Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 1 (2019). С. 1–10

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-1-10 УДК 514.14

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ГЕОМЕТРИИ НА МНОГООБРАЗИЯХ КАК ГЕОМЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ С ПРОЕКТИВНЫМИ МЕТРИКАМИ

© 2019 г. **А. АРТИКБАЕВ, С. С. САИТОВА**

Аннотация. В этой статье мы приводим основные понятия геометрии трехмерных пространств в векторном изложении в аффинно-векторном пространстве A_n.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение: геометрия на трехмерных многообразиях

В работе [4] Уильям Пол Терстон — американский математик, лауреат Филдсовской премии 1982 года, приводит классификацию геометрий на трехмерных многообразиях.

Говорят, что многообразие M^n обладает *геометрической структурой*, если на нем существует полная локально-однородная метрика. Это означает, что универсальное накрывающее пространство $\widetilde{M}$ многообразия M обладает полной однородной метрикой, такой что группа изометрий многообразия $\widetilde{M}$ действует на нем транзитивно. Отсюда автоматически вытекает компактность стабилизатора точки в $\widetilde{M}$. Таким образом, получим геометрию $(\widetilde{M}, G)$, где G — группа изометрий многообразия $\widetilde{M}$.

Основной результат Терстона изложен в следующей теореме.

Теорема (Терстон). *Всякая максимальная односвязная трехмерная геометрия, допускающая компактную факторгеометрию, эквивалентна геометрии* $(\widetilde{M}, \operatorname{Isom}\widetilde{M})$, *где* $\widetilde{M}$ *— одно из многообразий* E^3, H^3, S^3, $S^2 \times R$, $H^2 \times R$, SL_2R, *Nil или Sol.*

Указанное в этой теореме E^3 — классическое евклидово пространство, H^3 — трехмерное гиперболическое пространство, т. е. пространство Лобачевского, а S^3 — трехмерное эллиптическое пространство.

К тому же, по Кэли—Клейну существует 3^n n-мерных пространств с проективными метриками, то есть пространств, метрики которых инвариантны при проективном преобразовании. Очевидно, что при $n = 3$ их 27.

При этом, упомянутые ранее пространства $S^2 \times R, H^2 \times R, SL_2R, Nil$ или Sol не имеют своих явных аналогов среди трехмерных пространств с проективными метриками.

Ранее были предприняты попытки описать подобные пространства как подпространства евклидового пространства высокой размерности, см. [2].

В данной статье исследуется решение задачи определения эквивалентных пространств при помощи проективных метрик.

Определим некоторые необходимые понятия о геометрии трехмерных пространств с проективными метриками.

2. Трехмерные пространства с проективными метриками

Рассмотрим n-мерное аффинное пространство A_n. Пусть $O(0, 0, \dots, 0)$ — начало координат и $l_1(1, 0, \dots, 0)$, $l_2(0, 1, 0, \dots, 0)$,... $l_n(0, 0, \dots, 1)$ — базис пространства A_n, где $\{x_1, x_2, , \dots, x_n\}$ — аффинные координаты вектора X.

Разобьем координаты $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ вектора X на следующие группы:

$$x_{a_1}(m_0 = 1 \leqslant a_1 \leqslant m_1),$$

$$x_{a_2}(m_1 \leqslant a_2 \leqslant m_2),$$

$$x_{a_3}(m_2 \leqslant a_3 \leqslant m_3 = n).$$

Определение 2.1. *Пространством* ${}^{l_1 l_2 l_3}R_n^{m_1 m_2}$ будем называть аффинное пространство A_n, в котором скалярное произведение векторов $X\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и $Y\{y_1, y_2, \dots, y_3\}$ задано следующим образом:

$$(X, Y)_i = \sum_{a_i = a_{i-1}}^{m_i} \varepsilon_{a_i} x_{a_i} y_{a_j}, \tag{2.1}$$

где

$$\varepsilon_{a_i} = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad m_{i-1} < a_i \leqslant m_{i-1} + l_i, \\ 1, & \text{если} \quad m_{i-1} + l_i < a_i \leqslant m_i, \end{cases}$$

причем i-е скалярное произведение определяется только для тех векторов, для которых выполнено условие $x_1 = x_= \dots = x_{i-1} = 0$.

Вектор называется *вектором i-го порядка*, если для него определен i-й скалярный квадрат вектора.

Таким образом, вектор i-го порядка есть вектор с координатами $x_1, x_2, \dots, x_{m_i - 1}$, равными нулю, а среди координат $x_{m_{i-1}} + 1, x_{m_{i-1}} + 2, \dots, x_{m_i}$ есть отличные от нуля.

Норма вектора определяется по формуле

$$| \overline{X} | = \sqrt{(X, X)_i}. \tag{2.2}$$

Расстояние между точками определяется как норма вектора, определяющегося этими точками. Если $A(X)$ и $B(Y)$, то

$$| AB | = \sqrt{(Y - X, Y - X)_i}. \tag{2.3}$$

Норма вектора, как и расстояние между точками, может принимать действительные, мнимые и нулевые значения. Рассматриваемый вектор называется *действительным*, *мнимым* или же *изотропным*, соответственно.

2.1. Трехмерные пространства аффинной структуры.

Рассмотрим подробнее трехмерные пространства ${}^{l_1 l_2 l_3}R_3^{m_1 m_2}$. Очевидно, что при этом m_i и l_i могут принимать значения $0, 1, 2$.

Рассмотрим всевозможные случаи:

1. Если $m_1 = m_2 = l_1 = l_2 = l_3 = 0$, тогда получим евклидово пространство $-R_3$. В этом случае метрика невырождена и положительно определена.
2. Если $m_1 = m_2 = l_1 = l_2 = 0$, а $l_3 = 1$ тогда скалярное произведение векторов имеет вид:

$$(X, Y) = +x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3.$$

Пространство ${}^1R_3$ называется *пространством Минковского*. Метрика этого пространства невырождена, хотя неположительно определена.

Похожая геометрия имеет место при $l_3 = 2$. Тогда скалярное произведение векторов определено как

$$(X, Y) = +x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3.$$

Координаты пространства ${}^2R_3$ отличаются от координат пространства ${}^1R_3$ на мнимый сомножитель. Следовательно, геометрия этих пространств одинакова и исследование пространства ${}^2R_3$ не представляет самостоятельного геометрического интереса.

3. Рассмотрим случай, когда $m_1 = 1$, $m_2 = 3$, а $l_1 = l_2 = l_3 = 0$, т. е. пространство R_3^1. Это пространство называется *галилеевым пространством*. Здесь скалярное произведение векторов определим следующим образом:

$$(X, Y)_1 = x_1 y_1. \tag{2.4a}$$

Когда оно равно нулю, положим:

$$(X, Y)_2 = x_2 y_2 + x_3 y_3. \tag{2.4b}$$

Расстояние между точками $A(x_1, x_2, x_3)$ и $B(y_1, y_2, y_3)$ определено как

$$\mid AB \mid_1 = \mid y_1 - x_1 \mid; \tag{2.5a}$$

когда $\mid AB \mid_1 = 0$, то

$$\mid AB \mid_2 = \sqrt{(y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2} \tag{2.5b}$$

4. Рассмотрим случай, когда $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, а $l_1 = l_2 = l_3 = 0$, т. е. пространство R_3^2. Это пространство называется *изотропным пространством*. В этом случае скалярное произведение векторов и расстояние между точками определяется по формулам (2.4b), (2.4a) и (2.5b), (2.5a), соответственно. То есть меняется порядок исчисления.
5. Наконец, при изучении случая $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, а $l_1 = l_2 = l_3 = 0$, т. е. в пространстве R_3^{12} мы получим три скалярных произведения и трижды вырожденную метрику. Это пространство называется *флаговым пространством*.

   Во флаговом пространстве скалярное произведение векторов определяется формулой

$$(X, Y)_1 = x_1 y_1;$$

если же $(X, Y)_1 = 0$, тогда

$$(X, Y)_2 = x_2 y_2;$$

если же $(X, Y)_2 = 0$, то

$$(X, Y)_3 = x_3 y_3.$$

Аналогично можно определить расстояние между точками:

$$|AB|_1 = |y_1 - x_1|,$$
$$|AB|_2 = |y_2 - x_2|,$$
$$|AB|_3 = |y_3 - x_3|.$$

Галилеево, изотропное и флагово пространства являются *полуевклидовыми пространствами*.

Пространство ${}^1R_3$ — трехмерное *псевдоевклидово пространство*. Аналогично полуевклидовым пространствам в псевдоевклидовом пространстве можно определить *полупсевдоевклидовы пространства*.

Трехмерные полупсевдоевклидовы пространства — это ${}^{01}R_3^1$ — *псевдогалилеево*, ${}^{10}R_3^2$ — *псевдоизотропное* пространство.

Таким образом, трехмерными пространствами аффинной структуры являются 7 пространств: R_3, R_3^1, R_3^2, R_3^{12}, ${}^1R_3$, ${}^{01}R_3^1$ и ${}^{10}R_3^2$.

2.2. О движении трехмерных пространств аффинной структуры. По Клейну, нам известно, что геометрии в рассматриваемом пространстве существует при существовании *движения* пространства, т. е. при наличии линейного преобразования пространства, сохраняющего расстояние между соответствующими точками.

Любое аффинное преобразование аффинного пространства A_3 можно выразить формулой

$$x' = Ax + B, \tag{*}$$

где B — вектор параллельного переноса, а матрица A — квадратичная матрица 3-го порядка.

В случае, когда эта матрица симметрична и $\det A = 1$, преобразование (*) определяет геометрию евклидового пространства. Аналогичным образом, в случае, когда матрица A симметрична и $\det A = -1$, преобразование (*) определяет геометрию пространства Минковского. Перечисленные матрицы, очевидно, образуют подгруппу группы всех невырожденных трехмерных матриц. То есть, для рассмотрения отличных от классических геометрий нужно более детально изучить другие подгруппы группы всех невырожденных трехмерных матриц. Так, например, движение галилеева пространства R_3^1 задается формулами

$$\begin{aligned} x' &= x + a, \\ y' &= Ax + y\cos\alpha - z\sin\alpha + b, \\ z' &= Bx + y\sin\alpha + z\cos\alpha + c, \end{aligned}$$

где (a, b, c) — координаты направляющего вектора параллельного переноса. Вращения в этом пространстве задаются матрицей вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ A & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ B & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Таким образом, вращение в галилеевом пространстве представляет собой вращение на угол α вокруг оси Oz и скольжение, сохраняющее плоскости, параллельные координатной плоскости yOz. Также мы видим, что в этом случае матрица не симметрична.

Теперь в изотропном пространстве матрица движения имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ A & B & 1 \end{pmatrix}.$$

Движение во флаговой плоскости рассмотрим отдельно.

2.3. О сферах в пространствах с проективными метриками. В геометрических рассуждениях важное место имеет занимает понятие *сферы* рассматриваемого пространства. Под *сферой* мы понимаем геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки рассматриваемого пространства. Разумеется, равноудаленность понимается в смысле расстояния между точками изучаемого пространства.

Для наглядности рассмотрим сферы в галилеевом и изотропном пространстве в трехмерном случае.

В галилеевом пространстве расстояние между точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ определяется формулой

$$AB = |x_2 - x_1|.$$

Тогда сфера с центром в начале координат $O(0, 0, 0)$ и радиусом r имеет уравнение

$$x^2 = r^2,$$

т. е.

$$x = \pm r.$$

Геометрическим местом точек, удовлетворяющих данному уравнению, является пара плоскостей, параллельных координатной плоскости yOz и проходящих через точки $(\pm r, 0, 0)$, соответственно.

Если аналогично рассмотреть сферу изотропного пространства R_3^2, то имеет место уравнение сферы следующего вида:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Следовательно, сфера изотропного пространства аффинно является цилиндром, направляющей которого является окружность на координатной плоскости xOy, а образующие есть прямые, параллельные оси Oz.

Интересен тот факт, что сферы в пространствах с проективными метриками, в частности, в галилеевом и изотропном пространствах, инвариантны относительно вращений с центром в начале координат в этих пространствах. Это свойство сфер в пространствах с проективными метриками — аналог свойства сфер евклидовых пространств. Следовательно, остальные свойства сфер евклидовых пространств также будут актуальны для сфер в пространствах с проективными метриками.

2.4. Трехмерное эллиптическое и гиперболическое пространства с проективными метриками. Известно, что 3-мерное эллиптическое пространство определяется как множество точек, изометричное множеству пар диаметрально противоположных точек сферы четырехмерного евклидова пространства [3].

Эллиптическое и гиперболическое пространство с проективными метриками определяются с помощью сферы S в пространстве ${}^{l_1 l_2 l_3}R_{n+1}^{m_1,m_2,m_2+1}$ и R_{n+1}. Сфера этого пространства определяется как геометрическое место точек, равноудаленных от некоторой точки x_0, и задается уравнением

$$(x - x_0, x - x_0) = \pm r^2.$$

Если центр сферы в начале координат, то

$$(x, x) = \pm r^2.$$

Расстояние δ между точками A и B пространства S, представляемое векторами $X\{x_0, x_1, \dots x_n\}$ и $Y\{y_0, y_1, \dots y_n\}$ пространства R_{n+1}, определяется по формуле

$$\cos\delta = \frac{(X,Y)_1}{|X| \cdot |Y|}.$$

В случае, когда $\delta = 0$, определяется второе расстояние

$$d_2^2 = \sum_{a_1=m_1+1}^{m_2} (y_{a_1} - x_{a_1})^2.$$

Если $\delta_1 = d_1 = 0$, то третье расстояние определяется по формуле

$$d_2^2 = \sum_{a_2=m_2+1}^{n} (y_{a_2} - x_{a_2})^2.$$

Прямая, для точек которой $\delta \neq 0$, называется *эллиптической* (*гиперболической*); если $\delta = 0$, $d_i = 0$, то прямая называется i*-параболической*.

Когда $m_1 = 0$, сфера пространства R_{n+1} распадается на две n-мерные плоскости.

Рассмотрим всевозможные трехмерные эллиптические (гиперболические) пространства, получаемые как сферы 4-мерных пространств с проективными метриками аффинной структуры.

Здесь мы только перечислим всевозможные эллиптические (гиперболические) трехмерные пространства с проективными метриками, представляющие геометрический интерес. Изучение геометрии и интерпретации этих пространств по необходимости проведено далее.

Когда $n = 4$, $m_1 = 3$, $l_1 = l_2 = l_3 = 0$, т. е. R_4 — евклидово пространство, на соответствующей сфере реализуется эллиптическое трехмерное пространство S_3. Аналогично, когда $n = 4$, $m_1 = 3$, $l_1 = 1$, $l_2 = l_2 = 0$, т. е. ${}^1R_4$ — псевдоизотропное, а геометрия на сфере будет гиперболической, ${}^1S_3$ называется *пространством Лобачевского* [3].

При $n = 4$, $m_1 = 0$, $l_1 = l_2 = l_3 = 0$, т. е. R_4^1 — 4-мерное галилеево пространство. Сферой этого пространства являются два параллельных трехмерных евклидовых пространства R_3. Следовательно, $S_3^0 = R_3$. Когда $n = 4$, $m_1 = 1$, $l_1 = l_2 = l_3 = 0$, получаем трехмерное полуэллиптическое пространство S_3^1. При $n = 4$, $m_1 = 2$, $l_1 = l_2 = l_3 = 0$, имеем полуэллиптическое пространство S_3^2 на сфере полуевклидова пространства R_4^3 — четырехмерного изотропного пространства. Тогда при $n = 4$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $l_1 = l_2 = l_3 = 0$ на сфере флагового пространства R_4^{23} — получаем геометрию с дважды вырожденной метрикой S_3^{12} — полуэллиптического пространства.

Во всех вышеприведенных вариантах $l_i = 0$. Если же $l_i \neq 0$, то аналогичным образом получаем геометрию полугиперболических пространств: ${}^{10}S_3^1$, ${}^{11}S_3^1$, ${}^{10}S_3^2$ и ${}^{100}S_3^{12}$, которые представляют геометрический интерес.

В остальных случаях геометрии полученных пространств отличаются от рассмотренных только лишь мнимым множителем при координатах.

Таким образом, мы имеем эллиптические $S_3, S_3^1, S_3^2, S_3^{12}$ и гиперболические ${}^1S_3, {}^{10}S_3^1$, ${}^{11}S_3^1$, ${}^{10}S_3^2$, ${}^{100}S_3^{12}, S_3^2, {}^{10}S_3^2$ пространства с проективными метриками, представляющие геометрический интерес.

Следовательно, число трехмерных пространств с проективными метриками, представляющих геометрический интерес, равно 18, при этом 7 из них обладают аффинной структурой.

3. Интерпретация пространства ${}^1S_3$

В предыдущем пункте мы выяснили, что пространство Лобачевского ${}^1S_3$ изометрично множеству диаметрально противоположных пар точек сферы мнимого радиуса пространства ${}^1R_4$. Пространство ${}^1R_4$ имеет аффинную структуру. Геометрию пространства ${}^1S_3$ построим с помощью векторов пространства.

Пусть $\{Oxyzt\}$ — ортогональная система координат пространства ${}^1R_4$. Тогда скалярное произведение векторов $X\{x_1, y_1, z_1, t_1\}$ и $Y\{x_2, y_2, z_2, t_2\}$ определяется по формуле

$$(X, Y) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - t_1t_2.$$

Уравнение сферы мнимого радиуса r пространства ${}^1R_4$ записывается в виде

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = -r^2. \tag{3.1}$$

Следовательно, точка пространства ${}^1S_3$ имеет координаты $\{x, y, z, t\}$ для точек пространства ${}^1R_4$, связанных с условием (2.1), т. е. при $r = 1$ имеем

$${}^1S_3 = \left\{ \begin{array}{c} (x, y, z, t) \in {}^1R_4 \\ x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = -1 \end{array} \right\}.$$

Так как диаметрально противоположные точки считаются за одну, рассматриваем только часть сферы, удовлетворяющую условию $t > 0$.

Расстояние между точками $A\{x_1, y_1, z_1, t_1\}$ и $B\{x_2, y_2, z_2, t_2\}$ пространства ${}^1S_3$ вычисляются по формуле:

$$\operatorname{ch}\delta = \frac{t_1t_2 - x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2}{\sqrt{t_1^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2}\sqrt{t_2^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2}} \tag{3.2}$$

Сфера мнимого радиуса (3.1) пространства ${}^1R_3$ — это поверхность второго порядка, аффинно представляющая двуполостный гиперболоид. Она имеет предельный конус, заданный уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0.$$

Точка $C(0, 0, 0, 1)$ является вершиной сферы (3.1).

Рассмотрим касательную гиперплоскость сферы (3.1), проходящую через точку C, заданную уравнением $t = 1$. Это гиперплоскость трехмерного евклидова пространства $R_3\{x, y, z\}$, являющаяся подпространством $t = 1$ в ${}^1R_4$, т. е. $\{x, y, z, 1\} \in {}^1R_4$.

Обозначим через $\{l_0, i, j, k\}$ ортонормированный базис пространства ${}^1R_4$.

Каждой точке X из ${}^1S_3$ сопоставим точку TX на касательной плоскости $t = 1$.

Лемма 3.1. *Вектор, определяющий TX, связан с вектором X формулой*:

$$TX = \frac{X + l_0(l_0X)}{|(l_0X)|}.$$

Доказательство. Действительно, радиус вектор точки $X \in {}^1S_3$ — вектор пространства ${}^1R_4$.

Так как вектор X имеет координаты $X\{x, y, z, t\}$, то его точка пересечения с плоскостью $t = 1$ имеет координаты $\tilde{X} = \left\{\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}, 1\right\}$.

Учитывая, что $(l_0X) = -t$, получим

$$X + l_0(\tilde{X}) = xi + yj + zk + tl_0 - l_0(l_0X) = xi + yj + zk.$$

Следовательно,

$$\frac{X + l_0(l_0X)}{|(l_0X)|} = \frac{x}{t}i + \frac{y}{t}j + \frac{z}{t}k = \tilde{X}.$$

Отображение TX сопоставляет каждой точке пространства ${}^1S_3$ точку в трехмерном евклидовом пространстве R_3. □

Лемма 3.2. *Множество точек $\tilde{X}$, соответствующих точкам пространства ${}^1S_3$, содержится внутри сферы единичного радиуса евклидова пространства R_3.*

Доказательство. Действительно, координаты точки $\tilde{X}$ пространства ${}^1S_3$ связаны условием (3.1). Учитывая эту связь, в полупространстве $t > 0$ получим:

$$(\frac{x}{t})^2 + (\frac{y}{t})^2 + (\frac{z}{t})^2 = 1 - \frac{1}{t^2}.$$

Следовательно,

$$(\frac{x}{t})^2 + (\frac{y}{t})^2 + (\frac{z}{t})^2 < 1.$$

Отсюда следует, что $|\tilde{X}| < 1$, т. е. вектор содержится внутри шара радиусом 1. Что и доказывает лемму 3.2. □

Когда точки пространства Лобачевского ${}^1S_3$ интерпретируются точками сферы пространства ${}^1R_4$, прямые и плоскости также представлены подпространствами ${}^1R_4$.

Плоскость пространства ${}^1S_3$ определяется как пересечение трехмерной плоскости, проходящей через начало координат в ${}^1R_4$, со сферой мнимого радиуса [3].

Следовательно, плоскость пространства ${}^1S_3$ задается соотношениями

$$\pi := \left\{ \begin{array}{c} (x, y, z, t) \in^1 R_4 \\ x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = -1 \\ Ax + By + Cz + Dt = 0 \end{array} \right\}, \tag{3.3}$$

а прямая как пересечение двух плоскостей пространства ${}^1S_3$ выражается в виде

$$l := \left\{ \begin{array}{c} (x, y, z, t) \in^1 R_4 \\ x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = -1 \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1t = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2t = 0 \end{array} \right\}. \tag{3.4}$$

Лемма 3.3. *При отображении $TX(1)$ прямые и плоскости пространства ${}^1S_3$ изображаются как часть прямых и плоскостей, содержащихся внутри сферы единичного радиуса пространства ${}^1R_3$.*

Доказательство. В справедливости этой леммы можно убедиться, переходя к координатам вектора $\tilde{X}\{\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\}$ в формулах (3.3) и (3.4).

Также, нетрудно представить геометрически, что пересечение плоскости, проходящей через начало координат пространства ${}^1R_4$, со сферой и плоскостью $t = 1$ является центральной проекцией соответствующих точек из начала координат. □

Теорема 3.1. *Отображение TX является аналогом интерпретации Кэли—Клейна пространства Лобачевского.*

Доказательство этой теоремы следует из лемм 3.1, 3.2 и 3.3.

4. Интерпретация пространств ${}^{10}S_3^2$ и ${}^{10}S_3^2$

Итак, расстояние между точками в ${}^{10}R_4^3$ может быть мнимым, вещественным и равным нулю.

Если сферу $S \subset {}^{10}R_4^3$ определить как множество точек, равноудаленных от данной точки, то согласно этому определению будет существовать три вида сферы: сфера вещественного радиуса, изотропная сфера и сфера мнимого радиуса.

Сфера $S \subset {}^{10}R_4^3$ с мнимым радиусом определяется уравнением

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1.$$

Копсевдоевклидово пространство ${}^{10}S_3^2$ определяется как множество точек, изометричных множеству диаметрально противоположных точек сферы мнимого радиуса пространства ${}^{10}R_4^3$, см. [3]. Следовательно,

$${}^{10}S_3^2 = \left\{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in {}^{10}R_4^3; -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1\right\}.$$

Расстояние между двумя точками в ${}^{10}S_3^2$ равно углу между векторами пространства ${}^{10}R_4^3$, которые являются радиус-векторами этих точек. Формула расстояния имеет вид:

$$\cos\delta = \frac{-x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2}{\sqrt{-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}\,\sqrt{-y_0^2 + y_1^2 + y_2^2}}.$$

Когда $\delta = 0$, то $d = |y_3 - x_3|$.

Очевидно, пространство ${}^{10}S_3^2$ имеет вырожденную метрику.

По аналогии пространству ${}^{10}S_3^2$ определяется *коевклидово пространство* S_3^2 на сфере полуевклидова пространства R_4^3.

В работе [1] определено отображение TX, которое является аналогом центральной проекции сферы на касательную плоскость в пространствах с проективными метриками. Если применить отображение TX к сфере мнимого радиуса пространства Минковского ${}^1R_3$, то получим аналог интерпретации Кэли—Клейна плоскости Лобачевского в круге. Применив это же отображение к сфере вещественного радиуса пространства ${}^1R_3$, получим интерпретацию гиперболической плоскости положительной кривизны.

С помощью отображения $TX = \dfrac{X + e_0(e_0, X)}{(e_0, X)}$ в пространстве ${}^{10}R_4^3$ получим интерпретацию пространства ${}^{10}S_3^2$ на касательную плоскость π, проходящую через точку $(1, 0, 0, 0)$. Рассмотрим сначала геометрию на касательной плоскости π.

Так как $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ — базис пространства ${}^{10}R_4^3$, то касательная плоскость к мнимоединичной сфере в точке $(1, 0, 0, 0)$ будет трехмерной гиперплоскостью, параллельной плоскости $x_0 = 0$. Следовательно, $\{e_1, e_2, e_3\}$ будет базисным вектором этой плоскости.

Учитывая, что $(e_1, e_1)_1 = (e_2, e_2)_1 = 1$ и $(e_3, e_3) = 1$, можно утверждать, что геометрия гиперплоскости π будет геометрией изотропного пространства R_3^2.

Пусть $X\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ — точка пространства ${}^{10}S_3^2$, тогда

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1.$$

Следовательно, вектор TX имеет координаты $\dfrac{x_1}{x_0}$, $\dfrac{x_2}{x_0}$, $\dfrac{x_3}{x_0}$. Вектор TX принадлежит касательной плоскости π, которая является изотропным пространством, причем

$$\frac{x_1^2}{x_0^2} + \frac{x_2^2}{x_0^2} = 1 - \frac{1}{x_0^2} < 1.$$

Пусть Ou, Ov, Ot — координатные оси в R_3^2. Тогда, обозначив $u = \dfrac{x_1}{x_0}$, $v = \dfrac{x_2}{x_0}$, $t = \dfrac{1}{x_0}$, получим следующее неравенство: $u^2 + v^2 < 1$. Равенство $u^2 + v^2 = 1$ определяет сферу единичного радиуса изотропного пространства R_3^2 с центром в начале координат. Очевидно, она аффинно является цилиндром, направляющая которого — единичная окружность, с образующими, параллельными оси Ot.

Лемма 4.1. *Пространство ${}^{10}S_3^2$ интерпретируется внутри сферы единичного радиуса пространства R_3^2.*

Так как отображение TX является центральной проекцией сферы на касательную плоскость, то при этом отображении точка, прямая и плоскость пространства ${}^{10}S_3^2$ переходят соответственно в точку, прямую и плоскость пространства R_3^2, содержащиеся внутри сферы единичного радиуса.

Тогда точки ${}^{10}S_3^2$ будут точками внутренности сферы единичного радиуса в R_3^2, т. е. цилиндра. Прямые выражаются хордами цилиндра или прямыми, параллельными оси Ot, содержащимися внутри цилиндра. Плоскости выражаются частями плоскостей пространства R_3^2, содержащимися внутри цилиндра.

Напомним, что ${}^{10}S_3^2$ — пространство с вырожденной метрикой. На всех плоскостях, однозначно проектирующихся на плоскость $x_3 = 0$, расстояние между точками определяется по первой метрике. Только на прямых, параллельных координатной прямой OX, расстояние вычисляется по второй метрике. Отображение TX сохраняет порядок метрики [1]. Следовательно, расстояние между точками $A(u_1, v_1, t_1)$ и $B(u_2, v_2, t_2)$ вычисляется по формуле

$$\operatorname{ch}\delta = \frac{1 - u_1u_2 - v_1v_2}{\sqrt{1 - u_1^2 - v_1^2}\sqrt{1 - u_2^2 - v_2^2}}. \tag{4.1}$$

Когда $\delta = 0$, получим $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$. Второе расстояние определяется следующим образом: $d = |t_2 - t_1|$. Очевидно, на плоскости $t = 0$ формула вычисления расстояния (4.1) дает метрики плоскости Лобачевского. Значит, на круге $u^2 + v^2 = 1$, принадлежащем плоскости $t = 0$, получаем интерпретацию плоскости Лобачевского.

Таким образом, справедливы следующие леммы.

Лемма 4.2. *Внутренность сферы единичного радиуса R_3^2 можно рассматривать как топологическое произведение диска $D\{u^2 + v^2 \leqslant 1\}$ и прямой R, параллельной оси Ot.*

Лемма 4.3. *На диске $D\{u^2 + v^2 \leqslant 1\}$ реализуется метрика плоскости Лобачевского.*

5. Основные результаты

Теорема 5.1. *Геометрия пространства ${}^{10}S_3^2$ эквивалентна геометрии $(L_2 \times R)$ на трехмерном многообразии.*

Доказательство теоремы следует из лемм 4.1, 4.2 и 4.3.

Коевклидово пространство S_3^2 множества точек, изометричных множеству диаметрально противоположных точек сферы единичного радиуса полуевклидова пространства R_4^3, с помощью отображения

$$PX = \frac{X - e_0(e_0, X)}{(e_0, X)}$$

интерпретируется в изотропном пространстве R_3^2. Вышеизложенным методом доказывается следующая

Теорема 5.2. *Геометрия пространства S_3^2 эквивалентна геометрии $(S_2 \times R)$ на трехмерном многообразии.*

Теперь изучим более подробно геометрию флагового пространства R_3^{12}. Как мы уже упомянули выше, расстояние между точками во флаговом пространстве измеряется следующим образом:

$$|AB|_1 = |y_1 - x_1|,$$
$$|AB|_2 = |y_2 - x_2|,$$
$$|AB|_3 = |y_3 - x_3|.$$

Нетрудно доказать, что движение во флаговом пространстве задается следующем преобразованием:

$$x' = x + a,$$
$$y' = Ax + y + b,$$
$$z' = Bx + Cy + z + c,$$

где (a, b, c) — координаты направляющего вектора параллельного переноса. Вращения в этом пространстве задаются матрицей вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ A & 1 & 0 \\ B & C & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, это элемент группы Гейзенберга, что дает нам возможность сделать следующее

Заключение. *Геометрия многообразия Nil изоморфна геометрии флагового пространства.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Артыкбаев А.* Восстановление выпуклых поверхностей по внешней кривизне в галилеевом пространстве// Мат. сб. — 1982. — *19*, № 2. — С. 204–224.
2. *Масальцев Л. А.* Непогружаемость нилмногообразий в виде гиперповерхностей в евклидово пространство// Мат. заметки. — 2004. — *76*, № 6. — С. 868–873.
3. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы пространства. — М.: Наука, 1969.
4. *Scott P.* The geometries of 3-monifolds// Bull. Lond. Math. Soc. — 1983. — *15*, № 5. — С. 401–487.

А. Артикбаев
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
математический факультет, кафедра геометрии и топологии,

Узбекистан, 100174, г. Ташкент, ВУЗ городок, ул. Университетская, д. 4
E-mail: aartykbaev@mail.ru

С. С. Саитова
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
математический факультет, кафедра геометрии и топологии,
Узбекистан, 100174, г. Ташкент, ВУЗ городок, ул. Университетская, д. 4
E-mail: sayo_ss1985@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-1-10 UDC 514.14

Interpretation of Geometry on Manifolds as a Geometry in a Space with Projective Metric

 A. Artikbaev, S. S. Saitova

Abstract. In this paper, we give essential concepts of geometry of three-dimensional spaces in vector formulation in an affine-vector space A_n.

REFERENCES

1. A. Artykbaev, “Vosstanovlenie vypuklykh poverkhnostey po vneshney krivizne v galileevom prostranstve” [Restoration of convex surfaces by outer curvature in the Galilei space], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1982, **19**, No. 2, 204–224 (in Russian).
2. L. A. Masal’tsev, “Nepogruzhaemost’ nilmnogoobraziy v vide giperpoverkhnostey v evklidovo prostranstvo” [Nil-manifolds cannot be immersed as hypersurfaces in Euclidean spaces], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2004, **76**, No. 6, 868–873 (in Russian).
3. B. A. Rozenfel’d, *Neevklidovy prostranstva* [Non-Euclidean Spaces], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).
4. P. Scott, “The geometries of 3-monifolds,” *Bull. Lond. Math. Soc.*, 1983, **15**, No. 5, 401–487.

A. Artikbaev
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: aartykbaev@mail.ru

S. S. Saitova
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: sayo_ss1985@mail.ru