Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 1 (2019). С. 21–32

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-21-32 УДК 515.12

КОВАРИАНТНЫЕ ФУНКТОРЫ И ШЕЙПЫ В КАТЕГОРИИ КОМПАКТОВ

© 2019 г. Т. Ф. ЖУРАЕВ, З. О. ТУРСУНОВА, К. Р. ЖУВОНОВ

Аннотация. В данной заметке рассматриваются ковариантные функторы $F : Comp \to Comp$, действующие в категории компактов, сохраняющих шейп [2], бесконечные компакты и шейповая эквивалентность [9]. Также изучается действие ковариантных функторов, шейповые свойства компактного пространства X, состоящего из компонентов связности $\Box X$ этого компакта X, и равенство шейпов $ShX = ShY$ бесконечных компактов X и Y для пространства $P(X)$ вероятностных мер и его подпространств.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение 21
2. О топологии на подпространстве пространства вероятностных мер 23
3. Основная часть 25
Список литературы 31

1. Введение

Для компактов X через $P(X)$ обозначаются пространства вероятностных мер. Известно, что для бесконечного компакта X это пространство $P(X)$ гомеоморфно гильбертову кубу Q (см. [5]). Для натурального числа $n \in N$ через $P_n(X)$ обозначается множество всех вероятностных мер не более чем с n носителями, т. е. $P_n(X) = \{\mu \in P(X) : |\operatorname{supp}\mu| \leqslant n\}$. Множество $P_n(X)$ состоит из выпуклых линейными комбинациями мер Дирака вида:

$$\mu = m_1\delta_{x_1} + m_2\delta_{x_2} + \dots + m_n\delta_{x_n}, \ \sum_{i=1}^{n} m_i = 1,$$

где $m_i \geqslant 0$, $x_i \in X$, δ_{x_i} — мера Дирака в точке x_i. Через $\delta(X)$ обозначается множество всех мер Дирака. Напомним, что пространство $P_f(X) \subset P(X)$ состоит из всех вероятностных мер вида $\mu = m_1\delta_{x_1} + m_2\delta_{x_2} + \ldots + m_k\delta_{x_k}$ с конечными носителями, для каждой из которых $m_i \geqslant \dfrac{k}{k+1}$ при некотором i (см. [3,6]). Для натурального числа n положим $P_{f,n} \equiv P_f \cap P_n$. Для компакта X имеет место

$$P_{f,n}(X) = \mu\epsilon P_f(X) : |\operatorname{supp}\mu| \leqslant n; \quad P_f^c \equiv P_f \cap P^c, \ P_{f,n}^c \equiv P_f \cap P_n \cap P^c, \quad P_n^c \equiv P^c \cap P.$$

Для компакта X через $P^c(X)$ обозначается множество всех мер $\mu \in P(X)$, носитель каждой из которых лежит в одном из компонентов связности компакта X (см. [5]).

Напомним определение и некоторые свойства нормальности ковариантного функтора $F : Comp \to Comp$, действующего в категории компактов. Говорят, что функтор F:

1. *Сохраняет пустое множество и точку*, если $F(\varnothing) = \varnothing$ и $F(\{1\}) = \{1\}$, где через $\{k\}$, $k \geqslant 0$ мы обозначаем множество неотрицательных целых чисел — $\{0, 1, \ldots, k-1\}$, меньших k. В этой терминологии $\{0\} = \varnothing$.
2. *Мономорфен*, если для всякого (топологического) вложения $f : A \to X$ отображение $F(f) : F(A) \to F(X)$ является вложением.
3. *Эпиморфен*, если для всякого отображения $f : X \to Y$ на Y отображение $F(f) : F(X) \to F(Y)$ является также отображением «на».

Работа поддержана грантом ОТ-Ф-4-42 РУз.

4. *Сохраняет пересечения*, если для любого семейства $\{A_\alpha : \alpha \in \mathscr{A}\}$ замкнутых подмножеств компакта X и тождественных вложений $i_\alpha : A_\alpha \to X$ отображение $F(i) : \bigcap \{F(A_\alpha) : \alpha \in \mathscr{A}\} \to X$, определяемое равенством $F(i)(a) = F(i_\alpha)(a)$, является вложением для всякого $a \in \mathscr{A}$.
5. *Сохраняет прообразы*, если для всякого отображения $f : X \to Y$ и всякого замкнутого множества $A \subset Y$ отображение $F\left(f|_{f^{-1}(A)}\right)\left(f^{-1}(A)\right) \to F(A)$ является гомеоморфизмом.
6. *Сохраняет вес*, если $\omega(F(X)) = \omega(X)$ для бесконечного компакта X.
7. *Непрерывен*, если для всякого обратного спектра $S = \{X_\alpha; \pi_\beta^\alpha : \alpha \in A\}$ из компактов отображение $f : F(\lim S) \to \lim F(S)$ является гомеоморфизмом, который есть предел отображений $F(\pi_\alpha)$, где $\pi_\alpha : \lim S \to X_\alpha$ — сквозные проекции спектра S.

В дальнейшем мы предполагаем, что все рассматриваемые функторы мономорфны и сохраняют пересечения. Мы предполагаем также, что все функторы сохраняют непустые пространства. Это ограничение несущественно, поскольку этим мы исключаем из рассмотрения только пустой функтор, т. е. функтор F, который переводит всякое пространство в пустое множество.

В самом деле, пусть $F(X) = \varnothing$ для какого нибудь непустого компакта X. Тогда $F(\varnothing) = F(1) = \varnothing$ в силу мономорфности F. Пусть теперь Y — произвольный непустой компакт. Рассмотрим постоянное отображение $f : Y \to 1$. Тогда $F(f)(F(Y)) \subset F(1) = \varnothing$. Следовательно, пространство $F(Y)$ пусто, поскольку оно отображается в пустое множество. Итак, мы доказали, что существует единственный мономорфный функтор, сохраняющий непустые множества.

Пусть $F : Comp \to Comp$ — функтор. Через $C(X, Y)$ обозначается пространство непрерывных отображений из X в Y в компактно-открытой топологии. В частности, $C(\{k\}, Y)$ естественно гомеоморфно k-ой степени Y^k пространства Y.

Отображению $\xi : \{k\} \to Y$ ставится в соответствие точка $(\xi(0), \ldots, \xi(k-1)) \in Y^k$.

Для функтора F, бикомпакта X натурального числа k определим отображение

$$\pi_{F,X,k} : C(\{k\}, X) \times F(\{k\}) \to F(X)$$

равенством

$$\pi_{F,X,k}(\xi, a) = F(\xi)(a),$$

где

$$\xi \in C(\{k\}, X), \ a \in F(\{k\}).$$

Когда ясно, о каком функторе и каком компакте Y идет речь, мы будем отображение $\pi_{F,X,k}$ обозначать через $\pi_{X,k}$ или π_k.

По теореме Е. В. Щепина [6], отображение

$$F : C(Z, Y) \to F(F(Z), F(Y))$$

непрерывно для всякого непрерывного функтора F и компактов Z и Y.

Поэтому имеет место

Предложение 1.1 (см. [6]). *Для непрерывного функтора F, компакта X и натурального числа k отображение $\pi_{F,X,k}$ непрерывно.*

Определим подфунктор F_k функтора F следующим образом: для компакта X пространство $F_k(X)$ есть образ отображения, т. е. $\pi_{F,X,k}(X^k \times F(k)) = F_k(X)$, а для отображения $f : X \to Y$ отображение $F_k(f)$ есть сужение отображения $F(f)$ на $F_k(X)$. Из легко проверяемой коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} C(\{k\}) \times F(\{k\}) & \stackrel{\overline{f}\times id}{\to} & C(\{k\}, Y) \times F(\{k\}) \\ \pi_{X,k} \downarrow & & \downarrow \pi_{X,k} \\ F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y), \end{array} \tag{1.1}$$

где $\overline{f}(\xi) = f \circ \xi$, вытекает вложение $F(f)(F_k(X)) \subset F_k(Y)$ и, следовательно, функториальность конструкции F_k.

Функтор F называется *функтором степени n*, если $F_n(X) = F(X)$ для всякого компакта X, но $F_{n-1}(X) \neq F(X)$ для некоторого X.

Для функтора F определен *носитель* элемента $a \in F(X)$, т. е. пересечение всех замкнутых множеств $A \subset X$ таких, что $a \in F(A)$. Это множество обозначается через $\operatorname{supp}_{F(X)}(a)$. Если ясно, о каком функторе и пространстве идет речь, то носитель a обозначается через $\operatorname{supp}(a)$.

Из определений функтора и носителя вытекает, что

$$f(\operatorname{supp}(a)) \supset \operatorname{supp}(F(f)(a)) \tag{1.2}$$

для непрерывного отображения $f : X \to Y$ и $a \in F(X)$. Ясно также, что

$$a \in F(\operatorname{supp}(a)). \tag{1.3}$$

Если функтор F сохраняет прообразы, то F сохраняет носители, т. е.

$$f(\operatorname{supp}(a)) = \operatorname{supp}(F(f)(a)). \tag{1.4}$$

Заметим, что в силу предложения 1.1 (см. [6]) для нормального функтора $F : Comp \to Comp$ имеется всюду естественное вложение $Id \subset F$. Поэтому всякий компакт X будем считать подпространством пространства $F(X)$.

2. О топологии на подпространстве пространства вероятностных мер

Пусть X — некоторое топологическое пространство. Через $C(X)$ обозначается кольцо всех непрерывных вещественных функций на пространстве X с компактно-открытой топологией. Диагональное произведение $\triangle(X) = \triangle g_\alpha$, где $g_\alpha \in C(X)$, всех отображений на $C(X)$ определяет вложение X в $R^{C(X)}$.

Если X — компакт, то замкнутая оболочка его образа в $R^{C(X)}$ является выпуклым компактом, обозначаемым $P(X)$ (см. [6]). С другой стороны, функтор P вероятностных мер является ковариантным функтором, действующим из категории компактов и непрерывных отображений в себя. $P(X)$ — это выпуклое подпространство линейного пространства $M(X)$, сопряженного с пространством $C(X)$ непрерывных функции на X и взятого в слабой топологии, состоящее из всех неотрицательных функционалов μ (т. е. $\mu(\varphi) \geqslant 0$ для всякой неотрицательной $\varphi \in C(X)$) единичной нормы [5,6]. Для непрерывного отображения $f : X \to Y$ отображение

$$P(f) : P(X) \to P(Y)$$

определяется равенством

$$(P(f)(\mu))\,\varphi = \mu(\varphi \circ f).$$

Пространство $P(X)$ естественно вложено в $R^{C(X)}$. Поэтому базу окрестностей меры $\mu \in P(X)$ образуют всевозможные множества вида

$$O(\mu_1, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \varepsilon) = \left\{\mu' \in P(X) : \left|\mu(\varphi_i) - \mu'(\varphi_i)\right| \leqslant \varepsilon, i = \overline{1, k}\right\},$$

где $\varepsilon > 0$, а $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k \in C(X)$ — произвольные функции.

Пусть F — подфунктор функтора P, имеющий конечные носители. Тогда базу окрестностей меры

$$\mu_0 = m_1^0 \cdot \delta(x_1) + \ldots + m_S^0 \cdot \delta(x_S) \in \overline{f(X)}$$

образуют множества вида:

$$O{<}\mu_0, U_1, \ldots, U_S{>} = \{\mu \in F(X) : \mu = \sum_{i=1}^{s+1} \mu_i\},$$

где $\mu_i \in M^+(X)$ — множество всех неотрицательных функционалов, $\|\mu_{i+1}\| < \varepsilon$, $\operatorname{supp}\mu_i \subset U_i$, $\big|\|\mu_i\| - m_i^0\big| < \varepsilon$ для $i = 1, \ldots, S$, где $U_1, \ldots, U_S$ — окрестности точек $x_1, \ldots, x_S$ с дизъюнктными замыканиями.

В самом деле, сначала покажем, что множество $0{<}\mu_0, U_1, \ldots, U_S, \varepsilon{>}$ содержит окрестность меры μ_0 в слабой топологии. Для каждого $i = 1, \ldots, S$ возьмем функцию $\varphi_i : X \to I$, удовлетворяющую условиям:

$$\varphi_i([U_i]) = 1, \quad \varphi_i(\bigcup_{j \neq 1} [U_j]) = 0.$$

Кроме того, возьмем функцию $\varphi_{S+1} : X \to I$ так, чтобы

$$\varphi_{S+1}(X \backslash U_1 \cup \ldots \cup U_S) = 1 \quad \text{и} \quad \varphi_{S+1}(\{x_1, \ldots, x_S\}) = 0.$$

Теперь проверим включение
$$O\left(\mu,\varphi_1,\ldots,\varphi_S,\varphi_{S+1},\varepsilon/2\right)\subset O<\left(\mu_0,U_1,\ldots,U_s,\varepsilon\right). \tag{2.1}$$

Меру $\mu\in O\left(\mu_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_S,\varphi_{S+1},\varepsilon/2\right)$ представляем в виде $\mu=\mu_1+\ldots+\mu_S+\mu_{S+1}$, где $\operatorname{supp}\mu_i\subset U_i$ для $i=1,\ldots,S$ и $\operatorname{supp}\mu_i\subset X\setminus\left(U_1\cup\ldots\cup U_S\right)$. Тогда $\dfrac{\varepsilon}{2}>\left|\mu_0\left(\varphi_{S+1}\right)-\mu\left(\varphi_{S+1}\right)\right|=\left|\mu\left(\varphi_{S+1}\right)\right|$. Но $\mu_{S+1}\leqslant\mu$, откуда $\mu_{S+1}\left(\varphi_{S+1}\right)<\dfrac{\varepsilon}{2}$. В то же время по определению функции φ_{S+1} имеем $\mu_{S+1}\left(\varphi_{S+1}\right)=\mu_{S+1}\left(1_x\right)=\|\mu_{S+1}\|$. Итак, $\|\mu_{S+1}\|<\dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$. Для проверки включения (2.1) осталось показать, что $\left|\|\mu_i\|-m_i^0\right|<\varepsilon$. Имеем
$$\frac{\varepsilon}{2}>\left|\mu_0\left(\varphi_i\right)-\mu\left(\varphi_i\right)\right|\geqslant\left|\mu_0\left(\varphi_i\right)\right|-\left|\mu\left(\varphi_i\right)\right|=m_i^0-\left|\left(\mu_1+\ldots+\mu_S+\mu_{S+1}\right)\left(\varphi_i\right)\right|=$$
$$\text{(по определению функции } \varphi_i)$$
$$=m_i^0-\left(\mu_i+\mu_{S+1}\right)\left(\varphi_i\right)=m_i^0-\mu_i\left(\varphi_i\right)-\mu_{S+1}\left(\varphi_i\right)=m_i^0-\|\mu_i\|-\mu_{S+1}\left(\varphi_i\right).$$
Следовательно,
$$m_i^0-\|\mu_i\|<\frac{\varepsilon}{2}+\mu_{S+1}\left(\varphi_i\right)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\mu_{S+1}\left(1_x\right)=\frac{\varepsilon}{2}+\|\mu_{S+1}\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$
С другой стороны,
$$\frac{\varepsilon}{2}>\mu_i\left(\varphi_i\right)+\mu_{S+1}\left(\varphi_i\right)-m_i^0=\|\mu_i\|-m_i^0+\mu_{S+1}\left(\varphi_i\right),$$
откуда $\|\mu_i\|-m_i^0<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Неравенство $\left|\|\mu_i\|-m_i^0\right|<\varepsilon$, а в месте с ним и включение (2.1) доказаны. Теперь покажем, что во всякой базисной окрестности $O\left(\mu_0,\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_k,\varepsilon\right)$ содержится окрестность вида $O<\mu_0,U_1,\ldots,U_S,\delta>$. Для этого достаточно рассмотреть окрестность вида $O\left(\mu_0,\varphi,\varepsilon\right)$, поскольку семейство окрестностей меры μ_0 вида $O<\mu_0,U_1,\ldots,U_S,\delta>$ направлено вниз по включению (пересечение конечного числа окрестностей такого вида содержит окрестность такого вида). Это вытекает из справедливости включения
$$O<\mu_0,U_1^1\cap U_1^2\cap\ldots\cap U_S^1\cap U_S^2,\frac{1}{2}\min\left\{\delta_1,\delta_2\right\}>\subset$$
$$\subset O<U_0,U_1^1,\ldots,U_S^1,\delta_1>\cap O<\mu_0,U_1^2,\ldots,U_S^2,\delta_2> \tag{2.2}$$
Основная часть проверки включения (2.2) состоит в следующем:
$$\mu(U_i^j)=\mu(U_i^1\cap U_i^2)+\mu(U_i^j\setminus U_i^1\cap U_i^2)\leqslant\mu(U_i^1\cap U_i^2)+\mu(X\setminus\bigcup_{e=1}^{s}(U_e^1\cap U_e^2))<$$
$$<\mu(U_i^1\cap U_i^2)+\frac{1}{2}\min\left\{\delta_1,\delta_2\right\}\leqslant\mu(U_i^1\cap U_i^2)+\frac{1}{2}\delta_j.$$
Поэтому для меры μ, принадлежащей левой части доказанного включения (2.2), имеем
$$\mu_0(U_i^j)-\mu(U_i^j)\leqslant\mu_0(U_i^j)-\mu(U_i^1\cap U_i^2)=m_i^0-\mu(U_i^1\cap U_i^2)\leqslant\frac{1}{2}\min\left\{\delta_1,\delta_2\right\}<\delta_j,$$
а с другой стороны,
$$\mu(U_i^j)-\mu_0(U_i^j)<\mu(U_i^1\cap U_i^2)+\frac{1}{2}\delta_j-m_i^0<\frac{1}{2}\min\left\{\delta_1,\delta_2\right\}+\frac{1}{2}\delta_j\leqslant\delta_j.$$

Осталось в окрестности $O\left(\mu_0,\varphi,\varepsilon\right)$ найти окрестность вида $O<\mu_0,U_1,\ldots,U_S,\delta>$. Поскольку $O\left(\mu_0,\lambda\varphi,\lambda\varepsilon\right)=O\left(\mu_0,\varphi,\varepsilon\right)$ для $\lambda>0$, можно считать, что $\|\varphi\|\leqslant 1$. Кроме того, можно считать, что $\varphi\geqslant 0$. Для $\delta>0$ возьмем непересекающиеся окрестности U_i точек x_i так, чтобы колебания функции φ на U_i были меньше δ. Тогда
$$|\mu_0(\varphi)-\mu(\varphi)|\leqslant|m_1^0\varphi(x_1)-\int\limits_{u_1}\varphi d\mu|+\ldots+|m_S^0\varphi(x_S)-\int\limits_{u_S}\varphi d\mu|+|\int\limits_{X\setminus U_1\cup\ldots\cup U_s}\varphi d\mu|.$$
Далее
$$|m_i^0\varphi(x_i)-\int\limits_{u_i}\varphi d\mu|=|m_i^0\varphi(x_i)-\int\limits_{u_i}\varphi(x_i)d\mu+\int\limits_{u_i}\varphi(x_i)d\mu-\int\limits_{u_i}\varphi d\mu|\leqslant$$

$$\leqslant m_i^0\varphi(x_i) - \int\limits_{u_i}\varphi(x_i)d\mu + |\int\limits_{u_i}[\varphi(x_i)-\varphi]d\mu| \leqslant \varphi(x_i)\cdot|m_i^0 - \|\mu_i\|| + \int\limits_{u_i}|\varphi(x_i)-\varphi|d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \varphi(x_i)\,\delta + \delta\|\mu_i\| \leqslant 2\cdot\delta.$$

Поэтому для $\delta < \dfrac{\varepsilon}{(2S+1)}$ выполняется включение

$$O{<}\mu_0, U_1, \ldots, U_S, \delta{>} \subset O(\mu_0, \varphi, \varepsilon).$$

Известно, что в бесконечном компакте X пространство $P(X)$ гомеоморфно гильбертову кубу Q (см. [3, 5]), где $Q = \prod\limits_{i=1}^{\infty}[-1,1]_i$, $[-1,1]_i$ — отрезок в $\mathbb{R}$ — вещественная прямая. Для натурального числа $n \in \mathbb{N}$ через $P_n(X)$ обозначается множество всех вероятностных мер не более чем с n носителями, т. е. $P_n(X) = \{\mu \in P(X) : |\operatorname{supp}\mu| \leqslant n\}$. Компакт $P_n(X)$ является выпуклыми линейными комбинациями мер Дирака вида: $\mu = m_1\delta_{x_1} + m_2\delta_{x_2} + \ldots + m_n\delta_{x_n}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i = 1$, $m_i \geqslant 0$, $x_i \in X$, δ_{x_i} — мера Дирака в точке x_i. Через $\delta(X)$ обозначается множество всех мер Дирака, и $P_\omega(X) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n(X)$. Напомним, что пространство $P_f(X) \subset P(X)$ состоит из всех вероятностных мер вида $\mu = m_1\delta_{x_1} + m_2\delta_{x_2} + \ldots + m_k\delta_{x_k}$ с конечными носителями, для каждой из которых $m_i \geqslant \dfrac{k}{k+1}$ при некотором i (см. [3, 5]). Для натурального числа n положим $P_{f,n} \equiv P_f \cap P_n$.

Для компакта X имеет место $P_{f,n}(X) = \{\mu \in P_f(X) : |\operatorname{supp}\mu| \leqslant n\}$; $P_f^c \equiv P_f \cap P^c$, $P_{f,n}^c \equiv P_f \cap P_n \cap P^c$, $P_n^c = P^c \cap P$. Для компакта X через $P^c(X)$ обозначается множество всех мер $\mu \in P(X)$, носитель каждой из которых лежит в одном из компонентов связности компакта X (см. [5]).

Определение. Система $\underline{X} = \{X_\alpha, P_\alpha^\beta, L\}$ состоящая из пространств $X_\alpha \in ANR$, является *обратной системой* [9], если для каждых индексов $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in L$, имеется проекция $P_\alpha^\beta : X_\beta \to X_\alpha$, где L — индексное множество.

Система $\underline{X}$ называется *подвижной* [9], если для каждого $\alpha \in L$ имеется $\beta \in L, \beta \geqslant \alpha$, и каждого $\gamma \in L$, $\gamma \geqslant \alpha$, имеется отображение $r : X_\beta \to X_\gamma$. Имеет место следующее равенство: $P_\alpha^\gamma \circ r \simeq P_\alpha^\beta$.

Компакт X называется *подвижным компактом*, если X является обратным пределом обратной подвижной системы.

3. Основная часть

Теорема 3.1. *Если функтор $F : Comp \to Comp$ — непрерывный, сохраняющий пустые множества, точку, ANR-компакты и прообразы отображений, тогда F сохраняет подвижные компакты.*

Доказательство. Пусть $\underline{X} = \left\{X_\alpha, P_\alpha^\beta, L\right\}$ — обратная система из $X_\alpha \in ANR$, где $P_\alpha^\beta : X_\beta \to X_\alpha$, $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in L$ — направление индексного множества. Семейство $\underline{X}$ называется *подвижным*, если для каждого $\alpha \in L$ имеется малое $\beta \in L$, $\beta \geqslant \alpha$, $\gamma \in L, \gamma \geqslant \alpha$, и существует отображение $r : X_\beta \to X_\gamma$ такое, что имеет место следующее равенство:

$$P_\alpha^\gamma \circ r \simeq P_\alpha^\beta. \tag{3.1}$$

Рассмотрим обратную систему $F(\underline{X}) = \left\{F(X_\alpha) :\ F\left(\pi_\beta^\alpha\right),\ L\right\}$. В силу непрерывности функтора система $F(\underline{X})$ является обратным пределом системы $\left\{F(X_\alpha) :\ F\left(\pi_\beta^\alpha\right),\ L\right\}$. Из того, что функтор F сохраняет ANR пространства, система $\left\{F(X_\alpha),\ F\left(\pi_\beta^\alpha\right) :\ L\right\}$ является ANR-системой. Это означает, что $F(\underline{X})$, и следовательно, $F(X)$ подвижно. Теорема доказана. $\square$

Лемма 3.1. *Если функтор $F : Comp \to Comp$ — непрерывный, сохраняющий пустое множество и точку мономорфный, тогда F сохраняет гомотопные отображения.*

Доказательство. Пусть X и Y — топологические пространства и $H : X \times I \to Y$ — непрерывная гомотопия, соединяющая отображения $h_0 = H(x,0)$ и $h_1 = H(x,1)$. Рассмотрим вложение $i_t : X \times \{t\} \to X \times I$, где $I = [0,1]$ — отрезок. Это вложение по предложению 1.1 (см. [6]) определяет вложение $F(i_t) : F(X \times \{t\}) \to F(X \times I)$. Но пространство (компакт) $F(X \times \{t\})$ естественно гомеоморфно пространству $F(X \times \{t\})$. Поэтому определено естественное (отображение) вложение $F(X \times I) \to F(X \times I)$. Тогда отображение $F(H)|_{F(X \times I)}$ является непрерывной гомотопией, соединяющей отображения $F(h_0)$ и $F(h_1)$, т. е. $F(H)$ есть гомотопия между компактами $F(X)$ и $F(Y)$. Лемма 3.1 доказана. □

Пусть $\alpha \in L$. Если семейство $\underline{X}$ подвижно, то имеется $\beta \in L$, $\beta \geqslant \alpha$ и для любого $\gamma \geqslant \alpha$ существует отображение $r : X_\beta \to X_\gamma$ удовлетворяющее равенству (3.1). Рассмотрим отображение $F(r) : F(X_\beta) \to F(X_\gamma)$, которое в силу ковариантности функтора F и в силу леммы 3.1 удовлетворяет равенству $F(\pi_\alpha^\gamma) \circ F(r) \simeq F\left(\pi_\alpha^\beta\right)$.

а) Если непрерывная гомотетия h_t стягивает пространство X в точку x, то непрерывная гомотопия $F(h_t)$ стягивает пространство $F(X)$ в множество $F(\{x\})$, которое стягиваемо, так как функтор F сохраняет точку.

б) Известно, что произвольный ANR-компакт имеет гомотопический тип конечного полиэдра. В силу непрерывности функтора F из гомотопической эквивалентности пространств X и Y следует, что пространства $F(X)$ и $F(Y)$ гомотопически эквивалентны.

Абсолютные ретракты — в точности стягиваемые абсолютные окрестностные ретракты. Поэтому необходимо проверить, что функтор F сохраняет стягиваемость топологических пространств.

Говорят, что хаусдорфово компактное пространство X *ассоциировано* с ANR-системой $\underline{X}$ (см. [9]), если X является обратным пределом этой системы, т. е. $X = Inv\lim \underline{X}$.

В работе [9] показано, что каждое компактное метрическое пространство X ассоциировано с некоторой ANR-последовательностью $\underline{X}$.

Теорема 3.2. *Пусть функтор $F : Comp \to Comp$ — непрерывный, сохраняющий ANR-компакты, точку и пустое множество. Тогда*:

а) *если $Sh(X) \leqslant Sh(Y)$, то $ShF(X) \leqslant ShF(Y)$;*

б) *если $Sh(X) = Sh(Y)$, то $ShF(X) = ShF(Y)$.*

Доказательство. Пусть $\underline{X} = \left\{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta, \Omega\right\}$ и $\underline{Y} = \left\{Y_\alpha, \mu_\alpha^\delta, \pounds\right\}$ — ANR-системы, состоящие из конечномерных ANR-компактов X_α и Y_γ, ассоциирующие соответственно компакты X и Y. Допустим, $Sh(X) \leqslant Sh(Y)$. Тогда имеются такие отображения $\underline{f} : \underline{X} \to \underline{Y}$ и $\underline{g} : Y \to \underline{X}$, что $\underline{g\,f} \approx \underline{1_{\times}x}$ (см. [5]). Пусть $\underline{f} = \{f_\gamma, \pounds\}$ и $\underline{g} = \{g_\alpha, \Omega\}$. Для каждого $a \in \Omega$ имеется индекс $a' \in \Omega$ такой, что $a' > f\,g\,(a)$ и выполнено условие

$$g_x \cdot f_{g(a)} \cdot \pi_{fg(a)}^{a'} \simeq \pi_a^a : X_{a'} \to X_a. \tag{3.2}$$

Рассмотрим системы $\underline{F(X)} = \left\{F(X_a), F\left(\pi_a^\beta\right), \Omega\right\}$ и $\underline{F(Y)} = \left\{F(Y_\gamma), F\left(\mu_a^\delta\right), \pounds\right\}$. Заметим, что в силу эпиморфности функтора F имеет место равенство $F\left(\pi_\alpha^\beta\right)(F(X_p)) = F(X_\alpha)$. В силу непрерывности функтора F и конечности степени функтора $\underline{F(X)}$ и $\underline{F(Y)}$ являются конечномерными ANR-системами, ассоциирующими соответственно компакты $\overline{F(X)}$ и $F(Y)$.

Для каждого $\gamma \in \pounds$ определяем отображение $f_\gamma(F) = F(f_\gamma) : F\left(X_{f(\alpha)}\right) \to F(Y_\gamma)$, полагая $F_\gamma(\gamma_\gamma) = F\left(f_{f(\nu)}\right)$. Также определяем отображение $F(g_\alpha) : F\left(Y_{g(\alpha)}\right) \to F(X_\alpha)$, $\alpha \in \Omega$. В силу равенства (3.2) и леммы 3.1 имеет место следующее равенство:

$$\pi_\alpha^{fg(\alpha)} \cdot F\left(\pi_{fg(\alpha)}^{\alpha'}\right) \simeq F\left(\pi_\alpha^{\alpha'}\right) : F(X_{\alpha'}) \to F(X_\alpha). \tag{3.3}$$

В силу леммы 3.1 и непрерывности функтора имеем: система отображений $F(f) = \{F(f_\gamma), \pounds\}$, $\underline{F(g)} = \{F(g_\alpha) : \Omega\}$ отображает соответственно систему $\underline{F(X)}$ в систему $\overline{F(Y)}$ и $\underline{F(Y)}$ в $\underline{F(X)}$. В силу равенства (3.1) имеем $\underline{F(g)} \circ \underline{F(f)} \simeq \underline{1_X}$. Отсюда $ShF(X) \leqslant Sh\overline{F(Y)}$. Так же доказывается, что из равенства $Sh(X) = \overline{Sh}(Y)$ вытекает равенство $ShF(X) = ShF(Y)$. Теорема 3.2 доказана. □

Напомним [2], что компактное хаусдорфово пространство X называется *абсолютным шейповым ретрактом* (сокращенно, *ASR-компактом*), если для произвольного хаусдорфова компакта Y, $X \subset Y$, компакт X является шейповым ретрактом для Y, т. е. существует шейповое отображение $r : Y \to X$ такое, что $r \circ i \simeq 1_X$.

Компактное хаусдорфово пространство X называется *абсолютным окрестностным шейповым ретрактом* (сокращенно, *$ANSR$-компактом*), если для каждого компактного хаусдорфова Z, $X \subset Z$, существует замкнутая окрестность Y компакта X в Z такая, что X является шейповым ретрактом для Y.

Следствие 3.1. *Пусть функтор F удовлетворяет условию теоремы* 3.2. *Тогда имеет место*:

а) *если X есть ASR, тогда $F(X)$ тоже ASR*;

б) *если X есть $ANSR$, тогда $F(X)$ тоже $ANSR$*;

в) *если X подвижно, тогда $F(X)$ тоже подвижно.*

Для компакта X определяется *фундаментальная размерность FdX* (см. [2]) как минимальная из размерностей $\dim X$ всех таких компактов X', что $ShX' \geqslant ShX$, т. е. $FdX = \min\{\dim X' : ShX' \geqslant ShX\}$. *Шейповой размерностью* компакта X называется число $SdX = \min\{\dim Y : ShX \leqslant ShY\}$, где под $\dim Y$ мы понимаем размерность, определенную при помощи открытых локально-конечных нормальных покрытий пространства X.

Теорема 3.3. *Пусть $F : Comp \to Comp$ — непрерывный, сохраняющий ANR-компакты, точку и пустое множество функтор степени $\leqslant n$. Тогда имеет место*:

а) *если $Fd(X) \leqslant Fd(Y)$, то $Fd(F(X)) \leqslant Fd(F(Y))$*;

б) *если $Sd(X) \leqslant Sd(Y)$, то $Sd(F(X)) \leqslant Sd(F(Y))$*;

в) *для компакта X выполнено $Sd(F(X)) \leqslant nSdX + \dim F(\widetilde{n})$.*

Доказательство. Пусть $X = \lim\left\{X_\alpha,\, P_\alpha^\beta,\, L\right\}$, где $X_\alpha \in ANR$ и $\dim X_\alpha \leqslant k$ для каждого $\alpha \in L$. В силу непрерывности функтора $F : Comp \to Comp$ имеем $F(X) = \underleftarrow{\lim}\left\{ F(X_\alpha),\ F\left(P_\alpha^\beta\right), L \right\}$. В силу условия теоремы

$$\dim X_\alpha \leqslant k, \quad \text{тогда} \quad \dim F(X_\alpha) \leqslant nk + \dim F(\widetilde{n}) = nk + n = n(k+1)$$

(см. [3,5]).

Следовательно, $\dim F(X) \leqslant n \dim X + \dim F(\widetilde{n}) = nk + n = n(k+1)$.

Пункты а) и б) теоремы доказываются аналогично. Теорема 3.3 доказана. □

Пространства X и Y называют *гомотопически эквивалентными*, если существуют такие два отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$, что gf гомотопно id_X и gf гомотопно id_Y, т. е. $gf \simeq id_X$ и $gf \simeq id_Y$. В данном случае пишем $X \simeq Y$ и говорим, что X и Y имеют один тот же *гомотопический тип*. Если X и Y — компакты, то в силу леммы 3.1, с использованием необходимых свойств функторов, имеет место следующая теорема.

Теорема 3.4. *Эпиморфный, сохраняющий точку, пустое множество и ANR-компакты непрерывный функтор $F : Comp \to Comp$ сохраняет*:

а) *категорию ANR-системы компактов*;

б) *гомотопически эквивалентные ANR-системы компактов*;

в) *ассоциированные с ANR-системами хаусдорфовы компакты*;

г) *гомотопические типы ANR-компактов.*

Теорема 3.5. *Для любого компакта X и ковариантного функтора $F : Comp \to Comp$ — непрерывного, сохраняющего пересечение, пустое множество и точку, имеет место*:

$$Sh(X) \leqslant ShF(X).$$

Следствие 3.2. *В условиях теоремы* 3.5, *если компакт X есть деформационный ретракт пространства $F(X)$, то*

$$Sh(X) = ShF(X).$$

В работах [5, 11] приведено равенство шейпов компактов X и Y, лежащих в гильбертовом кубе Q, дополнения которых удовлетворяют некоторым эквивалентностям. С помощью этих результатов получается следующая теорема.

Теорема 3.6. *Пусть $F : Comp \to Comp$ — нормальный функтор такой, что для компактов X и Y имеет место: $F(X) = Q$, $F(Y) = Q$, $\eta(X)$ и $\eta(Y)$ суть Z-множества в $F(X)$ и $F(Y)$ соответственно. Тогда $ShX = ShY$ тогда и только тогда, когда подпространства $F(X) \setminus X$ и $F(Y) \setminus Y$ $uch(U_{ANR})$ эквивалентны.*

Для пространства X через $\square X$ обозначим разложение (разбиение) пространства X, состоящее из всех компонентов связности [7]. Если $f : X \to Y$ — непрерывное отображение, то непрерывное отображение $\square f : \square X \to \square \mathrm{Y}$ однозначно определяется в силу условия $\pi_Y \circ f = \square \mathrm{f} \cdot \pi_X$, где $\pi_Y : Y \to \square \mathrm{Y}$ и $\pi_X : X \to \square \mathrm{X}$ — факторные отображения, т. е. имеет место следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi_X \downarrow & \square f & \downarrow \pi_Y \\ \square X & \to & \square Y \end{array} \tag{3.4}$$

Лемма 3.2. *Если X — компактное ANR-пространство, тогда отображение $P^c(\pi_X)$ является гомотопической эквивалентностью.*

Доказательство. Пусть X есть ANR-компакт, тогда пространство $P^c(X)$ является конечным множеством или $P^c(X)$ является конечным объединением гильбертовых кубов и точек. Пространство $P^c(\square X)$ — конечное число точек, так как пространство X есть ANR-компакт. Для любого $\mu \in P^c(\square X)$ преобразование $(P^c(f))^{-1}(\mu)$ есть гильбертов куб или одна точка, т. е. $Sh((P^c(f))^{-1}(\mu))$ тривиально. Тогда по теореме 3.7 (см. [7]) отображение $P^c(f)$ есть шейповая эквивалентность. Следовательно, имеет место гомотопическая эквивалентность. Лемма 3.2 доказана. □

Теорема 3.7. *Пусть X — компакт и $\pi_X : X \to \square \mathrm{X}$ — факторное отображение. Тогда отображение $P^c(\pi_X)$ порождает шейповую эквивалентность, т. е. $Sh(P^c(X)) = Sh(\square X)$.*

Доказательство. Пусть X компактно, $\square X$ также компакт, и по теореме В. И. Пономарева [4] $\dim \square X = 0$. Отсюда $\dim P^c(X) = 0$ и $P^c(\square \mathrm{X}) = 0$. По теореме 3.2 (см. [7]) отображение $P^c(\pi_X)$ является шейповой эквивалентностью, это означает, что $Sh(P^c(X)) = Sh\ P^c(\square \mathrm{X})$ и $|\square P^c(\square \mathrm{X})| = |\square X|$. Теорема доказана. □

Определение (см. [5]). Нормальный подфунктор F функтора P_n называется *локально выпуклым*, если множество $F(\tilde{n})$ локально выпукло.

Скажем, что функтор F_1 является *подфунктором* (соответственно, *надфунктором*) функтора F_2, если существует такое естественное преобразование $h : F_1 \to F_2$, что для всякого объекта X отображение $h(X) : F_1(X) \to F_2(X)$ является мономорфизмом (эпиморфизмом). Через exp обозначается известный функтор гиперпространств замкнутых подмножеств. Так, например, тождественный функтор Id является подфунктором функтора exp_n, где $exp_n X = \{F \in expX : |F| \leqslant n\}$, а функтор n-й степени P^n является надфунктором exp_n и SP^n_G. Нормальный подфунктор F функтора P_n однозначно определяется своим значением $F(\tilde{n})$ на $\tilde{n}$, где через $\{\widetilde{n}\}$ обозначается n-точечное множество $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Заметим, что $P_n(n)$ — это $(n-1)$-мерный симплекс. Всякое подмножество $(n-1)$-мерного симплекса σ^{n-1} определяет нормальный подфунктор функтора P_n, если оно инвариантно относительно симплициальных отображений в себя.

Примером не нормального подфунктора функтора P_n является функтор P^c_n вероятностных мер, носители которых лежат в одном компоненте связности пространства. Одним из примеров локально выпуклых подфункторов P_n является функтор $SP^n \equiv SP^n_{S_n}$, где S_n — группа гомеоморфизмов (группа перестановок) n-элементного множества.

Следствие 3.3. *Если для компактов X и Y имеет место равенство $|\square X| = |\square Y| = \aleph_0$, то $Sh(P^c(X)) = Sh(P^c(Y))$ и $Sh\ P(X) = Sh\ P(Y)$, где $|Z|$ — мощность множества Z.*

Доказательство. Пусть множества $|\square X|$ и $|\square Y|$ счетны. В этом случае по результату А. В. Архангельского [1] пространства $|\square X|$ и $|\square Y|$ компактны и метризуемы. Заметим, что $|\square X|$ и $|\square Y|$

имеют всюду плотное множество изолированных точек. Тогда компакты $P(X)$ и $P(Y)$ гомеоморфны гильбертову кубу Q. С другой стороны, $P^c[X] = \square X$ и $P^c[\square Y] = \square Y$. Следовательно, $Sh\ P^c[\square X] = Sh\ P^c[\square Y]$. Следствие 3.3 доказано. $\square$

Через $M_\square$ обозначим класс таких всех компактов X, что $\square X$ метризуемо. Из следствия 3.3 вытекает, что если $X, Y \in M_\square$, то $\square X$ и $\square Y$ имеют счетное всюду плотное множество изолированных точек [12].

Следствие 3.4. *Если $X, Y \in M_\square$, то $Sh(P^c(X)) \geqslant Sh(P^c(Y))$ или $Sh(P^c(X)) \leqslant Sh(P^c(Y))$. Следовательно, если $\square X$ и $\square Y$ бесконечны, тогда $Sh(P^c(X)) = Sh(P^c(Y))$, т. е. $Sh(P^c(X)) \geqslant Sh(P^c(Y))$ и $Sh(P^c(X)) \leqslant Sh(P^c(Y))$.*

Доказательство. Пусть X и Y суть элементы семейства $M_\square$. Тогда $\square X$ и $\square Y$ — нульмерные компакты. В частном случае, если $\square X$ и $\square Y$ — конечные множества, то из одной теоремы [2] получаем искомую.

Если $|\square X| \geqslant \aleph_0$, тогда $\square X$ содержит канторов дисконтиниум. В этом случае $\square Y$ можно вложить в $\square X$, тогда компакт $\square Y$ является ретрактом для $\square X$ (см. [10]). Тогда $Sh(\square \mathrm{X}) \geqslant \mathrm{Sh}(\square \mathrm{Y})$ и $Sh\ P^c[\square X] \geqslant Sh\ P^c[\square Y]$.

Следовательно, по теореме 3.7 имеем $Sh\ P^c[\square X] \geqslant Sh\ P^c[\square Y]$. Если $\square X \leqslant \aleph_0$ и $\square Y \leqslant \aleph_0$, тогда компакты $\square X$ и $\square Y$ гомеоморфны порядковому компакту Мазуркевича—Серпинского [10]. Последнее, пусть $\square X$ и $\square Y$ — бесконечные множества, тогда $Sh(\square \mathrm{X}) = \mathrm{Sh}(\square \mathrm{Y})$ тогда и только тогда, когда $\square X$ и $\square Y$ гомеоморфны [8]. Если $|\square X| > |\square Y|$ или $|\square X| < |\square Y|$, тогда $\square Y$ или $\square X$ является ретрактом для $\square X$ и $\square Y$ соответственно. Отсюда по теореме 3.1 имеем $Sh(P^c(X)) \geqslant Sh(P^c(Y))$. Следствие 3.4 доказано. $\square$

Лемма 3.3. *Для любого компакта X имеет место равенство $|\square P_f(X)| = |\square X|$.*

Доказательство. Пусть X — произвольный компакт, $\square X$ — его множество компонентов связности т. е. $\square X = \{x_i' \in X : \pi_X^{-1}(x_i')$ — связная компонента точки $x_i'\}$. Очевидно, что $\square X$ компактно и $\square X \subset X$. Отсюда $Sh\ (\square \mathrm{X}) \leqslant \mathrm{Sh}\ (\mathrm{X})$. С другой стороны, из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{rcl} \pi_X : X & \to & \square X \\ \pi_f^X \ \uparrow & & \uparrow\ \delta_X \\ P_f(\pi_X) : P_f(X) & \to & \delta(\square X) \end{array} \tag{3.5}$$

$|\square Sh\ P_f(X)| = |\square X|$. Из (3.5) равенство имеет место, т. е. $|\square P_f(X)| = |\square X|$. Лемма 3.3 доказана. $\square$

Заметим, что для любых $x \in X$ и $y \in X$ между множествами $(r_f^{-1})(x)$ и $(r_f^{-1})(y)$ имеется взаимно однозначное соответствие, т. е. произвольной точке $\mu_x \in (P_f^{-1})(X)$ ставим в соответствие

$$\mu_y \in (P_f^x)^{-1}, \quad \text{где} \quad \mu_x = m_0\delta_{x_0} + m_1\delta_{x_1} + \cdots + m_k\delta_{x_k}, \quad \mu_y = m_0\delta_{y_0} + \cdots + m_k\delta_{x_k}.$$

В случае бесконечных компактов X и Y пространства $P(X)$ и $P(Y)$ гомеоморфны гильбертову кубу Q. Если A и B, лежащие в компактах $P(X)$ и $P(Y)$, суть Z-множества, то в силу теоремы Чепмэна [2] $ShA = ShB$ тогда и только тогда, когда $P(X)\backslash A$ гомеоморфно $P(Y)\backslash B$. В работах [3, 5] было показано, что подпространства $F(X)$ и $F(Y)$ суть Z-множества в компактах $P(X)$ и $P(Y)$, где $F = P_f\ (X)$, $P_{f,n}\ (X)$, $P_{f,n}^C(X)$, $P_f^C(X)$. Еще было отмечено, что эти пространства X являются сильными деформационными ретрактами для $F(X)$. Значит, имеет место следующий результат.

Теорема 3.8. *Для бесконечных компактов X и Y следующие условия эквивалентны*:

а) $Sh\ X = Sh\ Y$;

б) $P(X)\backslash P_f(X) \simeq P(Y)\backslash P_f(Y)$;

в) $P(X)\backslash \delta(X) \simeq P(Y)\backslash \delta(Y)$;

г) $P(X)\backslash F(X) \simeq P(Y)\backslash F(Y)$, *где* $F = P_{f,n}^c$, P_f^c, $P_{f,n}$.

Теорема 3.9. *Пусть X и Y есть элементы $M_\square$, т. е. $X \in M_\square$ и $Y \in M_\square$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

а) $Sh\ (\square \mathrm{X}) = Sh(\square Y)$;
б) $P\,(X)\setminus P^c\,(X) \simeq P\,(Y)\setminus P^c\,(Y)$.

Теорема 3.10. *Пусть X и Y суть элементы множества $M_\square$. Тогда отношение $Sh(\square \mathrm{X}) = Sh(\square Y)$ тогда и только тогда, когда $Sh\ \mathrm{X} = Sh(\square \mathrm{X})$.*

Известно, что из $Sh\ \mathrm{X} \leqslant Sh\ Y$ вытекает неравенство $Sh(\square \mathrm{X}) \leqslant Sh(\square Y)$. В частном случае равенство $Sh\ \mathrm{X} = Sh\ Y$ дает нам равенство $Sh(\square \mathrm{X}) = Sh(\square Y)$.

Пусть теперь $Sh(\square \mathrm{X}) = Sh(\square Y)$. Из нульмерности и метризуемости компактов $\square X$ и $\square Y$ по теореме Мардешича—Сегала [8] $\square X$ и $\square Y$ гомеоморфны. Пусть для любого $y \in \square X$ множество $\pi_y^{-1}(y)$ имеет тривиальный шейп. Тогда по теореме 3.7 (см. [7]) имеем $Sh\ Y = Sh(\square X)$. В силу нульмерности этих пространств и из равенств $Sh\ Y = Sh\,(\square X)$ вытекает, что $Y \simeq \square X \simeq \square Y$.

Заметим, что в этом случае $Sh\ \mathrm{X} = Sh\ Y$ и $X \simeq Y$, т. е. $Sh\ \mathrm{X} = Sh(\square X)$ эквивалентно равенству $Sh\ \mathrm{X} = Sh\ Y$.

Следствие 3.5.

а) *Пространство $P^c(X)$ есть ASR тогда и только тогда, когда X связно*;
б) *$P^c(X)$ есть $ANSR$ тогда и только тогда, когда X имеет конечное число компонент связности.*

Теорема 3.11. *Для любых бесконечных нульмерных компактов X и Y верно*:

а) *если $Sh\ \mathrm{X} = Sh\ Y$, тогда $P_n(X) \simeq P_n(Y)$*;
б) *если $Sh\ \mathrm{X} = Sh\ Y$, тогда $P\,(X)\setminus P_n(X) \simeq P\,(Y)\setminus P_n(Y)$*;
в) *$Sh\ P_n(X) = Sh\ P_n(Y)$ тогда и только тогда, когда $P\,(X)\setminus P_n(X) \simeq P\,(Y)\setminus P_n(Y)$*;
г) *$Sh\ F\,(\mathrm{X}) = Sh\ F\,(Y)$ тогда и только тогда, когда $P\,(X)\setminus F\,(X) \simeq P\,(Y)\setminus F(Y)$, где F — локально выпуклые подфункторы функтора P_n*;
д) *$Sh\ \mathrm{X} = Sh\ Y$ тогда и только тогда, когда $P\,(X)\setminus \delta(X) \simeq P(Y)\setminus\delta(Y)$.*

Теорема 3.12. *Для любых бесконечных нульмерных компактов X и Y следующие условия эквивалентны*:

а) *$Sh\ \mathrm{X} = Sh\ Y$*;
б) *$Sh\ F\,(\mathrm{X}) = Sh\ F(Y)$, где $F = P_{f,n},\ P^c_{f,n},\ P_f, P^c_f$*;
в) *$X \simeq Y$*;
г) *$P\,(X)\setminus F(X) \simeq P\,(Y)\setminus F(Y)$.*

Теорема 3.13. *Для любых бесконечных компактов X и Y имеет место*:

а) *если $Sh\ \mathrm{X} = Sh\ Y$, тогда $P\,(X)\setminus P_n(X) \simeq P\,(Y)\setminus P_n(Y)$ для любого $n \in N$*;
б) *если $Sh\ \mathrm{X} = Sh\ Y$, тогда $P\,(X)\setminus F(X) \simeq P\,(Y)\setminus F(Y)$, где F — локально выпуклые подфункторы функтора P_n.*

Теорема 3.14. *Для любых бесконечных компактов $X \in M_\square$ и $Y \in M_\square$ имеет место*:

а) *$Sh\ \mathrm{X} = Sh\ Y$ тогда и только тогда, когда $Sh(\square \mathrm{X}) = Sh(\square Y)$*;
б) *$Sh\ \mathrm{X} = Sh\ Y$ тогда и только тогда, когда $ShP_n(\square \mathrm{X}) = ShP_n(\square Y)$.*

В работе [11] приведено равенство шейпов компактов X и Y, лежащих в гильбертовом кубе Q, дополнения которых удовлетворяют некоторым эквивалентностям. С помощью приведенных фактов в конкретных случаях получается следующий результат.

Теорема 3.15. *Для любых бесконечных компактов X и Y имеет место*: *$ShP_n(\mathrm{X}) = ShP_n(Y)$ тогда и только тогда, когда пространства $P\,(X)\setminus P_n\,(X)$ и $P\,(Y)\setminus P_n(Y)$ $uch(U_{ANR})$ эквивалентны.*

Следствие 3.6. *Для бесконечных компактов X и Y пространства $P_n\,(X)$ и $P_n(Y)$ $hse(Z)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $P\,(X)\setminus P_n\,(X)$ и $P\,(Y)\setminus P_n(Y)$ $cps\ (Z^*)$ — эквивалентны.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Архангельский А. В.* Аддиционная теорема для веса множеств, лежащих в бикомпактах// Докл. АН СССР. — 1959. — *126*, № 2. — С. 239–241.
2. *Борсук К.* Теория шейпов. — М.: Мир, 1976.
3. *Жураев Т. Ф.* Некоторые геометрические свойства функтора P вероятностных мер и его подфункторов// Дисс. к.ф.-м.н. — М.: МГУ, 1989.
4. *Пономарев В. И.* О непрерывных разбиениях бикомпактов// Усп. мат. наук. — 1957. — *12*. — С. 335–340.
5. *Федорчук В. В.* Вероятностные меры в топологии// Усп. мат. наук. — 1991. — *46*, № 1. — С. 41–80.
6. *Шепин Е. В.* Функторы и несчетные степени компактов// Усп. мат. наук. — 1981. — *36*, № 3. — С. 3–62.
7. *Kodama Y., Spiez S., Watanabe T.* On shapes of hyperspaces// Fund. Math. — 1978. — *11*. — С. 59–67.
8. *Mardešić S., Segal J.* Shapes of compacta and ANR-systems// Fund. Math. — 1971. — *72*. — С. 41–59.
9. *Mardešić S., Segal J.* Equivalence of the Borsuk and the ANR-system approach to shapes// Fund. Math. — 1971. — *72*. — С. 61–66.
10. *Mazurkiewicz S., Sierpiński W.* Contribution à la topologie des ensembles dénombrables// Fund. Math. — 1920. — *1*, № 1. — С. 17–27.
11. *Mrozik P.* Hereditary shape equivalences and complement theorems// Top. Appl. — 1986. — *22*, № 1. — С. 131–137.
12. *Pelczyński A.* A remark on spaces 2^* for zerodimensional X// Bull. Acad. Polon. Scr. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1965. — *19*. — С. 85–89.

Жураев Турсунбой Файзиевич
Ташкентский государственный педагогический университет им. Низами,
кафедра общей математики,
Узбекистан, 100070, г. Ташкент, ул. Бунедкор, д. 27
E-mail: tursunzhuraev@mail.ru

Турсунова Зулайхо Омонуллаевна
Ташкентский государственный педагогический университет им. Низами,
кафедра общей математики
Узбекистан, 100070, г. Ташкент, ул. Бунедкор, д. 27
E-mail: zulayhotursunova@mail.ru

Жувонов Камариддин Ризокулович
Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства,
кафедра высшей математики,
Узбекистан, 100000, г. Ташкент, ул. Кари Ниязий, д. 39
E-mail: qamariddin.j@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-21-32 UDC 515.12

Covariant Functors and Shapes in the Category of Compacts

© 2019 **T. F. Zhuraev, Z. O. Tursunova, K. R. Zhuvonov**

Abstract. In this paper, we consider covariant functors $F : Comp \to Comp$ acting in category of shape-preserving compact sets [2], infinite compact sets, and shape equivalence [9]. Also we study action of compact functors and shape properties of the compact space X consisting of connected components $\square X$ of the compact X as well as shape identity $ShX = ShY$ of infinite compacts X and Y for the space $P(X)$ of probability measures and its subspaces.

REFERENCES

1. A. B. Arkhangel'skiy, "Additsionnaya teorema dlya vesa mnozhestv, lezhashchikh v bikompaktakh" [An addition theorem for the weight of sets lying in bicompacts], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1959, **126**, No. 2, 239–241 (in Russian).
2. K. Borsuk, *Teoriya sheypov* [Theory of Shape], Mir, Moscow, 1976 (in Russian).
3. T. F. Zhuraev, "Nekotorye geometricheskie svoystva funktora P veroyatnostnykh mer i ego podfunktorov" [Some geometric properties of the functor P of probability measures and its subfunctors], *PhD Thesis*, MGU, Moscow, 1989 (in Russian).
4. V. I. Ponomarev, "O nepreryvnykh razbieniyakh bikompaktov" [On continuous partitions of bicompacts], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1957, **12**, 335–340 (in Russian).
5. V. V. Fedorchuk, "Veroyatnostnye mery v topologii" [Probability measures in topology], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1991, **46**, No. 1, 41–80 (in Russian).
6. E. V. Shepin, "Funktory i neschetnye stepeni kompaktov" [Functors and uncountable powers of compacts], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1981, **36**, No. 3, 3–62 (in Russian).
7. Y. Kodama, S. Spiez, and Watanabe T., "On shapes of hyperspaces," *Fund. Math.*, 1978, **11**, 59–67.
8. S. Mardešić and J. Segal, "Shapes of compacta and ANR-systems," *Fund. Math.*, 1971, **72**, 41–59.
9. S. Mardešić and J. Segal, "Equivalence of the Borsuk and the ANR-system approach to shapes," *Fund. Math.*, 1971, **72**, 61–66.
10. S. Mazurkiewicz and W. Sierpiński, "Contribution à la topologie des ensembles dénombrables," *Fund. Math.*, 1920, **1**, No. 1, 17–27.
11. P. Mrozik, "Hereditary shape equivalences and complement theorems," *Top. Appl.*, 1986, **22**, No. 1, 131–137.
12. A. Pelczyński, "A remark on spaces 2^* for zerodimensional X," *Bull. Acad. Polon. Scr. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 1965, **19**, 85–89.

T. F. Zhuraev
Tashkent State Pedagogical University named after Nizami, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: `tursunzhuraev@mail.ru`

Z. O. Tursunova
Tashkent State Pedagogical University named after Nizami, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: `zulayhotursunova@mail.ru`

K. R. Zhuvonov
Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: `qamariddin.j@mail.ru`