moscow, 1948 (in Russian).
6. I. N. Vekua, *Obobshchennye analiticheskie funktsii* [Generalized Analytic Functions], Nauka, Moscow, 1988 (in Russian).
7. I. E. Niezov, "Zadacha Koshi dlya sistemy teorii uprugosti na ploskosti" [The Cauchy problem for a system of the elasticity theory on a plane], *Uzb. mat. zh.* [Uzbek Math. J.], 1996, No. 1, 27–34 (in Russian).
8. R. S. Saks, *Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh sistem differentsial'nykh uravneniy* [Boundary-Value Problems for Systems of Elliptic Equations], NGU, Novosibirsk, 1975 (in Russian).
9. A. P. Soldatov, "Ellipticheskie sistemy vysokogo poryadka" [Higher-order elliptic systems], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1989, **25**, No. 1, 136–144 (in Russian).
10. A. P. Soldatov, *Odnomernye singulyarnye operatory i kraevye zadachi teorii funktsiy* [One-Dimensional Singular Operators and Boundary-Value Problems of the Elasticity Theory], Vysshaya shkola, Moscow, 1991 (in Russian).
11. N. E. Tovmasyan, "Obshchaya kraevaya zadacha dlya ellipticheskikh sistem vtorogo poryadka s postoyannymi koeffitsientami" [General boundary-value problem for second-order elliptic systems with constant coefficients], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1966, **2**, No. 2, 163–171 (in Russian).
12. Ya. I. Frenkel', "K teorii seysmicheskikh i seysmoelektricheskikh yavleniy vo vlazhnoy pochve" [To the theory of seismic and seismoelectrical phenomena in a moist soil], *Izv. AN SSSR. Ser. geograf. geofiz.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Geograph. Geophys.], 1944, **8**, No. 4, 133–150 (in Russian).
13. E. V. Arbuzov and A. L. Bukhgeim, "Carleman's formulas for A-analytic functions in a half-plane," *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 1997, **5**, No. 6, 491–505.
14. L. Bers, *Theory of pseudo-analytic functions*, Lecture Notes, N.Y., 1953.
15. M. A. Biot, "Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range," *J. Acoust. Soc. Am.*, 1956, **28**, No. 2, 168–178.

16. A. V. Bitsadze, *Boundary value problems for second-order elliptic equations*, North-Holland, Amsterdam, 1968.
17. A. M. Blokhin and V. N. Dorovsky, *Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum*, Nova Science, New York, 1995.
18. G. Bonnet, "Basic singular solutions for a poroelastic medium in the dynamic range," *J. Acoust. Soc. Am.*, 1987, **82**, 1758–1762.
19. V. N. Dorovsky, Yu. V. Perepechko, and E. I. Romensky, "Wave processes in saturated porous elastically deformed media," *Combust. Explos. Shock Waves*, 1993, **29**, No. 1, 93–103.
20. G. Giraud, "Nouvelles methode pour traiter certaines problemes relatifs aux equations du type elliptique," *J. de Math.*, 1939, **18**, 111–143.
21. S. Gorog, R. Panneton, and N. Atalla, "Mixed displacement-pressure formulation for acoustic anisotropic open porous media," *J. Appl. Phys.*, 1997, **82**, 4192–4196.
22. Kh. Kh. Imomnazarov, "Some remarks on the Biot system of equations describing wave propagation in a porous medium," *Appl. Math. Lett.*, 2000, **13**, No. 3, 33–35.
23. M. M. Lavrentiev, *Some improperly posed problems in mathematical physics*, Springer, Berlin, 1967.

Kh. Kh. Imomnazarov
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics,
Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia
E-mail: imom@omzg.sscc.ru

N. M. Jabborov
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: jabborov61@mail.ru