Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 1 (2019). С. 11–20

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-11-20 УДК 517.955, 517.956.3, 517.968.73

О ПОСТАНОВКЕ ВИДОИЗМЕНЕННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА—ДАРБУ В СЛУЧАЕ ПАРАМЕТРОВ, РАВНЫХ ПО МОДУЛЮ $\frac{1}{2}$

© 2019 г. **М. В. ДОЛГОПОЛОВ, И. Н. РОДИОНОВА**

Аннотация. Рассматривается уравнение Эйлера—Дарбу с параметрами, равными по модулю $\frac{1}{2}$. В силу того, что задача Коши в классической ее постановке является некорректной для таких значений параметров, авторы предлагают постановки и решения видоизмененных задач типа Коши при значениях параметров: а) $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$, б) $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$, в) $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$. В случае а) видоизмененная задача Коши решается методом Римана. Результат, полученный авторами, используется для постановки аналога задачи Δ_1 в первом квадранте с заданием граничных условий со смещением на координатных осях и нестандартными условиями сопряжения на линии сингулярности коэффициентов уравнения $y=x$. Первое из этих условий склеивает производные по нормали искомого решения, второе содержит предельные значения комбинации самого решения и его нормальных производных. Поставленная задача свелась к однозначно разрешимой системе интегральных уравнений.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Уравнение Эйлера—Дарбу—Пуассона

$$U_{xy}+\frac{\beta}{y-x}U_x-\frac{\alpha}{y-x}U_y=0 \tag{1.1}$$

имеет широкое применение в газовой динамике и гидродинамике, теории оболочек, в различных разделах механики сплошных сред [5, 12, 19–22].

В силу того, что вырождающиеся уравнения гиперболического типа в характеристических координатах сводятся к уравнению (1.1), исследованием краевых задач для уравнения Эйлера—Дарбу занимались многие советские и зарубежные математики. Подробная библиография по этому вопросу содержится в монографии М. М. Смирнова [17].

Наряду с классическими задачами (Коши, Коши—Гурса, Дарбу) для уравнения (1.1) ставились новые краевые задачи (Δ-задачи, со смещением, с интегральными условиями, с нестандартными условиями сопряжения, содержащими производные и интегралы дробного порядка) в областях, являющихся объединением нескольких характеристических треугольников [2–4, 6–11, 13–15, 23]. Значительный вклад в теорию краевых задач для уравнения Эйлера—Дарбу внесен самарскими математиками, в первую очередь, проф. В. Ф. Волкодавовым и его учениками. В работе [14] проведен подробный анализ основных результатов по постановке и решению как классических, так и новых видоизмененных краевых задач для уравнения (1.1), библиография ее содержит труды самарских математиков.

Основные результаты по постановке и исследованию краевых задач для уравнения (1.1) получены при начальных условиях, налагаемых на параметры уравнения: $0<|\alpha|,|\beta|,|\alpha+\beta|<1$.

Отметим, что задача Коши для уравнения (1.1) при $\alpha=\beta$, $0<|\beta|<1/2$ в классической постановке с условиями

$$\lim_{y\to x+0} U(x,y)=\tau(x), \qquad \lim_{y\to x+0}(y-x)^{2\beta}(U_y-U_x)=\nu(x), \quad y>x,$$

(τ, ν — заданные функции) является некорректной в силу того, что либо само решение, либо его производная по нормали (в зависимости от знака β) на линии сингулярности коэффициентов $y=x$ обращается в бесконечность.

В настоящей работе авторами предлагается постановка и решение видоизмененных задач типа Коши для уравнения (1.1) в случаях: а) $\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}$; б) $\alpha=-\dfrac{1}{2}$, $\beta=\dfrac{1}{2}$; в) $\alpha=\beta=-\dfrac{1}{2}$ (задачи C_1, C_2, C_3, соответственно).

На основе решения задачи C_1 получено решение видоизмененной задачи Δ_1 в области, представляющей первый квадрант, с краевыми условиями на координатных осях и сопряжением на линии $y=x$.

2. Задача C_1

На множестве $y>x>0$ найти решение уравнения

$$U_{xy}+\frac{1}{2(y-x)}U_x-\frac{1}{2(y-x)}U_y=0, \tag{2.1}$$

удовлетворяющее условиям

$$\lim_{y\to x+0}(y-x)(U_y-U_x)=\nu_1(x), \qquad 0\leqslant x<+\infty, \tag{2.2}$$

$$\lim_{y\to x+0}\left[U(x,y)-\nu_1(x)\left(\ln\sqrt{y-x}+\psi(\frac{1}{2})-\psi(1)\right)\right]=\tau_1(x), \tag{2.3}$$

где ν_1 определено условием (2.2), $\psi(z)=\dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ — логарифмическая производная Гамма-функции [1].

На заданные функции τ_1, ν_1 налагаются

Условия А. $\tau''(x)\in C[0,+\infty)$, $\nu''(x)\in C[0,+\infty)$.

Для решения задачи C_1 применим метод Римана. Функция Римана для уравнения (1.1) имеет вид [17]

$$V_0(x,y;x_0,y_0)=\frac{y-x}{(y_0-x)^{\frac{1}{2}}(y-x_0)^{\frac{1}{2}}}F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\sigma), \tag{2.4}$$

$$\sigma=\frac{(x-x_0)(y_0-y)}{(y_0-x)(y-x_0)}, \qquad F(\alpha,\beta,\gamma,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}z^n$$

— гипергеометрическая функция Гаусса [1]. Согласно методу Римана, рассмотрим область, ограниченную отрезком прямой $y=x+\varepsilon$ ($\varepsilon>0$) и характеристиками уравнения (2.1) $x=x_0$, $y=y_0$. Пусть $P(x,x_0+\varepsilon)=Q(y_0-\varepsilon,y_0)$. Применяя формулу Римана [17], имеем

$$U(x_0,y_0)=\frac{U(P)V_0(P)+U(Q)V_0(Q)}{2}+\int\limits_{x_0}^{y_0-\varepsilon}\left(\frac{V_0}{y-x}+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial V_0}{\partial x}-\frac{\partial V_0}{\partial y}\right]\right)U\Big|_{y=x+\varepsilon}dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{y_0-\varepsilon}\left(\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial U}{\partial x}\right)V_0\Big|_{y=x+\varepsilon}dx=\sum_{k=1}^{3}J_k. \tag{2.5}$$

где V_0 — функция Римана (2.4), $U_(x_0,y_0)$ — искомое решение уравнения (2.1).

Воспользуемся представлением функции Гаусса в формуле для случая $\gamma-\alpha-\beta=0$ (см. [1]):

$$F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\sigma)=\frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}\left[2\psi(1)-2\psi(\frac{1}{2})-\ln\frac{(y-x)(y_0-x_0)}{(y_0-x)(y-x_0)}\right]. \tag{2.6}$$

В результате интеграл J_3 формулы (2.5) примет вид:

$$J_3 = \frac{1}{2\Gamma^2(\frac{1}{2})} \int\limits_{x_0}^{y_0-\varepsilon} \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial x}\right) \frac{y-x}{(y_0-x)^{1/2}(y-x_0)^{1/2}} \ln \frac{(y_0-x)(y-x_0)}{(y_0-x_0)}\Big|_{y=x+\varepsilon} dx+$$

$$+\frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})} \int\limits_{x_0}^{y_0-\varepsilon} \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial x}\right) \frac{y-x}{(y_0-x)^{1/2}(y-x_0)^{1/2}} \left[\psi(1) - \psi(\frac{1}{2}) - \ln\sqrt{y-x}\right]\Big|_{y=x+\varepsilon} dx. \qquad (2.7)$$

Для вычисления производных $\dfrac{\partial V_0}{\partial x}, \dfrac{\partial V_0}{\partial y}$ в слагаемом J_2 формулы (2.5) представим функцию (2.4) в виде $V_0 = \sigma^{1/2} F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \sigma)\,\omega(x,y;x_0,y_0)$, где $\omega = \dfrac{y-x}{(y_0-y)^{1/2}(x-x_0)^{1/2}}$, и применим формулу дифференцирования функции Гаусса [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\sigma^a F(a,b,c;\sigma) = a\sigma^{a-1}F(a+1,b,c;\sigma){\sigma'}_x.$$

В результате имеем

$$\frac{\partial V_0}{\partial x} - \frac{\partial V_0}{\partial y} = \frac{1}{2}\sigma^{-1/2}F(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, \sigma)\,\omega(x,y;x_0,y_0)\left[{\sigma'}_x - {\sigma'}_y\right] +$$

$$+\sigma^{1/2}F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \sigma)\,\left[{\omega'}_x - {\omega'}_y\right] = i_1 + i_2. \qquad (2.8)$$

К функции $F(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, \sigma)$ применим формулу автотрансформации [1]:

$$F(a,b,c;\sigma) = (1-\sigma)^{c-a-b}F(c-a, c-b, c; \sigma).$$

Получаем:

$$i_1 = \frac{1}{2}\frac{(y_0-y)(y-x_0)+(x-x_0)(y_0-x)}{(y-x_0)^{1/2}(y_0-x)^{1/2}(x-x_0)(y_0-y)}F(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \sigma), \qquad (2.9)$$

$$i_2 = \left[\frac{-2}{(y-x_0)^{1/2}(y-x_0)^{1/2}} - \frac{(y-x)(y_0-y+x-x_0)}{(y-x_0)^{1/2}(y_0-x)^{1/2}(x-x_0)(y_0-y)}\right]F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \sigma). \qquad (2.10)$$

Отметим, что первое слагаемое формулы (2.10) равно $\dfrac{-2V_0}{y-x}$.

Подставим результаты вычислений (2.7)–(2.10) в формулу (2.5), положим $y = x+\varepsilon$ и перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$. С учетом условий (2.2), (2.3), а также того, что $F(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1) = \dfrac{2}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}$ (см. [1]), после переобозначения переменных получаем функцию

$$U(x,y) = \frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_x^y \tau_1(t)(y-t)^{-1/2}(t-x)^{-1/2}dt+$$

$$+\frac{1}{2\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_x^y \nu_1(t)(y-t)^{-1/2}(t-x)^{-1/2}\ln\left[\frac{(y-t)(t-x)}{y-x}\right]dt. \qquad (2.11)$$

Единственность решения задачи C_1 следует из метода Римана, существование доказано проверкой.

Замечание. Данный результат можно получить также, воспользовавшись формулой общего решения уравнения (2.1), приведенной в работе М. М. Смирнова [18]

$$U(x,y) = \int\limits_0^1 \Phi(x+(y-x)t)t^{-1/2}(1-t)^{-1/2}dt + \int\limits_0^1 \Psi(x+(y-x)t)t^{-1/2}(1-t)^{-1/2}\ln[t(1-t)(y-x)]dt, \qquad (2.12)$$

где Φ, Ψ — произвольные дважды дифференцируемые функции.

Не приводя подробных вычислений, сформулируем основные результаты по постановке и решению задач C_2 и C_3.

2.1. Задача C_2**.** На множестве $y > x > 0$ найти решение уравнения

$$U_{xy} + \frac{1}{2(y-x)}U_x + \frac{1}{2(y-x)}U_y = 0,$$

удовлетворяющее условиям

$$\lim_{y\to x+0} U(x,y) = \tau_2(x), \qquad 0 \leqslant x < +\infty;$$

$$\lim_{y\to x+0}\left[(U_y - U_x) - \frac{d}{dx}U(x,x)\left(\ln(y-x) + 2\psi(\frac{1}{2}) - 2\psi(1) + 1\right)\right] = \nu_2(x), \quad 0 \leqslant x < +\infty.$$

Формула решения задачи C_2 получена в виде

$$U(x,y) = \frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_x^y \nu_2(t)(t-x)^{1/2}(y-t)^{-1/2}dt +$$

$$+\frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_x^y {\tau_2}'(t)(t-x)^{1/2}(y-t)^{-1/2}\ln\left[\frac{(t-x)(y-t)}{y-x}\right]dt +$$

$$+\frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_x^y \tau_2(t)(t-x)^{-1/2}(y-t)^{-1/2}dt. \tag{2.13}$$

2.2. Задача C_3**.** На множестве $y > x > 0$ найти решение уравнения

$$U_{xy} - \frac{1}{2(y-x)}U_x + \frac{1}{2(y-x)}U_y = 0,$$

с условиями:

$$\lim_{y\to x+0} U(x,y) = \tau_3(x), \qquad 0 \leqslant x < +\infty;$$

$$\lim_{y\to x+0}\left[(U_y - U_x)(y-x)^{-1} - \frac{d^2}{dx^2}U(x,x)\left(\ln(y-x) + \psi(\frac{3}{2}) - \psi(3)\right)\right] = \nu_3(x), \quad 0 \leqslant x < +\infty.$$

Единственное решение задачи C_3 представлено формулой

$$U(x,y) = \frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_x^y \nu_3(t)(t-x)^{1/2}(y-t)^{1/2}dt +$$

$$+\frac{1}{2\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_x^y {\tau_3}'(t)(t-x)^{-1/2}(y-t)^{-1/2}\left[(t-x)-(y-t)\right]\ln\left[\frac{(t-x)(y-t)}{y-x}\right]dt +$$

$$+\frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_x^y \tau_3(t)(t-x)^{-1/2}(y-t)^{-1/2}dt. \tag{2.14}$$

Отметим, что формулы (2.13), (2.14) могут быть получены как из общего решения уравнения Эйлера—Дарбу с соответствующими параметрами, которые получаются из формулы (2.12) с использованием основных свойств решений уравнения (1.1) [18], так и методом Римана.

3. Задача Δ_1^S

Воспользуемся результатами предыдущих пунктов для постановки и решения видоизмененной задачи Δ_1. Постановка задачи Δ_1 для уравнения Эйлера—Дарбу (1.1) в области, представляющей первый квадрант, предполагает задание граничных условий на координатных осях $x = 0$ $(y > 0)$ и $y = 0$ $(x > 0)$ и двух условий сопряжения на линии $y = x$ сингулярности коэффициентов уравнения (1.1), первое из которых содержит предельные значения самого решения, второе — его нормальных производных. В силу того, что решение уравнения (2.1) на линии $y = x$ обращается в бесконечность, первым задается условие разрывности Франкля $\dfrac{\partial U(x,x+0)}{\partial \overline{n}} = \dfrac{\partial U(x,x-0)}{\partial \overline{n}}$, второе склеивает предельные значения комбинации самого решения и его производных по нормали.

3.1. Постановка задачи. Подобно тому, как это было сделано в первом пункте для уравнения (2.1), на множестве $x > y > 0$ получено решение задачи C_1 с данными

$$\lim_{y\to x-0}(x-y)(U_x - U_y) = \nu_2(x), \qquad 0 \leqslant x < +\infty, \tag{3.1}$$

$$\lim_{y\to x-0}\left[U(x,y) - \nu_2(x)\left(\ln\sqrt{x-y} + \psi(\frac{1}{2}) - \psi(1)\right)\right] = \tau_2(x), \quad 0 \leqslant x < +\infty. \tag{3.2}$$

Оно имеет вид:

$$U(x,y) = \frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_y^x \tau_2(t)(x-t)^{-1/2}(t-y)^{-1/2}dt+$$

$$+\frac{1}{2\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_y^x \nu_2(t)(x-t)^{-1/2}(t-y)^{-1/2}\ln\left[\frac{(x-t)(t-y)}{x-y}\right]dt. \tag{3.3}$$

Уравнение (2.1) рассмотрим на множестве $\mathtt{D} = D_1 + D_2$,

$$D_1 = \{(x,y)/0 < x < y < +\infty\}, \qquad D_2 = \{(x,y)/0 < y < x < +\infty\}.$$

3.2. Задача Δ_2^S. На множестве $\mathtt{D}$ найти решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям:

$$U(0,y) = \varphi_1(y), \qquad 0 \leqslant y < +\infty, \tag{3.4}$$

$$U(x,0) - \frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_0^x \nu_2(t)\, t^{-1/2}(x-t)^{-1/2}\ln\frac{t}{x}dt = \varphi_2(x), \qquad 0 \leqslant x < +\infty, \tag{3.5}$$

где $\nu_2(x)$ определена формулой (3.1).

На линии сингулярности коэффициентов уравнения (2.1) заданы условия сопряжения

$$\nu_1(x) = \lim_{y\to x+0}(y-x)(U_y - U_x) = -\lim_{y\to x-0}(x-y)(U_x - U_y) = -\nu_2(x), \tag{3.6}$$

$$\tau_1(x) = \lim_{y\to x+0}\left[U(x,y) - \nu_1(x)\left(\ln\sqrt{y-x} + \psi(\frac{1}{2}) - \psi(1)\right)\right] =$$

$$= \lim_{y\to x-0}\left[U(x,y) - \nu_2(x)\left(\ln\sqrt{x-y} + \psi(2) - \psi(1)\right)\right] = \tau_2(x). \tag{3.7}$$

На заданные функции φ_k, $k = 1, 2$ налагаются

Условия B. $\varphi_k(0) = 0$, $\varphi_k(x) \in C^{(3)}[0, +\infty)$, $k = 1, 2$.

За основу решения задачи ${\Delta^S}_1$ возьмем решение задачи C_1 в областях D_1 и D_2, определяемое, соответственно, равенствами (2.2), (2.3), (2.11) и (3.1)–(3.3). Функции (2.11), (3.3) подчиним условиям (3.4), (3.5), получим систему уравнений относительно неизвестных функций ν_k, τ_k, $k = 1, 2$:

$$\frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_0^y \tau_1(t)t^{-1/2}(y-t)^{-1/2}dt + \frac{1}{2\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_0^y \nu_1(t)t^{-1/2}(y-t)^{-1/2}\ln\frac{(y-t)t}{y}dt = \varphi_1(y), \tag{3.8}$$

$$\frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_0^x \tau_2(t)t^{-1/2}(x-t)^{-1/2}dt + \frac{1}{2\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_0^x \nu_2(t)t^{-1/2}(x-t)^{-1/2}\ln(x-t)dt-$$

$$-\frac{1}{2\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_0^x \nu_2(t)\, t^{-1/2}(x-t)^{-1/2}\ln\left[\frac{t}{x}\right]dt = \varphi_2(x). \tag{3.9}$$

Неизвестные функции ν_k, τ_k, $k = 1, 2$, ищем в классе функций непрерывных на полуинтервале $[0, +\infty)$ и дважды непрерывно дифференцируемых в интервале $(0, +\infty)$. В этом случае функции (2.11), (3.3) определяют классическое решение уравнения (2.1) в областях D_1 и D_2, соответственно, что установлено проверкой. Учитывая условия сопряжения (3.6), (3.7), а также одинаковое изменение переменных x и y, вычтем из уравнения (3.8) уравнение (3.9), обозначив при этом $\nu_1(t)\, t^{-1/2} = \nu(t)$, $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = \Phi_1(x)$:

$$\frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})} \int\limits_0^x \nu(t)(x-t)^{-1/2} \ln(x-t)dt = \Phi_1(x). \tag{3.10}$$

Для решения уравнения (3.10) воспользуемся методами работы [16]. Для этого рассмотрим частный случай функции Вольтерры [16]

$$v_h(x-t) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{(x-t)^{z-1} e^{hz}}{\Gamma(z)} dz, \qquad z > 0, \quad h = \mathrm{const}. \tag{3.11}$$

Имеем очевидное тождество

$$\int\limits_0^x \frac{(x-t)^{z-1} t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(z)} dt = \frac{x^{\alpha+z-1}}{\Gamma(\alpha+z)}, \qquad \alpha > 0,$$

обе части которого умножим на $e^{h(\alpha+z-1)}$ и применим к обеим частям полученного равенства оператор $\int\limits_z^{+\infty} \ldots d\tau$, заменив предварительно z на τ. После замены порядка интегрирования получаем

$$\int\limits_0^x \frac{t^{\alpha-1} e^{h\alpha}}{\Gamma(\alpha)} dt \int\limits_z^{+\infty} \frac{(x-t)^{\tau-1} e^{h(\tau-1)}}{\Gamma(\tau)} d\tau = \int\limits_z^{+\infty} \frac{x^{\alpha+\tau-1} e^{h(\alpha+\tau-1)}}{\Gamma(\alpha+\tau)} d\tau. \tag{3.12}$$

Учитывая, что $\dfrac{d}{dz} \int\limits_z^{+\infty} f(\alpha+\tau)d\tau = \dfrac{d}{d\alpha} \int\limits_\alpha^{+\infty} f(z+\tau)d\tau = -f(\alpha+z)$, продифференцируем по α обе части тождества (3.12):

$$\int\limits_0^x t^{\alpha-1}[\ln t + h - \psi(\alpha)] \frac{e^{h\alpha}}{\Gamma(\alpha)} dt \int\limits_z^{+\infty} \frac{(x-t)^{\tau-1} e^{h(\tau-1)}}{\Gamma(\tau)} d\tau = -\frac{x^{\alpha+z-1} e^{h(\alpha+z-1)}}{\Gamma(\alpha+z)}.$$

Положим $z = 1$:

$$\int\limits_0^x t^{\alpha-1}[\ln t + h - \psi(\alpha)] dt \int\limits_1^{+\infty} \frac{(x-t)^{\tau-1} e^{h(\tau-1)}}{\Gamma(\tau)} d\tau = -\frac{x^\alpha}{\alpha}.$$

Сделаем замену $\tau - 1 = \sigma$:

$$\int\limits_0^x t^{\alpha-1}[\ln t + h - \psi(\alpha)] dt \int\limits_0^{+\infty} \frac{(x-t)^{\sigma} e^{h\sigma}}{\Gamma(\sigma+1)} d\tau = -\frac{x^\alpha}{\alpha}. \tag{3.13}$$

Продифференцируем обе части тождества (3.13) по x и с учетом функции (3.11) получим

$$\int\limits_0^x t^{\alpha-1}[\ln t + h - \psi(\alpha)] v_h(x-t) dt = -x^{\alpha-1}. \tag{3.14}$$

В предположении, что решение уравнения (3.10) существует, применим к обеим частям равенства (3.10) оператор $\int\limits_0^y v_h(y-x) \ldots dx$ и поменяем в левой части полученного выражения порядок интегрирования:

$$\frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_0^y \nu(t)dt\int\limits_t^y (x-t)^{-1/2}\ln(x-t)v_h(y-x)dx=\int\limits_0^y \Phi_1(x)v_h(y-x)dx.$$

Во внутреннем интеграле делаем замену $x-t=z$:

$$\frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_0^y \nu(t)dt\int\limits_0^{y-t} z^{-1/2}\ln z\, v_h(y-t-z)dz=\int\limits_0^y \Phi_1(x)v_h(y-x)dx. \tag{3.15}$$

В тождестве (3.14) положим $\alpha=\dfrac{1}{2}$, $h=\psi(\dfrac{1}{2})$, в результате внутренний интеграл в левой части равенства (3.15) будет равен $-(y-t)^{\frac{1}{2}}$.

Уравнение (3.10) свелось к уравнению

$$-\frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_0^y \nu(t)(y-t)^{-1/2}dt=\int\limits_0^y \Phi_1(t)v_\psi(y-t)dt, \tag{3.16}$$

где

$$v_\psi(y-x)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{(y-x)^{z-1}e^{\psi(\frac{1}{2})z}}{\Gamma(z)}dz. \tag{3.17}$$

Решая уравнение Абеля (3.16), получаем, с учетом условий **B**,

$$\nu(x)=-\Gamma(\frac{1}{2})\int\limits_0^x {\Phi_1}'(t)dt\int\limits_0^{+\infty}\frac{(x-t)^{z-\frac{1}{2}}e^{\psi(\frac{1}{2})z}}{\Gamma(\frac{1}{2}+z)}dz. \tag{3.18}$$

Проверкой доказано, что функция (3.18) является решением уравнения (3.10).

Для нахождения равенства $\tau_1=\tau_2$ сложим равенства (3.9), (3.8) с учетом условий сопряжения (3.6), (3.7):

$$\frac{2}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_0^x \tau_1(t)\,t^{-1/2}(x-t)^{-1/2}dt=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_0^x \nu_1(t)\,t^{-1/2}(x-t)^{-1/2}\ln\frac{t}{x}dt.$$

Решая относительно τ_1 уравнение Абеля, после ряда преобразований приходим к результату

$$\tau_1=\tau_2=\frac{1}{2}x\int\limits_0^1\left[{\varphi_1}'(\mu x)+{\varphi_2}'(\mu x)\right](1-\mu)^{-1/2}d\mu-\frac{1}{2}\nu_1(x)\ln x+\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{\nu_1(x\mu)d\mu}{\sqrt{\mu}(1+\sqrt{\mu})}, \tag{3.19}$$

где

$$\nu_1(x)=-\nu_2(x)=-\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\int\limits_0^1\left[{\varphi_1}'(\mu x)-{\varphi_2}'(\mu x)\right]d\mu\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{z+1}(1-\mu)^{z-\frac{1}{2}}e^{\psi(\frac{1}{2})z}}{\Gamma(\frac{1}{2}+z)}dz. \tag{3.20}$$

Отметим, что $\nu_k(0)=0$ $(k=1,2)$ [16].

Из формул (3.9), (3.8) следует, что при выполнении условий функции τ_k, ν_k, $k=1,2$, принадлежат указанному выше классу (доказано вычислением).

Окончательное выражение для τ_1 и τ_2 получаем, подставив в формулу (3.19) вместо ν_1 ее представление формулой (3.20).

Единственность решения задачи Δ_1^S следует из единственности, полученной методом Римана, решения видоизмененной задачи Коши, взятого за основу, и однозначной разрешимости интегральных уравнений, получаемых в процессе решения задачи. Существование решения доказано проверкой.

Благодарности. Авторы выражают искреннюю признательность организаторам международной конференции Uzbek–Israel Scientific Conference «Contemporary Problems in Mathematics and Physics» (6–10 октября 2017 г.) за возможность представить результаты исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. I. — М.: Наука, 1973.
2. *Волкодавов В. Ф., Николаев Н. Я.* О новой задаче со смещением в неограниченной области для уравнения Эйлера—Дарбу с положительными параметрами// В сб.: «Математическая физика». — Куйбышев: КПтИ, 1979. — С. 3–9.
3. *Волкодавов В. Ф., Репин О. А.* Решение краевой задачи со смещением для гиперболического уравнения// В сб.: «Дифференциальные уравнения и их приложения». — Куйбышев: КПтИ, 1975. — С. 15–21.
4. *Волкодавов В. Ф., Родионова И. Н., Бушков С. В.* Решение видоизмененной задачи Коши методом Римана для одного пространственного аналога уравнения Эйлера—Дарбу с отрицательным параметром// Дифф. уравн. — 2000. — *36*, № 4. — С. 616–619.
5. *Волкодавов В. Ф., Спицын В. А., Федоров Ю. И.* Краевые задачи для одной системы уравнений в жесткопластических средах// В сб.: «Дифференциальные уравнения (математическая физика)». — Куйбышев: Пед. ин-т, 1980. — *236*. — С. 36–45.
6. *Долгополов В. М., Долгополов М. В., Родионова И. Н.* Построение специальных классов решений некоторых дифференциальных уравнений гиперболического типа// Докл. РАН. — 2009. — *429*, № 5. — С. 583–589.
7. *Долгополов В. М., Долгополов М. В., Родионова И. Н.* О дельта-задачах для обобщенного уравнения Эйлера—Дарбу// Abstracts of the Uzbek–Israel Int. Conf. Contemporary Problems in Mathematics and Physics. — Tashkent: Nat. Univ. Uzbekistan, 2017. — С. 203–204.
8. *Долгополов В. М., Родионова И. Н.* Видоизмененная задача Коши для одного гиперболического уравнения третьего порядка в трехмерном пространстве// Вестн. Самар. гос. тех. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2009. — *1*, № 18. — С. 41–46.
9. *Долгополов М. В., Родионова И. Н.* Задачи для уравнений гиперболического типа на плоскости и в трехмерном пространстве с условиями сопряжения на характеристике// Изв. РАН. Сер. Мат. — 2011. — *75*, № 4. — С. 21–28.
10. *Долгополов В. М., Родионова И. Н.* Экстремальные свойства решений специальных классов одного уравнения гиперболического типа// Мат. заметки. — 2012. — *92*, № 4. — С. 533–540.
11. *Долгополов М. В., Родионова И. Н., Долгополов В. М.* Об одной нелокальной задаче для уравнения Эйлера—Дарбу// Вестн. Самар. гос. тех. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2016. — *20*, № 2. — С. 259–275.
12. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. — М.: Гостехиздат, 1953.
13. *Нахушев А. М.* Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения// Докл. АН СССР. — 1969. — *187*, № 4. — С. 736–739.
14. *Нахушев А. М.* О некоторых новых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа// Дифф. уравн. — 1969. — *5*, № 1. — С. 44–59.
15. *Нахушева З. А.* Нелокальные краевые задачи для основных и смешанного типов дифференциальных уравнений. — Нальчик: Кабардино-Балкарский научный центр РАН, 2012.
16. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
17. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся гиперболические уравнения. — Минск: Вышэйшая школа, 1977.
18. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. — М.: Высшая школа, 1985.
19. *Соколовский В. В.* Механика сплошных сред. — М.: Физматгиз, 1960.
20. *Станюкович К. П.* Теория неустановившихся движений газа. — М.: Бюро новой техники, 1948.
21. *Чаплыгин С. А.* О газовых струях. Собрание соч. Т. 2. — М.—Л.: Гостехиздат, 1948.
22. *Франкль Ф. И.* Избранные труды по газовой динамике. — М.: Наука, 1973.
23. *Rodionova I. N., Dolgopolov V. M., Dolgopolov M. V.* Delta-problems for the generalized Euler-Darboux equation// Вестн. Самар. гос. тех. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2017. — *21*, № 3. — С. 417–422.

М. В. Долгополов
Самарский национальный исследовательский университет им. академика С. П. Королева,
лаборатория математической физики,
443011, г. Самара, ул. Академика Павлова, д. 1
E-mail: mikhaildolgopolov68@gmail.com
http://orcid.org/0000-0002-8725-7831

И. Н. Родионова
Самарский национальный исследовательский университет им. академика С. П. Королева,
лаборатория математической физики,
443011, г. Самара, ул. Академика Павлова, д. 1
E-mail: mvdolg@yandex.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-11-20 UDC 517.955, 517.956.3, 517.968.73

On Formulation of Modified Problems for the Euler—Darboux Equation with Parameters Equal to $\frac{1}{2}$ in Absolute Value

© 2019 **M. V. Dolgopolov, I. N. Rodionova**

Abstract. We consider the Euler–Darboux equation with parameters equal to $\frac{1}{2}$ in absolute value. Since the Cauchy problem in the classical formulation in ill-posed for such values of parameters, we propose formulations and solutions of modified Cauchy-type problems with the following values of parameters: a) $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$, b) $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=-\frac{1}{2}$, c) $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$. In the case a), the modified Cauchy problem is solved by the Riemann method. We use the obtained result to formulate the analog of the problem Δ_1 in the first quadrant with shifted boundary-value conditions on axes and nonstandard conjunction conditions on the singularity line of the coefficients of the equation $y=x$. The first condition is gluing normal derivatives of the solution and the second one contains limiting values of combination of the solution and its normal derivatives. The problem is reduced to a uniquely solvable system of integral equations.

REFERENCES

1. H. Bateman and A. Erdélyi, *Vysshie transtsendentnye funktsii. T. I* [Higher Transcendental Functions. Vol. I], Nauka, Moscow, 1973 (Russian translation).
2. V. F. Volkodavov and N. Ya. Nikolaev, "O novoy zadache so smeshcheniem v neogranichennoy oblasti dlya uravneniya Eylera—Darbu s polozhitel'nymi parametrami" [On a new problem with shift in unbounded domain for the Euler–Darboux equation with positive parameters], In: *Matematicheskaya fizika* [Mathematical Physics], KPtI, Kuybyshev, 1979, pp. 3–9 (in Russian).
3. V. F. Volkodavov and O. A. Repin, "Reshenie kraevoy zadachi so smeshcheniem dlya giperbolicheskogo uravneniya" [Solution of a boundary-value problem with shift for a hyperbolic equation], In: *Differentsial'nye uravneniya i ikh prilozheniya* [Differential Equations and Their Applications], KPtI, Kuybyshev, 1975, pp. 15–21 (in Russian).
4. V. F. Volkodavov, I. N. Rodionova, and S. V. Bushkov, "Reshenie vidoizmenennoy zadachi Koshi metodom Rimana dlya odnogo prostranstvennogo analoga uravneniya Eylera—Darbu s otritsatel'nym parametrom" [Solution of a modified Cauchy problem by the Riemann method for one spatial analog of the Euler–Darboux equation with negative parameter], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2000, **36**, No. 4, 616–619 (in Russian).
5. V. F. Volkodavov, V. A. Spitsyn, and Yu. I. Fedorov, "Kraevye zadachi dlya odnoy sistemy uravneniy v zhestkoplasticheskikh sredakh" [Boundary-value problems for one system of equations in rigid-plastic media], In: *Differentsial'nye uravneniya (matematicheskaya fizika)* [Differential Equations (Mathematical Physics)], Ped. Univ., Kuybyshev, 1980, **236**, 36–45 (in Russian).
6. V. M. Dolgopolov, M. V. Dolgopolov, and I. N. Rodionova, "Postroenie spetsial'nykh klassov resheniy nekotorykh differentsial'nykh uravneniy giperbolicheskogo tipa" [Construction of special classes of solutions for some hyperbolic differential equations], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2009, **429**, No. 5, 583–589 (in Russian).
7. V. M. Dolgopolov, M. V. Dolgopolov, and I. N. Rodionova, "O del'ta-zadachakh dlya obobshchennogo uravneniya Eylera—Darbu" [On delta-problems for generalized Euler–Darboux equation], *Abstracts of the Uzbek–Israel Int. Conf. Contemporary Problems in Mathematics and Physics*, Nat. Univ. Uzbekistan, Tashkent, 2017, pp. 203–204 (in Russian).

8. V. M. Dolgopolov and I. N. Rodionova, "Vidoizmenennaya zadacha Koshi dlya odnogo giperbolicheskogo uravneniya tret'ego poryadka v trekhmernom prostranstve" [Modified Cauchy problem for one third-order hyperbolic problem in three-dimensional space], *Vestn. Samar. gos. tekh. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki* [Bull. Samara State Tech. Univ. Ser. Phys.-Math. Sci.], 2009, **1**, No. 18, 41–46 (in Russian).
9. M. V. Dolgopolov and I. N. Rodionova, "Zadachi dlya uravneniy giperbolicheskogo tipa na ploskosti i v trekhmernom prostranstve s usloviyami sopryazheniya na kharakteristike" [Problems for equations of hyperbolic type on a plane and in a three-dimensional space with conjugation conditions on a characteristic], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2011, **75**, No. 4, 21–28 (in Russian).
10. V. M. Dolgopolov and I. N. Rodionova, "Ekstremal'nye svoystva resheniy spetsial'nykh klassov odnogo uravneniya giperbolicheskogo tipa" [Extremal properties of special classes of solutions for one equation of hyperbolic type], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2012, **92**, No. 4, 533–540 (in Russian).
11. M. V. Dolgopolov, I. N. Rodionova, and V. M. Dolgopolov, "Ob odnoy nelokal'noy zadache dlya uravneniya Eylera—Darbu" [On one nonlocal problem for the Euler–Darboux equation], *Vestn. Samar. gos. tekh. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki* [Bull. Samara State Tech. Univ. Ser. Phys.-Math. Sci.], 2016, **20**, No. 2, 259–275 (in Russian).
12. L. D. Landau and E. M. Lifshits, *Mekhanika sploshnykh sred* [Mechanics of Continua], Gostekhizdat, Moscow, 1953 (in Russian).
13. A. M. Nakhushev, "Novaya kraevaya zadacha dlya odnogo vyrozhdayushchegosya giperbolicheskogo uravneniya" [New boundary-value problem for one degenerating hyperbolic equation], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1969, **187**, No. 4, 736–739 (in Russian).
14. A. M. Nakhushev, "O nekotorykh novykh kraevykh zadachakh dlya giperbolicheskikh uravneniy i uravneniy smeshannogo tipa" [On some new boundary-value problems for hyperbolic equations and mixed-type equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1969, **5**, No. 1, 44–59 (in Russian).
15. Z. A. Nakhusheva, *Nelokal'nye kraevye zadachi dlya osnovnykh i smeshannogo tipov differentsial'nykh uravneniy* [Nonlocal Boundary-Value Problems for Differential Equation of Main Types and Mixed Type], Kabardino-Balkarskiy nauchnyy tsentr RAN, Nal'chik, 2012 (in Russian).
16. S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some Their Applications], Nauka i tekhnika, Minsk, 1987 (in Russian).
17. M. M. Smirnov, *Vyrozhdayushchiesya giperbolicheskie uravneniya* [Degenerating Hyperbolic Equations], Vysheyshaya shkola, Minsk, 1977 (in Russian).
18. M. M. Smirnov, *Uravneniya smeshannogo tipa* [Equations of Mixed Type], Vysshaya shkola, Moscow, 1985 (in Russian).
19. V. V. Sokolovskiy, *Mekhanika sploshnykh sred* [Mechanics of Continua], Fizmatgiz, Moscow, 1960 (in Russian).
20. K. P. Stanyukovich, *Teoriya neustanovivshikhsya dvizheniy gaza* [Theory of Unsteady Motions of a Gas], Byuro novoy tekhniki, Moscow, 1948 (in Russian).
21. S. A. Chaplygin, *O gazovykh struyakh. Sobranie soch. T. 2* [On Gas Jets. Collected Works. Vol. 2], Gostekhizdat, Moscow–Leningrad, 1948 (in Russian).
22. F. I. Frankl', *Izbrannye trudy po gazovoy dinamike* [Selected Works on Gas Dynamics], Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).
23. I. N. Rodionova, V. M. Dolgopolov, and M. V. Dolgopolov, "Delta-problems for the generalized Euler–Darboux equation," *Вестн. Самар. гос. тех. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки* [Bull. Samara State Tech. Univ. Ser. Phys.-Math. Sci.], 2017, **21**, No. 3, 417–422.

M. V. Dolgopolov
Samara National Research University, Samara, Russia
E-mail: mikhaildolgopolov68@gmail.com
http://orcid.org/0000-0002-8725-7831

I. N. Rodionova
Samara National Research University, Samara, Russia
E-mail: mvdolg@yandex.ru