Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 2 (2019). С. 157–338

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-2-157-338 УДК 517.956.45, 517.968.74

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА—ПУАССОНА—ДАРБУ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ B-ПОТЕНЦИАЛЫ

© 2019 г. **Э.Л. ШИШКИНА**

Аннотация. В работе развивается теория гиперболических уравнений в частных производных с операторами Бесселя, а также конструируются и обращаются гиперболические потенциалы, порожденные многомерным обобщенным сдвигом. В первой главе приведены необходимые обозначения, определения, вспомогательные факты и утверждения. Во второй главе изучены некоторые весовые обобщенные функции, связанные с квадратичной формой, которые в дальнейшем применяются для построения дробных степеней гиперболических операторов, а также решений гиперболических уравнений с операторами Бесселя. Объектом исследования третьей главы являются гиперболические потенциалы, порожденные многомерным обобщенным сдвигом, реализующие отрицательные вещественные степени сингулярного волнового оператора, т. е. волнового оператора, где вместо вторых производных действует оператор Бесселя. Исследуются вопросы ограниченности такого оператора, его свойства, а также строится обратный к нему оператор. Кроме того, в этой главе изучен гиперболический B-потенциал Рисса. В четвертой главе рассмотрены различные методы решения общего уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу. Получены решения задач Коши для однородного и неоднородного уравнений указанного типа. В заключении приведены сведения об общих методах решения задач для произвольных сингулярных операторов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

©Российский университет дружбы народов, 2019

ВВЕДЕНИЕ

Для решения уравнений в частных производных разработано много общих аналитических методов, например, метод разделения переменных, метод интегральных преобразований, метод разложения по собственным функциям, метод функций Грина и др. Однако далеко не все уравнения в частных производных могут быть решены аналитически. Наиболее хорошо изучены характерные задачи для линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами эллиптического, гиперболического и параболического типов. Аналитические методы построения решений для линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами существуют и изучены для сравнительно немногих типов уравнений.

Особый интерес представляет случай, когда дифференциальное уравнение в частных производных является сингулярным, то есть по крайней мере один из коэффициентов при неизвестной функции или при какой-либо ее производной стремится к бесконечности на границе или внутри рассматриваемой области. Ряд физических проблем в таких разнообразных областях, как электростатическая теория поля, распространение тепла, гидродинамика, теория упругости, сводятся к изучению сингулярных дифференциальных уравнений с оператором[1] Бесселя, который имеет вид

$$(B_\nu)_t = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{\nu}{t}\frac{d}{dt}. \tag{0.1}$$

Операторы (0.1) появляются, например, в уравнении с оператором Лапласа в предположении осевой симметрии по всем или части переменных, и в этом случае индекс ν будет натуральным числом. Случай, когда ν — произвольное вещественное число, крайне интересен с теоретической точки зрения, но также возникает в приложения (например, в задачах о случайном блуждании частицы, в газовой динамике и механике сплошных сред). В качестве объекта исследования этой работы выбраны сингулярные уравнения с оператором Бесселя гиперболического и ультрагиперболического типов, а также дробные степени гиперболических операторов с операторами Бесселя.

Проведем краткий экскурс в историю исследования задач с оператором Бесселя (0.1), следуя [10, 51, 274].

Одной из первых задач, приводящих к дифференциальным уравнениям с оператором Бесселя, является задача Леонарда Эйлера о колебании упругой мембраны. В 1764 г. (работа [205] опубликована в 1766 г.) Эйлером было получено и решено уравнение

$$\frac{1}{e^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2},$$

где $z = z(r,\varphi,t)$ — поперечное смещение точки с полярными координатами (r,φ) к моменту t; e — постоянная, зависящая от плотности и упругости мембраны. При построении решения методом разделения переменных Эйлером было получено уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{\alpha^2}{e^2} - \frac{\beta^2}{r^2}\right)u = 0, \tag{0.2}$$

где α,β — постоянные, а u — функция от r. Подстановкой $u = r^\beta v$ уравнение (0.2) сводится к

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2\beta+1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} = -\lambda^2 v \qquad \text{или} \qquad B_{2\beta+1}v = -\lambda^2 v. \tag{0.3}$$

Решение уравнения (0.2), а следовательно и (0.3), ограниченное в начале координат, дано в мемуарах Эйлера [205, с. 256], где он полагал, что $2\beta+1$ — целое число. В современных обозначениях решение (0.3), равное 1 в нуле, есть нормированная функция Бесселя вида

$$j_\beta(r) = \frac{2^\beta\Gamma(\beta+1)}{r^\beta}\, J_\beta(r), \tag{0.4}$$

где J_β — функция Бесселя первого рода, которая определяется в виде следующего ряда:

$$J_\beta(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\beta+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\beta}.$$

[1]Здесь и далее операторами, следуя традиции, называется то, что, возможно, более точно следует называть дифференциальными выражениями.

Функции Бесселя впервые были определены швейцарским математиком Даниилом Бернулли, а названы в честь Фридриха Бесселя, который первым провел их систематическое исследование.

Затем в 1770 г. Жозеф Луи Лагранж (работа [242] опубликована в 1771 г.), изучая эллиптическое движение планет вокруг Солнца, показал, что эксцентрическая аномалия представима в виде ряда по функциям Бесселя (в современной терминологии), являющимся решениями дифференциального уравнения

$$\frac{d^2J_n}{d\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{dJ_n}{d\varepsilon}-n^2\left(\frac{1}{\varepsilon^2}-1\right)J_n=0.$$

Лагранж получает выражения J_n для $n=1,2,3$.

В 1822 г. в классическом трактате Жана-Батиста Жозефа Фурье [209] было показано, что движение температуры в твердом круглом цилиндре удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{K}{CD}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

где K, C, D обозначают, соответственно, коэффициент теплопроводности, теплоемкость и плотность цилиндра, и было получено решение в виде ряда.

В 1823 г. Симеон Дени Пуассон в [254] исследовал несимметричное движение тепла в сплошном шаре, а также в сплошном цилиндре. Эти исследования привели его к уравнению

$$\frac{d^2R}{dr^2}-\frac{n(n+1)}{r^2}R=-\rho^2R, \tag{0.5}$$

где r — расстояние от центра, ρ — постоянная, n — неотрицательное целое число, R — множитель, зависящий от температуры и являющийся обычно функцией радиуса-вектора. При замене $R=r^{n+1}u$ уравнение (0.5) перейдет в

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{2(n+1)}{r}\frac{du}{dr}=-\rho^2u \qquad \text{или} \qquad B_{2(n+1)}u=-\rho^2u. \tag{0.6}$$

Пуассон показал, что решение уравнения (0.5) имеет вид

$$R=r^{n+1}\int\limits_0^{\pi}\cos(r\rho\cos\omega)\sin^{2n+1}\omega d\omega,$$

учитывая (0.4), решение (0.6), равное 1 в нуле, запишется в виде

$$j_{n+\frac{1}{2}}(\rho r)=\frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+1\right)}\int\limits_0^{\pi}\cos(r\rho\cos\omega)\sin^{2n+1}\omega d\omega,$$

что является представлением нормированной функции Бесселя индекса $n+\dfrac{1}{2}$ в виде оператора преобразования Пуассона.

Фридрих Вильгельм Бессель, исследуя задачу движения Солнца, пришел к уравнению (0.2) при $\dfrac{\alpha^2}{e^2}=1$ и провел систематическое исследования функций, являющихся решениями указанного уравнения и носящих теперь его имя (результаты опубликованы в 1824 г. в [187]).

Несмотря на то, что уравнение Бесселя принято записывать в виде

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0,$$

более удобным для исследования и приложений является уравнение (0.3).

После появления работы [187] исследования задач с оператором Бесселя стали так многочисленны, что не представляется возможным привести даже список ученых, занимавшихся этими вопросами. Поэтому далее перечислим лишь тех из них, кто оказал влияние на результаты, приведенные в этой статье.

Пространства, приспособленные для работы с дифференциальными уравнениями в частных производных эллиптического типа второго порядка, вырождающихся на всей границе области или на ее части, изучались в работах П. И. Лизоркина и С. М. Никольского [93–95, 115], а также Л. Д. Кудрявцева [82].

Основоположником школы по сингулярным и вырождающимся дифференциальным уравнениям с операторами Бесселя в Воронеже является Иван Александрович Киприянов. Начиная с 60-х годов XX века, Киприянов рассматривает задачи с оператором Бесселя (см. [52–68, 70–77]). И. А. Киприянов предложил использовать интегральное преобразование Фурье—Бесселя (Ханкеля) при построении весовых функциональных пространств и при решении задач с оператором Бесселя и другими сингулярными дифференциальными и интегродифференциальными операторами, соответствующими этому преобразованию. Введенные Киприяновым функциональные пространства были использованы им для изучения краевых задач для так называемых B-эллиптических уравнений (эллиптических уравнений с оператором Бесселя вместо всех или некоторых вторых производных) с граничными условиями на нехарактеристической части границы. И. А. Киприяновым совместно с Л. Н. Ляховым при помощи преобразования Фурье—Бесселя (Ханкеля), было получено распространение понятия сингулярного псевдодифференциального оператора, а совместно с В. В. Катраховым были введены комплексные степени B-эллиптических операторов. В 80-х годах XX века И. А. Киприяновым совместно с Л. А. Ивановым изучались фундаментальные решения B-эллиптических и B-гиперболических уравнений (гиперболических уравнений с оператором Бесселя вместо всех или некоторых вторых производных). Затем И. А. Киприяновым совместно с В. В. Катраховым изучались краевые задачи для эллиптических уравнений с особенностями типа существенных особенностей аналитических функций в изолированных граничных точках[1].

Львом Николаевичем Ляховым были изучены вопросы о мультипликаторах смешанного преобразования Фурье—Бесселя (Ханкеля), дробные степени B-эллиптических операторов и другие вопросы (см. [96–98, 98–101, 106–108, 108, 262]). Теорема о мультипликаторах смешанного преобразования Ханкеля была использована при изучении ядра, аппроксимирующего ядро оператора, обратного к гиперболическому B-потенциалу.

Работы Сергея Михайловича Ситника [47, 49–51, 137–142, 142–155, 155, 155–160, 274–276] существенно повлияли на содержание главы этой работы о решениях гиперболических уравнений с оператором Бесселя. А именно, разработанный им композиционный метод построения операторов преобразования позволяет получать формулы связи между решениями возмущенного и невозмущенного уравнений, в том числе, обобщать известные формулы, связанные со вторыми производными, на случай, когда вместо второй производной применяется оператор Бесселя. Одним из таких операторов преобразования является оператор Пуассона. Композиционный метод С. М. Ситника основан на представлении оператора преобразования в виде композиции интегральных преобразований. Композиционный метод позволяет указать алгоритмы не только для построения новых операторов преобразования, при его помощи строятся дробные степени любых подходящих операторов. Последняя особенность этого метода использована при построении гиперболических B-потенциалов.

Большую роль в теории дифференциальных уравнений с оператором Бесселя сыграли понятия и методы, разработанные Владиславом Викторовичем Кравченко. А именно, при исследовании задач с оператором Штурма—Лиувилля, им был введен метод построения операторов преобразования в виде степенных рядов по спектральному параметру (см. [190, 193, 232–241]). Этот метод оказался универсальным и, в частности применим к задачам Штурма—Лиувилля с оператором Бесселя (см. [80, 193, 241]). Одним из преимуществ указанного метода является то, что в результате его применения получаются и точное и приближенное решения задачи, причем С. Торбой показана очень высокая скорость сходимости рядов, представляющих решение (см. [233, 234, 236–240]).

Академик Болгарской академии наук Иван Димовски и Виржиния Кирякова исследовали, в частности, гипер-бесселев оператор, который является одним из обобщений оператора Бесселя, и его дробные степени (см. [201–203, 227–230]). Так, например, обобщение интегрального преобразования типа Пуассона, предложенное Димовски, применяется к дифференциальным уравнениям Бесселя произвольного порядка. В качестве основы операционного исчисления для гипербесселевых дифференциальных операторов произвольного порядка было использовано одно из наиболее общих интегральных преобразований типа Лапласа, так называемое интегральное преобразование Обрешкова, впервые введенное и изученное Обрешковым в [250].

[1]Информация взята из статьи в журнале «Дифференциальные уравнения» к 70-летию Ивана Александровича Киприянова, август 1993 г., т. 29, № 8, с. 1295–1300.

Исследования Вагифа Сабировича Гулиева [211–217] в рамках теории гармонического анализа, ассоциированного с оператором Лапласа—Бесселя (эллиптический оператор типа оператора Лапласа, в котором по всем или по части переменных действует оператор Бесселя) были использованы при доказательстве ограниченности оператора, обратного к гиперболическому B-потенциалу.

Александром Васильевичем Глушаком изучаются абстрактные дифференциальные уравнения с оператором Бесселя типа уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу (см. [18, 20, 22–24]). В частности, им исследован вопрос об устойчивости свойства равномерной корректности задачи Коши для указанных уравнений и изучены условия разрешимости таких задач с фредгольмовым оператором при производных.

В статьях Шахобиддина Туйчибоевича Каримова [41,42,42–46,223,224,280] исследована задача Коши для уравнения с сингулярным оператором Бесселя. Для решения этой задачи применены операторы Эрдейи—Кобера и Лаундеса.

В работах С. П. Пулькина (см. [129, 130]) и К. Б. Сабитова и Р. Р. Ильясова (см. [132]) исследовалось уравнение

$$u_{xx} + \mathrm{sgn} y \cdot u_{yy} + \frac{2q}{x}\, u_x = 0, \qquad q \in \mathbb{R},$$

решение которого в гиперболическом случае связано с оператором Пуассона.

Задачи Коши для уравнения $(B_k)_t u(x,t) = \Delta u(x,t)$ с начальными условиями вида $u(x,0) = 0$, $t^\gamma u_t|_{t=0} = \varphi(x)$ и $u(x,0) = f(x)$, $t^\gamma (u - u_k(f))_t|_{t=0} = \varphi(x)$ изучалась С. А. Терсеновым (см. [171]).

Здесь мы будем рассматривать уравнение вида

$$(B_k)_t u(x,t) - \sum_{i=1}^{n} (B_{\gamma_i})_{x_i} u(x,t) = 0, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n), \qquad t > 0,$$

которое будем называть *общим уравнением Эйлера—Пуассона—Дарбу*, и

$$(B_k)_t u(x,t) - \sum_{i=1}^{n} (B_{\gamma_i})_{x_i} u(x,t) = c^2 u(x,t), \qquad c \in \mathbb{R},$$

которое будем называть *обобщенным уравнением Эйлера—Пуассона—Дарбу*, а также неоднородные их аналоги.

В работе использованы подходы и методы О.В. Бесова, И. М. Гельфанда, А. В. Глушака, М. Л. Гольдмана, В. С. Гулиева, Я. И. Житомирского, В. А. Ильина, И. А. Киприянова, П. И. Лизоркина, Л. Н. Ляхова, А. Б. Муравника, С. М. Никольского, В. А. Ногина, С. С. Платонова, С. Г. Самко, С. М. Ситника, С. А. Терсенова, Г. Е. Шилова.

Работа состоит из четырех глав. В первой главе приведены необходимые сведения о специальных функциях, пространствах и операторах преобразования. Во второй главе изучены некоторые классы весовых обобщенных функций, связанных с квадратичной формой. Третья глава посвящена построению операторов, реализующих отрицательные дробные степени гиперболического оператора

$$\Box_\gamma = B_{\gamma_1} - \sum_{i=2}^{n} B_{\gamma_i}, \tag{0.7}$$

где $B_{\gamma_i} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \dfrac{\gamma_i}{x_i}\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ — дифференциальный оператор Бесселя, $\gamma_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, а также оператора

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_\gamma,$$

где

$$(\Delta_\gamma)_x = \Delta_\gamma = \sum_{i=1}^{n} (B_{\gamma_i})_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x}, \qquad (B_k)_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial}{\partial t}, \qquad k \in \mathbb{R}. \tag{0.8}$$

В четвертой главе найдено фундаментальное решение итерированного оператора $\Box_\gamma$, доказана теорема о весовых сферических средних типа теоремы Асгейрссона и решены задачи Коши для уравнений

$$(B_k)_t u = (\Delta_\gamma)_x u, \qquad u = u(x,t;k),$$
$$(B_k)_t u - (\Delta_\gamma)_x u = c^2 u, \qquad u = u(x,t;k),$$

$$((B_k)_t-(\Delta_\gamma)_x)u=f, \qquad u=u(x,t;k), \qquad f=f(x,t).$$

Некоторые результаты этой работы и их приложения опубликованы в [3, 34, 35, 80, 161, 163, 177–182, 243–245, 262–273].

Глава 1

КЛАССЫ ФУНКЦИЙ И ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Первая глава носит вспомогательный характер. Здесь в первом разделе приводятся определения некоторых специальных функций, используемых в дальнейшем; во втором разделе рассматриваются необходимые классы функций, а также оператор преобразования Пуассона и интегральное преобразование Ханкеля; в третьем разделе рассматриваются такие операторы преобразования, как обобщенный сдвиг и весовое сферическое среднее.

1. Специальные функции

В этом разделе приведем определения специальных функций и некоторые формулы, которые будем использовать в дальнейшем.

1.1. Гамма-функция, бета-функция, символ Похгаммера и функция ошибок. Гамма-функция является обобщением понятия факториала на случай чисел, не являющихся натуральными. Бета-функция в общем случае определяется через гамма-функции (см. [1]).

Гамма-функция $\Gamma(z)$ определялась Леонардом Эйлером как предел

$$\Gamma(z)=\lim_{N\to\infty}\frac{N!N^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+N)}, \qquad z\in\mathbb{C},$$

но чаще используется определение в виде интеграла Эйлера второго рода

$$\Gamma(z)=\int\limits_0^\infty y^{z-1}e^{-y}dy, \tag{1.1}$$

который сходится при всех $z\in\mathbb{C}$, для которых $\operatorname{Re} z>0$.

Интегрирование по частям выражения (1.1) приводит к рекуррентной формуле

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z). \tag{1.2}$$

Поскольку $\Gamma(1)=1$, то рекуррентная формула (1.2) для положительных целых n приводит к равенству

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\ldots=n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot\Gamma(1),$$

или

$$\Gamma(n+1)=n!,$$

которое и позволяет рассматривать гамма-функцию как обобщение понятия факториала. Переписав формулу (1.2) в виде

$$\Gamma(z-1)=\frac{\Gamma(z)}{z-1}, \tag{1.3}$$

мы получим выражение, позволяющее определить гамма-функцию от отрицательных аргументов, для которых определение (1.1) неприемлемо. Формула (1.3) показывает, что $\Gamma(z)$ имеет в точках $z=0,-1,-2,-3,\ldots$ разрывы второго рода.

После многократного применения равенства (1.3) получим *формулы понижения и повышения*, которые, соответственно, имеют вид

$$\Gamma(z+n)=z(z+1)\dots(z+n-1)\Gamma(z), \qquad n=1,2,\ldots \tag{1.4}$$

и

$$\Gamma(z-n)=\frac{\Gamma(z)}{(z-n)(z-n+1)\dots(z-1)}, \qquad n=1,2,\ldots. \tag{1.5}$$

Отметим, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}, \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right) = \frac{(-4)^n n!\sqrt{\pi}}{(2n)!}.$$

Имеют место следующие соотношения:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin z\pi} \tag{1.6}$$

— *формула дополнения*,

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) \tag{1.7}$$

— *формула удвоения* (*формула Лежандра*).

Бета-функция $B(z,w)$ тесно связана с гамма-функцией. Для двух параметров z и w, удовлетворяющих условиям $\operatorname{Re} z > 0$ и $\operatorname{Re} w > 0$, бета-функция Эйлера определяется интегралом Эйлера первого рода

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt. \tag{1.8}$$

Если $\operatorname{Re} z \leqslant 0$ и $\operatorname{Re} w \leqslant 0$ неположительны, то бета-функция определяется формулой

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}. \tag{1.9}$$

Символ Похгаммера $(z)_n$ при целых n определяется равенством

$$(z)_n = z(z+1)\ldots(z+n-1), \qquad n = 1,2,\ldots, \quad (z)_0 \equiv 1.$$

Справедливы равенства $(z)_n = (-1)^n(1-n-z)_n$, $(1)_n = n!$ и

$$(z)_n = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}. \tag{1.10}$$

Равенство (1.10) можно использовать для введения символа $(z)_n$ при действительных (комплексных) n.

Функция ошибок (функция Лапласа или интеграл вероятности) определяется как

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt. \tag{1.11}$$

1.2. Функции Бесселя. *Функции Бесселя*, названные в честь немецкого астронома Фридриха Бесселя, определяются как решения дифференциального уравнения Бесселя:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2-\alpha^2)y = 0,$$

где порядок α — произвольное комплексное число.

Функциями Бесселя первого рода, обозначаемыми $J_\alpha(x)$, являются решения, конечные в точке $x=0$ при целых или неотрицательных α. Можно определить эти функции с помощью разложения в ряд Тейлора около нуля или в более общий степенной ряд при нецелых α:

$$J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}.$$

Если α не является целым числом, функции $J_\alpha(x)$ и $J_{-\alpha}(x)$ линейно независимы и, следовательно, являются решениями уравнения. Но если α целое, то верно следующее соотношение:

$$J_{-\alpha}(x) = (-1)^\alpha J_\alpha(x).$$

Оно означает, что в этом случае функции линейно зависимы. Тогда вторым решением уравнения станет *функция Неймана*, то есть решение $Y_\alpha(x)$ уравнения Бесселя, бесконечное в точке $x = 0$. Эта функция связана с $J_\alpha(x)$ следующим соотношением:

$$Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x)\cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)},$$

где в случае целого α берется предел по α, вычисляемый, например, с помощью правила Лопиталя.

Функции Неймана также называются *функциями Бесселя второго рода*. Линейная комбинация функций Бесселя первого и второго родов являет собой полное решение уравнения Бесселя:

$$y(x) = C_1 J_\alpha(x) + C_2 N_\alpha(x).$$

Функции Ханкеля первого и второго рода $H_\alpha^{(1)}(x)$ и $H_\alpha^{(2)}(x)$ определены равенствами:

$$H_\alpha^{(1)}(x) = J_\alpha(x) + iY_\alpha(x), \tag{1.12}$$

$$H_\alpha^{(2)}(x) = J_\alpha(x) - iY_\alpha(x). \tag{1.13}$$

Модифицированные функция Бесселя первого и второго рода $I_\alpha(x)$ и $K_\alpha(x)$ определены формулами:

$$I_\alpha(x) = i^{-\alpha} J_\alpha(ix) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\,\Gamma(m+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}, \tag{1.14}$$

$$K_\alpha(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\alpha}(x) - I_\alpha(x)}{\sin(\alpha\pi)}, \tag{1.15}$$

в которых α — нецелое. В случае целого α используется предельный переход. Очевидно, что $K_\alpha(x) = K_{-\alpha}(x)$.

Известны формулы

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin(z), \qquad J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos(z),$$

$$I_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sinh(z), \qquad I_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cosh(z),$$

$$K_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}.$$

Нормированная функция Бесселя j_ν (j-малая функция Бесселя) определяется формулой (см. [57, с. 10], [90])

$$j_\nu(x) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{x^\nu}\, J_\nu(x), \tag{1.16}$$

где J_ν — функция Бесселя первого рода.

Нормированная модифицированная функция Бесселя i_ν (i-малая функция Бесселя) определяется формулой

$$i_\nu(x) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{x^\nu}\, I_\nu(x), \tag{1.17}$$

где I_ν — модифицированная функция Бесселя первого рода.

Используя [1, формулы 9.1.27], получим, что $j_\nu(t)$ есть собственная функция оператора B_ν:

$$(B_\nu)_t j_{\frac{\nu-1}{2}}(\tau t) = -\tau^2 j_{\frac{\nu-1}{2}}(\tau t), \tag{1.18}$$

$$(B_\nu)_t i_{\frac{\nu-1}{2}}(\tau t) = \tau^2 i_{\frac{\nu-1}{2}}(\tau t). \tag{1.19}$$

Нормированные функции Бесселя обладают свойствами

$$j_\nu(0) = 1, \qquad j'_\nu(0) = 0, \qquad i_\nu(0) = 1, \qquad i'_\nu(0) = 0.$$

Будем использовать обозначения

$$\mathbf{j}_\gamma(x,\xi) = \prod_{i=1}^{n} j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i), \tag{1.20}$$

$$\mathbf{i}_\gamma(x,\xi)=\prod_{i=1}^{n} j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i), \tag{1.21}$$

где $\gamma_1>0,\ldots,\gamma_n>0$.

Сведения о функциях Бесселя взяты из [10].

1.3. Функции гипергеометрического типа. *Гипергеометрическая функция Гаусса* определяется внутри круга $|z|<1$ как сумма гипергеометрического ряда (см. [1, с. 373, формула 15.3.1])

$${}_2F_1(a,b;c;z)=F(a,b,c;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\frac{z^k}{k!}, \tag{1.22}$$

а при $|z|\geqslant 1$ получается аналитическим продолжением этого ряда. В формуле (1.22) параметры a,b,c и переменная z могут быть комплексными, причем $c\neq 0,-1,-2,\ldots$, а $(a)_k$ есть символ Похгаммера.

Поскольку гипергеометрический ряд (1.22) сходится только в единичном круге комплексной плоскости, поэтому возникает необходимость построения аналитического продолжения гипергеометрической функции за границу этого круга, на всю комплексную плоскость. Один из способов аналитического продолжения — использование интегрального представления Эйлера

$${}_2F_1(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(b-c)}\int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}\,dt,$$

$$0<\operatorname{Re}b<\operatorname{Re}c,\quad |\arg(1-z)|<\pi,$$

в котором правая часть определена при указанных условиях, обеспечивающих сходимость интеграла.

Важным свойством гипергеометрической функции является то, что многие специальные и элементарные функции могут быть получены из нее при определенных значениях параметров и преобразовании независимого аргумента.

Примеры для элементарных функций:

$$(1+x)^n={}_2F_1(-n,\beta,\beta;-x),\qquad \frac{1}{x}\ln(1+x)={}_2F_1(1,1,2;-x),$$

$$e^x=\lim_{n\to\infty}{}_2F_1\left(1,n,1;\frac{x}{n}\right),$$

$$\cos x=\lim_{\alpha,\,\beta\to\infty}{}_2F_1\left(\alpha,\beta,\frac{1}{2};-\frac{x^2}{4\alpha\beta}\right),\qquad \cosh x=\lim_{\alpha,\,\beta\to\infty}{}_2F_1\left(\alpha,\beta,\frac{1}{2};\frac{x^2}{4\alpha\beta}\right).$$

Функция Бесселя первого рода и гипергеометрическая функция Гаусса связаны формулой

$$J_\nu(z)=\lim_{\alpha,\,\beta\to\infty}\left[\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\,{}_2F_1\left(\alpha,\beta,\nu+1;-\frac{z^2}{4\alpha\beta}\right)\right].$$

Вырожденная гипергеометрическая функция Куммера ${}_1F_1(a;b;z)$ имеет вид

$${}_1F_1(a;b;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{(n)}z^n}{b^{(n)}n!}.$$

Она связана с гипергеометрической функцией Гаусса предельным соотношением

$${}_1F_1(a;c;z)=\lim_{b\to\infty}{}_2F_1(a,b;c;z/b).$$

Вырожденная гипергеометрическая функция Трикоми $\Psi(a;b;z)$ определяется равенством

$$\Psi(a;b;z)=\frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(a+1-b)}\,{}_1F_1(a;b;z)+\frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)}z^{1-b}\,{}_1F_1(a+1-b;2-b;z).$$

Функции Уиттекера $M_{\kappa,\mu}(z)$ и $W_{\kappa,\mu}(z)$ выражаются через ${}_1F_1(a;b;z)$ и $\Psi(a;b;z)$ следующим образом:

$$M_{\kappa,\mu}(z)=\exp(-z/2)\,z^{\mu+\frac{1}{2}}\,{}_1F_1\left(\mu-\kappa+\frac{1}{2};1+2\mu;z\right),$$
$$W_{\kappa,\mu}(z)=\exp(-z/2)\,z^{\mu+\frac{1}{2}}\,\Psi\left(\mu-\kappa+\frac{1}{2};1+2\mu;z\right).$$

Обобщенная гипергеометрическая функция имеет вид

$${}_pF_q(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n\cdots(a_p)_n}{(b_1)_n\cdots(b_q)_n}\,\frac{z^n}{n!}.$$

Функции вида ${}_0F_1(;a;z)$ называются *конфлюэнтными гипергеометрическими предельными функциями*, и они тесно связаны с функциями Бесселя соотношениями:

$$J_\alpha(x)=\frac{(\frac{x}{2})^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}{}_0F_1\left(;\alpha+1;-\tfrac{x^2}{4}\right),$$
$$I_\alpha(x)=\frac{(\frac{x}{2})^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}{}_0F_1\left(;\alpha+1;\tfrac{x^2}{4}\right),$$

которые можно переписать в виде

$${}_0F_1\left(;\alpha+1;-\tfrac{x^2}{4}\right)=j_\alpha(x),\qquad {}_0F_1\left(;\alpha+1;\tfrac{x^2}{4}\right)=i_\alpha(x).$$

Определение и свойства гипергеометрических функций заимствованы из [1].

Функция Аппеля $F_4(a,b,c_1,c_2;x,y)$ (см. [127, с. 658]) при $|x|^{1/2}+|y|^{1/2}<1$ имеет вид:

$$F_4(a,b,c_1,c_2;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_{m+n}}{(c_1)_m(c_2)_n\,m!\,n!}\,x^m y^n. \tag{1.23}$$

При $|x|^{1/2}+|y|^{1/2}\geqslant 1$ функция $F_4(a,b;c_1,c_2;x,y)$ понимается как аналитическое продолжение, которое определяется формулами из [207].

2. Классы функций, оператор Пуассона и преобразование Ханкеля

В этом разделе приведем некоторые классы функций, операторы, понятия и утверждения, которые нам потребуются в дальнейшем.

2.1. Пространства C^m_{ev}, L^γ_p и S_{ev}. Весовые обобщенные функции. Через $\mathbb{R}$ будем обозначать множество вещественных чисел, а через $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел. Пусть $\mathbb{R}_+=(0,\infty)$. Рассматриваемые далее множества и функции мы, не оговаривая это отдельно, считаем измеримыми, а функции почти всюду конечными. Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство.

Рассмотрим часть пространства $\mathbb{R}^n$ вида

$$\mathbb{R}^n_+=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ x_1>0,\ldots,x_n>0\}$$

и Ω открытое множество в $\mathbb{R}^n$, симметричное относительно каждой гиперплоскости $x_i=0$, $i=1,\ldots,n$. Пусть $\Omega_+=\Omega\cap\mathbb{R}^n_+$ и $\overline{\Omega}_+=\Omega\cap\overline{\mathbb{R}}^n_+$ где

$$\overline{\mathbb{R}}^n_+=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ x_1\geqslant 0,\ldots,x_n\geqslant 0\}.$$

Имеем $\Omega_+\subseteq\mathbb{R}^n_+$ и $\overline{\Omega}_+\subseteq\overline{\mathbb{R}}^n_+$. Мы рассмотрим множество $C^m(\Omega_+)$, состоящее из m раз дифференцируемых на оп Ω_+ функций. Через $C^m(\overline{\Omega}_+)$ обозначим подмножество функций из $C^m(\Omega_+)$ таких, что все производные этих функций по x_i для любого $i=1,\ldots,n$ непрерывно продолжаются на $x_i=0$. Класс $C^m_{ev}(\overline{\Omega}_+)$ состоит из функций $f\in C^m(\overline{\Omega}_+)$, таких, что

$$\left.\frac{\partial^{2k+1}f}{\partial x_i^{2k+1}}\right|_{x=0}=0$$

для всех неотрицательных целых $k\leqslant m$ при $i=1,\ldots,n$ (см. [36] и [57, с. 21 и далее]). Тогда

$$C^\infty_{ev}(\overline{\Omega}_+)=\bigcap_{m=0}^{\infty}C^m_{ev}(\overline{\Omega}_+).$$

Пусть $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{ev}(\overline{\Omega}_+)$ — множество функций $f \in C^{\infty}_{ev}(\overline{\Omega}_+)$ с компактным носителем. Положим $C^{\infty}_{ev}(\overline{\mathbb{R}}_+) = C^{\infty}_{ev}$, $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{ev}(\overline{\mathbb{R}}_+) = \overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{ev}$ и $\mathcal{D}_+ = \overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{ev}$. Известно, что пространство $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{ev}$ плотно в L^{γ}_p (см. [134]).

Скалярное произведение $\langle x, \xi \rangle$, $x, \xi \in \mathbb{R}^n_+$ и $|x|$ определяются равенствами

$$\langle x, \xi \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i, \qquad |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Будем использовать также часть пространства Шварца вида

$$S_{ev} = S_{ev}(\mathbb{R}^n_+) = \left\{ f \in C^{\infty}_{ev} : \sup_{x \in \mathbb{R}^n_+} \left| x^{\alpha} D^{\beta} f(x) \right| < \infty \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+ \right\},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ — целые неотрицательные числа, $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, $D^{\beta} = D^{\beta_1}_{x_1} \ldots D^{\beta_n}_{x_n}$, $D_{x_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

Пусть мультииндекс $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, состоит из положительных фиксированных чисел $\gamma_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, $|\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$.

Пространство $L^{\gamma}_p(\Omega_+)$, $1 \leqslant p < \infty$ состоит из измеримых на $\overline{\Omega}_+$ функций, четных по каждой из своих переменных x_i, $i = 1, \ldots, n$ таких, что если $f \in L^{\gamma}_p(\Omega_+)$, то

$$\int\limits_{\Omega_+} |f(x)|^p x^{\gamma} dx < \infty, \qquad x^{\gamma} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\gamma_i}.$$

Для вещественного числа $p \geqslant 1$ $L^{\gamma}_p(\Omega_+)$-норма функции $f \in L^{\gamma}_p(\Omega_+)$ определяется формулой

$$||f||_{L^{\gamma}_p(\Omega_+)} = ||f||_{p,\gamma,\Omega_+} = \left(\int\limits_{\Omega_+} |f(x)|^p x^{\gamma} dx \right)^{1/p}.$$

Будем использовать обозначения $L^{\gamma}_p = L^{\gamma}_p(\mathbb{R}^n_+)$ и

$$||f||_{p,\gamma} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)|^p x^{\gamma} dx \right)^{1/p}. \tag{2.1}$$

Известно, что пространство S_{ev} плотно в L^{γ}_p (см. [101, 103, 122]).

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$ и $\mathrm{mes}_{\gamma}(\Omega)$ — *весовая мера* множества Ω:

$$\mathrm{mes}_{\gamma}(\Omega) = \int\limits_{\Omega} x^{\gamma} dx.$$

Для любой измеримой функции $f(x)$, определенной на $\mathbb{R}^n_+$, введем обозначение

$$\mu_{\gamma}(f, t) = \mathrm{mes}_{\gamma}\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |f(x)| > t\} = \int\limits_{\{x\colon |f(x)| > t\}^+} x^{\gamma} dx,$$

где $\{x : |f(x)| > t\}^+ = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : |f(x)| > t\}$. Функцию $\mu_{\gamma} = \mu_{\gamma}(f, t)$ будем называть *весовой функцией распределения* $|f(x)|$ (см. [103, с. 51]).

Поскольку

$$||f||^p_{p,\gamma} = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)|^p x^{\gamma} dx \geqslant \int\limits_{\{x : |f(x)| > t\}^+} |f(x)|^p x^{\gamma} dx \geqslant t^p \mu_{\gamma}(f, t),$$

то справедливо неравенство

$$\mu_{\gamma}(f, t) \leqslant \frac{||f||^p_{p,\gamma}}{t^p}. \tag{2.2}$$

Пространство $L_\infty^\gamma(\mathbb{R}_+^n)=L_\infty^\gamma$ определяется как множество измеримых на $\mathbb{R}_+^n$, четных по каждой из своих переменных функций $f(x)$, для которых конечна норма

$$||f||_{L_\infty^\gamma(\mathbb{R}_+^n)}=||f||_{\infty,\gamma}=\operatorname*{ess\,sup_\gamma}_{x\in\mathbb{R}_+^n}|f(x)|=\inf_{a\in\mathbb{R}}\{\mu_\gamma(f,a)=0\}.$$

Утверждение 2.1. *Нормы пространств L_p^γ и L_∞^γ связаны равенством*

$$||f||_{\infty,\gamma}=\lim_{p\to\infty}||f||_{p,\gamma},\qquad f\in L_\infty^\gamma. \tag{2.3}$$

Доказательство. Если $||f||_{\infty,\gamma}=0$, то равенство (2.3) очевидно. Пусть $0<||f||_{\infty,\gamma}<\infty$. Введем обозначение $S_f^\gamma=\operatorname*{ess\,sup_\gamma}_{x\in\mathbb{R}_+^n}|f(x)|=||f||_{\infty,\gamma}$. Будем иметь

$$||f||_{p,\gamma}=\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}|f(x)|^p x^\gamma dx\right)^{1/2}\leqslant (S_f^\gamma)^{1/2}\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}|f(x)|^{p/2}x^\gamma dx\right)^{1/p}.$$

Тогда

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}||f||_{p,\gamma}\leqslant (S_f^\gamma)^{1/2}\overline{\lim_{p\to\infty}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}|f(x)|^{p/2}x^\gamma dx\right)^{1/p}=(S_f^\gamma)^{1/2}\left[\overline{\lim_{p\to\infty}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}|f(x)|^p x^\gamma dx\right)^{1/p}\right]^{1/2}=$$

$$=(S_f^\gamma)^{1/2}\overline{\lim_{p\to\infty}}||f||_{p,\gamma}^{1/2},$$

откуда получим

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}||f||_{p,\gamma}\leqslant S_f^\gamma. \tag{2.4}$$

Из того, что

$$S_f^\gamma=\operatorname*{ess\,sup_\gamma}_{x\in\mathbb{R}_+^n}|f(x)|=\inf_{a\in\mathbb{R}}\{\mu_\gamma(f,a)=0\}$$

следует, что для любого $\varepsilon\in(0,S_f^\gamma]$ найдется множество $E\subset\mathbb{R}_+^n$, такое что $\mathrm{mes}_\gamma E<\infty$ и

$$|f(x)|>S_f^\gamma-\varepsilon,\quad \forall x\in E.$$

Получим

$$\left[\int\limits_E (S_f^\gamma-\varepsilon)^p x^\gamma dx\right]^{1/p}<\left[\int\limits_E |f(x)|^p x^\gamma dx\right]^{1/p}\leqslant ||f||_{p,\gamma},$$

откуда

$$(S_f^\gamma-\varepsilon)(\mathrm{mes}_\gamma E)^{1/p}\leqslant ||f||_{p,\gamma}$$

и

$$\underline{\lim_{p\to\infty}}\,||f||_{p,\gamma}\geqslant S_f^\gamma-\varepsilon$$

или, в силу произвольности ε,

$$\underline{\lim_{p\to\infty}}\,||f||_{p,\gamma}\geqslant S_f^\gamma. \tag{2.5}$$

Из (2.4) и (2.5) следует $\lim\limits_{p\to\infty}||f||_{p,\gamma}=S_f^\gamma$. □

Отметим, что для $f\in L_\infty$ утверждение 2.1 хорошо известно, см., например, [114].

Через $L_{p,loc}^\gamma$ будем обозначать множество функций u, определенных почти всюду на $\overline{\mathbb{R}}{}_+^n$, таких что $u\varphi\in L_p^\gamma$ для всех $\varphi\in\mathcal{D}_+$. Пусть $\mathcal{D}_+'$ — сопряженное пространство к $\mathcal{D}_+$ пространство. Каждой функция $u\in L_{1,loc}^\gamma$ сопоставляется *регулярная весовая обобщенная функция* $u\in\mathcal{D}_+'$, действующая по правилу

$$(u,\varphi)_\gamma=\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}u(x)\,\varphi(x)\,x^\gamma\,dx,\quad \varphi\in\mathcal{D}_+.$$

Все остальные линейные непрерывные функционалы (обобщенные функции) $u \in \mathcal{D}'_+$ будем называть *сингулярными весовыми обобщенными функциями*.

Например, сингулярной весовой обобщенной функцией является функция δ_γ (см. [57]):

$$(\delta_\gamma, \varphi)_\gamma = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}_+.$$

Для удобства будем также писать

$$(\delta_\gamma, \varphi)_\gamma = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \delta_\gamma(x)\varphi(x)x^\gamma dx = \varphi(0),$$

понимая такую запись как предел соответствующей последовательности.

Обозначим через $SL_p^\gamma(\mathbb{R}^n_+) = SL_p^\gamma$ совокупность всех четных по каждой из своих переменных функций с конечной нормой

$$||f||_{SL_p^\gamma(\mathbb{R}^n_+)} = ||f||_{SL_p^\gamma} = \sup_{0<t<\infty} t(\mu_\gamma(f,t))^{1/p}, \qquad 1 \leqslant p < \infty.$$

Линейный оператор A имеет *сильный тип* $(p,q)_\gamma$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, если он определен на L_p^γ, имеет значения из L_q^γ и выполняется неравенство

$$||Af||_{q,\gamma} \leqslant K||f||_{p,\gamma}, \quad \forall\, f \in L_p^\gamma \tag{2.6}$$

с постоянной K, не зависящей от f.

Оператор A будем называть оператором *слабого типа* $(p,q)_\gamma$ (по аналогии с определением оператора слабого типа (p,q) из [169, с. 31]), если

$$\mu_\gamma(Af, \lambda) \leqslant \left(\frac{K||f||_{p,\gamma}}{\lambda}\right)^q, \quad \forall\, f \in L_p^\gamma,$$

где K не зависит от f и λ, $\lambda > 0$. Если $q = \infty$, то оператор A есть отображение слабого типа $(p,q)_\gamma$, если оно сильного типа $(p,q)_\gamma$.

2.2. Оператор преобразования Пуассона. Следуя [274], приведем определение оператора преобразования.

Определение 2.1. Пусть дана пара операторов (A, B). Ненулевой оператор T называется *оператором преобразования*, если выполняется соотношение

$$T\,A = B\,T. \tag{2.7}$$

Соотношение (2.7) называется иначе *сплетающим свойством*, тогда говорят, что оператор преобразования T *сплетает* операторы A и B, или является *сплетающим оператором*. Для превращения (2.7) в строгое определение необходимо задать пространства или множества функций, на которых действуют операторы A, B, и, следовательно, T.

Метод решения задач, основанный на применении оператора T со свойством (2.7), называется *методом операторов преобразования*. В этой работе применяются такие операторы преобразования, как оператор Пуассона, обобщенный сдвиг, весовое сферическое среднее и другие.

В этом пункте рассмотрим одномерный и многомерный операторы Пуассона, которые являются одними из важнейших операторов преобразования при работе с оператором Бесселя, и докажем две формулы, по которым вычисляются интегралы по частям сфер от функций $e^{-i\langle x,\xi\rangle}$ и $e^{\pm\langle x,\xi\rangle}$, на которые действует многомерный оператор Пуассона.

Определение 2.2. *Оператор Пуассона* (*одномерный*) определяется равенством

$$\mathcal{P}_x^\gamma f(x) = \frac{2^{\frac{1-\gamma}{2}} x^{1-\gamma}}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)} \int\limits_0^x \left(x^2-t^2\right)^{\frac{\gamma}{2}-1} f(t)\,dt, \qquad \gamma > 0, \tag{2.8}$$

или

$$\mathcal{P}_x^\gamma f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \int\limits_0^\pi f(x\cos\varphi)\sin^{\gamma-1}\varphi\,d\varphi, \qquad \gamma > 0. \tag{2.9}$$

Константа подобрана так, чтобы $\mathcal{P}_x^\gamma[1] = 1$.

Оператор (2.8) действует как оператор преобразования по формуле

$$\mathcal{P}_x^\gamma D^2 = B_\gamma \mathcal{P}_x^\gamma, \qquad D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \qquad B_\gamma = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\gamma}{x}\frac{d}{dx}. \tag{2.10}$$

Для функции Бесселя первого рода J_ν справедливо интегральное представление с помощью интеграла Пуассона при $\nu > -\dfrac{1}{2}$ (см. [10, формула (1), с. 58]) вида

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{\sqrt{\pi}2^\nu \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^\pi e^{ix\cos\varphi} \sin^{2\nu}\varphi d\varphi,$$

которую, можно переписать при $\nu = \dfrac{\gamma-1}{2}$ в виде

$$j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \int\limits_0^\pi e^{ix\cos\varphi} \sin^{\gamma-1}\varphi d\varphi = \mathcal{P}_\gamma e^{ix}. \tag{2.11}$$

Для функции Бесселя I_ν справедливо интегральное представление с помощью интеграла Пуассона при $\nu > -\dfrac{1}{2}$ (см. [10, формула (9), с. 94]) вида

$$I_\nu(x) = \frac{x^\nu}{\sqrt{\pi}2^\nu \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^\pi e^{\pm x\cos\varphi} \sin^{2\nu}\varphi d\varphi,$$

которое можно переписать при $\nu = \dfrac{\gamma-1}{2}$ в виде

$$i_{\frac{\gamma-1}{2}}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \int\limits_0^\pi e^{\pm x\cos\varphi} \sin^{\gamma-1}\varphi d\varphi = \mathcal{P}_\gamma e^{\pm x}. \tag{2.12}$$

Определение 2.3. *Многомерный оператор Пуассона* $\mathbf{P}_x^\gamma$, действует на интегрируемые функции по формуле

$$\mathbf{P}_x^\gamma f(x) = C(\gamma) \int\limits_0^\pi \dots \int\limits_0^\pi f(x_1\cos\alpha_1, \dots, x_n\cos\alpha_n) \prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i-1}\alpha_i\, d\alpha_i. \tag{2.13}$$

Здесь $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ — мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел. Нормирующая константа

$$C(\gamma) = \pi^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}$$

подобрана так, чтобы $\mathbf{P}_x^\gamma[1] = 1$.

Из формул (2.11) и (2.12) следуют представления для функций (1.20) и (1.21) вида

$$\mathbf{j}_\gamma(x,\xi) = \mathbf{P}_\xi^\gamma[e^{-i\langle x,\xi\rangle}], \tag{2.14}$$

$$\mathbf{i}_\gamma(x,\xi) = \mathbf{P}_\xi^\gamma[e^{\pm\langle x,\xi\rangle}], \tag{2.15}$$

где $\langle x,\xi\rangle = \sum\limits_{i=1}^n x_i\xi_i$.

Часть сферы радиуса r с центром в начале координат, принадлежащую $\mathbb{R}_+^n$, будем обозначать $S_r^+(n)$:

$$S_r^+(n) = \{x \in \mathbb{R}_+^n : |x| = r\}.$$

Получим формулы, выражающие весовые интегралы по части сферы $S_1^+(n)$ от функций (2.14) и (2.15).

Утверждение 2.2. *Интеграл* $\int\limits_{S_1^+(n)} \mathbf{j}_\gamma(r\theta,\xi)\theta^\gamma\, dS$ *вычисляется по формуле*

$$\int\limits_{S_1^+(n)} \mathbf{j}_\gamma(r\theta,\xi)\theta^\gamma\, dS = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}\, j_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(r|\xi|). \tag{2.16}$$

Доказательство. Используя формулу (2.14), запишем

$$\int\limits_{S_1^+(n)} \mathbf{j}_\gamma(r\theta,\xi)\theta^\gamma\, dS = \int\limits_{S_1^+(n)} \mathbf{P}_\xi^\gamma\left(e^{-ir\langle\theta,\xi\rangle}\right)\theta^\gamma\, dS.$$

К последнему интегралу применим формулу

$$\int\limits_{S_1^+(n)} \mathcal{P}_\xi^\gamma f(\langle\sigma,\xi\rangle)\sigma^\gamma dS_\sigma = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}2^{n-1}\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)}\int\limits_{-1}^{1} f(|\xi|p)(1-p^2)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}}\, dp, \tag{2.17}$$

доказанную в [62]. Получим

$$\int\limits_{S_1^+(n)} \mathbf{j}_\gamma(r\theta,\xi)\theta^\gamma\, dS = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}2^{n-1}\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)}\int\limits_{-1}^{1} e^{-irp|\xi|}(1-p^2)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}}\, dp.$$

Заменяя p на $-p$, будем иметь

$$\int\limits_{-1}^{1} e^{-irp|\xi|}(1-p^2)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}}\, dp = \int\limits_{-1}^{1} e^{irp|\xi|}(1-p^2)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}}\, dp.$$

Полученный интеграл находится с помощью соотношения [126, формула 2.3.5.3] вида

$$\int\limits_{-a}^{a} e^{itp}(a^2-p^2)^{\beta-1}\, dp = \frac{\sqrt{\pi}\,(2a)^{\beta-\frac12}\Gamma(\beta)}{t^{\beta-\frac12}}\, J_{\beta-\frac12}(at).$$

Таким образом,

$$\int\limits_{S_1^+(n)} \mathbf{j}_\gamma(r\theta,\xi)\theta^\gamma\, dS = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|-1}{2}\right)}\,\frac{\sqrt{\pi}2^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|-1}{2}\right)}{(r|\xi|)^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}} J_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(r|\xi|) =$$

$$= \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}\, j_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(r|\xi|).$$

Что и дает (2.16). Доказательство закончено. □

Утверждение 2.3. *Интеграл* $\int\limits_{S_1^+(n)} \mathbf{i}_\gamma(r\theta,\xi)\theta^\gamma\, dS$ *вычисляется по формуле*

$$\int\limits_{S_1^+(n)} \mathbf{i}_\gamma(r\theta,\xi)\theta^\gamma\, dS = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}\, i_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(r|\xi|). \tag{2.18}$$

Доказательство. Известно, что функция $\mathbf{i}_\gamma(x,\xi)$ связана с $e^{\langle x,\xi\rangle}$ при помощи оператора преобразования Пуассона равенством (2.15):

$$\mathbf{i}_\gamma(r\theta,\xi)=\mathbf{P}^\gamma_\xi\left(e^{-r\langle\theta,\xi\rangle}\right).$$

Поэтому

$$\int\limits_{S_1^+(n)}\mathbf{i}_\gamma(r\theta,\xi)\theta^\gamma\,dS=\int\limits_{S_1^+(n)}\mathbf{P}^\gamma_\xi\left(-e^{r\langle\theta,\xi\rangle}\right)\theta^\gamma\,dS.$$

К последнему интегралу применим формулу (2.17), получим

$$\int\limits_{S_1^+(n)}\mathbf{i}_\gamma(r\theta,\xi)\theta^\gamma\,dS=\frac{\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}2^{n-1}\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)}\int\limits_{-1}^1 e^{-rp|\xi|}(1-p^2)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}}\,dp.$$

Полученный интеграл находится с помощью соотношения [126, формула 2.3.5.1] вида

$$\int\limits_{-a}^a e^{-tp}(a^2-p^2)^{\beta-1}\,dp=\frac{\sqrt{\pi}\,(2a)^{\beta-\frac12}\Gamma(\beta)}{t^{\beta-\frac12}}\,I_{\beta-\frac12}(at).$$

Таким образом,

$$\int\limits_{S_1^+(n)}\mathbf{i}_\gamma(r\theta,\xi)\theta^\gamma\,dS=\frac{\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}\,i_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(r|\xi|),$$

что и дает (2.18). □

2.3. Преобразование Ханкеля и обобщение пространства Лизоркина—Самко. При работе с дифференциальными и интегральными операторами, связанными с оператором Бесселя

$$B_\gamma=\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\gamma}{x}\frac{d}{dx}$$

вместо преобразования Фурье используется преобразование Ханкеля (см. [57]). Функция $j_{\frac{\gamma-1}{2}}$, определенная равенством (1.16), представляет собой ядро одномерного преобразования Ханкеля. В многомерном случае в качестве ядра преобразования Ханкеля используется функция $\mathbf{j}_\gamma$ (см. (1.20)).

Определение 2.4. Для функций $f\in L_1^\gamma(\mathbb{R}_+)$ *прямое преобразование Ханкеля* (*Фурье—Бесселя*) порядка $\nu=\dfrac{\gamma-1}{2}>-\dfrac12$ имеет вид

$$F_\gamma[f](\xi)=\widehat{f}(\xi)=\int\limits_0^\infty j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\,f(x)x^\gamma\,dx.$$

Для $f\in S_{ev}(\mathbb{R}_+)$ *обратное преобразование Ханкеля* определено формулой

$$F_\gamma^{-1}[\widehat{f}](x)=f(x)=\frac{2^{1-\gamma}}{\Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\int\limits_0^\infty j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\,\widehat{f}(\xi)\xi^\gamma\,d\xi.$$

Ядро многомерного преобразования Ханкеля (Фурье—Бесселя) имеет вид (1.20):

$$\mathbf{j}_\gamma(x;\xi)=\prod_{i=1}^n j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i),\qquad \gamma_1>0,\ldots,\gamma_n>0.$$

Определение 2.5. *Многомерное преобразование Ханкеля* (*Фурье—Бесселя*) функции $f \in L_1^\gamma(\mathbb{R}^n_+)$ определяется равенством

$$\mathbf{F}_\gamma[f](\xi) = (\mathbf{F}_\gamma)_x[f(x)](\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(x)\,\mathbf{j}_\gamma(x;\xi)x^\gamma dx.$$

Для $f \in S_{ev}(\mathbb{R}^n_+)$ *обратное многомерное преобразование Ханкеля* имеет вид

$$\mathbf{F}_\gamma^{-1}[\widehat{f}(\xi)](x) = f(x) = \frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\widehat{f}(\xi)\xi^\gamma\, d\xi.$$

Докажем утверждение, содержащее формулу многомерного преобразования Ханкеля от оператора Δ_γ.

Утверждение 2.4. *Пусть $u \in S_{ev}$ тогда*

$$\mathbf{F}_\gamma[\Delta_\gamma f](\xi) = -|\xi|^2\mathbf{F}_\gamma[f](\xi), \tag{2.19}$$

где

$$\Delta_\gamma = \sum_{i=1}^{n}(B_{\gamma_i})_{x_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x}.$$

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{F}_\gamma[\Delta_\gamma f](\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+}[\Delta_\gamma f(x)]\,\mathbf{j}_\gamma(x;\xi)x^\gamma dx = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\left[\frac{1}{x_i^{\gamma_i}}\frac{\partial}{\partial x_i}x_i^{\gamma_i}\frac{\partial}{\partial x_i}f(x)\right]\mathbf{j}_\gamma(x;\xi)x^\gamma dx.$$

Интегрируя по частям по переменным x_i и используя формулу (1.18), получим

$$\mathbf{F}_\gamma[\Delta_\gamma f](\xi) = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(x)\,\left[\frac{1}{x_i^{\gamma_i}}\frac{\partial}{\partial x_i}x_i^{\gamma_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{j}_\gamma(x;\xi)\right]x^\gamma dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(-\xi_i^2)\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(x)\,\mathbf{j}_\gamma(x;\xi)x^\gamma dx = -|\xi|^2\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(x)\,\mathbf{j}_\gamma(x;\xi)x^\gamma dx = -|\xi|^2\mathbf{F}_\gamma[f](\xi).$$

Доказательство закончено. □

В работе [133] были рассмотрены пространства Ψ_V, состоящие из функций, обращающихся в нуль на заданном замкнутом множестве V, и соответствующие пространства Φ_V такие, что Ψ_V являются двойственными к Φ_V в смысле преобразований Фурье. Вопрос о плотности таких пространств в L_p был исследован в [134] (см. также [135]. Пространство Φ_V называется *пространством Лизоркина—Самко* (см., например, [118]). Нам потребуется обобщение пространства Лизоркина—Самко.

Пусть Ψ_V^γ обозначает класс функций S_{ev}, обращающихся в нуль вместе со всеми своими производными на заданном замкнутом множестве V:

$$\Psi_V^\gamma = \{\psi \in S_{ev}(\mathbb{R}^n_+) : (D^k\psi)(x) = 0, x \in V, |k| = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Пространство Ψ_V^γ является двойственным в смысле преобразования Ханкеля к Φ_V^γ:

$$\Phi_V^\gamma = \{\varphi : \mathbf{F}_\gamma\varphi \in \Psi_V^\gamma\}. \tag{2.20}$$

Причина рассмотрения классов Ψ_V^γ и Φ_V^γ состоит в том, что при рассмотрении операторов типа потенциалов Рисса, порожденных обобщенным сдвигом, символ таких операторов, выраженный посредством преобразования Ханкеля, оказывается обычно бесконечно дифференцируем всюду, кроме множества M, имеющего, как правило, нулевую меру mes_γ. Чтобы определить такой потенциал в обобщенном смысле, нужно выбрать пространство основных функций, инвариантное относительно этого потенциала. Таким пространством оказывается Φ_V^γ, если множество V содержит в себе множество M особенностей символа. В тех случаях, когда Φ_V^γ плотно в L_p^γ, определенный в обобщенном смысле в Φ_V^γ потенциал соответствует потенциалу, определенному в смысле L_p^γ.

2.4. Дробные интегралы и производные Римана—Лиувилля и Лиувилля. В этом пункте, следуя [136], приведем определения операторов дифференцирования и интегрирования произвольного вещественного порядка.

Определение 2.6. Пусть $f(x) \in L_1(a,b)$, $\alpha > 0$, тогда интеграл

$$(I^\alpha_{a+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, \qquad x > a \tag{2.21}$$

называется *левосторонним дробным интегралом Римана—Лиувилля* порядка α, а интеграл

$$(I^\alpha_{b-}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}dt, \qquad x < b, \tag{2.22}$$

называется *правосторонним* (2.22) *дробным интегралом Римана—Лиувилля* порядка α.

Каждое из выражений

$$(D^\alpha_{a+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int\limits_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \tag{2.23}$$

$$(D^\alpha_{b-}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int\limits_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \tag{2.24}$$

где $n = [\alpha]+1$, $\alpha > 0$, называется *дробной производной Римана—Лиувилля порядка* α, соответственно *левосторонней* и *правосторонней*.

Определение 2.7. *Дробные интегралы Лиувилля* определяются при $\alpha > 0$ по формулам:

$$I^\alpha_{0+,x}f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \tag{2.25}$$

$$I^\alpha_{-,x}f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^\infty (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt. \tag{2.26}$$

Для функции $f(x)$, $x \in [a,b]$ каждое из выражений

$$(D^\alpha_{0+,x}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int\limits_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \tag{2.27}$$

$$(D^\alpha_{-,x}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int\limits_x^\infty \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \tag{2.28}$$

где $n = [\alpha]+1$, $\alpha > 0$, называется *дробной производной Лиувилля* порядка α, соответственно *левосторонней* и *правосторонней*.

Для дальнейших рассуждений нам будет удобно ввести следующие классы функций.

Определение 2.8. Функция $f(x)$ называется *абсолютно непрерывной* на отрезке Ω, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для любой конечной системы попарно непересекающихся отрезков $[a_k, b_k] \subset \Omega$, $k = 1, 2, \ldots, n$, такой, что

$$\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta,$$

справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Класс всех таких функций обозначается $AC(\Omega)$.

Известно (см. [78]), что класс $AC(\Omega)$ совпадает с классом первообразных от суммируемых по Лебегу функций, т. е.

$$f(x) \in AC(\Omega) \Leftrightarrow f(x) = c + \int\limits_a^x \varphi(t)dt, \qquad \int\limits_a^b |\varphi(t)|dt < \infty, \qquad \varphi(t) = f'(t). \tag{2.29}$$

Поэтому абсолютно непрерывные функции имеют почти всюду суммируемую производную $f'(x)$. Однако из существования почти всюду суммируемой производной еще не вытекает абсолютная непрерывность.

Определение 2.9. Через $AC^n(\Omega)$, где $n = 1, 2, \ldots$ и Ω — отрезок, обозначим класс функций $f(x)$, непрерывно дифференцируемых на Ω до порядка $n-1$, причем $f^{(n-1)}(x) \in AC(\Omega)$.

Очевидно, что $AC^1(\Omega) = AC(\Omega)$, и класс $AC^n(\Omega)$ состоит из функций, представимых n-кратным интегралом Лебега с переменным верхним пределом от суммируемой функции с заменой постоянной в (2.29) на многочлен порядка $n-1$:

$$f(x) \in AC^n(\Omega) \Leftrightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k + \underbrace{\int\limits_a^x dt \ldots \int\limits_a^x dt \int\limits_a^x}_{n} \varphi(t)dt, \tag{2.30}$$

$$\int\limits_a^b |\varphi(t)|dt < \infty, \ c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \ \varphi(t) = f^{(n)}(t).$$

Определение 2.10. Через $I^\alpha_{a+}(L_p)$, $\alpha > 0$ обозначим класс функций $f(x)$, представимых левосторонним дробным интегралом порядка α от суммируемой функции:

$$f \in I^\alpha_{a+}(L_p), \quad \alpha > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f = I^\alpha_{a+}\varphi, \quad \varphi \in L_p(a,b), \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

Описание класса $I^\alpha_{a+}(L_1)$ дает следующая теорема.

Теорема 2.1. *Для того, чтобы $f(x) \in I^\alpha_{a+}(L_1)$, $\alpha > 0$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$f_{n-\alpha}(x) = I^{n-\alpha}_{a+} f \in AC^n([a,b]), \tag{2.31}$$

где $n = [\alpha] + 1$, и чтобы

$$f^{(k)}_{n-\alpha}(a) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{2.32}$$

Определение 2.11. Пусть $\alpha > 0$. Будем говорить, что функция $f(x) \in L_1(a,b)$ имеет *суммируемую дробную производную* $D^\alpha_{a+} f$, если $I^{n-\alpha}_{a+} f \in AC^n([a,b])$, $n = [\alpha] + 1$.

Если

$$D^\alpha_{a+} f = \left(\frac{d}{dx}\right)^n I^{n-\alpha}_{a+} f$$

существует в обычном смысле, т. е. $I^{n-\alpha}_{a+} f$ дифференцируема до порядка n в каждой точке, то $f(x)$ имеет производную $D^\alpha_{a+} f$ в смысле определения 2.11.

Следующая теорема дает условия, при которых дробное интегрирование и дифференцирование являются взаимно обратными операциями.

Теорема 2.2. *Пусть $\alpha > 0$. Тогда равенство*

$$D^\alpha_{a+} I^\alpha_{a+} \varphi = \varphi(x) \tag{2.33}$$

выполняется для любой суммируемой функции $\varphi(x)$, а равенство

$$I^\alpha_{a+} D^\alpha_{a+} f = f(x) \tag{2.34}$$

— для функции

$$f(x) \in I^\alpha_{a+}(L_1). \tag{2.35}$$

Если вместо (2.35) *предположить, что функция* $f(x) \in L_1(a,b)$ *имеет суммируемую производную* $D^\alpha_{a+}f$ (*в смысле определения* (2.11)), *то* (2.33), *вообще говоря, неверно и заменяется формулой*

$$I^\alpha_{a+}D^\alpha_{a+}f = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)} f^{(n-k-1)}_{n-\alpha}(a), \tag{2.36}$$

где $n = [\alpha]+1$ *и* $f_{n-\alpha}(x) = I^{n-\alpha}_{a+}f$. *В частности, при* $0<\alpha<1$

$$I^\alpha_{a+}D^\alpha_{a+}f = f(x) - \frac{f_{1-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1}. \tag{2.37}$$

3. Обобщенный сдвиг и весовое сферическое среднее

В этом разделе приведем необходимые нам в дальнейшем операторы преобразования, такие как обобщенный сдвиг, связанный с оператором Бесселя, и весовое сферическое среднее, а также их свойства.

3.1. Обобщенный сдвиг и обобщенная свертка. В этом пункте приведем необходимый нам в дальнейшем оператор преобразования, называемый обобщенным сдвигом, его распространение на многомерный случай, а также определения сверток, порожденных этими операторами.

Наличие обобщенного сдвига позволяет обобщать прежние теории, основанные на обычном сдвиге. Мы будем использовать оператор обобщенного сдвига, связанный с оператором Бесселя $B_\gamma = \dfrac{d^2}{dy^2} + \dfrac{\gamma}{y}\dfrac{d}{dy}$.

Определение 3.1. *Оператор обобщенного сдвига*, связанный с оператором Бесселя B_γ, $\gamma>0$, имеет вид

$$({}^\gamma T^y_x f)(x) = {}^\gamma T^y_x f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \int\limits_0^\pi f(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi})\sin^{\gamma-1}\varphi d\varphi. \tag{3.1}$$

Производя замену переменной $\varphi \to \pi-\varphi$, легко видеть, что обобщенный сдвиг ${}^\gamma T^y_x$ можно также записать в виде

$$({}^\gamma T^y_x f)(x) = {}^\gamma T^y_x f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \int\limits_0^\pi f(\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos\varphi})\sin^{\gamma-1}\varphi d\varphi. \tag{3.2}$$

Обобщенный сдвиг ${}^\gamma T^y_x$ был введен в [197], а затем подробно изучен в работе [90], в которой показано, что

$$u(x,y) = {}^\gamma T^y_x f(x)$$

есть единственное решение задачи Коши вида

$$(B_\gamma)_x u(x,y) = (B_\gamma)_y u(x,y),$$
$$u(x,0) = f(x), \qquad u_y(x,0) = 0.$$

Приведем элементарные свойства обобщенного сдвига функции f, связанного с оператором Бесселя, доказанные в [90].

1. Линейность и однородность:
$${}^\gamma T^y_x[af(x)+bg(x)] = a\,{}^\gamma T^y_x f(x) + b\,{}^\gamma T^y g(x), \quad a,b\in\mathbb{R}.$$
2. Положительность: ${}^\gamma T^y_x f(x) \geqslant 0$, если $f(x)\geqslant 0$.
3. ${}^\gamma T^y_x[1] = 1$.
4. ${}^\gamma T^0_x f(x) = f(x)$.
5. ${}^\gamma T^y_x f(x) = {}^\gamma T^x_y f(y)$.
6. Если $f(x)\equiv 0$ для $x\geqslant a$, то ${}^\gamma T^y_x f(x)\equiv 0$ для $|x-y|\geqslant a$.
7. Если последовательность непрерывных функций $f_n(x)$ сходится равномерно в каждом конечном интервале к $f(x)$, то последовательность функций от двух переменных ${}^\gamma T^y_x f_n(x)$ сходится равномерно в каждой конечной области к функции ${}^\gamma T^y_x f(x)$.

8. Оператор ${}^\gamma T_x^y$ ограничен:
$$|{}^\gamma T_x^y f(x)| \leqslant {}^\gamma T_x^y |f(x)| \leqslant \sup_{x\geqslant 0} |f(x)|.$$
9. Переместительность операторов ${}^\gamma T_x^y$:
$$ {}^\gamma T_x^y \, {}^\gamma T_x^z f(x) = {}^\gamma T_x^z \, {}^\gamma T_x^y f(x). \tag{3.3}$$
10. Ассоциативность операторов ${}^\gamma T_x^y$:
$$ {}^\gamma T_y^z \, {}^\gamma T_x^y f(x) = {}^\gamma T_x^z \, {}^\gamma T_x^y f(x).$$
11. Для $f \in C_{ev}^2$ обобщенный сдвиг является оператором преобразования, сохраняющим $(B_\gamma)_x$:
$$ {}^\gamma T_x^y (B_\gamma)_x f(x) = (B_\gamma)_x \, {}^\gamma T_x^y f(x). \tag{3.4}$$

Пусть
$$C(\gamma) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}.$$
Приведем далее свойства обобщенного сдвига, в том числе и известные, сопровождающиеся доказательствами.

Свойство 3.1. *Для оператора обобщенного сдвига ${}^\gamma T_x^y$, связанного с оператором Бесселя B_γ, справедливо представление*
$$ {}^\gamma T_x^y f(x) = 2^{\gamma-1} C(\gamma) \int_0^1 f\left((x+y)\sqrt{1-\frac{4xy}{(x+y)^2}z}\right) z^{\frac{\gamma}{2}-1}(1-z)^{\frac{\gamma}{2}-1}dz. \tag{3.5}$$

Доказательство. Преобразуем оператор обобщенного сдвига следующим образом. Сначала в (3.2) произведем замену $\varphi = 2\alpha$, получим
$$ {}^\gamma T_x^y f(x) = 2C(\gamma) \int_0^{\pi/2} f(\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos 2\alpha}) \sin^{\gamma-1}(2\alpha) d\alpha =$$
$$= 2^\gamma C(\gamma) \int_0^{\pi/2} f\left(\sqrt{x^2+y^2+2xy(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}\right) \sin^{\gamma-1}\alpha \cos^{\gamma-1}\alpha d\alpha =$$
$$= 2^\gamma C(\gamma) \int_0^{\pi/2} f\left(\sqrt{x^2+y^2+2xy(1-2\sin^2\alpha)}\right) \sin^{\gamma-1}\alpha (1-\sin^2\alpha)^{\frac{\gamma-1}{2}} d\alpha.$$
Теперь положим $\sin\alpha = t$, тогда при $\alpha = 0$, $t = 0$ при $\alpha = \pi/2$, $t = 1$ $d\alpha = \dfrac{dt}{(1-t^2)^{1/2}}$ и
$$ {}^\gamma T_x^y f(x) = 2^\gamma C(\gamma) \int_0^1 f(\sqrt{x^2+y^2+2xy(1-2t^2)}) t^{\gamma-1}(1-t^2)^{\frac{\gamma}{2}-1} dt = \{t^2 = z\} =$$
$$= 2^{\gamma-1} C(\gamma) \int_0^1 f(\sqrt{x^2+y^2+2xy(1-2z)}) z^{\frac{\gamma}{2}-1}(1-z)^{\frac{\gamma}{2}-1} dz =$$
$$= 2^{\gamma-1} C(\gamma) \int_0^1 f(\sqrt{(x+y)^2-4xyz}) z^{\frac{\gamma}{2}-1}(1-z)^{\frac{\gamma}{2}-1} dz =$$
$$= 2^{\gamma-1} C(\gamma) \int_0^1 f\left((x+y)\sqrt{1-\frac{4xy}{(x+y)^2}z}\right) z^{\frac{\gamma}{2}-1}(1-z)^{\frac{\gamma}{2}-1} dz.$$
Доказательство закончено. □

Свойство 3.2. *Для оператора обобщенного сдвига* ${}^\gamma T_x^y$, *связанного с оператором Бесселя* B_γ, *справедливо представление*

$$ {}^\gamma T_x^y f(x) = \frac{2^\gamma C(\gamma)}{(4xy)^{\gamma-1}} \int\limits_{|x-y|}^{x+y} z f(z) [(z^2-(x-y)^2)((x+y)^2-z^2)]^{\frac{\gamma}{2}-1} dz. \tag{3.6} $$

Доказательство. Произведем в (3.1) замену $\varphi = 2\alpha$, получим

$$ {}^\gamma T_x^y f(x) = 2C(\gamma) \int\limits_0^{\pi/2} f(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos 2\alpha}) \sin^{\gamma-1}(2\alpha) d\alpha = $$

$$ = 2^\gamma C(\gamma) \int\limits_0^{\pi/2} f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}\right) \sin^{\gamma-1}\alpha \cos^{\gamma-1}\alpha d\alpha = $$

$$ = 2^\gamma C(\gamma) \int\limits_0^{\pi/2} f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy(1-2\sin^2\alpha)}\right) \sin^{\gamma-1}\alpha (1-\sin^2\alpha)^{\frac{\gamma-1}{2}} d\alpha. $$

Теперь положим $\sin\alpha = t$, тогда при $\alpha = 0$, $t = 0$ при $\alpha = \pi/2$, $t = 1$ $d\alpha = \dfrac{dt}{(1-t^2)^{1/2}}$ и

$$ {}^\gamma T_x^y f(x) = 2^\gamma C(\gamma) \int\limits_0^1 f(\sqrt{x^2+y^2-2xy(1-2t^2)}) t^{\gamma-1} (1-t^2)^{\frac{\gamma}{2}-1} dt. $$

Вводя переменную z посредством равенства $\sqrt{x^2+y^2-2xy(1-2t^2)} = z$, будем иметь

$$ t = \left(\frac{z^2-(x-y)^2}{4xy}\right)^{1/2}, \qquad dt = \frac{zdz}{(4xy)^{1/2}(z^2-(x-y)^2)^{1/2}}, $$

при $t = 0$ $z = |x-y|$, при $t = 1$ $z = x+y$ и

$$ {}^\gamma T_x^y f(x) = \frac{2^\gamma C(\gamma)}{(4xy)^{\gamma-1}} \int\limits_{|x-y|}^{x+y} z f(z) [(z^2-(x-y)^2)((x+y)^2-z^2)]^{\frac{\gamma}{2}-1} dz. $$

Доказательство закончено. □

Свойство 3.2 в более общем виде получено в [90].

Свойство 3.3. *Если* $f(x)$ — *непрерывная функция, для которой*

$$ \int\limits_0^\infty |f(x)| x^\gamma dx < \infty, $$

и $g(x)$ — *непрерывная, ограниченная для всех* $x \geqslant 0$ *функция, то*

$$ \int\limits_0^\infty {}^\gamma T_x^y f(x) g(y) y^\gamma dy = \int\limits_0^\infty f(y)\, {}^\gamma T_x^y g(x) y^\gamma dy. \tag{3.7} $$

Доказательство. Применяя к $\int\limits_0^\infty {}^\gamma T_x^y f(x) g(y) y^\gamma dy$ представление (3.6), получим

$$ \int\limits_0^\infty {}^\gamma T_x^y f(x) g(y) y^\gamma dy = $$

$$= (4x)^{1-\gamma}2^\gamma C(\gamma)\int\limits_0^\infty yg(y)dy\int\limits_{|x-y|}^{x+y} zf(z)[(z^2-(x-y)^2)((x+y)^2-z^2)]^{\frac{\gamma}{2}-1}dz =$$

$$= (4x)^{1-\gamma}2^\gamma C(\gamma)\Bigg[\int\limits_0^x yg(y)dy\int\limits_{x-y}^{x+y} zf(z)[(z^2-(x-y)^2)((x+y)^2-z^2)]^{\frac{\gamma}{2}-1}dz+$$

$$+\int\limits_x^\infty yg(y)dy\int\limits_{y-x}^{x+y} zf(z)[(z^2-(x-y)^2)((x+y)^2-z^2)]^{\frac{\gamma}{2}-1}dz\Bigg].$$

Преобразуем выражение $(z^2-(x-y)^2)((x+y)^2-z^2)$ и поменяем порядок интегрирования, будем иметь

$$\int\limits_0^\infty {}^\gamma T_x^y f(x)g(y)y^\gamma dy =$$

$$= (4x)^{1-\gamma}2^\gamma C(\gamma)\Bigg[\int\limits_0^x zf(z)dz\int\limits_{x-z}^{x+z} yg(y)[((z+x)^2-y^2)(y^2-(z-x)^2)]^{\frac{\gamma}{2}-1}dy+$$

$$+\int\limits_x^\infty zf(z)dz\int\limits_{z-x}^{x+z} yg(y)[((z+x)^2-y^2)(y^2-(z-x)^2)]^{\frac{\gamma}{2}-1}dy\Bigg] =$$

$$= \int\limits_0^\infty f(z)\, {}^\gamma T_x^z g(y) z^\gamma dz.$$

Свойство доказано. □

Свойство 3.3 доказано в [90] другим способом.

Свойство 3.4. *Обобщенный сдвиг ${}^\gamma T_x^y$ можно записать в виде*

$$ {}^\gamma T_x^y f(x) = \frac{2^{1-\gamma}}{\Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\int\limits_{|x-y|}^{x+y} z^{2-\gamma}f(z)dz\int\limits_0^\infty j_{\frac{\gamma-1}{2}}(\lambda x)j_{\frac{\gamma-1}{2}}(\lambda y)j_{\frac{\gamma-1}{2}}(\lambda z)\lambda^\gamma d\lambda. \qquad (3.8)$$

Доказательство. Справедлива формула

$$\frac{[(z^2-(x-y)^2)((x+y)^2-z^2)]^{\frac{\gamma}{2}-1}}{(xy)^{\gamma-1}} = z^{1-\gamma}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{2\Gamma^3\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\int\limits_0^\infty j_{\frac{\gamma-1}{2}}(\lambda x)j_{\frac{\gamma-1}{2}}(\lambda y)j_{\frac{\gamma-1}{2}}(\lambda z)\lambda^\gamma d\lambda. \qquad (3.9)$$

Эта формула следует из соотношения [127, формула 2.12.42.14, с. 204] в виде

$$\int\limits_0^\infty \lambda^{1-\nu}J_\nu(x\lambda)J_\nu(y\lambda)J_\nu(z\lambda)d\lambda =$$

$$= \frac{2^{1-3\nu}}{\sqrt{\pi}(xyz)^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}[(z^2-(x-y)^2)((x+y)^2-z^2)]^{\nu-\frac{1}{2}} = \frac{2^{\nu-1}\mathit{\Delta}^{2\nu-1}}{\sqrt{\pi}(xyz)^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)},$$

где $|x-y|<z<x+y$, $x,y,z>0$, $\mathrm{Re}\,\nu>-\dfrac{1}{2}$, $\mathit{\Delta}$ — площадь треугольника, стороны которого равны x,y,z. Используя представление (3.6) и формулу (3.9), получим (3.8). □

Свойство 3.4 приведено в [225].

Свойство 3.5. *При $\gamma = 0$ обобщенный сдвиг ${}^\gamma T_x^y$ для четной финитной функции $f(x)$ принимает вид*

$$ {}^0T_x^y = T_x^y f(x) = \frac{f(x+y)-f(x-y)}{2} $$

и справедливо равенство

$$ \lim_{\gamma\to 0}\int\limits_0^\infty {}^\gamma T_x^y f(x) y^\gamma dy = \lim_{\gamma\to 0}\int\limits_0^\infty \frac{f(x+y)-f(x-y)}{2} y^\gamma dy = \int\limits_0^\infty f(t)dt. $$

Доказательство. Рассмотрим интеграл по y от нуля до бесконечности от ${}^\gamma T_x^y f(x)$, $\gamma>0$ с весом y^γ, применим формулу (3.7) и элементарное свойство 3, а затем, предполагая, что f финитна, следовательно, интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(y)y^\gamma dy$ сходится равномерно при $\gamma>0$, перейдем к пределу при $\gamma\to 0$:

$$ \int\limits_0^\infty {}^\gamma T_x^y f(x) y^\gamma dy = \int\limits_0^\infty f(y)\, {}^\gamma T_x^y[1] y^\gamma dy = \int\limits_0^\infty f(y) y^\gamma dy, $$

$$ \lim_{\gamma\to 0}\int\limits_0^\infty {}^\gamma T_x^y f(x) y^\gamma dy = \lim_{\gamma\to 0}\int\limits_0^\infty f(y) y^\gamma dy = \int\limits_0^\infty f(y)dy. $$

С другой стороны, если f — четная финитная функция, то

$$ \lim_{\gamma\to 0}\int\limits_0^\infty \frac{f(x+y)-f(x-y)}{2} y^\gamma dy = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^\infty f(x+y)dy - \int\limits_0^\infty f(x-y)dy\right) = $$

$$ = \frac{1}{2}\left(\int\limits_y^\infty f(t)dt - \int\limits_{-y}^\infty f(t)dt\right) = \frac{1}{2}\left(\int\limits_y^\infty f(t)dt + \int\limits_{-\infty}^y f(t)dt\right) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)dt = \int\limits_0^\infty f(t)dt, $$

следовательно, для четной финитной функции f справедливо равенство

$$ \lim_{\gamma\to 0}\int\limits_0^\infty {}^\gamma T_x^y f(x) y^\gamma dy = \lim_{\gamma\to 0}\int\limits_0^\infty \frac{f(x+y)-f(x-y)}{2} y^\gamma dy = \int\limits_0^\infty f(t)dt. $$

□

Свойство 3.6. *Преобразование Ханкеля от обобщенного сдвига функции $f\in S_{ev}(\mathbb{R}_+)$ имеет вид*

$$ F_\gamma[{}^\gamma T_x^y f(x)](\xi) = j_{\frac{\gamma-1}{2}}(y\xi)\, F_\gamma[f](\xi). \tag{3.10} $$

Доказательство. Используя свойство самосопряженности обобщенного сдвига и (3.19), получим

$$ F_\gamma[{}^\gamma T_x^y f(x)](\xi) = \int\limits_0^\infty j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\ {}^\gamma T_x^y f(x) x^\gamma\, dx = $$

$$ = \int\limits_0^\infty {}^\gamma T_x^y j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\, f(x) x^\gamma\, dx = j_{\frac{\gamma-1}{2}}(y) \int\limits_0^\infty j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\, f(x) x^\gamma\, dx = j_{\frac{\gamma-1}{2}}(y\xi)\, F_\gamma[f](\xi). $$

□

Свойство 3.6 получено в [36].

Приведем определение обобщенной свертки двух функций, порожденной обобщенным сдвигом ${}^\gamma T_x^y$, и формулу действия преобразования Ханкеля на такую свертку.

Определение 3.2. Обобщенная свертка, порожденная обобщенным сдвигом ${}^\gamma T^y_x$, имеет вид (см. [36, 57])

$$(f*g)_\gamma(x)=\int\limits_0^\infty f(y)\,{}^\gamma T^y_x g(x) y^\gamma\,dy. \tag{3.11}$$

Свойство 3.7. *Пусть $f,g\in S_{ev}(\mathbb{R}_+)$. Преобразование Ханкеля, примененное к обобщенной свертке* (3.11)*, имеет вид*:

$$F_\gamma[(f*g)_\gamma(x)](\xi)=F_\gamma[f](\xi)F_\gamma[g](\xi). \tag{3.12}$$

Доказательство.

$$F_\gamma[(f*g)_\gamma(x)](\xi)=\int\limits_0^\infty (f*g)_\gamma(x)\,j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)x^\gamma\,dx=$$

$$=\int\limits_0^\infty j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)x^\gamma\,dx\int\limits_0^\infty f(y)\,{}^\gamma T^y_x g(x)\,y^\gamma\,dy=$$

$$=\int\limits_0^\infty f(y)y^\gamma\,dy\int\limits_0^\infty {}^\gamma T^y_x g(x)\,j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)x^\gamma\,dx=$$

$$=\int\limits_0^\infty f(y)y^\gamma\,dy\int\limits_0^\infty g(x)\,{}^\gamma T^y_x j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)x^\gamma\,dx=$$

$$=\int\limits_0^\infty f(y)\,j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)y^\gamma\,dy\int\limits_0^\infty g(x)\,j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)x^\gamma\,dx=F_\gamma[f](\xi)F_\gamma[g](\xi).$$

□

Свойство 3.7 приведено в [36].

Получим формулы действия обобщенного сдвига на некоторые элементарные и специальные функции.

1. При $x>0$ формула, представляющая обобщенный сдвиг ${}^\gamma T^y_x$ от степенной функции x^α, имеет вид:

$${}^\gamma T^y_x x^\alpha=\begin{cases}|x-y|^\alpha\,{}_2F_1\left(-\dfrac{\alpha}{2},\dfrac{\gamma}{2},\gamma;-\dfrac{4xy}{(x-y)^2}\right), & x\neq y;\\ x^\alpha\,\dfrac{2^{\alpha+\gamma-1}\Gamma\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)}, & x=y,\end{cases} \tag{3.13}$$

или

$${}^\gamma T^y_x x^\alpha=\begin{cases}x^\alpha\,{}_2F_1\left(-\dfrac{\alpha}{2},\dfrac{1-\alpha-\gamma}{2},\dfrac{\gamma+1}{2};\dfrac{y^2}{x^2}\right), & x>y;\\ x^\alpha\,\dfrac{2^{\alpha+\gamma-1}\Gamma\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)}, & x=y;\\ y^\alpha\,{}_2F_1\left(-\dfrac{\alpha}{2},\dfrac{1-\alpha-\gamma}{2},\dfrac{\gamma+1}{2};\dfrac{x^2}{y^2}\right), & x<y,\end{cases} \tag{3.14}$$

где ${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция Гаусса (см. (1.22)).

Доказательство. Пусть сначала $x\neq y$. Используя формулу (3.6), найдем обобщенный сдвиг ${}^\gamma T^y_x$ от функции x^α. Имеем

$${}^\gamma T^y_x x^\alpha=\frac{2^\gamma\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}\int\limits_0^1((x-y)^2+4xyt^2)^{\frac{\alpha}{2}}(1-t^2)^{\frac{\gamma}{2}-1}t^{\gamma-1}dt=\{t^2=z\}=$$

$$= \frac{2^{\gamma-1}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \int\limits_0^1 ((x-y)^2+4xyz)^{\frac{\alpha}{2}}(1-z)^{\frac{\gamma}{2}-1}z^{\frac{\gamma}{2}-1}dz =$$

$$= \frac{2^{\gamma-1}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}|x-y|^\alpha \int\limits_0^1 \left(1+\frac{4xy}{(x-y)^2}z\right)^{\frac{\alpha}{2}} (1-z)^{\frac{\gamma}{2}-1}z^{\frac{\gamma}{2}-1}dz.$$

Последний интеграл представляет собой гипергеометрическую функцию Гаусса (1.22) при

$$z=-\frac{4xy}{(x-y)^2}, \quad a=-\frac{\alpha}{2}, \quad b=\frac{\gamma}{2}, \quad c=2b=\gamma, \quad (c>b>0),$$

поэтому

$${}^\gamma T_x^y x^\alpha = \frac{2^{\gamma-1}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\gamma)}|x-y|^\alpha\, {}_2F_1\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{\gamma}{2},\gamma;-\frac{4xy}{(x-y)^2}\right).$$

Используя формулу удвоения для гамма-функции (1.7), получим (3.13).

Для доказательства (3.14) раскроем в (3.13) модуль:

$${}^\gamma T_x^y x^\alpha = \begin{cases} (x-y)^\alpha\, {}_2F_1\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{\gamma}{2},\gamma;-\frac{4xy}{(x-y)^2}\right), & x>y; \\ (y-x)^\alpha\, {}_2F_1\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{\gamma}{2},\gamma;-\frac{4xy}{(x-y)^2}\right), & x<y. \end{cases} \tag{3.15}$$

В [81] приведена формула вида

$${}_2F_1\left(a,b,2b;\frac{4z}{(1+z)^2}\right) = (1+z)^{2a}\, {}_2F_1\left(a,a-b+\frac{1}{2},b+\frac{1}{2};z^2\right),$$

используя которую, получим (3.14) при $x\neq y$.

При $x=y$ имеем

$${}^\gamma T_x^y x^\alpha = (2x)^\alpha \frac{2^{\gamma-1}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}\int\limits_0^1 (1-z)^{\frac{\gamma}{2}-1}z^{\frac{\gamma+\alpha}{2}-1}dz = (2x)^\alpha \frac{2^{\gamma-1}\Gamma\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Это завершает доказательство. □

2. Обобщенный сдвиг ${}^\gamma T_x^y$ от e^{-x^2}, $x>0$, имеет вид

$${}^\gamma T_x^y e^{-x^2} = \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)(xy)^{\frac{1-\gamma}{2}}\, e^{-x^2-y^2} I_{\frac{\gamma-1}{2}}(2xy). \tag{3.16}$$

Доказательство. Используя формулу (3.6), найдем ${}^\gamma T_x^y e^{-x^2}$. Имеем

$${}^\gamma T_x^y e^{-x^2} = \frac{2^\gamma C(\gamma)}{(4xy)^{\gamma-1}} \int\limits_{|x-y|}^{x+y} ze^{-z^2}[(z^2-(x-y)^2)((x+y)^2-z^2)]^{\frac{\gamma}{2}-1}dz.$$

Найдем интеграл

$$I = \int\limits_{|x-y|}^{x+y} ze^{-z^2}[(z^2-(x-y)^2)((x+y)^2-z^2)]^{\frac{\gamma}{2}-1}dz = \{z^2=t\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{(x-y)^2}^{(x+y)^2} e^{-t}[(t-(x-y)^2)((x+y)^2-t)]^{\frac{\gamma}{2}-1}dt = \{t-(x-y)^2=w\} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-(x-y)^2}\int\limits_0^{4xy} e^{-w}[w(4xy-w)]^{\frac{\gamma}{2}-1}dw.$$

Применяя соотношение [126, формула 2.3.6.2] вида

$$\int\limits_0^a x^{\alpha-1}(a-x)^{\alpha-1}e^{-px}dx=\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha)\left(\frac{a}{p}\right)^{\alpha-1/2}e^{-ap/2}I_{\alpha-1/2}(ap/2),\qquad \operatorname{Re}\alpha>0,\tag{3.17}$$

получим

$$I=2^{\gamma-2}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\,e^{-x^2-y^2}(xy)^{\frac{\gamma-1}{2}}I_{\frac{\gamma-1}{2}}\left(2xy\right).$$

Тогда

$$^{\gamma}T_x^y e^{-x^2}=\frac{2^{\gamma}}{(4xy)^{\gamma-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\;\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}\int\limits_{|x-y|}^{x+y}ze^{-z^2}[(z^2-(x-y)^2)((x+y)^2-z^2)]^{\frac{\gamma}{2}-1}dz=$$

$$=\frac{2^{\gamma}}{(4xy)^{\gamma-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\;\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}\,2^{\gamma-2}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\,e^{-x^2-y^2}(xy)^{\frac{\gamma-1}{2}}I_{\frac{\gamma-1}{2}}\left(2xy\right).$$

После упрощения получим (3.16). □

3. Обобщенный сдвиг $^{\gamma}T_x^y$ от $x^2e^{-x^2}$, $x>0$, определяется формулой

$$^{\gamma}T_x^y x^2e^{-x^2}=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{e^{x^2+y^2}}\left(\frac{2^{\gamma+1}e^{2xy}\,xy}{\Gamma(\gamma+1)}\,{}_1F_1\left(\frac{\gamma}{2}+1;\gamma+1;-4xy\right)+(xy)^{\frac{1-\gamma}{2}}\,I_{\frac{\gamma-1}{2}}\left(2xy\right)\right).\tag{3.18}$$

Доказательство. Используя формулу (3.6), найдем $^{\gamma}T_x^y x^2e^{-x^2}$. Имеем

$$^{\gamma}T_x^y e^{-x^2}=\frac{2^{\gamma}C(\gamma)}{(4xy)^{\gamma-1}}\int\limits_{|x-y|}^{x+y}z^3e^{-z^2}[(z^2-(x-y)^2)((x+y)^2-z^2)]^{\frac{\gamma}{2}-1}dz.$$

Найдем интеграл

$$I=\int\limits_{|x-y|}^{x+y}z^3e^{-z^2}[(z^2-(x-y)^2)((x+y)^2-z^2)]^{\frac{\gamma}{2}-1}dz=\{z^2=t\}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{(x-y)^2}^{(x+y)^2}te^{-t}[(t-(x-y)^2)((x+y)^2-t)]^{\frac{\gamma}{2}-1}dt=\{t-(x-y)^2=w\}=$$

$$=\frac{1}{2}e^{-(x-y)^2}\int\limits_0^{4xy}(w+(x-y)^2)e^{-w}[w(4xy-w)]^{\frac{\gamma}{2}-1}dw=$$

$$=\frac{1}{2}e^{-(x-y)^2}\left(\int\limits_0^{4xy}e^{-w}w^{\frac{\gamma}{2}}(4xy-w)^{\frac{\gamma}{2}-1}dw+(x-y)^2\int\limits_0^{4xy}e^{-w}[w(4xy-w)]^{\frac{\gamma}{2}-1}dw\right).$$

Применяя формулу (3.17) и соотношение [126, формула 2.3.6.1] вида

$$\int\limits_0^a x^{\alpha-1}(a-x)^{\beta-1}e^{-px}dx=B(\alpha,\beta)a^{\alpha+\beta-1}\,{}_1F_1(\alpha;\alpha+\beta;-ap),\qquad \operatorname{Re}\alpha,\operatorname{Re}\beta>0,$$

получим

$$I=\frac{1}{2}e^{-(x-y)^2}B\left(\frac{\gamma}{2},\frac{\gamma}{2}+1\right)(4xy)^{\gamma}\,{}_1F_1\left(\frac{\gamma}{2}+1;\gamma+1;-4xy\right)+$$

$$+2^{\gamma-2}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\,(x-y)^2\,e^{-x^2-y^2}(xy)^{\frac{\gamma-1}{2}}I_{\frac{\gamma-1}{2}}\left(2xy\right).$$

Тогда

$$ {}^\gamma T_x^y x^2 e^{-x^2} = \frac{2^\gamma}{(4xy)^{\gamma-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \int\limits_{|x-y|}^{x+y} z e^{-z^2} [(z^2-(x-y)^2)((x+y)^2-z^2)]^{\frac{\gamma}{2}-1} dz = $$

$$ = \frac{2^\gamma}{(4xy)^{\gamma-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \left(\frac{1}{2} e^{-(x-y)^2} B\left(\frac{\gamma}{2}, \frac{\gamma}{2}+1\right) (4xy)^\gamma\, {}_1F_1\left(\frac{\gamma}{2}+1; \gamma+1; -4xy\right) + \right. $$

$$ \left. + 2^{\gamma-2}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right) (x-y)^2 e^{-x^2-y^2} (xy)^{\frac{\gamma-1}{2}} I_{\frac{\gamma-1}{2}}(2xy) \right) = $$

$$ = \frac{2^{\gamma+1}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma(\gamma+1)} e^{-(x-y)^2} xy\ {}_1F_1\left(\frac{\gamma}{2}+1; \gamma+1; -4xy\right) + \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right) (xy)^{\frac{1-\gamma}{2}} e^{-x^2-y^2} I_{\frac{\gamma-1}{2}}(2xy)\,. $$

Получим (3.18). □

4. Обобщенный сдвиг ${}^\gamma T_x^y$ от $j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)$ имеет вид

$$ {}^\gamma T_x^y j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x) = j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)\, j_{\frac{\gamma-1}{2}}(y). \tag{3.19} $$

Доказательство. Используя представление (1.16) функции $j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)$ и соотношение [127, формула 2.12.6.1] в виде

$$ \int\limits_a^b x^{1-\nu}(b^2-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}(x^2-a^2)^{\nu-\frac{1}{2}} J_\nu(cx)dx = $$

$$ = 2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(b^2-a^2)^\nu c^{-\nu}\, J_\nu\left(\frac{cb+ca}{2}\right) J_\nu\left(\frac{cb-ca}{2}\right), $$

$$ 0<a<b, \qquad \nu > -\frac{1}{2}, \qquad |\operatorname{Re} c| < \pi, $$

получим

$$ {}^\gamma T_x^y j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x) = \frac{2^\gamma C(\gamma)}{(4xy)^{\gamma-1}} \int\limits_{|x-y|}^{x+y} z j_{\frac{\gamma-1}{2}}(z) [(z^2-(x-y)^2)((x+y)^2-z^2)]^{\frac{\gamma}{2}-1} dz = $$

$$ = \frac{2^\gamma C(\gamma)}{(4xy)^{\gamma-1}} 2^{\frac{\gamma-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right) \int\limits_{|x-y|}^{x+y} z^{1-\frac{\gamma-1}{2}} J_{\frac{\gamma-1}{2}}(z) [(z^2-(x-y)^2)((x+y)^2-z^2)]^{\frac{\gamma}{2}-1} dz = $$

$$ = \frac{2^\gamma}{(4xy)^{\gamma-1}} 2^{\frac{\gamma-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right) 2^{\frac{\gamma-1}{2}-1} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right) (4xy)^{\frac{\gamma-1}{2}}\, J_{\frac{\gamma-1}{2}}(x) J_{\frac{\gamma-1}{2}}(y) = $$

$$ = j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x) j_{\frac{\gamma-1}{2}}(y). $$

Что и требовалось доказать. □

5. Обобщенный сдвиг от $i_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)$ имеет вид

$$ {}^\gamma T_x^y i_{\frac{\gamma-1}{2}}(x) = i_{\frac{\gamma-1}{2}}(x) i_{\frac{\gamma-1}{2}}(y). \tag{3.20} $$

Доказательство. Используя представление (1.17) функции $i_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)$ и соотношение [126, формула 2.15.3.13] в виде

$$ \int\limits_a^b x^{1-\nu}(b^2-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}(x^2-a^2)^{\nu-\frac{1}{2}} I_\nu(cx)dx = $$

$$ = 2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(b^2-a^2)^\nu c^{-\nu}\, I_\nu\left(\frac{cb+ca}{2}\right) I_\nu\left(\frac{cb-ca}{2}\right), \qquad a,b>0, \qquad \nu > -\frac{1}{2}, $$

получим

$$
{}^\gamma T_x^y i_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)=\frac{2^\gamma C(\gamma)}{(4xy)^{\gamma-1}}\int\limits_{|x-y|}^{x+y} z i_{\frac{\gamma-1}{2}}(z)[(z^2-(x-y)^2)((x+y)^2-z^2)]^{\frac{\gamma}{2}-1}dz=
$$

$$
=\frac{2^\gamma C(\gamma)}{(4xy)^{\gamma-1}}2^{\frac{\gamma-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\int\limits_{|x-y|}^{x+y} z^{1-\frac{\gamma-1}{2}} I_{\frac{\gamma-1}{2}}(z)[(z^2-(x-y)^2)((x+y)^2-z^2)]^{\frac{\gamma}{2}-1}dz=
$$

$$
=\frac{2^\gamma}{(4xy)^{\gamma-1}}2^{\frac{\gamma-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)2^{\frac{\gamma-1}{2}-1}\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)(4xy)^{\frac{\gamma-1}{2}}\,I_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)I_{\frac{\gamma-1}{2}}(y)=
$$

$$
=i_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)i_{\frac{\gamma-1}{2}}(y).
$$

Что и требовалось доказать. □

Если в определениях и утверждениях классического гармонического анализа заменить обычный сдвиг обобщенным, то получится *весовой гармонический анализ* (см., например, [36, 57, 101–103, 120–122]) из-за наличия степенного веса x^γ под знаком интегралов.

Переходя к многомерному случаю, нам необходимо также перейти от числа γ к вектору $(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$. А именно, будем рассматривать мультииндекс $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$, состоящий из положительных фиксированных чисел $\gamma_i>0$, $i=1,\ldots,n$, полагая $|\gamma|=\gamma_1+\ldots+\gamma_n$.

Определение 3.3. *Многомерный обобщенный сдвиг* определяется равенством

$$
({}^\gamma\mathbf{T}_x^y f)(x)={}^\gamma\mathbf{T}_x^y f(x)=({}^{\gamma_1}T_{x_1}^{y_1}\ldots{}^{\gamma_n}T_{x_n}^{y_n}f)(x), \tag{3.21}
$$

где каждый из обобщенных сдвигов ${}^{\gamma_i}T_{x_i}^{y_i}$ определен при $i=1,\ldots,n$ выражением (3.1):

$$
({}^{\gamma_i}T_{x_i}^{y_i}f)(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}\int\limits_0^\pi f(x_1,\ldots,x_{i-1},\sqrt{x_i^2+\tau_i^2-2x_iy_i\cos\varphi_i},x_{i+1},\ldots,x_n)\ \sin^{\gamma_i-1}\varphi_i\,d\varphi_i.
$$

Очевидно, что свойства одномерного обобщенного сдвига переносятся и на многомерный. Так, например, справедливы равенства

$$
{}^\gamma\mathbf{T}_x^y\,\mathbf{j}_\gamma(x;\xi)=\mathbf{j}_\gamma(x;\xi)\mathbf{j}_\gamma(y;\xi), \tag{3.22}
$$

$$
{}^\gamma\mathbf{T}_x^y\,\mathbf{i}_\gamma(x;\xi)=\mathbf{i}_\gamma(x;\xi)\mathbf{i}_\gamma(y;\xi), \tag{3.23}
$$

где

$$
\mathbf{j}_\gamma(x;\xi)=\prod_{i=1}^n j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i),\quad \mathbf{i}_\gamma(x;\xi)=\prod_{i=1}^n i_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i),\quad \gamma_1>0,\ldots,\gamma_n>0,
$$

а функция j_ν определена равенством (1.16) и i_ν определена равенством (1.17).

Определение 3.4. *Обобщенной сверткой*, порожденной многомерным обобщенным сдвигом ${}^\gamma\mathbf{T}_x^y$, называется выражение

$$
(f*g)_\gamma(x)=(f*g)_\gamma=\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} f(y)({}^\gamma\mathbf{T}_x^y g)(x)y^\gamma\,dy. \tag{3.24}
$$

Для обобщенной свертки (3.24) известно неравенство Юнга, которое приведем для удобства с доказательством.

Утверждение 3.1. *Пусть* $p,q,r\in[1,\infty]$ *и*

$$
\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1+\frac{1}{r}. \tag{3.25}
$$

Если $f\in L_p^\gamma$, $g\in L_q^\gamma$, *то обобщенная свертка* $(f*g)_\gamma$ *ограничена почти всюду и справедливо неравенство* (*неравенство Юнга*)

$$
||(f*g)_\gamma||_{r,\gamma}\leqslant||f||_{p,\gamma}||g||_{q,\gamma}. \tag{3.26}
$$

Если $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, *то*

$$||(f*g)_\gamma||_{\infty,\gamma}\leqslant ||f||_{p,\gamma}||g||_{q,\gamma}. \tag{3.27}$$

Доказательство. Пусть

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=1. \tag{3.28}$$

Применим к выражению $|(f*g)_\gamma(x)|$ неравенство Гельдера для трех функций:

$$|(f*g)_\gamma(x)|=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(y)({}^\gamma\mathbf{T}^y_x g)(x)y^\gamma dy\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|f(y)|^{1-a}|({}^\gamma\mathbf{T}^y_x g)(x)|^{1-b}|f(y)|^a|({}^\gamma\mathbf{T}^y_x g)(x)|^b y^\gamma dy\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|f(y)|^{(1-a)r}|({}^\gamma\mathbf{T}^y_x g)(x)|^{(1-b)r}y^\gamma dy\right)^{1/r}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|f(y)|^{ap_1}y^\gamma dy\right)^{1/p_1}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|({}^\gamma\mathbf{T}^y_x g)(x)|^{bp_2}y^\gamma dy\right)^{1/p_2}.$$

Рассмотрим интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|({}^\gamma\mathbf{T}^y_x g)(x)|^{bp_2}y^\gamma dy$. Произведя в $({}^\gamma\mathbf{T}^y_x g)(x)$ замену (см. [103])

$$z_{2i-1}=y_i\cos\alpha_i,\quad z_{2i}=y_i\sin\alpha_i,\quad 0\leqslant\alpha_i\leqslant\pi,\quad i=1,\ldots,n,$$

и, полагая

$$\widetilde{\mathbb{R}}^{2n}_+=\{z=(z_1,\ldots,z_{2n})\in\mathbb{R}^{2n}:z_{2i}>0, i=1,\ldots,n\},$$

получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|({}^\gamma\mathbf{T}^y_x g)(x)|^{bp_2}y^\gamma dy=\int\limits_{\widetilde{\mathbb{R}}^{2n}_+}|g(\sqrt{(z_1-y_1)^2+z_2^2},\ldots,\sqrt{(z_{2n-1}-y_n)^2+z_{2n}^2})|^{bp_2}\prod_{i=1}^n z_{2i}^{\gamma_i-1}dz=$$

$$=\{(z_{2i-1}-y_n)\to z_{2i-1}\}=\int\limits_{\widetilde{\mathbb{R}}^{2n}_+}|g(\sqrt{z_1^2+z_2^2},\ldots,\sqrt{z_{2n-1}^2+z_{2n}^2})|^{bp_2}\prod_{i=1}^n z_{2i}^{\gamma_i-1}dz=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|g(x)|^{bp_2}x^\gamma dx.$$

Имеем

$$|(f*g)_\gamma(x)|\leqslant||f||^a_{ap_1}||g||^b_{bp_2}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|f(y)|^{(1-a)r}|({}^\gamma\mathbf{T}^y_x g)(x)|^{(1-b)r}y^\gamma dy\right)^{1/r}.$$

Возведем последнее неравенство в степень r, умножим обе его части на x^γ и проинтегрируем по $\mathbb{R}^n_+$, получим

$$||(f*g)_\gamma||^r_{r,\gamma}\leqslant||f||^{ra}_{ap_1}||g||^{rb}_{bp_2}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|f(y)|^{(1-a)r}|({}^\gamma\mathbf{T}^y_x g)(x)|^{(1-b)r}y^\gamma dy\,x^\gamma dx=$$

$$=||f||^{ra}_{ap_1}||g||^{rb}_{bp_2}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|f(y)|^{(1-a)r}y^\gamma dy\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|({}^\gamma\mathbf{T}^y_x g)(x)|^{(1-b)r}x^\gamma dx=$$

$$=||f||^{ra}_{ap_1}||g||^{rb}_{bp_2}||f||^{(1-a)r}_{(1-a)r}||g||^{(1-b)r}_{(1-b)r}.$$

Выберем a и b так, чтобы $(1-a)r=ap_1$ и $(1-b)r=bp_2$, т. е. $a=\dfrac{r}{r+p_1}$ и $b=\dfrac{r}{r+p_2}$, будем иметь

$$||(f*g)_\gamma||^r_{r,\gamma}\leqslant||f||^{ra+ap_1}_{ap_1}||g||^{rb+bp_2}_{bp_2}=||f||^r_{ap_1}||g||^r_{bp_2},$$

или, положив $ap_1=p$ и $bp_2=q$,

$$||(f*g)_\gamma||_{r,\gamma}\leqslant||f||_p||g||_q.$$

Осталось показать, что при таком выборе p_1 и p_2 выполняется (3.28):

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=\frac{1}{r}+\frac{a}{p}+\frac{b}{q}=\frac{1}{r}+\frac{1}{p}\Big(1-\frac{p}{r}\Big)+\frac{1}{q}\Big(1-\frac{q}{r}\Big)=$$
$$=\frac{1}{r}+\frac{1}{p}-\frac{1}{r}+\frac{1}{q}-\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{r}=1.$$

Неравенство (3.27) получается предельным переходом при $r\to\infty$ с учетом утверждения 2.1. $\square$

3.2. Интегралы по части сферы. Приведем некоторые обозначения и формулы, связанные с интегралами по части сферы и по части шара в $\mathbb{R}^n_+$, и докажем вспомогательное утверждение о связи интеграла по части шара от оператора Δ_γ и интеграла по части сферы.

Часть шара $|x|\leqslant R$, $|x|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$, принадлежащую $\mathbb{R}^n_+$, будем обозначать $B^+_R(n)$. Граница $B^+_R(n)$ состоит из части сферы $S^+_R(n)=\{x\in\mathbb{R}^n_+ : |x|=R\}$ и из частей координатных гиперплоскостей $x_i=0$, $i=1,\ldots,n$, таких что $|x|\leqslant R$.

Справедливы формулы

$$\int\limits_{B^+_r(n)} u(x)x^\gamma dx = r^{n+|\gamma|}\int\limits_{B^+_1(n)} u(rx)x^\gamma dx, \tag{3.29}$$

$$\int\limits_{S^+_r(n)} u(\theta)\theta^\gamma dS_r = r^{n+|\gamma|-1}\int\limits_{S^+_1(n)} u(r\theta)\theta^\gamma dS, \tag{3.30}$$

где dS — элемент поверхности $S^+_1(n)$ и dS_r — элемент поверхности $S^+_r(n)$.

Для интегрируемой по $B^+_r(n)$ с весом x^γ функции $f(x)$ и для непрерывной при $t\in[0,\infty)$ функции $g(t)$ имеют место формула (см., например, [104])

$$\int\limits_{B^+_r(n)} g(|x|)f(x)\,x^\gamma\,dx=\int\limits_0^r g(\lambda)\lambda^{n+|\gamma|-1}d\lambda\int\limits_{S^+_1(n)} f(\lambda\theta)\theta^\gamma dS \tag{3.31}$$

и при $g(x)=1$ и непрерывной на $B^+_r(n)$ функции $f(z)$

$$r^{1-n-|\gamma|}\frac{d}{dr}\int\limits_{B^+_r(n)} f(z)z^\gamma dz=\int\limits_{S^+_1(n)} f(r\theta)\theta^\gamma dS. \tag{3.32}$$

Соотношения (3.31) и (3.32) легко получаются переходом к сферическим координатам $x=\lambda\theta$, $|\theta|=1$ в левой части.

Интеграл $\int\limits_{S^+_1(n)} x^\gamma dS$ обозначается $|S^+_1(n)|_\gamma$ и находится по формуле (см. [103, формула 1.2.5, с. 20], где надо положить $N=n$)

$$|S^+_1(n)|_\gamma=\int\limits_{S^+_1(n)} x^\gamma dS=\frac{\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}. \tag{3.33}$$

Утверждение 3.2. *Для $w\in C^2_{ev}(\overline{\Omega}^+)$ справедлива следующая формула*:

$$\int\limits_{B^+_R(n)} (\Delta_\gamma w(x))\,x^\gamma dx=\int\limits_{S^+_R(n)}\left(\frac{\partial w(x)}{\partial\vec{\nu}}\right)x^\gamma\,dS_R, \tag{3.34}$$

где $\vec{\nu}$ — внешняя нормаль к части сферы $S^+_R(n)$,

$$\Delta_\gamma=\sum_{i=1}^n (B_{\gamma_i})_{x_i}=\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x}.$$

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_{B_R^+(n)} (\Delta_\gamma w(x))\, x^\gamma dx = \sum_{i=1}^n \int\limits_{B_1^+(n)} (B_{\gamma_i} w(x))\, x^\gamma dx.$$

Учитывая, что оператор Бесселя в факторизованном виде записывается следующим образом:

$$B_{\gamma_i} = \frac{1}{x_i^{\gamma_i}} \frac{\partial}{\partial x_i} x_i^{\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

получим

$$\int\limits_{B_R^+(n)} \Delta_\gamma w\, x^\gamma dx = \sum_{i=1}^n \int\limits_{B_R^+(n)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} x_i^{\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i} w(x)\right) \frac{x^\gamma}{x_i^{\gamma_i}} dx =$$

$$= \sum_{i=1}^n \int\limits_{x_1^2+\ldots+x_{i-1}^2+x_{i+1}^2+\ldots+x_n^2 \leqslant R^2} x_1^{\gamma_1} \ldots x_{i-1}^{\gamma_{i-1}} x_{i+1}^{\gamma_{i+1}} \ldots x_n^{\gamma_n} dx_1 \ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_n \times$$

$$\times \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x_1^2-\ldots-x_{i-1}^2-x_{i+1}^2-\ldots-x_n^2}} \frac{\partial}{\partial x_i} x_i^{\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i} w(x) dx_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n \int\limits_{x_1^2+\ldots+x_{i-1}^2+x_{i+1}^2+\ldots+x_n^2 \leqslant R^2} \left(x_i^{\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i} w(x)\right)\Bigg|_{x_i=\sqrt{R^2-x_1^2-\ldots-x_{i-1}^2-x_{i+1}^2-\ldots-x_n^2}} \times$$

$$\times x_1^{\gamma_1} \ldots x_{i-1}^{\gamma_{i-1}} x_{i+1}^{\gamma_{i+1}} \ldots x_n^{\gamma_n} dx_1 \ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_n = \sum_{i=1}^n \int\limits_{S_R^+(n)} \frac{\partial}{\partial x_i} w(x)\, \cos\eta_i\, x^\gamma dS,$$

где

$$\cos\eta_i = \frac{1}{\sqrt{1+(h'_{x_1})^2+\ldots+(h'_{x_{i-1}})^2+(h'_{x_{i+1}})^2+\ldots+(h'_{x_n})^2}} = \frac{x_i}{R},$$

$$h = x_i = \sqrt{R^2 - x_1^2 - \ldots - x_{i-1}^2 - x_{i+1}^2 - \ldots - x_n^2}.$$

Выражение $\sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} w(x)\, \cos\eta_i$ представляет собой производную по направлению внешней нормали к части сферы $S_1^+(n)$ вида $\vec{\nu} = (\cos\eta_1, \ldots, \cos\eta_n)$. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_{S_R^+(n)} \frac{\partial}{\partial x_i} w(x)\, \cos\eta_i\, x^\gamma dS = \int\limits_{S_R^+(n)} \left(\frac{\partial w(x)}{\partial \vec{\nu}}\right) x^\gamma\, dS,$$

что завершает доказательство. □

3.3. Весовое сферическое среднее. В этом пункте рассмотрим весовое сферическое среднее, являющееся оператором преобразования, сплетающим многомерный оператор $(\Delta_\gamma)_x$, $x \in \mathbb{R}_+^n$ (см. (0.8)) и одномерный оператор Бесселя $(B_{n+|\gamma|-1})_t$, $t > 0$. Приведем определение и свойства весового сферического среднего, основным из которых является его действие на оператор Δ_γ.

Начнем с определения классического сферического среднего. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $|x| = \sum\limits_{j=1}^n x_j^2$. *Классическое сферическое среднее* имеет вид

$$M(x, r, u) = \frac{1}{|S_n(1)|} \int\limits_{S_n(1)} u(x + \beta r) dS, \tag{3.35}$$

где $S_n(1) = \{ \, x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1 \, \}$ — сфера единичного радиуса с центром в начале координат, $r \geqslant 0$, $f(x+\beta r) = f(x_1+\beta_1 r, \ldots, x_n+\beta_n r)$,

$$|S_n(1)| = \int\limits_{S_n} dS = 2\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

— площадь сферы $S_n(1)$, $\Gamma(\alpha)$ — гамма функция Эйлера (1.1), dS — элемент поверхности $S_n(1)$.

Операторы (3.35) естественным образом возникают в математике при решении различных задач для уравнений гиперболического типа. А именно, (3.35) представляет собой оператор преобразования (см. определение 2.1), использующий сферическую симметрию оператора Лапласа и преобразующий многомерный оператор Лапласа в одномерный оператор Бесселя (см. [6, с. 22]). Метод сведения волнового уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad u = u(x_1, \ldots, x_n, t) \tag{3.36}$$

в случае $n \geqslant 2$ пространственных переменных к волновому уравнению с одной пространственной переменной посредством оператора (3.35) при $n = 3$ изложен С. Д. Пуассоном (Siméon Denis Poisson) в [254] (см. также [2, с. 50], [6, с. 22]). В случае произвольного $n \geqslant 2$ решение (3.36) выражено через (3.35) в [39, с. 36]. Теорема о среднем (3.35) для регулярной гармонической функции приведена в [86, с. 278]. Л. Асгейрссон (Leifur Ásgeirsson) в [184] доказал теорему о сферических средних для ультрагиперболического уравнения вида

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2 u}, \qquad u = u(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n). \tag{3.37}$$

Р. Курант (Richard Courant) в книге [86, с. 473] (см. также [84, с. 738]) применяет теорему Асгейрссона к решению задачи Коши для волнового уравнения. Ф. Йон (Fritz John) [39, с. 87] доказывает единственность решения задачи О. Л. Коши (Augustin Louis Cauchy) вида

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad u = u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad 0 < k < \infty,$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

и получает решение этой задачи. Л. Хермандер (Lars Hörmander) в [175, с. 222] доказал уточнение теоремы Асгейрссона, при помощи которого затем получена формула Г. Кирхгофа (Gustav Kirchhoff). Исследования вопросов корректности постановки и разрешимости задач для ультрагиперболического уравнения (3.37) при помощи теоремы Асгейрссона приведены в [5,8,9,79,252,255].

Большой интерес у различных исследователей вызывает обобщение сферического среднего (3.35). Так, в работе [285] рассмотрено сферическое среднее в пространстве с отрицательной кривизной, в [204, 218] рассмотрено обобщение сферического среднего, порожденное оператором преобразования Ч. Дункла (Charles Dunkl). В этой работе будет рассмотрено обобщение сферического среднего, сплетающее оператор Δ_γ и оператор Бесселя $B_{n+|\gamma|-1}$. Такое весовое сферическое среднее тесно связано с B-ультрагиперболическим уравнением вида

$$\sum_{j=1}^{n} (B_\nu)_{x_j} u = \sum_{j=1}^{n} (B_\nu)_{y_j} u, \qquad u = u(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n). \tag{3.38}$$

При построении весового сферического среднего вместо обычного сдвига применяется многомерный обобщенный сдвиг (3.21).

Определение 3.5. *Весовое сферическое среднее* функции f при $n \geqslant 2$ имеет вид (см. [104])

$$M_t^\gamma[f] = (M_t^\gamma)_x[f(x)] = \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma} \int\limits_{S_1^+(n)} {}^\gamma\mathbf{T}_x^{t\theta} f(x) \theta^\gamma dS, \tag{3.39}$$

где $\theta^\gamma = \prod\limits_{i=1}^n \theta_i^{\gamma_i}$, $S_1^+(n) = \{\theta{:}|\theta| = 1, \theta \in \mathbb{R}_+^n\}$ — часть сферы в $\mathbb{R}_+^n$, а

$$|S_1^+(n)|_\gamma = \frac{\prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}. \tag{3.40}$$

При $n = 1$ положим $M_t^\gamma[f(x)] = {}^\gamma T_x^t f(x)$.

Отметим простейшие свойства весового сферического среднего (см. [104]).

1. Линейность и однородность:

$$M_t^\gamma[af(x) + bg(x)] = aM_t^\gamma[f(x)] + bM_t^\gamma[g(x)], \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

2. Положительность: если $f(x) \geqslant 0$, то $M_t^\gamma[f(x)] \geqslant 0$.
3. $M_t^\gamma[1] = 1$.
4. При $t = 0$ справедливы равенства

$$M_t^\gamma[f(x)]|_{t=0} = f(x), \qquad \frac{\partial}{\partial t} M_t^\gamma[f(x)]\bigg|_{t=0} = 0. \tag{3.41}$$

5. Если $f(x) \in C_{ev}^2$, то

$$(\triangle_\gamma)_x M_t^\gamma[f(x)] = M_t^\gamma[\triangle_\gamma f(x)].$$

6. Справедливы равенства

$$(M_r^\gamma)_x[\mathbf{j}_\gamma(x, \xi)] = \mathbf{j}_\gamma(x, \xi)\; j_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(r|\xi|), \tag{3.42}$$

$$(M_r^\gamma)_x[\mathbf{i}_\gamma(x, \xi)] = \mathbf{i}_\gamma(x, \xi)\; i_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(r|\xi|), \tag{3.43}$$

которые следуют из (2.16) и (2.18).

Утверждение 3.3. *Весовое сферическое среднее $M_t^\gamma[f]$ для $f \in C_{ev}^2$ есть оператор преобразования, сплетающий $(\Delta_\gamma)_x$ и $(B_{n+|\gamma|-1})_t$:*

$$(B_{n+|\gamma|-1})_t M_t^\gamma[f(x)] = M_t^\gamma[(\Delta_\gamma)_x f(x)]. \tag{3.44}$$

Доказательство. Сначала заметим, что функция $f \in C_{ev}^2$ удовлетворяет соотношению (3.31):

$$\int\limits_{B_t^+(n)} f(x)\, x^\gamma\, dx = \int\limits_0^t \lambda^{n+|\gamma|-1}\, d\lambda \int\limits_{S_1^+(n)} f(\lambda\theta)\, \theta^\gamma dS_\theta. \tag{3.45}$$

Используя (3.45), запишем

$$|S_1^+(n)|_\gamma \int\limits_0^t \lambda^{n+|\gamma|-1} M_\lambda^\gamma[f(x)]d\lambda = \int\limits_0^t \lambda^{n+|\gamma|-1} d\lambda \int\limits_{S_1^+(n)} (T^{\lambda y} f)(x)\; y^\gamma dS_y = \int\limits_{B_r^+(n)} (T^z f)(x) z^\gamma dz. \tag{3.46}$$

Применяя оператор $(\Delta_\gamma)_x$ к обеим частям (3.46), получим

$$|S_1^+(n)|_\gamma \int\limits_0^t \lambda^{n+|\gamma|-1} (\Delta_\gamma)_x\, M_\lambda^\gamma[f(x)]d\lambda = \int\limits_{B_t^+(n)} (\Delta_\gamma)_x (T_x^z f)(x) z^\gamma dz = \sum_{i=1}^n \int\limits_{B_t^+(n)} (B_{\gamma_i})_{z_i} T_x^z f(x) z^\gamma dz.$$

В силу (3.4) имеем

$$(B_{\gamma_i})_{z_i} T_{x_i}^{z_i} f(x) = (B_{\gamma_i})_{x_i} T_{x_i}^{z_i} f(x)$$

и, следовательно,

$$(\Delta_\gamma)_x (T_x^z f)(x) = (\Delta_\gamma)_z (T_x^z f)(x).$$

Тогда

$$|S_1^+(n)|_\gamma \int\limits_0^t \lambda^{n+|\gamma|-1} (\Delta_\gamma)_x\, M_\lambda^\gamma[f(x)]d\lambda = \int\limits_{B_t^+(n)} [(\Delta_\gamma)_z (T_x^z f)(x)]\, z^\gamma dz.$$

Применяя к последнему интегралу формулу (3.34), получим

$$|S_1^+(n)|_\gamma \int\limits_0^t \lambda^{n+|\gamma|-1}(\Delta_\gamma)_x\, M_\lambda^\gamma[f(x)]d\lambda = \int\limits_{S_t^+(n)} \left(\frac{\partial(T_x^z f)(x)}{\partial\vec{\nu}}\right) z^\gamma\, dS, \tag{3.47}$$

где $\vec{\nu}$ — внешняя нормаль к части сферы $S_R^+(n)$. Преобразуем производную по направлению:

$$\frac{\partial(T_x^z f)(x)}{\partial\vec{\nu}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(T_x^z f)(x)}{\partial z_i}\frac{z_i}{t}.$$

Имеем

$$\frac{\partial(T_x^z f)(x)}{\partial z_i} = T_{x_1}^{z_1}\ldots T_{x_{i-1}}^{z_{i-1}}T_{x_{i+1}}^{z_{i+1}}\ldots T_{x_n}^{z_n}\frac{\partial T_{x_i}^{z_i} f(x)}{\partial z_i},$$

$$\frac{\partial T_{x_i}^{z_i} f(x)}{\partial z_i} = C(\gamma_i)\int\limits_0^\pi \frac{\partial}{\partial z_i} f(x_1,\ldots,x_{i-1},\sqrt{x_i^2-2x_iz_i\cos\varphi_i+z_i^2},x_{i+1},\ldots,x_n)\sin^{\gamma_i-1}\varphi_i d\varphi_i =$$

$$= C(\gamma_i)\int\limits_0^\pi \frac{z_i-x_i\cos\varphi_i}{\sqrt{x_i^2-2x_iz_i\cos\varphi_i+z_i^2}} f_i'(x_1,\ldots,x_{i-1},\sqrt{x_i^2-2x_iz_i\cos\varphi_i+z_i^2},x_{i+1},\ldots,x_n)\sin^{\gamma_i-1}\varphi_i d\varphi_i,$$

$$\frac{\partial T_{x_i}^{z_i} f(x)}{\partial x_i} = C(\gamma_i)\int\limits_0^\pi \frac{x_i-z_i\cos\varphi_i}{\sqrt{x_i^2-2x_iz_i\cos\varphi_i+z_i^2}}\times$$

$$\times f_i'(x_1,\ldots,x_{i-1},\sqrt{x_i^2-2x_iz_i\cos\varphi_i+z_i^2},x_{i+1},\ldots,x_n)\sin^{\gamma_i-1}\varphi_i d\varphi_i,$$

где f_i' означает производную функции f по i-му аргументу. Тогда

$$\frac{\partial T_{x_i}^{z_i} f(x)}{\partial z_i} = \frac{z_i-x_i\cos\varphi_i}{x_i-z_i\cos\varphi_i}\frac{\partial T_{x_i}^{z_i} f(x)}{\partial x_i}, \tag{3.48}$$

$$\int\limits_{S_t^+(n)} \left(\frac{\partial(T_x^z f)(x)}{\partial\vec{\nu}}\right) z^\gamma\, dS = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^n \int\limits_{S_t^+(n)} \frac{z_i-x_i\cos\varphi_i}{x_i-z_i\cos\varphi_i}\frac{\partial T_{x_i}^{z_i} f(x)}{\partial x_i}\cdot z_i\cdot z^\gamma\, dS.$$

Произведем замену $z=ty$, $y\in\mathbb{R}_+^n$; тогда, с учетом (3.48), получим

$$\int\limits_{S_t^+(n)} \left(\frac{\partial(T_x^z f)(x)}{\partial\vec{\nu}}\right) z^\gamma\, dS = t^{n+|\gamma|-1}\sum_{i=1}^n \int\limits_{S_t^+(n)} \frac{ty_i-x_i\cos\varphi_i}{x_i-ty_i\cos\varphi_i}\frac{\partial T_{x_i}^{ty_i} f(x)}{\partial x_i}\cdot y_i\cdot y^\gamma\, dS =$$

$$= t^{n+|\gamma|-1}\sum_{i=1}^n \int\limits_{S_t^+(n)} \left(\frac{\partial T_{x_i}^{ty_i} f(x)}{\partial(ty_i)}\right)\cdot y_i\cdot y^\gamma\, dS =$$

$$= t^{n+|\gamma|-1}\int\limits_{S_t^+(n)} \frac{dT_{x_i}^{ty_i} f(x)}{dt} y^\gamma\, dS = t^{n+|\gamma|-1}\frac{d}{dt}\int\limits_{S_t^+(n)} T_{x_i}^{ty_i} f(x) y^\gamma\, dS.$$

Возвращаясь к (3.47), будем иметь

$$|S_1^+(n)|_\gamma \int\limits_0^t \lambda^{n+|\gamma|-1}(\Delta_\gamma)_x\, M_\lambda^\gamma[f(x)]d\lambda = t^{n+|\gamma|-1}\frac{d}{dt}\int\limits_{S_t^+(n)} T_{x_i}^{ty_i} f(x) y^\gamma\, dS,$$

или

$$\int\limits_0^t \lambda^{n+|\gamma|-1}(\Delta_\gamma)_x\, M_\lambda^\gamma[f(x)]d\lambda = t^{n+|\gamma|-1}\frac{d}{dt}\, M_t^\gamma[f(x)].$$

Дифференцируя последнее выражение по t, получим

$$t^{n+|\gamma|-1}(\Delta_\gamma)_x\, M_t^\gamma[f(x)] = t^{n+|\gamma|-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\, M_t^\gamma[f(x)] + (n+|\gamma|-1)t^{n+|\gamma|-2}\frac{\partial}{\partial t}\, M_t^\gamma[f(x)].$$

Разделив последнее равенство на $t^{n+|\gamma|-1}$, имеем

$$(\Delta_\gamma)_x\, M_t^\gamma[f(x)] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\, M_t^\gamma[f(x)] + \frac{n+|\gamma|-1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\, M_t^\gamma[f(x)],$$

или

$$(\Delta_\gamma)_x\, M_t^\gamma[f(x)] = (B_{n+|\gamma|-1})_t M_t^\gamma[f(x)].$$

Применение свойства 5 весового сферического среднего завершает доказательство теоремы. □

Глава 2

ВЕСОВЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ, СВЯЗАННЫЕ С КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

Хорошо известна связь между обобщенными функциями, порожденными квадратичными формами, и фундаментальными решениями дифференциальных уравнений второго порядка (см. [15,175,221] и др.). В этой главе рассмотрим обобщенные функции, связанные с квадратичными формами, сконструированные посредством весового функционала. Такие функции приспособлены для решения задач, в которых присутствует оператор Бесселя.

4. Весовая обобщенная функции, сосредоточенная на части конуса

В этом разделе рассматривается весовая δ-функция, сосредоточенная на части конуса в $\mathbb{R}^n_+$, то есть обобщенная функция, действие которой на основную функцию равно интегралу этой функции по части конуса в $\mathbb{R}^n_+$ с весом x^γ. Получены формулы для производных такой функции.

4.1. B-ультрагиперболический оператор и квадратичные формы. И. М. Гельфандом и Г. Е. Шиловым в книге [15] предложена идея нахождения фундаментальных решений дифференциальных операторов второго порядка посредством изучения коэффициентов рядов Лорана обобщенных функций, отвечающих квадратичной форме, соответствующей рассматриваемому оператору. Этот метод удобен тем, что имея информацию о вычетах указанной обобщенной функции, можно получить решение уравнения, содержащее итерированный оператор, и, в зависимости от соотношения, связывающего порядок итерации и размерность пространства, это будет либо фундаментальное решение, либо решение однородного уравнения. Так, для получения фундаментального решения ультрагиперболического оператора рассматриваются обобщенные функции, порожденные квадратичной формой $P = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2$. Мы будем рассматривать обобщенные функции, приспособленные для работы с ультрагиперболическими операторами и их степенями, где вместо каждой второй производной действует дифференциальный оператор Бесселя, т. е. операторами вида

$$\Box_\gamma = \Box_{\gamma',\gamma''} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\gamma_1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} + \frac{\gamma_p}{x_p}\frac{\partial}{\partial x_p} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \frac{\gamma_{p+1}}{x_{p+1}}\frac{\partial}{\partial x_{p+1}} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2} + \frac{\gamma_{p+q}}{x_{p+q}}\frac{\partial}{\partial x_{p+q}}, \tag{4.1}$$

где $\gamma_i > 0$, $i = 1, \ldots, p+q$, $p, q \in \mathbb{N}$. Оператор $\Box_\gamma = \Box_{\gamma',\gamma''}$ мы называем *B-ультрагиперболическим оператором*.

Пусть

$$p, q \in \mathbb{N},\ n = p+q,\ x = (x_1, \ldots, x_n) = (x', x'') \in \mathbb{R}^n_+,\ x' = (x_1, \ldots, x_p),\ x'' = (x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}).$$

Весовые обобщенные функции, посредством которых решаются задачи для общих уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу и вводятся дробные степени оператора $\Box_\gamma$, связаны с неопределенными квадратичными формами P и $\mathscr{P}$ вида

$$P = |x'|^2 - |x''|^2, \qquad |x'|^2 = x_1^2 + \ldots + x_p^2, \qquad |x''|^2 = x_{p+1}^2 + \ldots + x_{p+q}^2 \tag{4.2}$$

$$\mathscr{P}(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k x_k^2, \qquad g_k \in \mathbb{C}, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{4.3}$$

Далее определим и изучим следующие весовые обобщенные функции, связанные с квадратичными формами (4.2) и (4.3) при $\lambda \in \mathbb{C}$ (см. [181]):

- $\delta_\gamma(P)$;
- $P^\lambda_{\gamma,+}$, $P^\lambda_{\gamma,-}$;
- $\mathscr{P}^\lambda_\gamma$, $\mathscr{P} = P_1 + iP_2$, где P_1 — неопределенная квадратичная форма с вещественными коэффициентами, P_2 — положительно определенная квадратичная форма;
- $(P + i0)^\lambda_\gamma$, $(P - i0)^\lambda_\gamma$;
- $(c^2 + P + i0)^\lambda_\gamma$, $(c^2 + P - i0)^\lambda_\gamma$;
- $\mathscr{P}^\lambda_\gamma f(\mathscr{P}, \lambda)$, где $f(z, \lambda)$ — целая функция.

В разделе 7 будут найдены преобразования Ханкеля функций $\mathscr{P}^\lambda_\gamma$, $(P \pm i0)^\lambda_\gamma$, $P^\lambda_{\gamma,\pm}$, $(w^2 - |x|^2)^\lambda_{+,\gamma}$ и $(c^2 + P \pm i0)^\lambda_\gamma$. Результаты, полученные в этой главе, применяются для построения гиперболических B-потенциалов (см. главу 3), к получению фундаментального решения B-ультрагиперболического уравнения и к решению задач Коши для обобщений уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу (см. главу 4).

4.2. Весовая обобщенная функции, сосредоточенная на части конуса. Определим функцию $\delta_\gamma(P)$, представляющую собой весовую обобщенную функцию, сосредоточенную на части конуса в $\mathbb{R}^n_+$.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) = (x', x'')$, $x' = (x_1, \ldots, x_p)$, $x'' = (x_{p+1}, \ldots, x_{p+q})$,

$$P = |x'|^2 - |x''|^2 = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2, \qquad n = p + q.$$

Определение 4.1. Для функции $\varphi \in S_{ev}$, равной нулю в окрестности начала координат, *весовая обобщенная функция* $\delta_\gamma(P)$, сосредоточенная на части конуса $P = 0$, принадлежащей $\mathbb{R}^n_+$, определяется посредством весового функционала вида

$$(\delta_\gamma(P), \varphi)_\gamma = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \delta_\gamma(|x'|^2 - |x''|^2)\varphi(x) x^\gamma dx. \tag{4.4}$$

Если же $\varphi \in S_{ev}$, то $(\delta_\gamma(P), \varphi)_\gamma$ понимается как регуляризованное значение интеграла в (4.4).

Лемма 4.1. *Для $(\delta_\gamma(P), \varphi(x))_\gamma$ при $p > 1$, $q > 1$ справедливо представление*

$$(\delta_\gamma(P), \varphi(x))_\gamma = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \int\limits_{\{|\omega'|=1\}^+} \int\limits_{\{|\omega''|=1\}^+} \varphi(s\omega) s^{n+|\gamma|-3} \omega^\gamma dS' dS'' ds, \qquad \varphi \in S_{ev}, \tag{4.5}$$

где $\{|\omega'| = 1\}^+ = \{\omega' \in \mathbb{R}^p_+ : |\omega'| = 1\}$, $\{|\omega''| = 1\}^+ = \{\omega'' \in \mathbb{R}^q_+ : |\omega''| = 1\}$.

При $p = q = 1$, $P = x^2 - y^2$

$$(\delta_\gamma(x^2 - y^2), \varphi(x, y))_\gamma = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \varphi(y, y) y^{|\gamma|-1} dy.$$

При $p = 1$, $q = n - 1 > 1$, $P = x_1^2 - |x''|^2$, $\gamma'' = (\gamma_2, \ldots, \gamma_n)$

$$(\delta_\gamma(P), \varphi(x))_\gamma = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \int\limits_{S_1^+(n-1)} \varphi(y, y\sigma) y^{n+|\gamma|-3} dy\, \sigma^{\gamma''} dS.$$

При $q = 1$, $p = n - 1 > 1$, $P = |x'|^2 - x_n^2$, $\gamma' = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1})$

$$(\delta_\gamma(P), \varphi(x))_\gamma = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \int\limits_{S_1^+(n-1)} \varphi(x\sigma, x) x^{n+|\gamma|-3} dx\, \sigma^{\gamma'} dS.$$

Доказательство. Пусть сначала $p>1$, $q>1$. Перейдем к биполярным координатам

$$x_1=r\omega_1,\dots,x_p=r\omega_p,\ x_{p+1}=s\omega_{p+1},\dots,x_{p+q}=s\omega_{p+q},\tag{4.6}$$

где $r=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_p^2}$, $s=\sqrt{x_{p+1}^2+\ldots+x_{p+q}^2}$. Пусть $\omega'=(\omega_1,\dots,\omega_p)\in\mathbb{R}_+^p$, $\omega''=(\omega_{p+1},\dots,\omega_n)\in\mathbb{R}_+^q$, $|\omega'|=\sqrt{\omega_1^2+\ldots+\omega_p^2}=1$, $|\omega''|=\sqrt{\omega_{p+1}^2+\ldots+\omega_{p+q}^2}=1$. Получим

$$(\delta_\gamma(P),\varphi(x))_\gamma=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_{\{|\omega'|=1\}^+}\int\limits_{\{|\omega''|=1\}^+}\delta(r^2-s^2)\varphi(r\omega',s\omega'')r^{p+|\gamma'|-1}s^{q+|\gamma''|-1}\omega^\gamma dS'dS''drds,$$

где $\{|\omega'|=1\}^+=\{\omega'\in\mathbb{R}_+^p:|\omega'|=1\}$, $\{|\omega''|=1\}^+=\{\omega''\in\mathbb{R}_+^q:|\omega''|=1\}$, dS' — элемент объема $\{|\omega'|=1\}^+$, dS'' — элемент объема $\{|\omega''|=1\}^+$. Произведя замену $r^2=u$, $s^2=v$, $dr=\dfrac{1}{2}u^{-\frac12}du$, $ds=\dfrac{1}{2}v^{-\frac12}dv$, будем иметь

$$(\delta_\gamma(P),\varphi(x))_\gamma=\frac14\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_{\{|\omega'|=1\}^+}\int\limits_{\{|\omega''|=1\}^+}\delta(u-v)\varphi(\sqrt{u}\omega',\sqrt{v}\omega'')u^{\frac{p+|\gamma'|}{2}-1}v^{\frac{q+|\gamma''|}{2}-1}\omega^\gamma dS'dS''dudv=$$

$$=\frac14\int\limits_0^\infty\int\limits_{\{|\omega'|=1\}^+}\int\limits_{\{|\omega''|=1\}^+}\varphi(\sqrt{v}\omega',\sqrt{v}\omega'')v^{\frac{p+|\gamma'|}{2}-1}v^{\frac{q+|\gamma''|}{2}-1}\omega^\gamma dS'dS''dv=$$

$$=\frac14\int\limits_0^\infty\int\limits_{\{|\omega'|=1\}^+}\int\limits_{\{|\omega''|=1\}^+}\varphi(\sqrt{v}\omega)v^{\frac{n+|\gamma|}{2}-2}\omega^\gamma dS'dS''dv.$$

Возвращаясь обратно к переменной s с помощью замены $v=s^2$, получим (4.5).

При $p=q=1$ квадратичная форма $P=x^2-y^2$ и

$$(\delta_\gamma(x^2-y^2),\varphi(x,y))_\gamma=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\delta(x^2-y^2)\varphi(x,y)x^{\gamma_1}y^{\gamma_2}dxdy=\{x^2=u,y^2=v\}=$$

$$=\frac14\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\delta(u-v)\varphi(\sqrt{u},\sqrt{v})u^{\frac{\gamma_1-1}{2}}v^{\frac{\gamma_2-1}{2}}dudv=$$

$$=\frac14\int\limits_0^\infty\varphi(\sqrt{v},\sqrt{v})v^{\frac{|\gamma|}{2}-1}dv=\{v=y^2\}=\frac12\int\limits_0^\infty\varphi(y,y)y^{|\gamma|-1}dy.$$

Рассмотрим случай $p=1$, $q=n-1>1$. Имеем

$$(\delta_\gamma(P),\varphi(x))_\gamma=(\delta(x_1^2-|x''|^2),\varphi(x))_\gamma=\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\delta(x_1^2-|x''|^2)\varphi(x)x^\gamma dx.$$

Перейдя к сферическим координатам $x''=\rho\sigma$, $\sigma\in\mathbb{R}_+^{n-1}$, получим

$$(\delta_\gamma(P),\varphi(x))_\gamma=(\delta(x_1^2-|x''|^2),\varphi(x))_\gamma=$$

$$=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\delta(x_1^2-\rho^2)\rho^{n+|\gamma''|-2}x_1^{\gamma_1}dx_1d\rho\int\limits_{S_1^+(n-1)}\varphi(x_1,\rho\sigma)\sigma^{\gamma'}dS=$$

$$=\{x_1^2=u,\rho^2=v\}=\frac14\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_{S_1^+(n-1)}\delta(u-v)\varphi(\sqrt{u},\sqrt{v}\sigma)u^{\frac{\gamma_1-1}{2}}v^{\frac{n+|\gamma''|-1}{2}-1}dudv\sigma^{\gamma'}dS=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^\infty\int\limits_{S_1^+(n-1)}\varphi(\sqrt{v},\sqrt{v}\sigma)v^{\frac{n+|\gamma|}{2}-2}dv\sigma^{\gamma'}dS=\{v=y^2\}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty\int\limits_{S_1^+(n-1)}\varphi(y,y\sigma)y^{n+|\gamma|-3}dy\sigma^{\gamma'}dS.$$

Случай $q=1$, $p=n-1>1$ рассматривается аналогично. □

4.3. Представления производных весовой обобщенной функции $\delta_\gamma(P)$.

Лемма 4.2. *Производная порядка k функции $\delta_\gamma(P)$ при $p>1$, $q>1$ имеет два представления, обозначенные $\delta^{(k)}_{\gamma,1}(P)$ и $\delta^{(k)}_{\gamma,2}(P)$, вида*

$$(\delta^{(k)}_{\gamma,1}(P),\varphi(x))_\gamma=\int\limits_0^\infty\left[\left(\frac{1}{2s}\frac{\partial}{\partial s}\right)^k\psi(r,s)s^{q+|\gamma''|-2}\right]\Bigg|_{s^2=r^2}r^{p+|\gamma'|-1}dr, \tag{4.7}$$

$$(\delta^{(k)}_{\gamma,2}(P),\varphi(x))_\gamma=(-1)^k\int\limits_0^\infty\left[\left(\frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^k\psi(r,s)r^{p+|\gamma'|-2}\right]\Bigg|_{r^2=s^2}s^{q+|\gamma''|-1}ds, \tag{4.8}$$

где

$$\psi(r,s)=\frac{1}{2}\int\limits_{\{|\omega'|=1\}^+}\int\limits_{\{|\omega''|=1\}^+}\varphi(r\omega',s\omega'')\omega^\gamma dS'dS'',\qquad \varphi\in S_{ev}. \tag{4.9}$$

Интегралы (4.7) и (4.8) сходятся и совпадают при $k<\dfrac{n+|\gamma|-2}{2}$. Если $k\geqslant\dfrac{n+|\gamma|-2}{2}$, то эти интегралы нужно понимать в смысле регуляризованных значений.

Доказательство. Найдем производную порядка k от $\delta_\gamma(P)$. После перехода к биполярным координатам (4.6) получим $P=r^2-s^2$ и

$$(\delta^{(k)}_\gamma(P),\varphi(x))_\gamma=$$

$$=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_{\{|\omega'|=1\}^+}\int\limits_{\{|\omega''|=1\}^+}\left(\frac{\partial^k}{\partial P^k}\delta(r^2-s^2)\right)\varphi(r\omega',s\omega'')r^{p+|\gamma'|-1}s^{q+|\gamma''|-1}\omega^\gamma dS'dS''drds. \tag{4.10}$$

Произведем замену $r^2=u$, $s^2=v$, $dr=\dfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du$, $ds=\dfrac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}dv$; будем иметь $P=u-v$, $\dfrac{\partial}{\partial P}=\dfrac{\partial}{\partial u}$

$$(\delta^{(k)}_\gamma(P),\varphi(x))_\gamma=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_{\{|\omega'|=1\}^+}\int\limits_{\{|\omega''|=1\}^+}\left(\frac{\partial^k}{\partial u^k}\delta(u-v)\right)\varphi(\sqrt{u}\omega',\sqrt{v}\omega'')u^{\frac{p+|\gamma'|}{2}-1}v^{\frac{q+|\gamma''|}{2}-1}\omega^\gamma dS'dS''dudv=$$

$$=(-1)^k\frac{1}{4}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_{\{|\omega'|=1\}^+}\int\limits_{\{|\omega''|=1\}^+}\delta(u-v)\left(\frac{\partial^k}{\partial u^k}\varphi(\sqrt{u}\omega',\sqrt{v}\omega'')u^{\frac{p+|\gamma'|}{2}-1}\right)\times$$

$$\times v^{\frac{q+|\gamma''|}{2}-1}\omega^\gamma dS'dS''dudv=$$

$$=(-1)^k\frac{1}{4}\int\limits_0^\infty\int\limits_{\{|\omega'|=1\}^+}\int\limits_{\{|\omega''|=1\}^+}\left(\frac{\partial^k}{\partial u^k}\varphi(\sqrt{u}\omega',\sqrt{v}\omega'')u^{\frac{p+|\gamma'|}{2}-1}\right)\Bigg|_{u=v}v^{\frac{q+|\gamma''|}{2}-1}\omega^\gamma dS'dS''dv.$$

Вспоминая что $u=r^2$, $v=s^2$, вернемся к переменным r и s:

$$(\delta^{(k)}_\gamma(P),\varphi(x))_\gamma=(-1)^k\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty\int\limits_{\{|\omega'|=1\}^+}\int\limits_{\{|\omega''|=1\}^+}\left[\left(\frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^k\varphi(r\omega',s\omega'')r^{p+|\gamma'|-2}\right]\Bigg|_{r^2=s^2}\times$$

$$\times s^{q+|\gamma''|-1}\omega^\gamma dS'dS''ds.$$

Введя обозначение (4.9), получим следующую формулу для $\delta_\gamma^{(k)}(P)$:

$$(\delta_\gamma^{(k)}(P),\varphi(x))_\gamma=(-1)^k\int\limits_0^\infty\left[\left(\frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^k\psi(r,s)r^{p+|\gamma'|-2}\right]\Bigg|_{r^2=s^2}s^{q+|\gamma''|-1}ds. \tag{4.11}$$

Вернувшись к формуле (4.10) и произведя в ней замену $r^2=-u$, $s^2=-v$, $u<0$, $v<0$, $dr=-\dfrac{1}{2}(-u)^{-\frac12}du$, $ds=-\dfrac{1}{2}(-v)^{-\frac12}dv$ $(u<0,v<0)$, будем иметь $P=v-u$, $\dfrac{\partial}{\partial P}=\dfrac{\partial}{\partial v}$ и

$$(\delta_\gamma^{(k)}(P),\varphi(x))_\gamma=\frac14\int\limits_0^{-\infty}\int\limits_0^{-\infty}\int\limits_{\{|\omega'|=1\}^+}\int\limits_{\{|\omega''|=1\}^+}\left(\frac{\partial^k}{\partial v^k}\delta(v-u)\right)\times$$

$$\times\varphi(\sqrt{-u}\omega',\sqrt{-v}\omega'')(-u)^{\frac{p+|\gamma'|}{2}-1}(-v)^{\frac{q+|\gamma''|}{2}-1}\omega^\gamma dS'dS''dudv=$$

$$=(-1)^k\frac14\int\limits_0^{-\infty}\int\limits_0^{-\infty}\int\limits_{\{|\omega'|=1\}^+}\int\limits_{\{|\omega''|=1\}^+}\delta(v-u)\frac{\partial^k}{\partial v^k}\left[\varphi(\sqrt{-u}\omega',\sqrt{-v}\omega'')(-v)^{\frac{q+|\gamma''|}{2}-1}\right](-u)^{\frac{p+|\gamma'|}{2}-1}\times$$

$$\times\omega^\gamma dS_1^pdS_1^qdudv=$$

$$=(-1)^k\frac14\int\limits_0^{-\infty}\int\limits_{\{|\omega'|=1\}^+}\int\limits_{\{|\omega''|=1\}^+}\left[\frac{\partial^k}{\partial v^k}\varphi(\sqrt{-u}\omega',\sqrt{-v}\omega'')(-v)^{\frac{q+|\gamma''|}{2}-1}\right]\Bigg|_{v=u}(-u)^{\frac{p+|\gamma'|}{2}-1}\omega^\gamma dS'dS''du.$$

Вспоминая, что $-u=r^2$, $-v=s^2$, вернемся к переменным r и s:

$$(\delta_\gamma^{(k)}(P),\varphi(x))_\gamma=\frac12\int\limits_0^\infty\int\limits_{\{|\omega'|=1\}^+}\int\limits_{\{|\omega''|=1\}^+}\left[\left(\frac{1}{2s}\frac{\partial}{\partial s}\right)^k\varphi(r\omega',s\omega'')s^{q+|\gamma''|-2}\right]\Bigg|_{s^2=r^2}r^{p+|\gamma'|-1}\omega^\gamma dS'dS''dr.$$

Используя обозначение (4.9), получим

$$(\delta_\gamma^{(k)}(P),\varphi(x))_\gamma=\int\limits_0^\infty\left[\left(\frac{1}{2s}\frac{\partial}{\partial s}\right)^k\psi(r,s)s^{q+|\gamma''|-2}\right]\Bigg|_{s^2=r^2}r^{p+|\gamma'|-1}dr. \tag{4.12}$$

Далее будем использовать для функций (4.11) и (4.12) обозначения $\delta_{\gamma,1}^{(k)}(P)$ и $\delta_{\gamma,2}^{(k)}(P)$, а именно:

$$(\delta_{\gamma,1}^{(k)}(P),\varphi(x))_\gamma=\int\limits_0^\infty\left[\left(\frac{1}{2s}\frac{\partial}{\partial s}\right)^k\psi(r,s)s^{q+|\gamma''|-2}\right]\Bigg|_{s^2=r^2}r^{p+|\gamma'|-1}dr,$$

$$(\delta_{\gamma,2}^{(k)}(P),\varphi(x))_\gamma=(-1)^k\int\limits_0^\infty\left[\left(\frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^k\psi(r,s)r^{p+|\gamma'|-2}\right]\Bigg|_{r^2=s^2}s^{q+|\gamma''|-1}ds.$$

Полученные интегралы $\delta_{\gamma,1}^{(k)}(P)$ и $\delta_{\gamma,2}^{(k)}(P)$ сходятся и совпадают при $k<\dfrac{n+|\gamma|-2}{2}$ для любой функции $\varphi\in S_{ev}$. Если $k\geqslant\dfrac{n+|\gamma|-2}{2}$, то эти интегралы нужно понимать в смысле регуляризованных значений. А именно, произведем в $\delta_{\gamma,1}^{(k)}(P)$ и $\delta_{\gamma,2}^{(k)}(P)$ замену переменных $r^2=u$, $s^2=v$ и получим

$$(\delta_{\gamma,1}^{(k)}(P),\varphi(x))_\gamma=\frac14\int\limits_0^\infty\left[\frac{\partial^k}{\partial v^k}\psi(\sqrt{u},\sqrt{v})v^{\frac{q+|\gamma''|}{2}-1}\right]\Bigg|_{v=u}u^{\frac{p+|\gamma'|}{2}-1}du,$$

$$(\delta_{\gamma,2}^{(k)}(P),\varphi(x))_\gamma=\frac{(-1)^k}{4}\int\limits_0^\infty\left[\frac{\partial^k}{\partial u^k}\psi(\sqrt{u},\sqrt{v})u^{\frac{p+|\gamma'|}{2}-1}\right]\Bigg|_{u=v}v^{\frac{q+|\gamma''|}{2}-1}dv.$$

Функция $\psi(\sqrt{u},\sqrt{v})\in S_{ev}$ по каждой из переменных u и v. Тогда

$$\left[\frac{\partial^k}{\partial v^k}\psi(\sqrt{u},\sqrt{v})v^{\frac{q+|\gamma''|}{2}-1}\right]\bigg|_{v=u}=u^{\frac{q+|\gamma''|}{2}-1-k}\Psi_1(u),$$

$$\left[\frac{\partial^k}{\partial u^k}\psi(\sqrt{u},\sqrt{v})u^{\frac{p+|\gamma'|}{2}-1}\right]\bigg|_{u=v}=v^{\frac{p+|\gamma'|}{2}-1-k}\Psi_2(v),$$

где $\Psi_1(u),\Psi_2(v)\in S_{ev}$, поэтому

$$(\delta^{(k)}_{\gamma,1}(P),\varphi(x))_\gamma=\frac{1}{4}\int\limits_0^\infty u^{\frac{n+|\gamma|-k}{2}-1}\Psi_1(u)du=\frac{1}{4}(u^\lambda_+,\Psi_1),$$

$$(\delta^{(k)}_{\gamma,2}(P),\varphi(x))_\gamma=\frac{(-1)^k}{4}\int\limits_0^\infty v^{\frac{n+|\gamma|-k}{2}-1}\Psi_2(v)dv=\frac{(-1)^k}{4}(v^\lambda_+,\Psi_2),$$

$$u^\lambda_+=\begin{cases}u^\lambda, & u>0;\\ 0, & u\leqslant 0.\end{cases}$$

Регуляризацией этой функции является обобщенная функция u^λ_+, которая при $\lambda\neq-1,-2,\ldots$ получается аналитическим продолжением u^λ_+ из области $\operatorname{Re}\lambda>0$. При $\lambda=-1,-2,\ldots$, $(n+|\gamma|=-1,-2,\ldots)$ эта аналитическая обобщенная функция имеет простые полюсы и обобщенная функция u^{-m}_+, $m\in\mathbb{N}$ определяется как свободный член разложения Лорана функции u^λ_+ в окрестности точки $\lambda=-m$ (см. [15]). $\square$

Лемма 4.3. *При $p=q=1$ и $\varphi\in S_{ev}$ производная порядка k функции $\delta_\gamma(P)$ имеет два представления, обозначенные $\delta^{(k)}_{\gamma,1}(P)$ и $\delta^{(k)}_{\gamma,2}(P)$, вида*

$$(\delta^{(k)}_{\gamma,1}(x^2-y^2),\varphi(x,y))_\gamma=\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty\left[\left(\frac{1}{2y}\frac{\partial}{\partial y}\right)^k\varphi(x,y)y^{\gamma_2-1}\right]\bigg|_{y=x}x^{\gamma_1}dx, \tag{4.13}$$

$$(\delta^{(k)}_{\gamma,2}(x^2-y^2),\varphi(x,y))_\gamma=(-1)^k\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty\left[\left(\frac{1}{2x}\frac{\partial}{\partial x}\right)^k\varphi(x,y)x^{\gamma_1-1}\right]\bigg|_{x=y}y^{\gamma_2}dy. \tag{4.14}$$

Доказательство. При $p=q=1$ квадратичная форма P имеет вид $P=x^2-y^2$. Найдем производную порядка k от $\delta_\gamma(x^2-y^2)$:

$$(\delta^{(k)}_\gamma(P),\varphi(x,y))_\gamma=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\left(\frac{\partial^k}{\partial P^k}\delta(x^2-y^2)\right)\varphi(x,y)x^{\gamma_1}y^{\gamma_2}dxdy. \tag{4.15}$$

Произведем замену $x^2=u$, $y^2=v$, $dx=\dfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du$, $dy=\dfrac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}dv$; будем иметь $P=u-v$, $\dfrac{\partial}{\partial P}=\dfrac{\partial}{\partial u}$,

$$(\delta^{(k)}_\gamma(P),\varphi(x,y))_\gamma=\frac{1}{4}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\left(\frac{\partial^k}{\partial u^k}\delta(u-v)\right)\varphi(\sqrt{u},\sqrt{v})u^{\frac{\gamma_1-1}{2}}v^{\frac{\gamma_2-1}{2}}dudv=$$

$$=(-1)^k\frac{1}{4}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\delta(u-v)\left(\frac{\partial^k}{\partial u^k}\varphi(\sqrt{u},\sqrt{v})u^{\frac{\gamma_1-1}{2}}\right)v^{\frac{\gamma_2-1}{2}}dudv=$$

$$=(-1)^k\frac{1}{4}\int\limits_0^\infty\left(\frac{\partial^k}{\partial u^k}\varphi(\sqrt{u},\sqrt{v})u^{\frac{\gamma_1-1}{2}}\right)\bigg|_{u=v}v^{\frac{\gamma_2-1}{2}}dv.$$

Вспоминая, что $u=x^2$, $v=y^2$, вернемся к переменным x и y и обозначим $\delta^{(k)}_\gamma(P)$ через $\delta^{(k)}_{\gamma,2}(P)$. Получим представление (4.14) $\delta^{(k)}_\gamma(P)$. Аналогично, производя замену $r^2=-u$, $s^2=-v$, $u<0$, $v<0$, получим формулу (4.13). $\square$

Лемма 4.4. *При $p=1$, $q=n-1$ производная порядка k функции $\delta_\gamma(P)$ имеет два представления вида*

$$(\delta^{(k)}_{\gamma,1}(x_1^2-|x''|),\varphi(x))_\gamma=\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty\int\limits_{S_1^+(n-1)}\left(\left(\frac{1}{2\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^k\varphi(x_1,\rho\sigma)\rho^{n+|\gamma''|-3}\right)\Bigg|_{\rho=x_1}x_1^{\gamma_1}dx_1\sigma^{\gamma'}dS, \tag{4.16}$$

$$(\delta^{(k)}_{\gamma,2}(x_1^2-|x''|),\varphi(x))_\gamma=(-1)^k\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty\int\limits_{S_1^+(n-1)}\left(\left(\frac{1}{2x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^k\varphi(x_1,\rho\sigma)x_1^{\gamma_1-1}\right)\Bigg|_{x_1=\rho}\rho^{n+|\gamma''|-2}d\rho\sigma^{\gamma'}dS, \tag{4.17}$$

где $x''=(x_2,\ldots,x_n)$, $\gamma''=(\gamma_2,\ldots,\gamma_n)$, $|\gamma''|=\gamma_2+\ldots+\gamma_n$.

При $p=n-1$, $q=1$ производная порядка k функции $\delta_\gamma(|x'|^2-x_n^2)$ имеет два представления вида

$$(\delta^{(k)}_{\gamma,1}(|x'|^2-x_n^2),\varphi(x))_\gamma=\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty\int\limits_{S_1^+(n-1)}\left(\left(\frac{1}{2x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k\varphi(\rho\sigma,x_n)x_n^{\gamma_n-1}\right)\Bigg|_{x_n=\rho}\rho^{n+|\gamma'|-2}d\rho\sigma^{\gamma'}dS, \tag{4.18}$$

$$(\delta^{(k)}_{\gamma,2}(|x'|^2-x_n^2),\varphi(x))_\gamma=(-1)^k\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty\int\limits_{S_1^+(n-1)}\left(\left(\frac{1}{2\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^k\varphi(\rho\sigma,x_n)\rho^{n+|\gamma'|-3}\right)\Bigg|_{\rho=x_n}x_n^{\gamma_n}dx_n\sigma^{\gamma'}dS, \tag{4.19}$$

где $x'=(x_1,\ldots,x_{n-1})$, $\gamma'=(\gamma_1,\ldots,\gamma_{n-1})$, $|\gamma'|=\gamma_1+\ldots+\gamma_{n-1}$.

Интегралы (4.16) *и* (4.17)*, а также* (4.18) *и* (4.19) *сходятся, и* (4.16) *совпадает с* (4.17)*, а* (4.18) *совпадает с* (4.19) *при $k<\dfrac{n+|\gamma|-2}{2}$ для любой финитной функции φ. Если $k\geqslant\dfrac{n+|\gamma|-2}{2}$, то эти интегралы нужно понимать в смысле регуляризованных значений.*

Доказательство. Найдем производную порядка k от $\delta_\gamma(P)=\delta_\gamma(x_1^2-|x''|^2)$ при $p=1$, $q=n-1$. После перехода к сферическим координатам $x''=\rho\sigma$, $\sigma\in\mathbb{R}^{n-1}_+$ получим $P=r^2-s^2$ и

$$(\delta^{(k)}_\gamma(P),\varphi(x))_\gamma=(\delta^{(k)}(x_1^2-|x''|^2),\varphi(x))_\gamma=$$

$$=\int\limits_0^\infty\int\limits_{S_1^+(n)}\left(\frac{\partial^k}{\partial P^k}\delta(x_1^2-\rho^2)\right)\rho^{n+|\gamma''|-2}x_1^{\gamma_1}dx_1d\rho\int\limits_{S_1^+(n-1)}\varphi(x_1,\rho\sigma)\sigma^{\gamma'}dS=$$

$$=\{x_1^2=u,\rho^2=v\}=\frac{1}{4}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_{S_1^+(n-1)}\left(\frac{\partial^k}{\partial u^k}\delta(u-v)\right)\varphi(\sqrt{u},\sqrt{v}\sigma)u^{\frac{\gamma_1-1}{2}}v^{\frac{n+|\gamma''|-1}{2}-1}dudv\sigma^{\gamma'}dS=$$

$$=(-1)^k\frac{1}{4}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_{S_1^+(n-1)}\delta(u-v)\left(\frac{\partial^k}{\partial u^k}\varphi(\sqrt{u},\sqrt{v}\sigma)u^{\frac{\gamma_1-1}{2}}\right)v^{\frac{n+|\gamma''|-1}{2}-1}dudv\sigma^{\gamma'}dS=$$

$$=(-1)^k\frac{1}{4}\int\limits_0^\infty\int\limits_{S_1^+(n-1)}\left(\frac{\partial^k}{\partial u^k}\varphi(\sqrt{u},\sqrt{v}\sigma)u^{\frac{\gamma_1-1}{2}}\right)\Bigg|_{u=v}v^{\frac{n+|\gamma''|-1}{2}-1}dv\sigma^{\gamma'}dS.$$

Вспоминая, что $u=x_1^2$, $v=\rho^2$, вернемся к переменным x_1 и ρ:

$$(\delta^{(k)}_\gamma(P),\varphi(x))_\gamma=(-1)^k\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty\int\limits_{S_1^+(n-1)}\left(\left(\frac{1}{2x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^k\varphi(x_1,\rho\sigma)x_1^{\gamma_1-1}\right)\Bigg|_{x_1=\rho}\rho^{n+|\gamma''|-2}d\rho\sigma^{\gamma'}dS,$$

что и дает (4.17). Аналогично, получаем представления (4.16), (4.18) и (4.19).

Полученные интегралы $\delta^{(k)}_{\gamma,1}(P)$ и $\delta^{(k)}_{\gamma,2}(P)$ сходятся и совпадают при $k < \dfrac{n+|\gamma|-2}{2}$ для любой финитной функции φ. Если $k \geqslant \dfrac{n+|\gamma|-2}{2}$, то эти интегралы нужно понимать в смысле регуляризованных значений. Вопрос о регуляризации решается, как в лемме 4.2. $\square$

5. Весовые обобщенные функции, реализующие степени квадратичных форм

В этом разделе рассмотрим несколько типов весовых обобщенных функций, представляющих собой комплексные степени неопределенных квадратичных форм. Помимо очевидного применения к B-гиперболическим и B-ультрагиперболическим уравнениям, такие функции тесно связаны с преобразованием Радона по многообразиям.

5.1. Весовые обобщенные функции $P^\lambda_{\gamma,\pm}$. В этом пункте дадим определение $P^\lambda_{\gamma,\pm}$ и найдем особые точки этой функции.

Сначала определим весовую обобщенную функцию, связанную с положительной квадратичной формой. Пусть $r = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$, а именно, рассмотрим весовой функционал r^λ, действующий по формуле

$$(r^\lambda, \varphi)_\gamma = \int\limits_{\mathbb{R}^+_n} r^\lambda \varphi(x) x^\gamma\, dx. \tag{5.1}$$

Функция (5.1) рассмотрена в [62,98,177]. При $\operatorname{Re}\lambda > -(N+|\gamma|)$ весовая обобщенная функция (5.1) представляет собой аналитическую функцию по параметру λ в области $\operatorname{Re}\lambda > -(N+|\gamma|)$, и ее можно дифференцировать по параметру λ:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}(r^\lambda, \varphi)_\gamma = \int\limits_{\mathbb{R}^+_n} r^\lambda \ln r\ \varphi(x) x^\gamma\, dx.$$

Для значений $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -(N+|\gamma|)$ можно построить аналитическое продолжение r^λ.

Из [177] известно, что вычет $(r^\lambda, \varphi)_\gamma$, как функции от λ, при $\lambda = -(n+|\gamma|+2p)$ равен

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-(n+|\gamma|+2p)}[(r^\lambda, \varphi(x))_\gamma] = \frac{|S_1^+(n)|_\gamma\, (\triangle^p_\gamma \delta_\gamma(x), \varphi(x))}{2^p p!(n+|\gamma|)(n+|\gamma|+2)\ldots(n+|\gamma|+2p-2)}. \tag{5.2}$$

Пусть $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$, $\gamma = (\gamma', \gamma'')$, $\gamma' = (\gamma_1, \ldots, \gamma_p)$, $\gamma'' = (\gamma_{p+1}, \ldots, \gamma_n)$ и

$$P(x) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2, \qquad n = p+q.$$

Определение 5.1. *Весовые обобщенные функции* $P^\lambda_{\gamma,+}$ и $P^\lambda_{\gamma,-}$ определяются формулами

$$(P^\lambda_{\gamma,+}, \varphi)_\gamma = \int\limits_{\{P(x)>0\}^+} P^\lambda(x)\varphi(x)x^\gamma dx, \qquad \varphi \in S_{ev}, \tag{5.3}$$

$$(P^\lambda_{\gamma,-}, \varphi)_\gamma = \int\limits_{\{P(x)<0\}^+} (-P(x))^\lambda\varphi(x)x^\gamma dx, \qquad \varphi \in S_{ev}, \tag{5.4}$$

где $\{P(x)>0\}^+ = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : P(x) > 0\}$, $\{P(x)<0\}^+ = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : P(x) < 0\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Найдем особые точки этой функции. Пусть сначала $p > 1$, $q > 1$. Перейдем в $P^\lambda_{\gamma,+}$ к биполярным координатам (4.6), получим

$$(P^\lambda_{\gamma,+}, \varphi)_\gamma = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^r (r^2 - s^2)^\lambda \psi(r,s) r^{p+|\gamma'|-1} s^{q+|\gamma''|-1} dr ds, \tag{5.5}$$

где

$$\psi(r,s) = \frac{1}{2} \int\limits_{\{|\omega'|=1\}^+} \int\limits_{\{|\omega''|=1\}^+} \varphi(r\omega', s\omega'')\omega^\gamma dS' dS''$$

(см. (4.9)). Теперь перейдем в (5.5) к переменным $u=r^2$, $v=s^2$:

$$(P_{\gamma,+}^{\lambda},\varphi)_{\gamma}=\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{u}(u-v)^{\lambda}\psi_1(u,v)u^{\frac{p+|\gamma'|}{2}-1}s^{\frac{q+|\gamma''|}{2}-1}dudv,$$

здесь $\psi_1(u,v)=\psi(r,s)$ при $u=r^2$, $v=s^2$. Положив $v=ut$, будем иметь

$$(P_{\gamma,+}^{\lambda},\varphi)_{\gamma}=\int\limits_{0}^{\infty}u^{\lambda+\frac{p+q+|\gamma|}{2}-1}\Phi(\lambda,u)du, \tag{5.6}$$

где

$$\Phi(\lambda,u)=\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{1}(1-t)^{\lambda}t^{\frac{q+|\gamma''|}{2}-1}\psi_1(u,tu)dt. \tag{5.7}$$

Формула (5.6) показывает, что $P_{\gamma,+}^{\lambda}$ имеет полюсы двух типов. Первый тип полюсов состоит из полюсов функции $\Phi(\lambda,u)$. А именно, при $t=1$ функция $\Phi(\lambda,u)$ имеет простые полюсы при

$$\lambda=-1,-2,\ldots,-k,\ldots \tag{5.8}$$

с вычетами

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-k}\Phi(\lambda,u)=\frac{1}{4}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}\left[t^{\frac{q+|\gamma''|-2}{2}}\psi_1(u,tu)\right]_{t=1}. \tag{5.9}$$

Кроме того, интеграл (5.6) имеет полюсы в точках

$$\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2},\ -\frac{n+|\gamma|}{2}-1,\ldots,\ -\frac{n+|\gamma|}{2}-k,\ldots, \tag{5.10}$$

с вычетами

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k}(P_{\gamma,+}^{\lambda},\varphi)_{\gamma}=\frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial u^k}\Phi\left(-\frac{n+|\gamma|}{2}-k,u\right)\bigg|_{u=0}. \tag{5.11}$$

Множества полюсов были получены при $p>1$, $q>1$, однако те же множества получаются и при $p\geqslant1$, $q\geqslant1$. Все последующие результаты, касающиеся весовых обобщенных функций, связанных с неопределенными квадратичными формами, справедливы при $p\geqslant1$, $q\geqslant1$.

Таким образом, имеем три случая. Первый случай, когда λ принадлежит первому множеству полюсов (5.8), но не принадлежит второму (5.10). Второй случай, когда λ принадлежит второму множеству полюсов (5.10), но $\lambda\neq-k$, $k\in\mathbb{N}$. И третий случай, когда λ принадлежит и первому (5.8), и второму (5.10) множествам полюсов одновременно. Эти три случая изучим отдельно, представив результаты в виде следующих трех теорем. Вычеты $P_{\gamma,\pm}^{\lambda}$ в особых точках выражаются через весовую обобщенную функцию (4.4).

В следующих трех теоремах найдены вычеты функции $P_{\gamma,+}^{\lambda}$ для трех различных классов их особых точек.

Теорема 5.1. *Если $p\geqslant1$, $q\geqslant1$, $\lambda=-k$, $k\in\mathbb{N}$ и $n+|\gamma|\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ или $n+|\gamma|\in\mathbb{N}$ и $n+|\gamma|=2k-1$, $k\in\mathbb{N}$ и, кроме того, если $n+|\gamma|$ — четное число и $k<\dfrac{n+|\gamma|}{2}$, то весовая обобщенная функция $P_{\gamma,+}^{\lambda}$ имеет простые полюсы с вычетами*

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-k}P_{\gamma,+}^{\lambda}=\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\delta_{\gamma,1}^{(k-1)}(P). \tag{5.12}$$

Доказательство. Запишем $\Phi(\lambda,u)$ в окрестности $\lambda=-k$ в виде

$$\Phi(\lambda,u)=\frac{\Phi_0(u)}{\lambda+k}+\Phi_1(\lambda,u),\quad \Phi_0(u)=\operatorname*{res}_{\lambda=-k}\Phi(\lambda,u),$$

где $\Phi_1(\lambda,u)$ — регулярная функция в точке $\lambda=-k$. Получим

$$(P_{\gamma,+}^{\lambda},\varphi)_{\gamma}=\frac{1}{\lambda+k}\int\limits_{0}^{\infty}u^{\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}-1}\Phi_0(u)du+\int\limits_{0}^{\infty}u^{\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}-1}\Phi_1(\lambda,u)du. \tag{5.13}$$

Интегралы в (5.13) — регулярные функции переменной λ при $\lambda=-k$. Таким образом, $(P^{\lambda}_{\gamma,+},\varphi)_\gamma$ имеет простой полюс в рассматриваемой точке. Используя (5.9), запишем

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-k}(P^{\lambda}_{\gamma,+},\varphi)=\frac{(-1)^{k-1}}{4(k-1)!}\int\limits_0^\infty u^{\frac{n+|\gamma|}{2}-k-1}\frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}\left[t^{\frac{q+|\gamma''|}{2}-1}\psi_1(u,tu)\right]_{t=1}du. \tag{5.14}$$

Если в (5.14) положить $tu=v$, то можно записать

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-k}(P^{\lambda}_{\gamma,+},\varphi)=\frac{(-1)^{k-1}}{4(k-1)!}\int\limits_0^\infty \frac{\partial^{k-1}}{\partial v^{k-1}}\left[v^{\frac{q+|\gamma''|}{2}-1}\psi_1(u,v)\right]_{v=u}u^{\frac{p+|\gamma'|}{2}-1}du, \tag{5.15}$$

где интеграл понимается в смысле его регуляризации при $k\geqslant\dfrac{n}{2}$. Перейдя к переменным $u=r^2$ и $v=s^2$ в выражении для $(k-1)$-й производной функции $\delta_\gamma(P)$, определенной формулой (4.7), будем иметь

$$(\delta^{(k-1)}_{\gamma,1}(P),\varphi)_\gamma=\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty\left[\frac{\partial^{k-1}}{\partial v^{k-1}}v^{\frac{q+|\gamma''|}{2}-1}\psi_1(u,v)\right]_{v=u}u^{\frac{p+|\gamma'|}{2}-1}du, \tag{5.16}$$

где

$$\psi_1(u,v)=\frac{1}{2}\int\limits_{S_p^+}\int\limits_{S_q^+}\varphi(\sqrt{u}\omega',\sqrt{v}\omega'')\omega^\gamma dS_p dS_q.$$

Формулы (5.15) и (5.16) дают (5.11). Для $k\geqslant\dfrac{n}{2}$ интеграл в (5.16) понимается в смысле своей регуляризации. В случае $n+|\gamma|\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ или $n+|\gamma|\in\mathbb{N}$ и $n+|\gamma|=2k-1$, $k\in\mathbb{N}$ регуляризация интеграла в (5.16) определяется как его аналитическое продолжение. □

Рассмотрим теперь случай, когда полюс λ принадлежит второму множеству (5.10), но не принадлежит первому (5.8). Если $\lambda=-\dfrac{n+|\gamma|}{2}-k$, $k=0,1,2,\ldots$ и $n+|\gamma|\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ или $n+|\gamma|\in\mathbb{N}$ и $n+|\gamma|=2k-1$, $k\in\mathbb{N}$, то функция $\Phi(\lambda,u)$ регулярна в окрестности точки $\lambda=-\dfrac{n+|\gamma|}{2}-k$. Таким образом, функция $(P^{\lambda}_{\gamma,+},\varphi)_\gamma$ будет иметь простой полюс, определяемый формулой (5.11).

До получения выражения для вычета $\operatorname*{res}\limits_{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k}(P^{\lambda}_{\gamma,+},\varphi)$ через производные функции $\varphi(x)$ в начале координат получим одну полезную формулу. Рассмотрим B-ультрагиперболический оператор (4.1):

$$\Box_\gamma=\Box_{\gamma',\gamma''}=B_{\gamma_1'}+\ldots+B_{\gamma_p'}-B_{\gamma_{p+1}''}-B_{\gamma_{p+q}''},\qquad B_{\gamma_i}=\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Применяя $\Box_\gamma$ к $\lambda+1$ степени квадратичной формы

$$P(x)=x_1^2+\ldots+x_p^2-x_{p+1}^2-\ldots-x_{p+q}^2,\quad n=p+q,\quad p>1,\quad q>1,$$

получим

$$\Box_\gamma P^{\lambda+1}(x)=4(\lambda+1)\left(\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}\right)P^{\lambda}(x). \tag{5.17}$$

Теорема 5.2. *Пусть $p\geqslant 1$, $q\geqslant 1$, $n+|\gamma|$ не является натуральным числом или $n+|\gamma|\in\mathbb{N}$ и $n+|\gamma|=2k-1$, $k\in\mathbb{N}$. Тогда $p+|\gamma'|$ либо не является натуральным, либо $p+|\gamma'|\in\mathbb{N}$, $p+|\gamma'|=2m-1$, $m\in\mathbb{N}$ и $q+|\gamma''|$ — четное. В этом случае $P^{\lambda}_{\gamma,+}$ имеет простые полюсы в точках $\lambda=-\dfrac{n+|\gamma|}{2}-k$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, с вычетами*

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k}P^{\lambda}_{\gamma,+}=\frac{(-1)^{\frac{q+|\gamma''|}{2}}}{2^{n+2k}k!}\frac{\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+k\right)}\Box_\gamma^k\delta_\gamma(x).$$

Если $p+|\gamma'|$ — четное, то $P^\lambda_{\gamma,+}$ является регулярной в точках $\lambda=-\dfrac{n+|\gamma|}{2}-k$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Доказательство. Рассмотрим сначала $\lambda=-\dfrac{n+|\gamma|}{2}$. Используя формулу (5.11), запишем

$$\underset{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}}{\mathrm{res}}(P^\lambda_{\gamma,+},\varphi)_\gamma=\Phi\left(-\frac{n+|\gamma|}{2},0\right)=\frac{\psi_1(0,0)}{4}\int\limits_0^1(1-t)^{-\frac{n+|\gamma|}{2}}t^{\frac{q+|\gamma''|}{2}}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\,\psi_1(0,0)\,\frac{\Gamma\left(\frac{q+|\gamma''|}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{n+|\gamma|}{2}+1\right)}{\Gamma\left(-\frac{p+|\gamma'|}{2}+1\right)}. \tag{5.18}$$

Из последней формулы следует, что если $p+|\gamma'|$ — четное, то $\underset{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}}{\mathrm{res}}(P^\lambda_{\gamma,+},\varphi)=0$.

Теперь пусть $p+|\gamma'|$ не является натуральным или $p+|\gamma'|\in\mathbb{N}$ и $p+|\gamma'|=2k-1$, $k\in\mathbb{N}$ и $q+|\gamma''|$ — четное. Имеем

$$\psi_1(0,0)=\psi(0,0)=\varphi(0)\int\limits_{S_p^+}\int\limits_{S_q^+}\omega^\gamma dS_p dS_q=\varphi(0)|S_1^+(p)|_{\gamma'}|S_1^+(q)|_{\gamma''}, \tag{5.19}$$

где

$$|S_1^+(p)|_{\gamma'}=\frac{\prod\limits_{i=1}^{p}\Gamma\left(\frac{\gamma_i'+1}{2}\right)}{2^{p-1}\Gamma\left(\frac{p+|\gamma'|}{2}\right)},\quad |S_1^+(q)|_{\gamma''}=\frac{\prod\limits_{i=1}^{q}\Gamma\left(\frac{\gamma_i''+1}{2}\right)}{2^{q-1}\Gamma\left(\frac{q+|\gamma''|}{2}\right)} \tag{5.20}$$

(см. [65, с. 20, формула (1.2.5)]). После простых вычислений получим

$$\underset{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}}{\mathrm{res}}(P^\lambda_{\gamma,+},\varphi)_\gamma=\frac{(-1)^{\frac{q+|\gamma''|}{2}}}{2^n}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}\,\varphi(0).$$

Кроме того,

$$\underset{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}}{\mathrm{res}}P^\lambda_{\gamma,+}=\frac{(-1)^{\frac{q+|\gamma''|}{2}}}{2^n}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}\delta_\gamma(x). \tag{5.21}$$

Используя теорему Грина и формулу (5.17), будем иметь

$$\int\limits_{\{P(x)>0\}^+}\Big(\varphi(x)[\Box_\gamma P^{\lambda+1}(x)]-P^{\lambda+1}(x)[\Box_\gamma\varphi(x)]\Big)\,x^\gamma dx=0,$$

таким образом,

$$(P^\lambda_{\gamma,+},\varphi)_\gamma=\frac{1}{2(\lambda+1)(2\lambda+n+|\gamma|)}(P^{\lambda+1}_{\gamma,+},\Box_\gamma\varphi)_\gamma. \tag{5.22}$$

Применение формулы (5.22) k раз приведет к

$$(P^\lambda_{\gamma,+},\varphi)_\gamma=\frac{(P^{\lambda+k}_{\gamma,+},\Box_\gamma^k\varphi)_\gamma}{2^{2k}(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)\left(\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\ldots\left(\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}+k-1\right)}. \tag{5.23}$$

Следовательно,

$$\underset{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k}{\mathrm{res}}(P^\lambda_{\gamma,+},\varphi)_\gamma=\underset{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k}{\mathrm{res}}(P^{\lambda+k}_{\gamma,+},\Box_\gamma^k\varphi)_\gamma\times$$

$$\times\frac{1}{2^{2k}(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)\left(\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\ldots\left(\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}+k-1\right)}\Bigg|_{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k},$$

$$\underset{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k}{\mathrm{res}}(P^{\lambda+k}_{\gamma,+},\Box_\gamma^k\varphi)_\gamma=\underset{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}}{\mathrm{res}}(P^{\lambda}_{\gamma,+},\Box_\gamma^k\varphi)_\gamma.$$

Таким образом, если $p+|\gamma'|$ — четное, то вычеты исчезают. Если $p+|\gamma'|$ не является натуральным или $p+|\gamma'|\in\mathbb{N}$ и $p+|\gamma'|=2k-1$, $k\in\mathbb{N}$, то (5.21) дает

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k}(P^\lambda_{\gamma,+},\varphi)_\gamma=\frac{(-1)^{\frac{q+|\gamma''|}{2}}}{2^{n+2k}k!}\frac{\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+k\right)}(\square^k_\gamma\delta_\gamma(x),\varphi)_\gamma.$$

Доказательство закончено. $\square$

Теорема 5.3. *Пусть $p\geqslant 1$, $q\geqslant 1$. Если $n+|\gamma|$ — четное, а также $p+|\gamma'|$ и $q+|\gamma''|$ четные, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, то функция $P^\lambda_{\gamma,+}$ имеет простые полюсы в точках $\lambda=-\dfrac{n+|\gamma|}{2}-k$ с вычетами*

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k}P^\lambda_{\gamma,+}=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+k\right)}\left[(-1)^{\frac{n+|\gamma|}{2}+k-1}\delta_{\gamma,1}^{\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+k-1\right)}(P)+\frac{(-1)^{\frac{q+|\gamma''|}{2}}}{2^{2k}k!}\prod_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\square^k_\gamma\delta_\gamma(x)\right].$$

Если $p+|\gamma'|$ и $q+|\gamma''|$ не являются натуральными или $p+|\gamma'|,q+|\gamma''|\in\mathbb{N}$ и $p+|\gamma'|=2m-1$, $q+|\gamma''|=2k-1$, $m,k\in\mathbb{N}$, то функция $P^\lambda_{\gamma,+}$ имеет полюс второго порядка в точках $\lambda=-\dfrac{n+|\gamma|}{2}-k$. Коэффициенты $c^{(k)}_{-2}$ и $c^{(k)}_{-1}$ разложения функции $P^\lambda_{\gamma,+}$ в ряд Лорана в точках $\lambda=-\dfrac{n+|\gamma|}{2}-k$ выражаются формулами

$$c^{(0)}_{-1}=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+k\right)}\left[(-1)^{\frac{n+|\gamma|}{2}+k-1}\delta_{\gamma,1}^{\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+k-1\right)}(P)+\frac{(-1)^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}}{2^{2k}k!}\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\sin\left(\frac{p+|\gamma'|}{2}\pi\right)\left(\psi\left(\frac{p+|\gamma'|}{2}\right)-\psi\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\right)\square^k_\gamma\delta_\gamma(x)\right],$$

$$c^{(k)}_{-2}=(-1)^{\frac{n+|\gamma|}{2}+1}\frac{\sin\frac{\pi(p+|\gamma'|)}{2}\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n+2k}k!\pi\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+k}{2}\right)}\square^k_\gamma\delta_\gamma(x),$$

где $\psi(x)=\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

Доказательство. Пусть $n+|\gamma|$ — четное и $\lambda=-\dfrac{n+|\gamma|}{2}-k$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Запишем $(P^\lambda_{\gamma,+},\varphi)_\gamma$ в виде

$$(P^\lambda_{\gamma,+},\varphi)_\gamma=\frac{1}{\lambda+k}\int\limits_0^\infty u^{\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}-1}\Phi_0(u)du+\int\limits_0^\infty u^{\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}-1}\Phi_1(\lambda,u)du, \tag{5.24}$$

где

$$\Phi_0(u)=\operatorname*{res}_{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k}\Phi(\lambda,u)$$

и $\Phi_1(\lambda,u)$ — регулярная при $\lambda=-\dfrac{n+|\gamma|}{2}-k$ функция. Каждый интеграл в (5.24) может иметь в $\lambda=-\dfrac{n+|\gamma|}{2}-k$ простой полюс, поэтому функция $(P^\lambda_{\gamma,+},\varphi)_\gamma$ может иметь полюс второго порядка в точке $\lambda=-\dfrac{n+|\gamma|}{2}-k$. В окрестности этой точки разложим $P^\lambda_{\gamma,+}$ в ряд Лорана:

$$P^\lambda_{\gamma,+}=\frac{c^{(k)}_{-2}}{\left(\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}+k\right)^2}+\frac{c^{(k)}_{-1}}{\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}+k}+\ldots$$

Найдем коэффициенты $c_{-1}^{(k)}$, $c_{-2}^{(k)}$. Имеем

$$(c_{-2}^{(k)},\varphi)_\gamma=\underset{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k}{\mathrm{res}}\int\limits_0^\infty u^{\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}-1}\Phi_0(u)du=\frac{1}{k!}\Phi_0^{(k)}(0).$$

Если $k=0$, то $c_{-2}^{(0)}=\Phi_0(0)$. В соответствии с (5.7) будем иметь

$$\Phi_0(0)=\frac{1}{4}\psi_1(0,0)\underset{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}}{\mathrm{res}}\int\limits_0^1(1-t)^\lambda t^{\frac{q+|\gamma''|-2}{2}}dt=\psi_1(0,0)\underset{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}}{\mathrm{res}}\frac{\Gamma\left(\frac{q+|\gamma''|}{2}\right)\Gamma(\lambda+1)}{4\Gamma\left(\lambda+\frac{q+|\gamma''|}{2}+1\right)}.$$

Принимая во внимание, что

$$\psi_1(0,0)=\varphi(0)|S_1^+(p)|_{\gamma'}|S_1^+(q)|_{\gamma''},$$

где $|S_1^+(p)|_{\gamma'}$ и $|S_1^+(q)|_{\gamma''}$ определяются в (5.20), получим

$$(c_{-2}^{(0)},\varphi)_\gamma=\frac{(-1)^{\frac{n+|\gamma|}{2}+1}B\left(\frac{p+|\gamma'|}{2},\frac{q+|\gamma''|}{2}\right)}{4\pi}\sin\frac{\pi(p+|\gamma'|)}{2}|S_1^+(p)|_{\gamma'}|S_1^+(q)|_{\gamma''}\varphi(0).$$

Тогда $p+|\gamma'|$ — четное (в этом случае $q+|\gamma''|$ — также четное), и мы имеем $c_{-2}^{(k)}=0$. Таким образом, функция $(P_{\gamma,+}^\lambda,\varphi)_\gamma$ имеет простой полюс в $\lambda=-\dfrac{n+|\gamma|}{2}$. Если $p+|\gamma'|$ — не целое или $p+|\gamma'|\in\mathbb{N}$ и $p+|\gamma'|=2k-1$, $k\in\mathbb{N}$, то

$$c_{-2}^{(0)}=(-1)^{\frac{n+|\gamma|}{2}+1}\frac{\sin\frac{\pi(p+|\gamma'|)}{2}\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^n\pi\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}\delta_\gamma(x).$$

Так же как при доказательстве теоремы 5.2, получим, что если $p+|\gamma'|$ и $q+|\gamma''|$ — четные, то функция $P_{\gamma,+}^\lambda$ имеет простой полюс в $\lambda=-\dfrac{n+|\gamma|}{2}-k$. Если $p+|\gamma'|$ и $q+|\gamma''|$ не натуральные или $p+|\gamma'|,q+|\gamma''|\in\mathbb{N}$ и $p+|\gamma'|=2m-1$, $q+|\gamma''|=2k-1$, $m,k\in\mathbb{N}$, то

$$c_{-2}^{(k)}=(-1)^{\frac{n+|\gamma|}{2}+1}\frac{\sin\frac{\pi(p+|\gamma'|)}{2}\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n+2k}k!\pi\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+k}{2}\right)}\square_\gamma^k\delta_\gamma(x).$$

Найдем теперь $c_{-1}^{(k)}$. Имеем

$$(c_{-1}^{(k)},\varphi)=\int\limits_0^\infty u^{-k-1}\Phi_0(u)du+\underset{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k}{\mathrm{res}}\int\limits_0^\infty u^{\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}-1}\Phi_1\left(-\frac{n+|\gamma|}{2}-k,u\right)du.$$

Поскольку $\Phi_0(u)=\underset{\lambda=-k}{\mathrm{res}}\,\Phi(\lambda,u)$, то, используя формулы (5.9) и (5.16), получим

$$\int\limits_0^\infty u^{-k-1}\Phi_0(u)du=\frac{(-1)^{\frac{n+|\gamma|}{2}+k-1}}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+k-1\right)}\left(\delta_{\gamma,1}^{(\frac{n+|\gamma|}{2}+k-1)}(P),\varphi\right)_\gamma.$$

Таким образом,

$$\underset{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k}{\mathrm{res}}\int\limits_0^\infty u^{\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}-1}\Phi_1\left(-\frac{n+|\gamma|}{2}-k,u\right)du=\frac{1}{k!}\frac{\partial^k\Phi_1\left(-\frac{n+|\gamma|}{2}-k,u\right)}{\partial u^k}\bigg|_{u=0}=(\alpha_\gamma^{(k)},\varphi)_\gamma,$$

$$c_{-1}^{(k)}=\frac{(-1)^{\frac{n+|\gamma|}{2}+k-1}}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+k-1\right)}\delta_{\gamma,1}^{(\frac{n+|\gamma|}{2}+k-1)}(P)+\alpha_\gamma^{(k)}.$$

Для $k=0$ получим

$$(\alpha_\gamma^{(0)},\varphi)_\gamma=\Phi_1\left(-\frac{n+|\gamma|}{2},0\right).$$

Для нахождения $\Phi_1\left(-\frac{n+|\gamma|}{2},0\right)$ рассмотрим $\Phi(\lambda,0)$. Используя (5.18), (5.19) и (5.20), запишем

$$\Phi(\lambda,0)=\varphi(0)\frac{\Gamma(\lambda+1)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^n\Gamma\left(\frac{p+|\gamma'|}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{q+|\gamma''|}{2}+1\right)}.$$

Принимая во внимание формулу

$$\Gamma(1-x)\Gamma(x)=\frac{\pi}{\sin\pi x},$$

найдем, что

$$\Phi(\lambda,0)=\frac{\sin\pi\left(\lambda+\frac{q+|\gamma''|}{2}\right)}{\sin\pi\lambda}\frac{\Gamma\left(-\lambda-\frac{q+|\gamma''|}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+|\gamma'|}{2}\right)\Gamma(-\lambda)}\varphi(0).$$

Если $p+|\gamma'|$ и $q+|\gamma''|$ — четные, то

$$\lim_{\lambda\to-\frac{n+|\gamma|}{2}}\frac{\sin\pi\left(\lambda+\frac{q+|\gamma''|}{2}\right)}{\sin\pi\lambda}=(-1)^{\frac{q+|\gamma''|}{2}},$$

поскольку функция $\Phi(\lambda,0)$ регулярна при $\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}$ и

$$\Phi_1\left(-\frac{n+|\gamma|}{2},0\right)=\Phi\left(-\frac{n+|\gamma|}{2}\right),$$

то

$$(\alpha_\gamma^{(0)},\varphi)_\gamma=(-1)^{\frac{q+|\gamma''|}{2}}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}\varphi(0).$$

Если $p+|\gamma'|$ и $q+|\gamma''|$ не являются натуральными числами или $p+|\gamma'|,q+|\gamma''|\in\mathbb{N}$ и $p+|\gamma'|=2m-1$, $q+|\gamma''|=2k-1$, $m,k\in\mathbb{N}$, то $\Phi(\lambda,0)$ имеет полюс в точке $\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}$. В этом случае

$$(\alpha_\gamma^{(0)},\varphi)_\gamma=\Phi_1\left(-\frac{n+|\gamma|}{2},0\right)=(-1)^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\times$$

$$\times\frac{\sin\left(\frac{p+|\gamma'|}{2}\pi\right)\left(\psi\left(\frac{p+|\gamma'|}{2}\right)-\psi\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}\varphi(0),$$

где $\psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$. Получим

$$c_{-1}^{(0)}=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}\left[(-1)^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}\delta_{\gamma,1}^{\left(\frac{n+|\gamma|}{2}-1\right)}(P)+\theta\delta_\gamma(x)\right]$$

со значением

$$\theta=(-1)^{\frac{q+|\gamma''|}{2}}\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right),$$

если $p+|\gamma'|$ и $q+|\gamma''|$ — четные. Если $p+|\gamma'|$ и $q+|\gamma''|$ не являются натуральными числами или $p+|\gamma'|, q+|\gamma''| \in \mathbb{N}$ и $p+|\gamma'| = 2m-1$, $q+|\gamma''| = 2k-1$, $m,k\in\mathbb{N}$, то

$$\theta = (-1)^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\sin\left(\frac{p+|\gamma'|}{2}\pi\right)\times\left(\psi\left(\frac{p+|\gamma'|}{2}\right)-\psi\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\right).$$

Наконец, для получения $c_{-1}^{(k)}$ для любого $k\geqslant 1$, мы снова используем формулу (5.23). Это завершает доказательство. □

Можно аналогично получить и результаты для функции $P_{\gamma,-}^{\lambda}$ вида

$$(P_{\gamma,-}^{\lambda},\varphi)_\gamma = \int\limits_{\{P(x)<0\}^+}(-P(x))^{\lambda}\varphi(x)x^{\gamma}dx, \qquad \varphi\in S_{ev},$$

(см. (5.4)). Все полученные для $P_{\gamma,+}^{\lambda}$ результаты будут справедливы и для $P_{\gamma,-}^{\lambda}$, следует только поменять число p на q и наоборот. При этом в полученных формулах функция $\delta_{\gamma,1}^{(k)}$ заменится на $(-1)^k\delta_{\gamma,2}^{(k)}$, $k=0,1,2,\ldots$

5.2. Весовые обобщенные функции $\mathscr{P}_\gamma^\lambda$ и $(P\pm i0)_\gamma^\lambda$. Рассмотрим пространство всех квадратичных форм диагонального вида

$$\mathscr{P}(x)=\sum_{k=1}^{n} g_k x_k^2$$

с коэффициентами $g_k\in\mathbb{C}$, $k=1,\ldots,n$. Квадратичную форму $\mathscr{P}$ можно записать в виде

$$\mathscr{P}=P_1+iP_2,$$

где P_1, P_2 квадратичные формы с вещественными коэффициентами.

Определение 5.2. Пусть квадратичная форма $\mathscr{P}=P_1+iP_2$ имеет положительно определенную мнимую часть P_2. Определим однозначную аналитическую функцию от λ

$$\mathscr{P}^{\lambda}=e^{\lambda(\ln|\mathscr{P}|+i\arg\mathscr{P})}, \qquad 0<\arg\mathscr{P}<\pi. \tag{5.25}$$

Сопоставим функции $\mathscr{P}^\lambda$ обобщенную весовую функцию $\mathscr{P}_\gamma^\lambda=(P_1+iP_2)_\gamma^\lambda$, определенную формулой

$$(\mathscr{P}_\gamma^\lambda,\varphi)_\gamma=\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\mathscr{P}^\lambda(x)\varphi(x)x^\gamma dx.$$

Изучим функцию из определения 5.2. Поскольку мы положили $0<\arg\mathscr{P}<\pi$, то обобщенная весовая функция $\mathscr{P}_\gamma^\lambda$ находится в верхней комплексной полуплоскости. Далее, так как обобщенная весовая функция $\mathscr{P}_\gamma^\lambda$ аналитически зависит не только от λ, но и от коэффициентов квадратичной формы g_r, $r=1,\ldots,n$, то $\mathscr{P}_\gamma^\lambda$ является аналитической функцией всех квадратичных форм вида $\mathscr{P}=P_1+iP_2$, где форма P_2 положительно определена. В силу единственности аналитического продолжения обобщенная весовая функция $\mathscr{P}_\gamma^\lambda$ однозначно определяется своими значениями на множестве квадратичных форм вида $\mathscr{P}=iP_2$. Поэтому вместо $\mathscr{P}=P_1+iP_2$ будем рассматривать форму

$$\mathscr{P}=iP_2=\sum_{k=1}^{n}g_kx_k^2.$$

Это означает, что $g_k=ib_k$, $b_k\in\mathbb{R}$, $k=1,\ldots,n$ и форма

$$P_2(x)=\sum_{k=1}^{n}b_kx_k^2$$

положительно определена. Тогда

$$(\mathscr{P}_\gamma^\lambda,\varphi)_\gamma=\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\left(\sum_{k=1}^{n}ib_kx_k^2\right)^\lambda\varphi(x)x^\gamma dx=e^{i\frac{\pi\lambda}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\left(\sum_{k=1}^{n}b_kx_k^2\right)^\lambda\varphi(x)x^\gamma dx. \tag{5.26}$$

Учитывая что $b_k = -ig_k$, $k = 1, \ldots, n$, перейдем в равенстве (5.26) от $\sqrt{b_k}x_k$ к x_k, получим

$$(\mathscr{P}^\lambda_\gamma, \varphi)_\gamma = \eta_\gamma(g) e^{i\frac{\pi\lambda}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} r^{2\lambda}\, \varphi_g(x) x^\gamma dx, \tag{5.27}$$

где $g = (g_1, \ldots, g_n)$, g_k — коэффициенты формы iP_2, $k = 1, \ldots, n$,

$$\eta_\gamma(g) = \prod_{k=1}^n (-ig_k)^{-\frac{1+\gamma_k}{2}}, \quad r^{2\lambda} = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^\lambda, \quad \varphi_g(x) = \varphi\left(\frac{x_1}{\sqrt{-ig_1}}, \ldots, \frac{x_n}{\sqrt{-ig_n}}\right).$$

Весовой функционал $(r^{2\lambda}, \varphi)_\gamma$ определен формулой (5.1). Формула (5.2) показывает, что в точках $\lambda = -\dfrac{n + |\gamma| + 2p}{2}$, $p = 0, 1, 2, \ldots$ весовая обобщенная функция $r^{2\lambda}$ имеет простые полюсы. Вычет функции $r^{2\lambda}$ в точке $\lambda = -\dfrac{n + |\gamma|}{2}$ равен

$$\operatorname*{res}_{\lambda = -\frac{n+|\gamma|}{2}} [(r^{2\lambda}, \varphi)_\gamma] = |S_1^+(n)|_\gamma\, \delta_\gamma(x).$$

Поэтому $\mathscr{P}^\lambda_\gamma$ также имеет простые полюсы в точках $\lambda = -\dfrac{n + |\gamma| + 2p}{2}$, $p = 0, 1, 2, \ldots$, и

$$\operatorname*{res}_{\lambda = -\frac{n+|\gamma|}{2}} \mathscr{P}^\lambda_\gamma = \eta_\gamma(g) e^{-i\frac{\pi(n+|\gamma|)}{4}} |S_1^+(n)|_\gamma\, \delta_\gamma(x). \tag{5.28}$$

Введем дифференциальный оператор

$$\mathcal{B}_{\gamma,g} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{g_k}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\gamma_k}{x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\right),$$

где g_k — коэффициенты квадратичной формы iP_2. Имеем

$$\mathcal{B}_{\gamma,g} \mathscr{P}^{\lambda+1}_\gamma = 4(\lambda + 1)\left(\lambda + \frac{n + |\gamma|}{2}\right) \mathscr{P}^\lambda_\gamma. \tag{5.29}$$

Применяя формулу (5.29) k раз, получим

$$\mathcal{B}^k_{\gamma,g}(\partial) \mathscr{P}^{\lambda+k}_\gamma = 4^k(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)\left(\lambda + \frac{n+|\gamma|}{2}\right)\ldots\left(\lambda + \frac{n+|\gamma|}{2} + k - 1\right)\mathscr{P}^\lambda_\gamma. \tag{5.30}$$

Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{\lambda = -\frac{n+|\gamma|}{2} - k} \mathscr{P}^\lambda_\gamma =$$

$$= \left.\frac{1}{4^k(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)\left(\lambda + \frac{n+|\gamma|}{2}\right)\ldots\left(\lambda + \frac{n+|\gamma|}{2} + k - 1\right)}\right|_{\lambda = -\frac{n+|\gamma|}{2} - k} \operatorname*{res}_{\lambda = -\frac{n+|\gamma|}{2}} \mathcal{B}^k_{\gamma,g} \mathscr{P}^{\lambda+k}_\gamma,$$

откуда применяя формулу (5.28), найдем вычет $\mathscr{P}^\lambda_\gamma$ в точке $\lambda = -\dfrac{n + |\gamma|}{2} - k$:

$$\operatorname*{res}_{\lambda = -\frac{n+|\gamma|}{2} - k} \mathscr{P}^\lambda_\gamma = \frac{\eta_\gamma(g) e^{-i\frac{\pi(n+|\gamma|)}{4}} |S_1^+(n)|_\gamma \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{4^k k! \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2} + k\right)}\, \mathcal{B}^k_{\gamma,g}\delta_\gamma. \tag{5.31}$$

Формула (5.31) получена для квадратичной формы $\mathscr{P} = iP_2 = \sum\limits_{k=1}^n g_k x_k^2$, принадлежащей мнимой оси. Продолжим формулу (5.31) аналитически на всю верхнюю полуплоскость всех квадратичных форм

$$\mathscr{P} = P_1 + iP_2, \quad P_1 = \sum_{k=1}^n a_k x_k^2, \quad P_2 = \sum_{k=1}^n b_k x_k^2,$$

где P_2 — положительно определена. Коэффициенты оператора $\mathcal{B}_{\gamma,g}$ аналитически выражаются через коэффициенты квадратичной формы $\mathscr{P}$, а именно, они равны $\dfrac{1}{g_k}$, поэтому аналитическое продолжение оператора $\mathcal{B}_{\gamma,g}$ известно. Аналитическое продолжение функции $\eta_\gamma(g)$ на всю верхнюю полуплоскость имеет вид:

$$\eta_\gamma(g)=\prod_{k=1}^n(b_k(1-i\mu_k))^{-\frac{1+\gamma_k}{2}},\qquad \mu_k=\frac{a_k}{b_k}. \tag{5.32}$$

Следовательно, если

$$\mathscr{P}(x)=P_1+iP_2=\sum_{k=1}^n g_kx_k^2=\sum_{k=1}^n(a_k+ib_k)x_k^2,\quad a_k,b_k\in\mathbb{R},\quad k=1,\ldots,n$$

— квадратичная форма с положительно определенной мнимой частью, то весовая обобщенная функция $\mathscr{P}_\gamma^\lambda$ является регулярной аналитической функцией от λ всюду, за исключением точек $\lambda=-\dfrac{n+|\gamma|}{2}-k$, $k=0,1,2,\ldots$, в которых $\mathscr{P}_\gamma^\lambda$ имеет простые полюсы. Аналогично можно рассмотреть и нижнюю полуплоскость

$$\mathscr{P}(x)=P_1-iP_2=\sum_{k=1}^n g_kx_k^2=\sum_{k=1}^n(a_k-ib_k)x_k^2.$$

В этом случае аналитическое продолжение функции $\eta_\gamma(g)$ на всю нижнюю полуплоскость имеет вид:

$$\eta_\gamma(g)=\prod_{k=1}^n(b_k(1+i\mu_k))^{-\frac{1+\gamma_k}{2}},\qquad \mu_k=\frac{a_k}{b_k}. \tag{5.33}$$

Таким образом, из (5.31) получаем две формулы. Первая для с вычетов весовой обобщенной функции $(P_1+iP_2)_\gamma^\lambda$:

$$\underset{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k}{\operatorname{res}}(P_1+iP_2)_\gamma^\lambda=\frac{e^{-i\frac{\pi(n+|\gamma|)}{4}}|S_1^+(n)|_\gamma\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{4^kk!\prod\limits_{k=1}^n(b_k-ia_k))^{\frac{1+\gamma_k}{2}}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+k\right)}\,\mathcal{B}_{\gamma,g}^k\delta_\gamma. \tag{5.34}$$

Вторая для с вычетов весовой обобщенной функции $(P_1-iP_2)_\gamma^\lambda$:

$$\underset{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k}{\operatorname{res}}(P_1-iP_2)_\gamma^\lambda=\frac{e^{i\frac{\pi(n+|\gamma|)}{4}}|S_1^+(n)|_\gamma\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{4^kk!\prod\limits_{k=1}^n(b_k+ia_k))^{\frac{1+\gamma_k}{2}}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+k\right)}\,\mathcal{B}_{\gamma,g}^k\delta_\gamma. \tag{5.35}$$

В (5.34) и (5.35) квадратичная форма $P_2=\sum\limits_{k=1}^n b_kx_k^2$ положительно определена.

При помощи рассмотренных функций $(P_1\pm iP_2)_\gamma^\lambda$ построим весовые обобщенные функции $(P+i0)_\gamma^\lambda$ и $(P-i0)_\gamma^\lambda$. Через функции $(P\pm i0)_\gamma^\lambda$ выражается фундаментальное решение для итерированного оператора $\square_\gamma^k$, где

$$\square_\gamma=\sum_{k=1}^p B_{\gamma_k}-\sum_{j=p+1}^n B_{\gamma_j},\quad k=1,2,\ldots,$$

и, кроме того, они используются для построения вещественных степеней B-ультрагиперболического оператора $\square_\gamma$, в частности, B-гиперболического оператора, когда $p=1$ и $n=2,3,\ldots$.

Определение 5.3. Рассмотрим невырожденную квадратичную форму с вещественными коэффициентами

$$A(x)=\sum_{k=1}^n a_kx_k^2,\qquad a_k\in\mathbb{R}. \tag{5.36}$$

При этом форма A имеет в каноническом представлении p положительных слагаемых и q отрицательных, $p+q=n$. Пусть

$$\mathscr{P}=A+iP',$$

где P' — положительно определенная квадратичная форма с вещественными коэффициентами. Без ограничения общности будем полагать, что

$$P'=\varepsilon(x_1^2+\ldots+x_n^2), \qquad \varepsilon>0.$$

Пусть

$$\mathscr{P}^\lambda_\gamma=(A+iP')^\lambda_\gamma.$$

Тогда *весовые обобщенные функции* $(A+i0)^\lambda_\gamma$ и $(A-i0)^\lambda_\gamma$ при $\mathrm{Re}\lambda>0$ определим формулами

$$(A+i0)^\lambda_\gamma=\lim_{\varepsilon\to 0}(A+iP')^\lambda_\gamma, \quad (A-i0)^\lambda_\gamma=\lim_{\varepsilon\to 0}(A-iP')^\lambda_\gamma,$$

в которых предельный переход осуществляется под знаком интеграла $\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\mathscr{P}^\lambda\varphi x^\gamma dx$. При $\mathrm{Re}\,\lambda<0$, $\lambda\neq -k$, $\lambda\neq -\dfrac{n+|\gamma|}{2}-k+1$, $k\in\mathbb{N}$ для определения $(A+i0)^\lambda_\gamma$ и $(A-i0)^\lambda_\gamma$ сначала применяется формула (8.14), а затем осуществляется предельный переход при $\varepsilon\to 0$.

Теорема 5.4. *Вычетами функций $(A+i0)^\lambda_\gamma$ и $(A-i0)^\lambda_\gamma$ в точках $\lambda=-\dfrac{n+|\gamma|}{2}-k$, $k=0,1,2,\ldots$ являются весовые обобщенные функции, сосредоточенные в вершине $A(x)=0$:*

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k}(A+i0)^\lambda_\gamma=\frac{e^{-i\frac{\pi(q+|\gamma''|)}{2}}|S_1^+(n)|_\gamma\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{4^k k!\prod\limits_{k=1}^n|a_k|^{\frac{1+\gamma_k}{2}}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+k\right)}\,\mathcal{B}^k_{\gamma,a}\delta_\gamma(x), \tag{5.37}$$

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k}(A-i0)^\lambda_\gamma=\frac{e^{i\frac{\pi(q+|\gamma''|)}{2}}|S_1^+(n)|_\gamma\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{4^k k!\prod\limits_{k=1}^n|a_k|^{\frac{1+\gamma_k}{2}}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+k\right)}\,\mathcal{B}^k_{\gamma,a}\delta_\gamma(x), \tag{5.38}$$

где

$$\mathcal{B}_{\gamma,a}=\sum_{k=1}^n\frac{1}{a_k}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}+\frac{\gamma_k}{x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\right),$$

где $a_k\in\mathbb{R}$ — коэффициенты квадратичной формы A.

Доказательство. Весовые обобщенные функции $(A+i0)^\lambda_\gamma$ и $(A-i0)^\lambda_\gamma$ могут быть выражены через весовые обобщенные функции $A^\lambda_{\gamma,+}$ и $A^\lambda_{\gamma,-}$, определенные формулами

$$(A^\lambda_{\gamma,+},\varphi)_\gamma=\int\limits_{\{A(x)>0\}^+}A^\lambda(x)\varphi(x)x^\gamma dx, \qquad \varphi\in S_{ev}$$

и

$$(A^\lambda_{\gamma,-},\varphi)_\gamma=\int\limits_{\{A(x)<0\}^+}(-A(x))^\lambda\varphi(x)x^\gamma dx, \qquad \varphi\in S_{ev},$$

где $\{A(x)>0\}^+=\{x\in\mathbb{R}^n_+: A(x)>0\}$, $\{A(x)<0\}^+=\{x\in\mathbb{R}^n_+: A(x)<0\}$, $\lambda\in\mathbb{C}$. А именно,

$$(A+i0)^\lambda_\gamma=A^\lambda_{\gamma,+}+e^{\pi\lambda i}A^\lambda_{\gamma,-}, \tag{5.39}$$

$$(A-i0)^\lambda_\gamma=A^\lambda_{\gamma,+}+e^{-\pi\lambda i}A^\lambda_{\gamma,-}. \tag{5.40}$$

В силу единственности аналитического продолжения формулы (5.39) и (5.40) можно использовать и при $\mathrm{Re}\,\lambda\leqslant 0$, а при $\lambda=-k$, $k\in\mathbb{N}$ весовая обобщенная функция $\mathscr{P}^\lambda_\gamma$ не имеет полюсов, тогда $(A\pm i0)^\lambda_\gamma$ в этом случае вводится по формулам (5.39) и (5.40). Таким образом, весовые обобщенные функции $(A \pm i0)^\lambda_\gamma$ являются аналитическими функциями от λ для любого комплексного λ, за исключением точек $\lambda = -\dfrac{n+|\gamma|}{2} - k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ в которых имеют простые полюсы с вычетами

$$\underset{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k}{\operatorname{res}} (A \pm i0)^\lambda_\gamma = \lim_{\varepsilon\to 0} \underset{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k}{\operatorname{res}} (A \pm i\varepsilon|x|)^\lambda_\gamma.$$

Поскольку форма A имеет в каноническом представлении p положительных слагаемых и q отрицательных, то из (5.32) и (5.33), получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\prod_{k=1}^n (\varepsilon - ia_k)^{-\frac{1+\gamma_k}{2}} = \prod_{k=1}^n |a_k|^{-\frac{1+\gamma_k}{2}} (-i)^{-\frac{p+|\gamma'|}{2}}\, i^{-\frac{q+|\gamma''|}{2}} = e^{\frac{\pi i}{4}(p+|\gamma'|-q-|\gamma''|)} \prod_{k=1}^n |a_k|^{-\frac{1+\gamma_k}{2}},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\prod_{k=1}^n (\varepsilon + ia_k)^{-\frac{1+\gamma_k}{2}} = \prod_{k=1}^n |a_k|^{-\frac{1+\gamma_k}{2}} i^{-\frac{p+|\gamma'|}{2}}\, (-i)^{-\frac{q+|\gamma''|}{2}} = e^{\frac{\pi i}{4}(-p-|\gamma'|+q+|\gamma''|)} \prod_{k=1}^n |a_k|^{-\frac{1+\gamma_k}{2}},$$

где $|\gamma'| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_p$, $|\gamma''| = \gamma_{p+1} + \ldots + \gamma_{p+q}$. Тогда, применяя формулы (5.34) и (5.35), получим (5.37) и (5.38). $\square$

Если в (5.36) все $a_k = 1$, то получается квадратичная форма

$$P = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_n^2, \quad n = p + q,$$

и для нее справедливы все полученные формулы. А именно,

$$(P + i0)^\lambda_\gamma = P^\lambda_{\gamma,+} + e^{\pi\lambda i} P^\lambda_{\gamma,-}, \tag{5.41}$$

$$(P - i0)^\lambda_\gamma = P^\lambda_{\gamma,+} + e^{-\pi\lambda i} P^\lambda_{\gamma,-}. \tag{5.42}$$

Из формул (5.37) и (5.38) следует, что вычетами функций $(P + i0)^\lambda_\gamma$ и $(P - i0)^\lambda_\gamma$ в точках $\lambda = -\dfrac{n+|\gamma|}{2} - k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ являются весовые обобщенные функции, сосредоточенные в вершине $P(x) = 0$:

$$\underset{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k}{\operatorname{res}} (P + i0)^\lambda_\gamma = \frac{e^{-i\frac{\pi(q+|\gamma''|)}{2}} |S_1^+(n)|_\gamma \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{4^k k! \prod\limits_{k=1}^n \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2} + k\right)} \square^k_\gamma \delta_\gamma(x), \tag{5.43}$$

$$\underset{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k}{\operatorname{res}} (P - i0)^\lambda_\gamma = \frac{e^{i\frac{\pi(q+|\gamma''|)}{2}} |S_1^+(n)|_\gamma \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{4^k k! \prod\limits_{k=1}^n \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2} + k\right)} \square^k_\gamma \delta_\gamma(x). \tag{5.44}$$

Кроме того, из (5.41) и (5.42) получаются формулы

$$P^\lambda_{+,\gamma} = -\frac{1}{2i\sin\lambda\pi}\left(e^{-\pi\lambda i}(P + i0)^\lambda_\gamma - e^{\pi\lambda i}(P - i0)^\lambda_\gamma\right), \tag{5.45}$$

$$P^\lambda_{-,\gamma} = \frac{1}{2i\sin\lambda\pi}\left((P + i0)^\lambda_\gamma - (P - i0)^\lambda_\gamma\right). \tag{5.46}$$

6. Другие весовые обобщенные функции, связанные с квадратичной формой

Введенные функции $P^\lambda_{\pm,\gamma}$ и $(P \pm i0)^\lambda_\gamma$ используются далее для получения фундаментального решения B-ультрагиперболического уравнения и построения гиперболических B-потенциалов Рисса. Однако рассмотренных ранее весовых обобщенных функций, связанных с квадратичной формой, оказывается недостаточно для получения решений задач Коши для общего уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу. В этом разделе рассмотрим функции, которые потребуются для решения указанных задач.

6.1. Функции $(w^2-|x|^2)^\lambda_{+,\gamma}$ и $(c^2+P\pm i0)^\lambda_\gamma$. Здесь рассмотрим весовую обобщенную функцию, связанную с положительно определенной квадратичной формой $(w^2-|x|^2)^\lambda_{+,\gamma}$, и весовую обобщенную функцию, связанную с неопределенной квадратичной формой $(c^2+P\pm i0)^\lambda_\gamma$. Причем c и w не зависят от $x\in\mathbb{R}^n_+$.

Определение 6.1. Пусть $x\in\mathbb{R}^n_+$ и w не зависит от x. Определим *весовую обобщенную функцию* $(w^2-|x|^2)^\lambda_{+,\gamma}$ формулой

$$((w^2-|x|^2)^\lambda_{+,\gamma},\varphi)_\gamma=\int\limits_{\{|x|<w\}^+}(w^2-|x|^2)^\lambda\varphi(x)x^\gamma dx,\qquad \varphi\in S_{ev},\qquad \lambda\in\mathbb{C}, \tag{6.1}$$

где $\{|x|<w\}^+=\{x\in\mathbb{R}^n_+{:}|x|<w\}$.

Определение 6.2. Пусть $\varphi\in S_{ev}$,

$$\mathscr{P}=P\pm iP',\qquad P=\sum_{k=1}^n a_kx_k^2,\qquad a_k\in\mathbb{R},$$

квадратичная форма P имеет p положительных и q отрицательных слагаемых, $p+q=n$, P' — положительно определенная квадратичная форма с вещественными коэффициентами. Без ограничения общности положим

$$P'=\varepsilon(x_1^2+\ldots+x_n^2),\quad \varepsilon>0,$$

c не зависит от x. Определим весовые обобщенные функции $(c^2+P\pm iP')^\lambda_\gamma$ формулами

$$((c^2+P+iP')^\lambda_\gamma,\varphi(x))_\gamma=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}(c^2+P+iP')\varphi(x)x^\gamma dx,$$

$$((c^2+P-iP')^\lambda_\gamma,\varphi(x))_\gamma=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}(c^2+P-iP')\varphi(x)x^\gamma dx.$$

Функции $(c^2+P+i0)^\lambda_\gamma$ и $(c^2+P-i0)^\lambda_\gamma$ при $\operatorname{Re}\lambda>0$ определяются формулами

$$(c^2+P+i0)^\lambda_\gamma=\lim_{\varepsilon\to0}(c^2+P+iP')^\lambda_\gamma,$$

$$(c^2+P-i0)^\lambda_\gamma=\lim_{\varepsilon\to0}(c^2+P-iP')^\lambda_\gamma,$$

в которых переход к пределу при $\varepsilon\to0$ осуществляется под знаком интеграла $\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\mathscr{P}^\lambda\varphi x^\gamma dx$.

6.2. Общие весовые обобщенные функции, связанные с квадратичной формой. В этом пункте введем новое семейство весовых обобщенных функций, связанных с функцией

$$P(x)=x_1^2+\ldots+x_p^2-x_{p+1}^2-\ldots-x_{p+q}^2,\quad n=p+q.$$

Функции этого семейства можно рассматривать как обобщение уже рассмотренных выше функций.

Пусть P — вещественная квадратичная форма, а P_1 — положительно определенная квадратичная форма, $\mathscr{P}=P\pm iP_1$.

Определение 6.3. Пусть $\varphi\in S_{ev}$, $f(z,\lambda)$ — целая функция от z и λ. *Весовые обобщенные функции* $\mathscr{P}^\lambda_\gamma f(\mathscr{P},\lambda)$ определяются равенством

$$(\mathscr{P}^\lambda_\gamma f(\mathscr{P},\lambda),\varphi(x))_\gamma=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\mathscr{P}^\lambda_\gamma f(\mathscr{P},\lambda)\varphi(x)dx,$$

где $\lambda\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda>-1$, $\mathscr{P}$ — комплексная квадратичная форма с положительно определенной мнимой частью. При $\operatorname{Re}\lambda>-1$ функция $\mathscr{P}^\lambda_\gamma f(\mathscr{P},\lambda)$ является аналитической от λ. На другие значения весовая обобщенная функция $\mathscr{P}^\lambda_\gamma f(\mathscr{P},\lambda)$ распространяется при помощи аналитического продолжения.

Из разложения функции $f(z,\lambda)$ в степенной ряд по z следует, что для вещественной квадратичной формы P существуют пределы

$$(P\pm i0)^\lambda_\gamma f(P\pm i0,\lambda)=\lim_{P_1\to 0}\mathscr{P}^\lambda_\gamma f(\mathscr{P},\lambda),\qquad \mathscr{P}=P\pm iP_1.$$

Исходя из формул (5.41) и (5.42), получим аналогичные формулы для общих весовых обобщенных функций, связанных с квадратичной формой и целой функцией:

$$(P+i0)^\lambda_\gamma f(P,\lambda)=P^\lambda_{\gamma,+}f(P_+,\lambda)+e^{\pi\lambda i}P^\lambda_{\gamma,-}f(P_-,\lambda), \tag{6.2}$$

$$(P-i0)^\lambda_\gamma f(P,\lambda)=P^\lambda_{\gamma,+}f(P_+,\lambda)+e^{-\pi\lambda i}P^\lambda_{\gamma,-}f(P_-,\lambda). \tag{6.3}$$

Так определенный класс функций достаточно широк. К нему, в частности, принадлежат весовые обобщенные функции, порожденные функциями Бесселя $J_{\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda}(\mathscr{P}^{1/2})$, $K_{\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda}(\mathscr{P}^{1/2})$, $H^{(1)}_{\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda}(\mathscr{P}^{1/2})$, $H^{(2)}_{\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda}(\mathscr{P}^{1/2})$ и $I_{\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda}(\mathscr{P}^{1/2})$.

7. Преобразование Ханкеля весовых обобщенных функций, связанных с квадратичной формой

В этом разделе мы докажем формулы для многомерного преобразования Ханкеля весовых обобщенных функций, связанных с неопределенной квадратичной формой, рассмотренных ранее.

7.1. Преобразование Ханкеля функций $\mathscr{P}^\lambda_\gamma$, $(P\pm i0)^\lambda_\gamma$ и $P^\lambda_{\gamma,\pm}$. Для нахождения многомерного преобразования Ханкеля весовых обобщенных функций, связанных с квадратичной формой, будем использовать формулу

$$\mathbf{F}_\gamma[r^\lambda](\xi)=\frac{2^{|\gamma|+\lambda}\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}|\xi|^{-n-|\gamma|-\lambda}, \tag{7.1}$$

доказанную в [177], где $\lambda\neq-(n+|\gamma|+2k)$, $\lambda\neq 2k$, $k=0,1,2,\ldots$. Используя эту формулу, докажем следующие теоремы.

Теорема 7.1. *Преобразование Ханкеля $\mathscr{P}^\lambda_\gamma$ для $\lambda\neq k$, $\lambda\neq-\left(\dfrac{n+|\gamma|}{2}+k\right)$, $k=0,1,2,\ldots$ вычисляется по формуле*

$$\mathbf{F}_\gamma[\mathscr{P}^\lambda_\gamma](\xi)=\frac{2^{2\lambda+|\gamma|}e^{-\frac{n+|\gamma|}{4}i\pi}\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda\right)}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{(-i\alpha_1)^{1+\gamma_1}}\ldots\sqrt{(-i\alpha_n)^{1+\gamma_n}}}\left(\frac{\xi_1^2}{\alpha_1}+\ldots+\frac{\xi_n^2}{\alpha_n}\right)^{-\frac{n+|\gamma|}{2}-\lambda}. \tag{7.2}$$

Доказательство. Весовая обобщенная функция $\mathscr{P}^\lambda_\gamma$ является аналитический функцией $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ на множестве $\operatorname{Im}\alpha_k>0$, $k=1,2,\ldots,n$, что означает, что ее преобразование Ханкеля $\mathscr{P}^\lambda_\gamma$ тоже аналитично на том же множестве. Таким образом, чтобы найти $\mathbf{F}_\gamma[\mathscr{P}^\lambda_\gamma]$, мы можем рассмотреть только случай, когда все α_k мнимые, а потом аналитически продолжить найденное преобразование Ханкеля на всю комплексную плоскость. Итак, пусть $\alpha_k=ib_k$, $b_k>0$, $k=1,2,\ldots,n$. Имеем

$$\mathbf{F}_\gamma[\mathscr{P}^\lambda_\gamma](\xi)=e^{\frac{\pi}{2}\lambda i}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}(b_1x_1^2+\ldots+b_nx_n^2)^\lambda\mathbf{j}(x,\xi)x^\gamma dx.$$

Переходя к новым переменным по формуле $x_i=\dfrac{y_i}{\sqrt{b_i}}$, $i=1,\ldots,n$, получим

$$\mathbf{F}_\gamma[\mathscr{P}^\lambda_\gamma](\xi)=e^{\frac{\pi}{2}\lambda i}b_1^{-\frac{1+\gamma_1}{2}}\ldots b_n^{-\frac{1+\gamma_n}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}r^{2\lambda}\mathbf{j}\left(\frac{y}{\sqrt{b}},\xi\right)y^\gamma dy.$$

Используя формулу (7.1) для преобразования Ханкеля $r^{2\lambda}$, запишем

$$\mathbf{F}_\gamma[\mathscr{P}_\gamma^\lambda](\xi)=\frac{2^{2\lambda+|\gamma|}\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda\right)}{\Gamma\left(-\lambda\right)\sqrt{b_1^{1+\gamma_1}}\ldots\sqrt{b_n^{1+\gamma_n}}}e^{\frac{\pi}{2}\lambda i}\left(\frac{\xi_1^2}{b_1}+\ldots+\frac{\xi_n^2}{b_n}\right)^{-n-|\gamma|-2\lambda}=$$

$$=2^{2\lambda+|\gamma|}e^{\frac{\pi}{2}\lambda i}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda\right)}{\Gamma\left(-\lambda\right)\sqrt{(-i\alpha_1)^{1+\gamma_1}}\ldots\sqrt{(-i\alpha_n)^{1+\gamma_n}}}\left(\frac{\xi_1^2}{-i\alpha_1}+\ldots+\frac{\xi_n^2}{-i\alpha_n}\right)^{\frac{-n-|\gamma|}{2}-\lambda}.$$

Вынесем множитель $-i$ за скобку в $\left(\frac{\xi_1^2}{-i\alpha_1}+\ldots+\frac{\xi_n^2}{-i\alpha_n}\right)^{\frac{-n-|\gamma|}{2}-\lambda}$ и будем иметь (7.2). Полученная формула справедлива для любой квадратичной формы, мнимая часть которой положительно определена в силу единственности аналитического продолжения. Квадратные корни $\sqrt{(-i\alpha_1)^{1+\gamma_1}}\ldots\sqrt{(-i\alpha_n)^{1+\gamma_n}}$ вычисляются по формуле $\sqrt{z}=|z|^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}i\arg z}$. □

Теорема 7.2. *Преобразования Ханкеля* $(P\pm i0)_\gamma^\lambda$ *для* $\lambda\neq k$, $\lambda\neq-\left(\dfrac{n+|\gamma|}{2}+k\right)$, $k=0,1,2,\ldots$ *вычисляется по формулам*

$$\mathbf{F}_\gamma[(P+i0)_\gamma^\lambda](\xi)=e^{-\frac{q+|\gamma''|}{2}i\pi}\beta_{n,\gamma}(\lambda)(Q-i0)^{-\frac{n+|\gamma|}{2}-\lambda},\tag{7.3}$$

$$\mathbf{F}_\gamma[(P-i0)_\gamma^\lambda](\xi)=e^{\frac{q+|\gamma''|}{2}i\pi}\beta_{n,\gamma}(\lambda)(Q+i0)^{-\frac{n+|\gamma|}{2}-\lambda},\tag{7.4}$$

где

$$Q=\xi_1^2+\ldots+\xi_p^2-\xi_{p+1}^2-\ldots-\xi_{p+q}^2,\qquad \beta_{n,\gamma}(\lambda)=2^{2\lambda+|\gamma|}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda\right)}{\Gamma\left(-\lambda\right)}.$$

Доказательство. Пусть в формуле (7.2) $\alpha_k=a_k+ib_k$, $k=1,\ldots,n$, тогда

$$\mathbf{F}_\gamma[\mathscr{P}_\gamma^\lambda](\xi)=2^{2\lambda+|\gamma|}e^{-\frac{n+|\gamma|}{4}i\pi}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda\right)}{\Gamma\left(-\lambda\right)\sqrt{(b_1-ia_1)^{1+\gamma_1}}\ldots\sqrt{(b_n-ia_k)^{1+\gamma_n}}}\times$$

$$\times\left(\frac{\xi_1^2}{a_1+ib_1}+\ldots+\frac{\xi_n^2}{a_n+ib_n}\right)^{-\frac{n+|\gamma|}{2}-\lambda}.\tag{7.5}$$

Полагая $a_1=1,\ldots,a_p=1$, $a_{p+1}=-1,\ldots,a_{p+q}=-1$ in (7.5) и переходя к пределам $b_1\to0$, …, $b_n\to0$, получим

$$\mathbf{F}_\gamma[(P+i0)_\gamma^\lambda](\xi)=2^{2\lambda+|\gamma|}e^{-\frac{n+|\gamma|}{4}i\pi}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda\right)}{\Gamma\left(-\lambda\right)\sqrt{(-i)^{1+\gamma_1}}\ldots\sqrt{(-i)^{1+\gamma_p}}\sqrt{i^{1+\gamma_{p+1}}\sqrt{i^{1+\gamma_n}}}}\times$$

$$\times\left(\frac{\xi_1^2}{1+i0}+\ldots+\frac{\xi_p^2}{1+i0}+\frac{\xi_{p+1}^2}{-1+i0}+\ldots+\frac{\xi_n^2}{-1+i0}\right)^{-\frac{n+|\gamma|}{2}-\lambda}=$$

$$=2^{2\lambda+|\gamma|}e^{\frac{q+|\gamma''|}{2}i\pi}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda\right)}{\Gamma\left(-\lambda\right)}\times$$

$$\times\left(\xi_1^2(1-i0)+\ldots+\xi_p^2(1-i0)+\xi_{p+1}^2(-1-i0)+\ldots+\xi_n^2(-1-i0)\right)^{-\frac{n+|\gamma|}{2}-\lambda}=$$

$$=2^{2\lambda+|\gamma|}e^{-\frac{q+|\gamma''|}{2}i\pi}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda\right)}{\Gamma\left(-\lambda\right)}(Q-i0)^{-\frac{n+|\gamma|}{2}-\lambda}.$$

Это и дает (7.3). Формула (7.4) получается аналогично. □

В дальнейшем для формул (7.3) и (7.4) будем использовать короткую запись:

$$\mathbf{F}_\gamma[(P\pm i0)^\lambda_\gamma]=e^{-\frac{q+|\gamma''|}{2}i\pi}\beta_{n,\gamma}(\lambda)(P\mp i0)^{-\frac{n+|\gamma|}{2}-\lambda}. \tag{7.6}$$

Теорема 7.3. *Преобразования Ханкеля* $P^\lambda_{\gamma,\pm}$ *при* $\lambda\neq k$, $\lambda\neq-\left(\dfrac{n+|\gamma|}{2}+k\right)$, $k=0,1,2,\ldots$, *вычисляются по формулам*

$$\mathbf{F}_\gamma[P^\lambda_+]=\frac{2^{2\lambda+|\gamma|-1}}{i\pi}\prod_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda\right)\Gamma\left(1+\lambda\right)\times$$

$$\times\left(e^{-i\pi\left(\lambda+\frac{q+|\gamma''|}{2}\right)}(Q-i0)^{-\frac{n+|\gamma|}{2}-\lambda}-e^{i\pi\left(\lambda+\frac{q+|\gamma''|}{2}\right)}(Q+i0)^{-\frac{n+|\gamma|}{2}-\lambda}\right), \tag{7.7}$$

$$\mathbf{F}_\gamma[P^\lambda_-]=-\frac{2^{2\lambda+|\gamma|-1}}{i\pi}\prod_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda\right)\Gamma\left(\lambda+1\right)\times$$

$$\times\left(e^{-\frac{q+|\gamma''|}{2}i\pi}(Q-i0)^{-\frac{n+|\gamma|}{2}-\lambda}-e^{\frac{q+|\gamma''|}{2}i\pi}(Q+i0)^{-\frac{n+|\gamma|}{2}-\lambda}\right), \tag{7.8}$$

где

$$Q=\xi_1^2+\ldots+\xi_p^2-\xi_{p+1}^2-\ldots-\xi_{p+q}^2.$$

Доказательство. Используя формулы (5.45), (5.46), (7.3), (7.4) и

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z},$$

после простых вычислений получим (7.7) и (7.8). □

7.2. Преобразование Ханкеля функций $(w^2-|x|^2)^\lambda_{+,\gamma}$ **и** $(c^2+P\pm i0)^\lambda_\gamma$**.** Получим формулы преобразования Ханкеля некоторых функций их раздела 6.

Теорема 7.4. *Имеет место следующая формула*:

$$(\mathbf{F}_\gamma)_x\left[\frac{(w^2-|x|^2)^\lambda_{+,\gamma}}{\Gamma(\lambda+1)}\right](\xi)=\frac{w^{n+|\gamma|+2\lambda}\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^n\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda+1\right)}\,j_{\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda}(w|x|), \tag{7.9}$$

где $(w^2-|x|^2)^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}}_{+,\gamma}$ *определена формулой* (6.1)*,* $w>0$.

Доказательство. Пусть сначала $\operatorname{Re}\lambda>-1$. Переходя к сферическим координатам в $\mathbf{F}_\gamma(w^2-|x|^2)^\lambda_{+,\gamma}$ и применяя формулу (2.16), получим

$$(\mathbf{F}_\gamma)_x(w^2-|x|^2)^\lambda_{+,\gamma}=\int\limits_{B^+_w(n)}\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)(w^2-|x|^2)^\lambda x^\gamma\,dx=\{x=r\theta,r=|x|\}=$$

$$=\int\limits_0^w(w^2-r^2)^\lambda r^{n+|\gamma|-1}dr\int\limits_{S^+_1(n)}\mathbf{j}_\gamma(r\theta,x)\theta^\gamma\,dS=$$

$$=\frac{\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}\int\limits_0^w(w^2-r^2)^\lambda j_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(r|x|)r^{n+|\gamma|-1}dr=$$

$$=|x|^{1-\frac{n+|\gamma|}{2}}2^{\frac{|\gamma|-n}{2}}\prod_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\int\limits_0^w(w^2-r^2)^\lambda J_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(r|x|)r^{\frac{n+|\gamma|}{2}}dr.$$

Используя соотношение [127, формула 2.12.4.6] в виде

$$\int\limits_0^w r^{\nu+1}(w^2-r^2)^{\beta-1}J_\nu(\mu r)dr=\frac{2^{\beta-1}w^{\beta+\nu}\Gamma(\beta)}{\mu^\beta}J_{\beta+\nu}(\mu w),\ w>0,\ \mathrm{Re}\,\beta>0,\ \mathrm{Re}\,\nu>-1, \tag{7.10}$$

будем иметь

$$\int\limits_0^w (w^2-r^2)^\lambda J_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(r|x|)r^{\frac{n+|\gamma|}{2}}dr=\frac{2^\lambda w^{\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda}\Gamma(\lambda+1)}{|x|^{\lambda+1}}J_{\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda}(|x|\omega)$$

для $\mathrm{Re}\,\lambda>-1$ и

$$(\mathbf{F}_\gamma)_x(w^2-|x|^2)^\lambda_{+,\gamma}=\frac{w^{n+|\gamma|+2\lambda}\Gamma(\lambda+1)\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^n\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda+1\right)}\ j_{\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda}(w|x|),$$

что совпадает с (7.9). Таким образом, мы получили (7.9) для $\mathrm{Re}\,\lambda>-1$. На другие значения λ, такие, что $\lambda\neq-1,-2,-3,\ldots$, она продолжается аналитически.

Вычеты $\dfrac{(w^2-|x|^2)^\lambda_{+,\gamma}}{\Gamma(\lambda+1)}$ в точках $\lambda=-m$, $m\in\mathbb{N}$ имеют вид (см. раздел 5.1)

$$\lim_{\lambda\to-m}\frac{(w^2-|x|^2)^\lambda_{+,\gamma}}{\Gamma(\lambda+1)}=\delta_\gamma^{(m-1)}(w^2-|x|^2).$$

Тогда для $\lambda=-m$, получим

$$(\mathbf{F}_\gamma)_x\left[\frac{(w^2-|x|^2)^\lambda_{+,\gamma}}{\Gamma(\lambda+1)}\right](\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\delta_\gamma^{(m-1)}(w^2-|x|^2)x^\gamma\,dx=\frac{w^{n+|\gamma|-2m}\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^n\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}-m+1\right)}j_{\frac{n+|\gamma|}{2}-m}(w|x|).$$

Доказательство закончено. □

Теорема 7.5. *Имеют место следующие формулы*:

$$\mathbf{F}_\gamma(w^2+P+i0)^\lambda_\gamma=$$

$$=\frac{2^{\frac{|\gamma|-n}{2}+\lambda+1}e^{-\frac12 q\pi i}w^{\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda}\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{|\Delta|}}\left[\frac{K_{\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda}(wQ^{\frac12}_{\gamma,+})}{Q_{\gamma,+}^{\frac12\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda\right)}}+\frac{i\pi}{2}\frac{H^{(1)}_{-\frac{n+|\gamma|}{2}-\lambda}(wQ^{\frac12}_{\gamma,-})}{Q_{\gamma,-}^{\frac12\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda\right)}}\right], \tag{7.11}$$

$$\mathbf{F}_\gamma(w^2+P-i0)^\lambda_\gamma=$$

$$=\frac{2^{\frac{|\gamma|-n}{2}+\lambda+1}e^{\frac12 q\pi i}w^{\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda}\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{|\Delta|}}\left[\frac{K_{\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda}(wQ^{\frac12}_{\gamma,+})}{Q_{\gamma,+}^{\frac12\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda\right)}}-\frac{i\pi}{2}\frac{H^{(2)}_{-\frac{n+|\gamma|}{2}-\lambda}(wQ^{\frac12}_{\gamma,-})}{Q_{\gamma,-}^{\frac12\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda\right)}}\right], \tag{7.12}$$

где $Q=\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{1}{a_i}\xi_i^2$ — *квадратичная форма, двойственная к* $P=\sum\limits_{i=1}^n a_ix_i^2$, Δ — *определитель матрицы коэффициентов* P, $H^{(1)}_\alpha$ *и* $H^{(2)}_\alpha$ — *функции Ханкеля первого и второго рода, соответственно,* K_α — *модифицированная функция Бесселя.*

Доказательство. Рассмотрим сначала преобразование Ханкеля весовой обобщенной функции $(w^2+P)^\lambda_\gamma$, где $P=|x|^2$ — положительно определенная квадратичная форма и $\mathrm{Re}\,\lambda<-\dfrac{n+|\gamma|}{2}$. Применяя (2.16), получим

$$\mathbf{F}_\gamma[(w^2+P)^\lambda_\gamma](\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)(c^2+|x|^2)^\lambda x^\gamma\,dx=\{x=r\theta,r=|x|\}=$$

$$= \int\limits_0^\infty (w^2+r^2)^\lambda r^{n+|\gamma|-1} dr \int\limits_{S_1^+(n)} \mathbf{j}_\gamma(r\theta, x)\theta^\gamma\, dS =$$

$$= \frac{\prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \int\limits_0^\infty (w^2+r^2)^\lambda j_{\frac{n+|\gamma|-2}{2}}(r|\xi|) r^{n+|\gamma|-1} dr =$$

$$= |\xi|^{1-\frac{n+|\gamma|}{2}} 2^{\frac{|\gamma|-n}{2}} \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right) \int\limits_0^\infty (w^2+r^2)^\lambda J_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(r|\xi|) r^{\frac{n+|\gamma|}{2}} dr.$$

Используя [127, формула 2.12.4.28]

$$\int\limits_0^\infty x^{\nu+1}(x^2+z^2)^{-\rho}\, J_\nu(cx)dx = \frac{c^{\rho-1}z^{\nu-\rho+1}}{2^{\rho-1}\Gamma(\rho)} K_{\nu-\rho+1}(cz),$$

получим

$$\mathbf{F}_\gamma[(w^2+P)_\gamma^\lambda](\xi) = \frac{2^{\frac{|\gamma|-n}{2}+\lambda+1} w^{\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda} \prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{|\xi|^{\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda}\Gamma(-\lambda)} K_{\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda}(w|\xi|), \tag{7.13}$$

где $\lambda < \dfrac{1-n-|\gamma|}{4}$. Для других значений λ преобразование Ханкеля $\mathbf{F}_\gamma(w^2+P)_\gamma^\lambda$ получается путем аналитического продолжения по λ.

Пусть теперь P — любая вещественная квадратичная форма. Рассмотрим обобщенные функции $(w^2+P+i0)_\gamma^\lambda$ и $(w^2+P-i0)_\gamma^\lambda$. В соответствии с единственностью аналитического продолжения, (7.13) дает, что

$$\mathbf{F}_\gamma[(w^2+P\pm i0)_\gamma^\lambda](\xi) = \frac{2^{\frac{|\gamma|-n}{2}+\lambda+1} e^{\mp\frac{1}{2}q\pi} w^{\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda} \prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{(Q\mp i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda\right)}\Gamma(-\lambda)\sqrt{|\Delta|}} K_{\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda}(w(Q\mp i0)_\gamma^{\frac{1}{2}}), \tag{7.14}$$

где $Q = \sum\limits_{i=1}^n \dfrac{1}{a_i}\xi_i^2$ — квадратичная форма, двойственная к $P = \sum\limits_{i=1}^n a_i x_i^2$, Δ — определитель матрицы коэффициентов P. Принимая во внимание определения модифицированной функции Бесселя первого и второго рода (1.14) и (1.15), будем иметь

$$\frac{K_{\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda}(w(Q\mp i0)_\gamma^{\frac{1}{2}})}{(Q\mp i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda\right)}} = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\frac{n+|\gamma|}{2}-\lambda}(w(Q\mp i0)_\gamma^{\frac{1}{2}}) - I_{\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda}(w(Q\mp i0)_\gamma^{\frac{1}{2}})}{\sin\left(\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda\right)\pi\right)(Q\mp i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda\right)}} =$$

$$= \frac{\pi}{2\sin\left(\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda\right)\pi\right)} \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m!}\left(\frac{w^{2m-\frac{n+|\gamma|}{2}-\lambda}}{2^{2m-\frac{n+|\gamma|}{2}-\lambda}\Gamma\left(m-\frac{n+|\gamma|}{2}-\lambda+1\right)}(Q\mp i0)_\gamma^{m-\lambda-\frac{n+|\gamma|}{2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{w^{2m+\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda}}{2^{2m+\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda}\Gamma\left(m+\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda+1\right)}(Q\mp i0)_\gamma^m\right).$$

Весовые обобщенные функции $(Q+i0)_\gamma^\lambda$ и $(Q-i0)_\gamma^\lambda$ выражаются через $Q_{\gamma,+}^\lambda$ и $Q_{\gamma,-}^\lambda$ по формулам:

$$(Q\mp i0)_\gamma^\mu = Q_{\gamma,+}^\mu + e^{\mp\pi\mu i}Q_{\gamma,-}^\mu.$$

Тогда получим

$$\frac{K_{\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda}(w(Q\mp i0)_\gamma^{\frac{1}{2}})}{(Q\mp i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda\right)}} = \frac{\pi}{2\sin\left(\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda\right)\pi\right)} \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m!}\left(\frac{w^{2m-\frac{n+|\gamma|}{2}-\lambda}}{2^{2m-\frac{n+|\gamma|}{2}-\lambda}\Gamma\left(m-\frac{n+|\gamma|}{2}-\lambda+1\right)}\right. \times$$

$$\times\left(Q_{\gamma,+}^{m-\lambda-\frac{n+|\gamma|}{2}}+e^{\mp\pi i\left(m-\lambda-\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}Q_{\gamma,-}^{m-\lambda-\frac{n+|\gamma|}{2}}\right)-$$

$$\left.-\frac{w^{2m+\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda}}{2^{2m+\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda}\Gamma\left(m+\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda+1\right)}\left(Q_{\gamma,+}^{m}+e^{\mp\pi i m}Q_{\gamma,-}^{m}\right)\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\lambda-\frac{n+|\gamma|}{2}}(wQ_{\gamma,+}^{\frac{1}{2}})-I_{\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}}(wQ_{\gamma,+}^{\frac{1}{2}})}{\sin\left(\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda\right)\pi\right)(Q_{\gamma,+}^{\frac{1}{2}})^{\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}}}+$$

$$+\frac{i\pi}{2}\frac{J_{\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}}(wQ_{\gamma,-}^{\frac{1}{2}})-e^{\pm\left(\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\pi}J_{-\lambda-\frac{n+|\gamma|}{2}}(wQ_{\gamma,-}^{\frac{1}{2}})}{i\sin\left(-\left(\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\pi\right)(Q_{\gamma,-}^{\frac{1}{2}})^{\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}}}.$$

Замечая, что

$$K_\alpha(x)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\alpha}(x)-I_\alpha(x)}{\sin(\alpha\pi)},$$

$$H_\alpha^{(1)}(x)=\frac{J_{-\alpha}(x)-e^{-\alpha\pi i}J_\alpha(x)}{i\sin(\alpha\pi)},\qquad H_\alpha^{(2)}(x)=\frac{J_{-\alpha}(x)-e^{\alpha\pi i}J_\alpha(x)}{-i\sin(\alpha\pi)},$$

будем иметь

$$\frac{K_{\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda}(w(Q+i0)_\gamma^{\frac{1}{2}})}{(Q\mp i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda\right)}}=\frac{K_{\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}}(wQ_{\gamma,+}^{\frac{1}{2}})}{(Q_{\gamma,+}^{\frac{1}{2}})^{\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}}}+\frac{i\pi}{2}\frac{H^{(1)}_{-\lambda-\frac{n+|\gamma|}{2}}(wQ_{\gamma,-}^{\frac{1}{2}})}{(Q_{\gamma,-}^{\frac{1}{2}})^{\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}}},$$

$$\frac{K_{\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda}(w(Q-i0)_\gamma^{\frac{1}{2}})}{(Q\mp i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda\right)}}=\frac{K_{\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}}(wQ_{\gamma,+}^{\frac{1}{2}})}{(Q_{\gamma,+}^{\frac{1}{2}})^{\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}}}-\frac{i\pi}{2}\frac{H^{(2)}_{-\lambda-\frac{n+|\gamma|}{2}}(wQ_{\gamma,-}^{\frac{1}{2}})}{(Q_{\gamma,-}^{\frac{1}{2}})^{\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}}},$$

принимая во внимание (7.14), получаем (7.11) и (7.12). □

Следствие 7.1. *Если P — положительно определенная квадратичная форма, то*

$$\mathbf{F}_\gamma(w^2+P+i0)_\gamma^\lambda=\frac{2^{\frac{|\gamma|-n}{2}+\lambda+1}e^{-\frac{1}{2}q\pi i}w^{\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda}\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{|\Delta|}Q_{\gamma,+}^{\frac{1}{2}\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda\right)}}K_{\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda}(wQ_{\gamma,+}^{\frac{1}{2}}),\tag{7.15}$$

$$\mathbf{F}_\gamma(w^2+P-i0)_\gamma^\lambda=\frac{2^{\frac{|\gamma|-n}{2}+\lambda+1}e^{\frac{1}{2}q\pi i}w^{\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda}\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{|\Delta|}Q_{\gamma,+}^{\frac{1}{2}\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda\right)}}K_{\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda}(wQ_{\gamma,+}^{\frac{1}{2}}).\tag{7.16}$$

Если P — отрицательно определенная квадратичная форма, то

$$\mathbf{F}_\gamma(w^2+P+i0)_\gamma^\lambda=\frac{i\pi 2^{\frac{|\gamma|-n}{2}+\lambda}e^{-\frac{1}{2}q\pi i}w^{\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda}\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{|\Delta|}Q_{\gamma,-}^{\frac{1}{2}\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda\right)}}H^{(1)}_{-\frac{n+|\gamma|}{2}-\lambda}(wQ_{\gamma,-}^{\frac{1}{2}}),\tag{7.17}$$

$$\mathbf{F}_\gamma(w^2+P-i0)_\gamma^\lambda=-\frac{i\pi 2^{\frac{|\gamma|-n}{2}+\lambda}e^{\frac{1}{2}q\pi i}w^{\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda}\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{|\Delta|}Q_{\gamma,-}^{\frac{1}{2}\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda\right)}}H^{(2)}_{-\frac{n+|\gamma|}{2}-\lambda}(wQ_{\gamma,-}^{\frac{1}{2}}),\tag{7.18}$$

где $Q=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\xi_i^2$ — двойственная к $P=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i^2$ квадратичная форма, $H_\alpha^{(1)}$ и $H_\alpha^{(2)}$ — функции Ханкеля первого и второго родов и K_α — модифицированная функция Бесселя.

Глава 3

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ B-ПОТЕНЦИАЛЫ

В этой главе будем рассматривать интегральные операторы, которые могут быть представлены в виде, аналогичном виду обычных псевдодифференциальных операторов, с обратимым интегральным преобразованием F и с некоторой весовой функцией w:

$$A = F^{-1}wF.$$

Формально можно сразу получить подобное представление и для обратного оператора

$$A^{-1} = F^{-1}\frac{1}{w}F.$$

Однако при этом возникают трудности связанные, с тем, что при таком выборе функции w, при котором выражение $F^{-1}wF$ определено, выражение $F^{-1}\frac{1}{w}F$ может оказаться неопределенным. Поэтому для построения обратного к A оператора нужно применять методы, регуляризующие выражение $\frac{1}{w}F$. В этой работе такое обращение осуществляется применением метода аппроксимативных обратных операторов (см. раздел 10.1).

Отметим, что в частности, при выборе в качестве функции w отрицательной вещественной степени квадратичной формы получаются известные потенциалы. А именно, в случае, когда F — преобразование Фурье, получаем, что $F^{-1}wF$ — потенциал Рисса, когда F — преобразование Ханкеля — B-потенциал Рисса. Мы будем рассматривать конструкцию $F^{-1}wF$ для случая, когда w является отрицательной вещественной степенью неопределенной квадратичной формы и когда F — преобразование Ханкеля. При таком выборе w получившиеся потенциалы будем называть *гиперболическими B-потенциалами*.

Конструкция $F^{-1}wF$ может рассматриваться как частный случай оператора, полученного композиционным методом, разработанным С. М. Ситником, для единообразного построения различных известных и новых классов операторов преобразования (см. [49, 50, 274]). При этом схема композиционного метода оказывается применима не только для построения операторов преобразования, но и в других задачах, см. [51, 208] и ниже.

8. Ограниченность гиперболического B-потенциала

Целью этого раздела является исследование условий ограниченности многомерного гиперболического B-потенциала в весовых пространствах L_p^γ. Этот вопрос актуален в приложениях теории таких потенциалов к решению уравнений в частных производных, при построении оператора, обратного к гиперболическому B-потенциалу и при изучении пространств таких потенциалов.

8.1. Краткая история теории потенциалов как дробных степеней операторов. Теория потенциалов восходит к классической механике Исаака Ньютона. Так, например, если f — интегрируемая функция с компактным носителем, то ньютонов потенциал функции f представляет собой свертку (см. [12])

$$V_N f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x-y)f(y)dy,$$

где ньютоново ядро $v(x)$ имеет вид

$$v(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\log|x|, & n=2; \\ \dfrac{1}{n(2-n)\omega_n}|x|^{2-n}, & n\neq 2, \end{cases} \qquad \omega_n - \text{объем единичного шара в } \mathbb{R}^n.$$

Потенциал Ньютона V_N функции f является решением уравнения Пуассона

$$\Delta V_N = f,$$

поэтому его можно рассматривать как реализацию отрицательной степени оператора Лапласа

$$V_N f = \Delta^{-1} f.$$

Наряду с ньютоновым потенциалом широкое применение нашел волновой потенциал функции f (см. [12])

$$V_W f(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varepsilon(x-y)f(y)dy,$$

где ε — фундаментальное решение волнового оператора. Потенциал V_W удовлетворяет волновому уравнению

$$\Box V_W=f,$$

поэтому его можно интерпретировать как реализацию отрицательной степени оператора Даламбера

$$V_W f=\Box^{-1}f.$$

Первым, кто ввел дробные отрицательные степени операторов Лапласа и Даламбера, был венгерский математик Марсель Рисс (см. [256] и [257]). Такие потенциалы называются теперь *потенциалами Рисса*. Рассмотренные Риссом потенциалы имели вид

$$I^\alpha_\Delta f(P)=\frac{1}{\gamma_n(\alpha)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(Q)r^{\alpha-n}dQ$$

и

$$I^\alpha_\Box f(P)=\frac{1}{H_n(\alpha)}\int\limits_{D}f(Q)r^{\alpha-n}_{PQ}dQ,$$

где $P=(x_1,\ldots,x_n)$, $Q=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$, $\gamma_n(\alpha)$, $H_n(\alpha)$ — соответствующие нормирующие множители,

$$r=\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+\ldots+(x_n-\xi_n)^2}$$

— евклидово расстояние,

$$r_{PQ}=\sqrt{(x_1-\xi_1)^2-(x_2-\xi_2)^2-\ldots-(x_n-\xi_n)^2}$$

— лоренцево расстояние, D — положительный полуконус $x_1^2\geqslant x_2^2+\ldots+x_n^2$.

В работе [257] показано, что

$$\Delta I^{\alpha+2}_\Delta f(P)=-I^\alpha_\Delta f(P),$$

$$\Box I^{\alpha+2}_\Box f(P)=I^\alpha_\Box f(P),$$

рассмотрены условия существования потенциалов Рисса, их свойства, а также они были применены для построения явного решения задач Коши для эллиптических, гиперболических и параболических уравнений. Кроме того, потенциал Рисса может быть рассмотрен как обобщение дробного интеграла Римана—Лиувилля на многомерный случай. Приложения гиперболических потенциалов Рисса к решению неоднородных уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу приведены в работах [257, с. 70 и далее], [185, с. 54 и далее] и [194]. В связи с задачами интегральной геометрии на пространствах Лоренца аналоги гиперболических потенциалов Рисса рассматривались С. Хелгасоном в [219]. При этом потенциал в [219] определялся с учетом кривизны пространства Лоренца, равной -1, и это определение отличается от данного в работе [257]. Теория гиперболических потенциалов, введенных в книге [219], получила свое развитие в работах И. А. Киприянова и Л. А. Иванова [65, 66].

Дальнейшее изучение, свойства и применения классических потенциалов Рисса можно найти в книгах [136, 169, 219, 261]. Больше внимания уделялось потенциалам Рисса с евклидовым расстоянием (см. [186, 226, 251, 258, 279]). В [92] пространство риссовых потенциалов с евклидовым расстоянием функций из L_p было взято в качестве функционального пополнения бесконечно дифференцируемых финитных в $\mathbb{R}^n$ функций. В статьях [25, 38] изучаются ядра дробного порядка, которые представляют собой совокупность всех положительных степеней оператора, порождаемого функцией Грина для уравнения Лапласа. В [27–29, 31] получены оптимальные вложения для потенциалов типа Бесселя и типа Рисса.

Что касается классических потенциалов Рисса с лоренцевым расстоянием, то они исследовались в [136], а обратные к ним были построены в [116,117]. Кроме того, в [136] рассмотрена реализация дробной отрицательной степени оператора Даламбера как свертки со степенью неопределенной квадратичной формы. В этом случае интегрирование ведется по двум множествам:

$$x_1^2 \geqslant x_2^2 + \ldots + x_n^2 \quad \text{и} \quad x_1^2 \leqslant x_2^2 + \ldots + x_n^2.$$

Такой оператор дробного интегрирования называется *гиперболическим потенциалом* или *потенциалом с лоренцевым расстоянием*.

Подробно изучено дробное интегродифференцирование, являющееся дробной степенью $E - \Delta$, где E — единичный оператор. При отрицательных вещественных степенях такой оператор называется *потенциалом Бесселя*. Обобщения потенциалов Бесселя и Рисса с евклидовым расстоянием, их свойства и пространства таких потенциалов изучены в [26–28, 30, 32, 91].

Наряду с операторами, представляющими дробные степени операторов $\Delta, \Box$ и $E-\Delta$, развивается и теория дробных степеней дифференциальных операторов с оператором Бесселя

$$B_\nu = D^2 + \frac{\nu}{x}D, \quad D = \frac{d}{dx}.$$

Хорошо развита теория дробных степеней эллиптических операторов с операторами Бесселя вместо всех или некоторых вторых производных. Такие операторы в случае отрицательных степеней являются аналогами потенциалов Рисса с евклидовым расстоянием и называются *эллиптическими B-потенциалами Рисса* (см. [96–98, 98–101, 106–108, 108, 211–217, 262]).

Дробные степени гиперболических операторов с операторами Бесселя вместо всех или некоторых вторых производных гораздо менее изучены, несмотря на то, что их изучение открывает широкие возможности для теоретических исследований и практических приложений не только сингулярных дифференциальных уравнений, но и дифференциальной геометрии.

В этой главе будем рассматривать отрицательные вещественные степени $(\Box_\gamma)^{-\frac{\alpha}{2}}$, их свойства и обращение. Приложения к решению дифференциальных уравнений, в том числе и дробного порядка приведены в главе 4. Для построения $(\Box_\gamma)^{-\frac{\alpha}{2}}$ применяется частный случай *композиционного метода* (см. [49, 50, 144]). А именно, формально, они строятся в виде

$$\mathbf{F}_\gamma^{-1} P^\lambda(x) \mathbf{F}_\gamma,$$

где $P(x)$ — квадратичная форма. Случай знакоположительной квадратичной формы $P(x)$ приводит нас к хорошо изученному B-потенциалу Рисса с евклидовым расстоянием, реализующим вещественную отрицательную степень оператора $-\Delta_\gamma$. Для построения вещественной отрицательной степени оператора $\Box_\gamma$ нужно брать неопределенную квадратичную форму

$$P(x) = x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2.$$

Различные реализации степеней такой формы посредством весовых обобщенных функций осуществлены в главе 2. Поэтому, вообще говоря, можно построить несколько видов дробных степеней $\Box_\gamma$, таких как

$$\mathbf{F}_\gamma^{-1} P^\lambda_{\gamma,\pm} \mathbf{F}_\gamma, \qquad \mathbf{F}_\gamma^{-1} (P \pm i0)^\lambda_\gamma \mathbf{F}_\gamma.$$

При этом потенциалы вида $\mathbf{F}_\gamma^{-1} P^\lambda_{\gamma,+} \mathbf{F}_\gamma$ будем называть *гиперболическими B-потенциалами Рисса*, так как в этом случае интегрирование производится по множеству $x_1^2 \geqslant x_2^2 + \ldots + x_n^2$, $x \in \mathbb{R}^n_+$.

Потенциалы $\mathbf{F}_\gamma^{-1} (P \pm i0)^\lambda_\gamma \mathbf{F}_\gamma$ будем называть *гиперболическими B-потенциалами*, или *B-потенциалами с лоренцевым расстоянием*. Свойства гиперболических B-потенциалов Рисса можно найти в [263, 267].

Исходя из вида преобразования Ханкеля (см. теоремы 7.2 и 7.3) функций $P^\lambda_{\gamma,\pm}$ и $(P \pm i0)^\lambda_\gamma$ можно заключить, что наиболее естественно рассматривать в качестве гиперболических B-потенциалов Рисса конструкции вида

$$\mathbf{F}_\gamma^{-1} (P \pm i0)^\lambda_\gamma \mathbf{F}_\gamma.$$

Однако $\mathbf{F}_\gamma^{-1} P^\lambda_{\gamma,+} \mathbf{F}_\gamma$ является более простым и удобным при построении решения задачи Коши для неоднородного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу.

В следующем разделе дадим определение гиперболических B-потенциалов, учитывая формулу (7.6), и то, что в нашем случае $p = 1$, $q = n - 1$.

8.2. Определения гиперболических B-потенциалов и их абсолютная сходимость. В этом разделе дадим определение гиперболических B-потенциалов в удобной интегральной форме и докажем теорему, содержащую условия, при которых такие потенциалы сходятся абсолютно.

Будем рассматривать операторы, реализующие дробные степени B-гиперболического оператора вида

$$\square_\gamma = B_{\gamma_1} - B_{\gamma_2} - \ldots - B_{\gamma_n}, \qquad B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \ldots, n$$

в пространствах S_{ev} и L_p^γ. Отрицательные вещественные степени оператора $\square_\gamma$ будем называть *гиперболическими B-потенциалами*.

Определение 8.1. Гиперболические B-потенциалы $I^\alpha_{P\pm i0,\gamma}$ определяются формулами

$$(I^\alpha_{P\pm i0,\gamma} f)(x) = \frac{e^{\pm\frac{n-1+|\gamma'|}{2}i\pi}}{H_{n,\gamma}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} (P \pm i0)_\gamma^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}} (^\gamma \mathbf{T}^y_x f)(x) y^\gamma dy, \qquad y^\gamma = \prod_{i=1}^n y_i^{\gamma_i}, \tag{8.1}$$

где $\gamma' = (\gamma_2, \ldots, \gamma_n)$, $|\gamma'| = \gamma_2 + \ldots + \gamma_n$,

$$H_{n,\gamma}(\alpha) = \frac{\prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2^{n-\alpha}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\right)}.$$

Принимая во внимание (5.41) и (5.42) формулу, определяющую гиперболические B-потенциалы, $I^\alpha_{P\pm i0,\gamma}$ можно переписать в виде

$$(I^\alpha_{P\pm i0,\gamma} f)(x) = \frac{e^{\pm\frac{n-1+|\gamma'|}{2}i\pi}}{H_{n,\gamma}(\alpha)} \left[\int\limits_{K^+} r^{\alpha-n-|\gamma|}(y)(^\gamma \mathbf{T}^y_x f)(x) y^\gamma dy + \right.$$

$$\left. + e^{\pm\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}\pi i} \int\limits_{K^-} |r(y)|^{\alpha-n-|\gamma|}(^\gamma \mathbf{T}^y_x f)(x) y^\gamma dy \right], \tag{8.2}$$

где

$$K^+ = \{x : x \in \mathbb{R}^n_+ : P(x) \geqslant 0\}, \qquad K^- = \{x : x \in \mathbb{R}^n_+ : P(x) \leqslant 0\},$$

$$r(y) = \sqrt{P(y)} = \sqrt{y_1^2 - y_2^2 - \ldots - y_n^2}.$$

Функция $r(y)$ называется *лоренцевым расстоянием*, а K^+ — часть *светового* (или *характеристического*) *конуса*.

Введя обозначения

$$(I^\alpha_{P_+,\gamma} f)(x) = \int\limits_{K^+} r^{\alpha-n-|\gamma|}(y)(^\gamma \mathbf{T}^y_x f)(x) y^\gamma dy, \tag{8.3}$$

$$(I^\alpha_{P_-,\gamma} f)(x) = \int\limits_{K^-} |r(y)|^{\alpha-n-|\gamma|}(^\gamma \mathbf{T}^y_x f)(x) y^\gamma dy, \tag{8.4}$$

запишем

$$(I^\alpha_{P\pm i0,\gamma} f)(x) = \frac{e^{\pm\frac{n-1+|\gamma'|}{2}i\pi}}{H_{n,\gamma}(\alpha)} \left[(I^\alpha_{P_+,\gamma} f)(x) + e^{\pm\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}\pi i}(I^\alpha_{P_-,\gamma} f)(x)\right]. \tag{8.5}$$

Замечание 8.1. Пусть $y' = (y_2, \ldots, y_n)$, $|y'| = \sqrt{y_2^2 + \ldots + y_n^2}$, $(y')^{\gamma'} = y_2^{\gamma_2} \ldots y_n^{\gamma_n}$. При $n \geqslant 3$ имеем

$$(I^\alpha_{P_+,\gamma} f)(x) = \int\limits_0^\infty y_1^{\gamma_1} dy_1 \int\limits_{\{|y'|<y_1\}^+} (y_1^2 - |y'|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}} (^\gamma \mathbf{T}^y_x f)(x)(y')^{\gamma'} dy', \tag{8.6}$$

$$(I^\alpha_{P_-,\gamma} f)(x) = \int\limits_0^\infty y_1^{\gamma_1} dy_1 \int\limits_{\{|y'|>y_1\}^+} (|y'|^2 - y_1^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}} (^\gamma \mathbf{T}^y_x f)(x)(y')^{\gamma'} dy', \tag{8.7}$$

где $\{|y'|<y_1\}^+=\{y\in\mathbb{R}^n_+ : |y'|<y_1\}$, $\{|y'|>y_1\}^+=\{y\in\mathbb{R}^n_+ : |y'|>y_1\}$.

При $n=2$:

$$(I^\alpha_{P_+,\gamma}f)(x)=\int\limits_0^\infty y_1^{\gamma_1}dy_1\int\limits_0^{y_1}(y_1^2-y_2^2)^{\frac{\alpha-2-|\gamma|}{2}}({}^\gamma\mathbf{T}^y_x f)(x)y_2^{\gamma_2}dy_2,$$

$$(I^\alpha_{P_-,\gamma}f)(x)=\int\limits_0^\infty y_1^{\gamma_1}dy_1\int\limits_{y_1}^{\infty}(y_2^2-y_1^2)^{\frac{\alpha-2-|\gamma|}{2}}({}^\gamma\mathbf{T}^y_x f)(x)y_2^{\gamma_2}dy_2.$$

Переходя в сферическим координатам $y'=\rho\sigma$ в (8.6) и (8.7), получим

$$(I^\alpha_{P_+,\gamma}f)(x)=|S_1^+(n-1)|_\gamma\int\limits_0^\infty y_1^{\gamma_1}dy_1\int\limits_0^{y_1}(y_1^2-\rho^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\rho^{n+|\gamma'|-2}({}^{\gamma_1}T^{y_1}_{x_1})(M^{\gamma'}_\rho)_{x'}[f(x_1,x')]d\rho, \tag{8.8}$$

$$(I^\alpha_{P_-,\gamma}f)(x)=|S_1^+(n-1)|_\gamma\int\limits_0^\infty y_1^{\gamma_1}dy_1\int\limits_{y_1}^{\infty}(\rho^2-y_1^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\rho^{n+|\gamma'|-2}({}^{\gamma_1}T^{y_1}_{x_1})(M^{\gamma'}_\rho)_{x'}[f(x_1,x')]d\rho, \tag{8.9}$$

где

$$(M^{\gamma'}_\rho)_{x'}[f(x_1,x')]=\frac{1}{|S_1^+(n-1)|_\gamma}\int\limits_{S_1^+(n-1)}{}^{\gamma'}\mathbf{T}^{\rho\sigma}_{x'}f(x_1,x')\sigma^{\gamma'}dS$$

— весовое сферическое среднее (3.39) по $S_1^+(n-1)$.

При $f(x)=\varphi(x_1)G(x')$, тогда (8.8) и (8.9) примут вид

$$(I^\alpha_{P_+,\gamma}f)(x)=|S_1^+(n-1)|_\gamma\int\limits_0^\infty({}^{\gamma_1}T^{y_1}_{x_1})[\varphi(x_1)]y_1^{\gamma_1}dy_1\int\limits_0^{y_1}(M^{\gamma'}_\rho)_{x'}[G(x')](y_1^2-\rho^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\rho^{n+|\gamma'|-2}d\rho, \tag{8.10}$$

$$(I^\alpha_{P_-,\gamma}f)(x)=|S_1^+(n-1)|_\gamma\int\limits_0^\infty({}^{\gamma_1}T^{y_1}_{x_1})[\varphi(x_1)]y_1^{\gamma_1}dy_1\int\limits_{y_1}^\infty(M^{\gamma'}_\rho)_{x'}[G(x')](\rho^2-y_1^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\rho^{n+|\gamma'|-2}d\rho. \tag{8.11}$$

Теорема 8.1. *Пусть $f\in S_{ev}$ и $n+|\gamma|-2<\alpha$. Тогда интегралы $(I^\alpha_{P\pm i0,\gamma}f)(x)$ сходятся абсолютно на $\mathbb{R}^n_+$.*

Доказательство. Рассмотрим (8.2) и докажем абсолютную сходимость каждого слагаемого. Начнем с (8.3). Перейдем в

$$\int\limits_{K^+}r^{\alpha-n-|\gamma|}(y)({}^\gamma\mathbf{T}^y_x f)(x)y^\gamma dy$$

к сферическим координатам $y=\rho\sigma$, $\rho=|y|$, $\sigma'=(\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$:

$$\int\limits_{K^+}r^{\alpha-n-|\gamma|}(y)({}^\gamma\mathbf{T}^y_x f)(x)y^\gamma dy=\int\limits_0^\infty\rho^{\alpha-1}d\rho\int\limits_{\{S_1^+(n),|\sigma'|<\sigma_1\}}(\sigma_1^2-|\sigma'|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}({}^\gamma\mathbf{T}^{\rho\sigma}f)(x)\sigma^\gamma dS,$$

где

$$\{S_1^+(n),|\sigma'|<\sigma_1\}=\{\sigma'\in\mathbb{R}^{n-1}_+ : \sigma_1^2+|\sigma'|^2=1,\ |\sigma'|<\sigma_1\}.$$

Используя формулу

$${}^\gamma\mathbf{T}^y_x f(x)={}^\gamma\mathbf{T}^x_y f(y)$$

(см. элементарное свойство 5 обобщенного сдвига) и то, что обобщенный сдвиг ограничен, т. е.

$$|{}^\gamma\mathbf{T}^y_x f(x)|\leqslant\sup_{\mathbb{R}^n_+}|f(x)|$$

(см. элементарное свойство 7 обобщенного сдвига и [90, с. 124]) и учитывая, что $f \in S_{ev}$, получим

$$\left|\int\limits_{K^+} r^{\alpha-n-|\gamma|}(y)({}^\gamma\mathbf{T}_x^y f)(x) y^\gamma dy\right| \leqslant C\int\limits_0^\infty \frac{\rho^{\alpha-1}}{(1+\rho^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}}d\rho \int\limits_{S_1^+(n),|\sigma'|<\sigma_1} (\sigma_1^2-|\sigma'|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\sigma^\gamma dS<\infty,$$

при $\alpha > n+|\gamma|-2$. Аналогично получаем, что (8.4) сходится абсолютно при $\alpha > n+|\gamma|-2$. Таким образом, при $\alpha > n+|\gamma|-2$ абсолютно сходятся и интегралы $(I^\alpha_{P\pm i0,\gamma}f)(x)$. □

8.3. Ограниченность, полугрупповые свойства гиперболического B-потенциала. В этом разделе докажем теорему, содержащую необходимые и достаточные условия ограниченности $I^\alpha_{P\pm i0,\gamma}$. Для доказательства теоремы об ограниченности потенциала будет использована интерполяционная теорема Марцинкевича.

Интерполяционная теорема Марцинкевича доказана в общем виде в [7] (см. также [4]). Здесь приведем частный случай этой теоремы, приспособленный для оценки интегралов со степенными весами.

Теорема 8.2. *Пусть* $1\leqslant p_i\leqslant q_i<\infty$ $(i=1,2)$, $q_1\neq q_2$, $0<\tau<1$,

$$\frac{1}{p}=\frac{1-\tau}{p_1}+\frac{\tau}{p_2},\quad \frac{1}{q}=\frac{1-\tau}{q_1}+\frac{\tau}{q_2}.$$

Если линейный оператор A имеет одновременно слабый тип $(p_1,q_1)_\gamma$ и слабый тип $(p_2,q_2)_\gamma$ с нормами K_1 и K_2, соответственно, то оператор A имеет сильный тип $(p,q)_\gamma$ и

$$||Af||_{q,\gamma}\leqslant MK_1^{1-\tau}K_2^\tau||f||_{p,\gamma}, \tag{8.12}$$

где $M=M(\gamma,\tau,p_1,p_2,q_1,q_2)$ и не зависит от f и A никаким другим образом.

Теорема 8.3. *Пусть* $n+|\gamma|-2<\alpha<n+|\gamma|$, $1\leqslant p<\dfrac{n+|\gamma|}{\alpha}$. *Для того, чтобы выполнялось неравенство*

$$||I^\alpha_{P\pm i0,\gamma}f||_{q,\gamma}\leqslant C_{n,\gamma,p}||f||_{p,\gamma},\qquad f(x)\in S_{ev}, \tag{8.13}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$q=\frac{(n+|\gamma|)p}{n+|\gamma|-\alpha p}.$$

Константа $C_{n,\gamma,p}$ не зависит от f.

Доказательство. Необходимость. Пусть $n+|\gamma|-2<\alpha<n+|\gamma|$, $1<p<\dfrac{n+|\gamma|}{\alpha}$ и при некотором r справедливо неравенство

$$||I^\alpha_{P\pm i0,\gamma}f||_{q,\gamma}\leqslant C_{n,\gamma,p}||f||_{p,\gamma},\qquad f(x)\in S_{ev}. \tag{8.14}$$

Покажем, что выполнение неравенства (8.14) возможно, только если $q=\dfrac{(n+|\gamma|)p}{n+|\gamma|-\alpha p}$. Получим требуемое неравенство для каждого слагаемого в представлении (8.5).

Рассмотрим оператор растяжения $\tau_\delta:(\tau_\delta f)(x)=f(\delta x)$, $\delta>0$. Имеем

$$||\tau_\delta f||_{p,\gamma}=\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f^p(\delta x)x^\gamma dx\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\delta^{-n-|\gamma|}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f^p(y)y^\gamma dy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Следовательно,

$$||\tau_\delta f||_{p,\gamma}=\delta^{-\frac{n+|\gamma|}{p}}||f||_{p,\gamma}. \tag{8.15}$$

Для $(I^\alpha_{P_+,\gamma}f)(x)$ получим:

$$(I^\alpha_{P_+,\gamma}f)(x)=\int\limits_{K^+}[y_1^2-y_2^2-\ldots-y_n^2]^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}({}^\gamma\mathbf{T}_x^y\tau_\delta f)(y)y^\gamma dy=$$

$$=2^{2n-|\gamma|}C(\gamma)\int\limits_{K^+}\frac{[y_1^2-y_2^2-\ldots-y_n^2]^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}y^\gamma dy}{(xy)^{\gamma-1}}\times$$

$$\times\int\limits_{|x_1-y_1|}^{x_1+y_1}\ldots\int\limits_{|x_n-y_n|}^{x_n+y_n}f(\delta z)\prod_{i=1}^n z_i[(z_i^2-(x_i-y_i)^2)((x_i+y_i)^2-z_i^2)]^{\frac{\gamma_i}{2}-1}dz=$$

$$=\{\delta z=s\}=$$

$$=2^{2n-|\gamma|}C(\gamma)\int\limits_{K^+}\frac{[y_1^2-y_2^2-\ldots-y_n^2]^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}y^\gamma dy}{(xy)^{\gamma-1}}\int\limits_{\delta|x_1-y_1|}^{\delta(x_1+y_1)}\ldots\int\limits_{\delta|x_n-y_n|}^{\delta(x_n+y_n)}f(s)\delta^{-n}\times$$

$$\times\prod_{i=1}^n\frac{s_i}{\delta}\left[\left(\frac{s_i^2}{\delta^2}-(x_i-y_i)^2\right)\left((x_i+y_i)^2-\frac{s_i^2}{\delta^2}\right)\right]^{\frac{\gamma_i}{2}-1}ds=$$

$$=\delta^{2n-2|\gamma|}2^{2n-|\gamma|}C(\gamma)\int\limits_{K^+}\frac{[y_1^2-y_2^2-\ldots-y_n^2]^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}y^\gamma dy}{(xy)^{\gamma-1}}\times$$

$$\times\int\limits_{\delta|x_1-y_1|}^{\delta(x_1+y_1)}\ldots\int\limits_{\delta|x_n-y_n|}^{\delta(x_n+y_n)}f(s)\prod_{i=1}^n s_i[(s_i^2-\delta^2(x_i-y_i)^2)(\delta^2(x_i+y_i)^2-s_i^2)]^{\frac{\gamma_i}{2}-1}ds=$$

$$=\{\delta y=t\}=$$

$$=\delta^{2n-2|\gamma|}2^{2n-|\gamma|}C(\gamma)\int\limits_{K^+}\frac{\delta^{n+|\gamma|-\alpha}[t_1^2-t_2^2-\ldots-t_n^2]^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\delta^{-n-|\gamma|}t^\gamma dt}{\delta^{n-|\gamma|}(xt)^{\gamma-1}}\times$$

$$\times\int\limits_{|\delta x_1-t_1|}^{\delta x_1+t_1}\ldots\int\limits_{|\delta x_n-t_n|}^{\delta x_n+t_n}f(s)\prod_{i=1}^n s_i[(s_i^2-(\delta x_i-t_i)^2)((\delta x_i+t_i)^2-s_i^2)]^{\frac{\gamma_i}{2}-1}ds=$$

$$=\delta^{-\alpha}2^{2n-|\gamma|}C(\gamma)\int\limits_{K^+}\frac{[t_1^2-t_2^2-\ldots-t_n^2]^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}t^\gamma dt}{\delta^{|\gamma|-n}(xt)^{\gamma-1}}\int\limits_{|\delta x_1-t_1|}^{\delta x_1+t_1}\ldots\int\limits_{|\delta x_n-t_n|}^{\delta x_n+t_n}f(s)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^n s_i[(s_i^2-(\delta x_i-t_i)^2)((\delta x_i+t_i)^2-s_i^2)]^{\frac{\gamma_i}{2}-1}ds=$$

$$=\delta^{-\alpha}\int\limits_{K^+}({}^\gamma\mathbf{T}_t^{\delta x}f(t))[t_1^2-t_2^2-\ldots-t_n^2]^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}t^\gamma dt=\delta^{-\alpha}\tau_\delta(I^\alpha_{P_+,\gamma}f)(x).$$

Тогда

$$(I^\alpha_{P_+,\gamma}f)(x)=\delta^\alpha\tau_\delta^{-1}(I^\alpha_{P_+,\gamma}\tau_\delta f)(x). \tag{8.16}$$

Далее имеем

$$||\tau_\delta^{-1}I^\alpha_{P_+,\gamma}f||_q^\gamma=\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}(\tau_\delta^{-1}(I^\alpha_{P_+,\gamma}f)(x))^q x^\gamma dx\right)^{\frac{1}{q}}=$$

$$=\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\left(\int\limits_{K^+}[y_1^2-y_2^2-\ldots-y_n^2]^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}({}^\gamma\mathbf{T}_y^{\frac{x}{\delta}}f)(y)y^\gamma dy\right)^q x^\gamma dx\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\frac{x}{\delta}=t\right)=\delta^{\frac{n+|\gamma|}{q}}||I^\alpha_{P_+,\gamma}f||_q^\gamma,$$

следовательно,

$$||\tau_\delta^{-1}I^\alpha_{P_+,\gamma}f||_q^\gamma=\delta^{\frac{n+|\gamma|}{q}}||I^\alpha_{P_+,\gamma}f||_q^\gamma. \tag{8.17}$$

Используя (8.15), (8.16) и (8.17), получим

$$||I^\alpha_{P_+,\gamma}f||_{q,\gamma}=\delta^\alpha||\tau_\delta^{-1}I^\alpha_{P_+,\gamma}\tau_\delta f||_{q,\gamma}=\delta^{\frac{n+|\gamma|}{q}+\alpha}||I^\alpha_{P_+,\gamma}\tau_\delta f||_{q,\gamma}\leqslant C_{n,\gamma,p}\delta^{\frac{n+|\gamma|}{q}+\alpha}||\tau_\delta f||_{p,\gamma}=$$
$$=C_{n,\gamma,p}\delta^{\frac{n+|\gamma|}{q}-\frac{n+|\gamma|}{p}+\alpha}||f||_{p,\gamma},$$

или

$$||I^\alpha_{P_+,\gamma}f(x)||_{q,\gamma}\leqslant C_{n,\gamma,p}\;\delta^{\frac{n+|\gamma|}{q}-\frac{n+|\gamma|}{p}+\alpha}||f(x)||_{p,\gamma}. \tag{8.18}$$

Если $\dfrac{n+|\gamma|}{q}-\dfrac{n+|\gamma|}{p}+\alpha>0$ или $\dfrac{n+|\gamma|}{q}-\dfrac{n+|\gamma|}{p}+\alpha<0$, то переходя в (8.18) к пределу при $\delta\to 0$ или $\delta\to\infty$, соответственно, получаем, что для всех функций $f\in L_p^\gamma$ справедливо

$$||I^\alpha_{P_+,\gamma}f||_{q,\gamma}=0,$$

что неверно. Следовательно, неравенство (8.18) возможно, только если

$$\frac{n+|\gamma|}{q}-\frac{n+|\gamma|}{p}+\alpha=0,$$

т. е. при $q=\dfrac{(n+|\gamma|)p}{n+|\gamma|-\alpha p}$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $x'=(x_2,\ldots,x_n)$, $|x'|=\sqrt{x_2^2+\ldots+x_n^2}$, $(x')^{\gamma'}=x_2^{\gamma_2}\ldots x_n^{\gamma_n}$. Не ограничивая общности, будем полагать, что $f(x)\geqslant 0$ и $||f||_{p,\gamma}=1$.

Возьмем $0<\delta<1$. Рассмотрим операторы

$$(I^\alpha_{P_+,\gamma,\delta}f)(x)=\int\limits_{\delta y_1^2\geqslant|y'|^2} r^{\alpha-n-|\gamma|}(y)({}^\gamma\mathbf{T}^y_x f)(y)y^\gamma dy,$$

$$(I^\alpha_{P_-,\gamma,\delta}f)(x)=\int\limits_{y_1^2\leqslant\delta|y'|^2} r^{\alpha-n-|\gamma|}(y)({}^\gamma\mathbf{T}^y_x f)(y)y^\gamma dy.$$

Пусть μ — некоторое фиксированное вещественное число. Введем обозначения

$$G^0_{\delta,\mu}=\{y\in\mathbb{R}^n_+:\,\delta y_1^2\geqslant|y'|^2,\,0\leqslant y_1\leqslant\mu\},\qquad G^\infty_{\delta,\mu}=\{y\in\mathbb{R}^n_+:\,\delta y_1^2\geqslant|y'|^2,\,\mu<y_1\},$$

$$K^+_{0,\delta}(y)=\begin{cases} r^{\alpha-n-|\gamma|}(y), & y\in G^0_{\delta,\mu};\\ 0, & y\in\mathbb{R}^n_+\setminus G^0_{\delta,\mu},\end{cases}\qquad K^+_{\infty,\delta}(y)=\begin{cases} r^{\alpha-n-|\gamma|}(y), & y\in G^\infty_{\delta,\mu};\\ 0, & y\in\mathbb{R}^n_+\setminus G^\infty_{\delta,\mu},\end{cases}$$

$$H^0_{\delta,\mu}=\{y\in\mathbb{R}^n_+:\,y_1^2\leqslant\delta|y'|^2,\,|y'|\leqslant\mu\},\qquad H^\infty_{\delta,\mu}=\{y\in\mathbb{R}^n_+:\,y_1^2\leqslant\delta|y'|^2,\,\mu<|y'|\},$$

$$M^+_{0,\delta}(y)=\begin{cases} r^{\alpha-n-|\gamma|}(y), & y\in H^0_{\delta,\mu};\\ 0, & y\in\mathbb{R}^n_+\setminus H^0_{\delta,\mu},\end{cases}\qquad M^+_{\infty,\delta}(y)=\begin{cases} r^{\alpha-n-|\gamma|}(y), & y\in H^\infty_{\delta,\mu};\\ 0, & y\in\mathbb{R}^n_+\setminus H^\infty_{\delta,\mu}.\end{cases}$$

В этих обозначениях имеем

$$(I^\alpha_{P_+,\gamma,\delta}f)(x)=(K^+_{0,\delta}*f)_\gamma+(K^+_{\infty,\delta}*f)_\gamma, \tag{8.19}$$

$$(I^\alpha_{P_-,\gamma,\delta}f)(x)=(M^+_{0,\delta}*f)_\gamma+(M^+_{\infty,\delta}*f)_\gamma. \tag{8.20}$$

Чтобы применить теорему Марцинкевича, докажем, что операторы $I^\alpha_{P_\pm,\gamma,\delta}$ имеют слабый тип $(p_1,q_1)_\gamma$ и $(p_2,q_2)_\gamma$, где p_1,q_1,p_2,q_2 такие, что

$$\frac{1}{p}=\frac{1-\tau}{p_1}+\frac{\tau}{p_2},\quad \frac{1}{q}=\frac{1-\tau}{q_1}+\frac{\tau}{q_2},\quad 0<\tau<1.$$

Получим с этой целью оценку для

$$\sup_{0<\lambda<\infty}\lambda(\mu_\gamma(I^\alpha_{P_\pm,\gamma,\delta}f,\lambda))^{1/p}=\sup_{0<\lambda<\infty}\lambda\left(\mathrm{mes}_\gamma\{x\in\mathbb{R}^n_+:\,|(I^\alpha_{P_\pm,\gamma,\delta}f)(x)|>\lambda\}\right).$$

Учитывая (8.19) и (8.20), достаточно оценить $\mathrm{mes}_\gamma\{x\in\mathbb{R}^n_+:\,|(K^+_{0,\delta}*f)_\gamma|>\lambda\}$, $\mathrm{mes}_\gamma\{x\in\mathbb{R}^n_+:\,|(K^+_{\infty,\delta}*f)_\gamma|>\lambda\}$, $\mathrm{mes}_\gamma\{x\in\mathbb{R}^n_+:\,|(M^+_{0,\delta}*f)_\gamma|>\lambda\}$, $\mathrm{mes}_\gamma\{x\in\mathbb{R}^n_+:\,|(M^+_{\infty,\delta}*f)_\gamma|>\lambda\}$ и применить неравенство

$$\mathrm{mes}_\gamma\{x\in\mathbb{R}^n_+:\,|A+B|>\lambda\}\leqslant\mathrm{mes}_\gamma\{x\in\mathbb{R}^n_+:\,|A|>\lambda\}+\mathrm{mes}_\gamma\{x\in\mathbb{R}^n_+:\,|B|>\lambda\}.$$

Для оценки обобщенной свертки будем использовать неравенство Юнга (3.26).

Имеем

$$||K_{0,\delta}^{+}||_{1,\gamma}=\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}}K_{0,\delta}^{+}(y)y^{\gamma}dy=\int\limits_{G_{\delta,\mu}^{0}}(y_1^2-y_2^2-\ldots-y_n^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}y^{\gamma}dy=$$

$$=\int\limits_{0}^{\mu}y_1^{\gamma_1}dy_1\int\limits_{|y'|^2\leqslant\delta y_1^2}(y_1^2-|y'|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}(y')^{\gamma'}dy'=\{y'=y_1z',\,z'\in\mathbb{R}_{+}^{n-1}\}=$$

$$=\int\limits_{0}^{\mu}y_1^{\alpha-1}dy_1\int\limits_{|z'|^2\leqslant\delta}(1-|z'|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}(z')^{\gamma'}dz'\leqslant\int\limits_{0}^{\mu}y_1^{\alpha-1}dy_1\int\limits_{|z'|^2\leqslant 1}(1-|z'|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}(z')^{\gamma'}dz'=$$

$$=\frac{\mu^{\alpha}}{\alpha}\int\limits_{|z'|\leqslant 1}(1-|z'|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}(z')^{\gamma'}dz'=C_{\alpha,n,\gamma}^{1}\,\mu^{\alpha},$$

где $C_{\alpha,n,\gamma}^{1}=2^{1-n}\dfrac{\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|+2}{2}\right)\prod\limits_{i=2}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\alpha\Gamma\left(\frac{\alpha-\gamma_1+1}{2}\right)}$ не зависит от δ. Следовательно,

$$||K_{0,\delta}^{+}||_{1,\gamma}\leqslant C_{\alpha,n,\gamma}^{1}\,\mu^{\alpha},\tag{8.21}$$

а это означает, что $K_{0,\delta}^{+}\in L_1^{\gamma}$.

Рассмотрим теперь $M_{0,\delta}^{+}$:

$$||M_{0,\delta}^{+}||_{1,\gamma}=\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}}M_{0,\delta}^{+}(y)y^{\gamma}dy=\int\limits_{H_{\delta,\mu}^{0}}(y_1^2-y_2^2-\ldots-y_n^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}y^{\gamma}dy=$$

$$=\int\limits_{|y'|\leqslant\mu}(y')^{\gamma'}dy'\int\limits_{y_1^2\leqslant\delta|y'|^2}(|y'|^2-y_1^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}y_1^{\gamma_1}dy_1=\{y_1=|y'|z_1,\,z_1\in\mathbb{R}_{+}^{1}\}=$$

$$=\int\limits_{|y'|\leqslant\mu}|y'|^{\alpha-n-|\gamma|+\gamma_1+1}(y')^{\gamma'}dy'\int\limits_{z_1^2\leqslant\delta}(1-z_1^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}z_1^{\gamma_1}dz_1\leqslant$$

$$\leqslant D_{\alpha,n,\gamma}^{1}\int\limits_{|y'|\leqslant\mu}|y'|^{\alpha-n-|\gamma|+\gamma_1+1}(y')^{\gamma'}dy',$$

где $D_{\alpha,n,\gamma}^{1}=\int\limits_{z_1^2\leqslant 1}(1-z_1^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}z_1^{\gamma_1}dz_1$ не зависит от δ. В оставшемся интеграле перейдем к сферическим координатам $y'=\rho\sigma$, получим

$$||M_{0,\delta}^{+}||_{1,\gamma}\leqslant D_{\alpha,n,\gamma}^{2}\int\limits_{0}^{\mu}\rho^{\alpha-1}d\rho=D_{\alpha,n,\gamma}^{3}\mu^{\alpha},$$

где $D_{\alpha,n,\gamma}^{3}=\dfrac{1}{\alpha}\int\limits_{S_1^{+}(n-1)}\sigma^{\gamma'}dS$.

Оценим норму $K_{\infty,\delta}^{+}$. Возьмем p' таким, что $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$. Оценим $||K_{\infty,\delta}^{+}||_{p',\gamma}$. Пусть сначала $p\neq 1$ (т. е. $p'\neq\infty$), тогда

$$||K_{\infty,\delta}^{+}||_{p',\gamma}=\left(\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}}|K_{0,\delta}^{+}(y)|^{p'}y^{\gamma}dy\right)^{1/p'}=\left(\int\limits_{G_{\delta,\mu}^{\infty}}(y_1^2-|y'|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}p'}y^{\gamma}dy\right)^{1/p'}=$$

$$
=\left(\int\limits_{\mu}^{\infty}y_1^{\gamma_1}dy_1\int\limits_{|y'|^2\leqslant\delta y_1^2}(y_1^2-|y'|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}\,p'}(y')^{\gamma'}dy'\right)^{1/p'}=\{y'=y_1z',z'\in\mathbb{R}^{n-1}_+\}=
$$

$$
=\left(\int\limits_{\mu}^{\infty}y_1^{(\alpha-n-|\gamma|)p'+n+|\gamma|-1}dy_1\int\limits_{|z'|^2\leqslant\delta}(1-|z'|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}\,p'}(z')^{\gamma'}dz'\right)^{1/p'}\leqslant
$$

$$
\leqslant\frac{\prod\limits_{i=2}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^n\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|+1}{2}\right)}(1-\delta)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\left(\int\limits_{\mu}^{\infty}y_1^{(\alpha-n-|\gamma|)p'+n+|\gamma|-1}dy_1\right)^{1/p'}=C^2_{\alpha,n,\gamma}(1-\delta)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\mu^{-\frac{n+|\gamma|}{q}},
$$

$$
C^2_{\alpha,n,\gamma,p}=\frac{2^{-n}\prod\limits_{i=2}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{((n+|\gamma|-\alpha)p'-n-|\gamma|)^{1/p'}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|+1}{2}\right)}.
$$

Здесь мы учли, что

$$
\alpha-n-|\gamma|<0,\quad p'=\frac{p}{p-1},\quad p<\frac{n+|\gamma|}{\alpha},\quad q=\frac{(n+|\gamma|)p}{n+|\gamma|-\alpha p}.
$$

Тогда

$$
||K^+_{\infty,\delta}||_{p',\gamma}\leqslant C^2_{\alpha,n,\gamma,p}(1-\delta)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\mu^{-\frac{n+|\gamma|}{q}},\qquad\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,\tag{8.22}
$$

следовательно, $K^+_{\infty,\delta}\in L^{\gamma}_{p'}$, $p'<\infty$.

Переходя к пределу в (8.22) при $p'\to\infty$, получим

$$
||K^+_{\infty,\delta}||_{\infty,\gamma}\leqslant C^2_{\alpha,n,\gamma,1}(1-\delta)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\mu^{-\frac{n+|\gamma|}{q}},\qquad C^2_{\alpha,n,\gamma,1}=\frac{e^{\frac{n+|\gamma'|}{n+|\gamma|-\alpha}}\prod\limits_{i=2}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^n\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|+1}{2}\right)}.\tag{8.23}
$$

Оценим $||M^+_{\infty,\delta}||_{p',\gamma}$. Возьмем p' таким, что $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$. Пусть сначала $p\neq1$ (т. е. $p'\neq\infty$), тогда

$$
||M^+_{\infty,\delta}||_{p',\gamma}=\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|M^+_{\infty,\delta}(y)|^{p'}y^{\gamma}dy\right)^{1/p'}=\left(\int\limits_{H^{\infty}_{\delta,\mu}}(|y'|^2-y_1^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}\,p'}y^{\gamma}dy\right)^{1/p'}=
$$

$$
=\left(\int\limits_{\mu\leqslant|y'|}(y')^{\gamma'}dy'\int\limits_{y_1^2\leqslant\delta|y'|^2}(|y'|^2-y_1^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}\,p'}y_1^{\gamma_1}dy_1\right)^{1/p'}=\{y_1=|y'|z_1,z_1\in\mathbb{R}^1_+\}=
$$

$$
=\left(\int\limits_{\mu\leqslant|y'|}|y'|^{(\alpha-n-|\gamma|)p'+\gamma_1+1}(y')^{\gamma'}dy'\int\limits_{z_1^2\leqslant\delta}(1-z_1^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}\,p'}z_1^{\gamma_1}dz_1\right)^{1/p'}\leqslant
$$

$$
\leqslant D^4_{\alpha,n,\gamma}(1-\delta^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\left(\int\limits_{\mu\leqslant|y'|}|y'|^{(\alpha-n-|\gamma|)p'+\gamma_1+1}(y')^{\gamma'}dy'\right)^{1/p'}.
$$

В оставшемся интеграле перейдем к сферическим координатам $y'=\rho\sigma$, получим

$$
||M^+_{\infty,\delta}||_{1,\gamma}\leqslant D^5_{\alpha,n,\gamma}(1-\delta^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\left(\int\limits_{\mu}^{\infty}\rho^{(\alpha-n-|\gamma|)p'+n+|\gamma|-1}d\rho\right)^{1/p'}=D^5_{\alpha,n,\gamma}(1-\delta^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\mu^{-\frac{n+|\gamma|}{q}}.
$$

Здесь мы учли, что

$$\alpha-n-|\gamma|<0, \quad p'=\frac{p}{p-1}, \quad p<\frac{n+|\gamma|}{\alpha}, \quad q=\frac{(n+|\gamma|)p}{n+|\gamma|-\alpha p}.$$

Тогда

$$||M^+_{\infty,\delta}||_{p',\gamma}\leqslant D^5_{\alpha,n,\gamma,p}(1-\delta)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\mu^{-\frac{n+|\gamma|}{q}}, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \tag{8.24}$$

следовательно, $M^+_{\infty,\delta}\in L^\gamma_{p'}$, $p'<\infty$.

Переходя к пределу в (8.24) при $p'\to\infty$, получим

$$||M^+_{\infty,\delta}||_{\infty,\gamma}\leqslant D^6_{\alpha,n,\gamma,1}(1-\delta)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\mu^{-\frac{n+|\gamma|}{q}}. \tag{8.25}$$

Таким образом, имеем

$$(1-\delta)^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}||K^+_{\infty,\delta}||_{p',\gamma}\leqslant C\mu^{-\frac{n+|\gamma|}{q}}, \qquad 1\leqslant p'\leqslant\infty,$$

$$(1-\delta)^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}||M^+_{\infty,\delta}||_{p',\gamma}\leqslant C\mu^{-\frac{n+|\gamma|}{q}}, \qquad 1\leqslant p'\leqslant\infty.$$

Тогда, применяя (3.27), получим

$$(1-\delta)^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}||(K^+_{\infty,\delta}*f)_\gamma||_{\infty,\gamma}\leqslant(1-\delta)^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}||K^+_{\infty,\delta}||_{p',\gamma}\leqslant C\mu^{-\frac{n+|\gamma|}{q}}$$

$$(1-\delta)^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}||(M^+_{\infty,\delta}*f)_\gamma||_{\infty,\gamma}\leqslant(1-\delta)^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}||M^+_{\infty,\delta}||_{p',\gamma}\leqslant C\mu^{-\frac{n+|\gamma|}{q}}.$$

Если мы выберем μ так, что $C\mu^{-\frac{n+|\gamma|}{q}}=\lambda$, то будем иметь

$$\mathrm{mes}_\gamma\{x\in\mathbb{R}^n_+:(1-\delta)^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}|(K^+_{\infty,\delta}*f)_\gamma|>\lambda\}=0$$

$$\mathrm{mes}_\gamma\{x\in\mathbb{R}^n_+:(1-\delta)^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}|(M^+_{\infty,\delta}*f)_\gamma|>\lambda\}=0.$$

Тогда, учитывая (8.19) и (8.20) и применяя неравенство Юнга (3.26), получим

$$\mathrm{mes}_\gamma\{x\in\mathbb{R}^n_+:(1-\delta)^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}|(I^\alpha_{P_+,\delta}f)(x)|>2\lambda\}\leqslant$$

$$\leqslant\mathrm{mes}_\gamma\{x\in\mathbb{R}^n_+:(1-\delta)^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}|(K^+_{0,\delta}*f)_\gamma|>\lambda\}+$$

$$+\mathrm{mes}_\gamma\{x\in\mathbb{R}^n_+:(1-\delta)^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}|(K^+_{\infty,\delta}*f)_\gamma|>\lambda\}=$$

$$=\mathrm{mes}_\gamma\{x\in\mathbb{R}^n_+:(1-\delta)^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}|(K^+_{0,\delta}*f)_\gamma|>\lambda\}\leqslant(1-\delta)^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}\frac{||(K^+_{0,\delta}*f)_\gamma||^p_{p,\gamma}}{\lambda^p}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(1-\delta)^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}p}||K^+_{0,\delta}||^p_{1,\gamma}||f||^p_{p,\gamma}}{\lambda^p}\leqslant\frac{(C^1_{\alpha,n,\gamma})^p(1-\delta)^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}p}\mu^{p\alpha}}{\lambda^p}=C^7(1-\delta)^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}\frac{1}{\lambda^q}.$$

Аналогично,

$$\mathrm{mes}_\gamma\{x\in\mathbb{R}^n_+:(1-\delta)^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}|(I^\alpha_{P_-,\delta}f)(x)|>2\lambda\}\leqslant C^7(1-\delta)^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}\frac{1}{\lambda^q}.$$

Мы доказали, что операторы $I^\alpha_{P_\pm,\gamma,\delta}$ имеют слабый тип $(p,q)_\gamma$, где p и q связаны равенством

$$q=\frac{(n+|\gamma|)p}{n+|\gamma|-\alpha p}.$$

Пусть $0<\tau<1$. Возьмем

$$p_1=\frac{p(1-\tau)}{1-\tau p}\in\left[1,\frac{n+|\gamma|}{\alpha}\right).$$

Операторы $I^\alpha_{P_\pm,\gamma,\delta}$ имеют слабый тип $\left(1,\dfrac{n+|\gamma|}{n+|\gamma|-\alpha}\right)_\gamma$ и слабый тип $\left(p_1,\dfrac{(n+|\gamma|)p_1}{n+|\gamma|-\alpha p_1}\right)_\gamma$. Тогда по теореме Марцинкевича операторы $I^\alpha_{P_\pm,\gamma,\delta}$ имеет сильный тип $\left(p,\dfrac{(n+|\gamma|)p}{n+|\gamma|-\alpha p}\right)_\gamma$ и справедливо неравенство:

$$||(1-\delta)^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(I^\alpha_{P_\pm,\gamma,\delta}f)(x)||_{q,\gamma}\leqslant M(1-\delta)^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}||f||_{p,\gamma},$$

откуда

$$||(I^{\alpha}_{P_{\pm},\gamma,\delta}f)(x)||_{q,\gamma}\leqslant M||f||_{p,\gamma},\qquad 1\leqslant p<\frac{n+|\gamma|}{\alpha},\qquad n+|\gamma|-2<\alpha<n+|\gamma|. \tag{8.26}$$

Поскольку $f(x)\geqslant 0$, то при $0<\delta_1\leqslant\delta_2\leqslant\ldots\leqslant\delta_m\leqslant\ldots<1$

$$(I^{\alpha}_{P_{\pm},\gamma,\delta_1}f)(x)\leqslant(I^{\alpha}_{P_{\pm},\gamma,\delta_2}f)(x)\leqslant\ldots\leqslant(I^{\alpha}_{P_{\pm},\gamma,\delta_m}f)(x)\leqslant\ldots$$

В силу того, что

$$\lim_{\delta\to 1}(I^{\alpha}_{P_{\pm},\gamma,\delta}f)(x)=(I^{\alpha}_{P_{\pm},\gamma}f)(x)$$

переходя к пределу при $\delta\to 1$ в (8.26) получим

$$||(I^{\alpha}_{P_{\pm},\gamma}f)(x)||_{q,\gamma}\leqslant M||f||_{p,\gamma},\qquad 1\leqslant p<\frac{n+|\gamma|}{\alpha},\qquad n+|\gamma|-2<\alpha<n+|\gamma|.$$

Теорема доказана. □

В дальнейшем операторы $I^{\alpha}_{P_{\pm},\gamma}$ на функциях из L^{γ}_p будем понимать как продолжения по ограниченности операторов (8.1)

$$(I^{\alpha}_{P\pm i0,\gamma}f)(x)=\frac{e^{\pm\frac{n-1+|\gamma'|}{2}i\pi}}{\gamma_{n,\gamma}(\alpha)}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}(P\pm i0)_{\gamma}^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}({}^{\gamma}\mathbf{T}^y_x f)(x)y^{\gamma}dy,\quad y^{\gamma}=\prod_{i=1}^n y_i^{\gamma_i}. \tag{8.27}$$

Если этот интеграл абсолютно сходится для $f\in L^{\gamma}_p$, то указанные продолжения представимы в виде (8.27).

9. Свойства гиперболических B-потенциалов и примеры

В этом разделе докажем полугрупповые свойства гиперболических B-потенциалов и приведем примеры действия гиперболических B-потенциалов на конкретные функции.

9.1. Полугрупповые свойства гиперболических B-потенциалов. Будем рассматривать пространство Лизоркина—Самко Φ^{γ}_V (см. (2.20)) в случае, когда

$$V=\{x\in\mathbb{R}^n_+:P(x)=0\},\quad P(x)=x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2.$$

Используя тот факт, что преобразование Ханкеля гиперболических B-потенциалов Рисса имеет вид

$$\mathbf{F}_{\gamma}I^{\alpha}_{P\pm i0,\gamma}f=(P\mp i0)_{\gamma}^{-\frac{\alpha}{2}}\mathbf{F}_{\gamma}f, \tag{9.1}$$

где $f\in\Phi^{\gamma}_V$, $V=\{x\in\mathbb{R}^n_+:P(x)=0\}$, получим полугрупповое свойство для $I^{\alpha}_{P\pm i0,\gamma}$ и формулу вида $\square^k_{\gamma}I^{\alpha+2k}_{P\pm i0,\gamma}$, где

$$\square_{\gamma}=B_{\gamma_1}-B_{\gamma_2}-\ldots-B_{\gamma_n},\quad B_{\gamma_i}=\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Теорема 9.1. *Гиперболические B-потенциалы Рисса при $f\in\Phi^{\gamma}_V$, $V=\{x\in\mathbb{R}^n_+:P(x)=0\}$, удовлетворяют равенству*

$$I^{\beta}_{P\pm i0,\gamma}I^{\alpha}_{P\pm i0,\gamma}f=I^{\alpha+\beta}_{P\pm i0,\gamma}f. \tag{9.2}$$

Доказательство. Используя (9.1), получим

$$\mathbf{F}_{\gamma}[I^{\beta}_{P\pm i0,\gamma}I^{\alpha}_{P\pm i0,\gamma}f](\xi)=\mathbf{F}_{\gamma}[I^{\alpha}_{P\pm i0,\gamma}f](\xi)(Q\mp i0)^{-\frac{\beta}{2}}=\mathbf{F}_{\gamma}[f](\xi)(Q\mp i0)^{-\frac{\alpha+\beta}{2}}=\mathbf{F}_{\gamma}[I^{\alpha+\beta}_{P\pm i0,\gamma}f](\xi).$$

Применение обратного преобразования Ханкеля приводит к (9.2). □

Теорема 9.2. *Для $f\in S_{ev}$, $n+|\gamma|-2<\alpha$ и $k\in\mathbb{N}$, справедлива формула*

$$(\square_{\gamma})^k I^{\alpha+2k}_{P\pm i0,\gamma}f=I^{\alpha}_{P\pm i0,\gamma}f, \tag{9.3}$$

где

$$\square_{\gamma}=B_{\gamma_1}-\sum_{i=2}^n B_{\gamma_i}.$$

Доказательство. Используя представление (8.1), переместительность ${}^\gamma\mathbf{T}_x^y$ (см. (3.3)) и [57, формула 1.8.3] в виде
$$ {}^{\gamma_i}T_{x_i}^{y_i}(B_{\gamma_i})_{x_i}=(B_{\gamma_i})_{x_i}^{\gamma_i}T_{x_i}^{y_i}, $$
получим
$$ (\square_\gamma)^k(I_{P\pm i0,\gamma}^{\alpha+2k}f)(x)=\frac{e^{\pm\frac{n-1+|\gamma'|}{2}i\pi}}{H_{n,\gamma}(\alpha+2k)}(\square_\gamma)^k\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}(P\pm i0)_\gamma^{\frac{\alpha+2k-n-|\gamma|}{2}}({}^\gamma\mathbf{T}_x^yf)(x)y^\gamma dy= $$
$$ =\frac{e^{\pm\frac{n-1+|\gamma'|}{2}i\pi}}{H_{n,\gamma}(\alpha+2k)}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\left({}^\gamma\mathbf{T}_x^y(\square_\gamma)^k(P\pm i0)_\gamma^{\frac{\alpha+2k-n-|\gamma|}{2}}\right)f(y)y^\gamma dy. $$
Применяя (8.14), запишем
$$ (\square_\gamma)^k(P\pm i0)_\gamma^{\frac{\alpha+2k-n-|\gamma|}{2}}=2^{2k}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+k+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+1\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}(P\pm i0)_\gamma^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}. \tag{9.4} $$
Поскольку
$$ 2^{2k}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+k+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+1\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot\frac{1}{H_{n,\gamma}(\alpha+2k)}=\frac{1}{H_{n,\gamma}(\alpha)}, $$
то будем иметь
$$ (\square_\gamma)^k(I_{P\pm i0,\gamma}^{\alpha+k}f)(x)=\frac{e^{\pm\frac{n-1+|\gamma'|}{2}i\pi}}{H_{n,\gamma}(\alpha)}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\left({}^\gamma\mathbf{T}_x^y(P\pm i0)_\gamma^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\right)f(y)y^\gamma dy=(I_{P\pm i0,\gamma}^{\alpha}f)(x). $$
Доказательство закончено. □

Теорема 9.3. *Для $f\in S_{ev}$, $n+|\gamma|-2<\alpha$ и $k\in\mathbb{N}$, справедлива формула*
$$ I_{P\pm i0,\gamma}^{\alpha+2}\square_\gamma f=I_{P\pm i0,\gamma}^{\alpha}f, \tag{9.5} $$
где
$$ \square_\gamma=B_{\gamma_1}-\sum_{i=2}^nB_{\gamma_i}, $$
а функция f такова, что
$$ x_i^{\gamma_i}\frac{\partial}{\partial x_i}f\bigg|_{x_i=0}=0,\quad i=1,\ldots,n. $$

Доказательство. Применяя соотношение [57, формула 1.8.3] в виде
$$ {}^{\gamma_i}T_{x_i}^{y_i}(B_{\gamma_i})_{x_i}=(B_{\gamma_i})_{x_i}^{\gamma_i}T_{x_i}^{y_i}, $$
получим
$$ (I_{P\pm i0,\gamma}^{\alpha+2}\square_\gamma f)(x)=\frac{e^{\pm\frac{n-1+|\gamma'|}{2}i\pi}}{\gamma_{n,\gamma}(\alpha+2)}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}(P\pm i0)_\gamma^{\frac{\alpha+2-n-|\gamma|}{2}}({}^\gamma\mathbf{T}_x^y(\square_\gamma)_xf)(x)y^\gamma dy= $$
$$ =\frac{e^{\pm\frac{n-1+|\gamma'|}{2}i\pi}}{\gamma_{n,\gamma}(\alpha+2)}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}(P\pm i0)_\gamma^{\frac{\alpha+2-n-|\gamma|}{2}}((\square_\gamma)_y\,{}^\gamma\mathbf{T}_x^yf)(x)y^\gamma dy= $$
$$ =\frac{e^{\pm\frac{n-1+|\gamma'|}{2}i\pi}}{\gamma_{n,\gamma}(\alpha+2)}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}(P\pm i0)_\gamma^{\frac{\alpha+2-n-|\gamma|}{2}}\left((B_{\gamma_1})_{y_1}-\sum_{i=2}^n(B_{\gamma_i})_{y_i}\right){}^\gamma\mathbf{T}_x^yf(x)y^\gamma dy= $$

$$= \frac{e^{\pm\frac{n-1+|\gamma'|}{2}i\pi}}{\gamma_{n,\gamma}(\alpha+2)} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} (P\pm i0)_\gamma^{\frac{\alpha+2-n-|\gamma|}{2}} (B_{\gamma_1})_{y_1}\, {}^\gamma\mathbf{T}^y_x f(x) y^\gamma dy-$$

$$-\frac{e^{\pm\frac{n-1+|\gamma'|}{2}i\pi}}{\gamma_{n,\gamma}(\alpha+2)} \sum_{i=2}^n \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} (P\pm i0)_\gamma^{\frac{\alpha+2-n-|\gamma|}{2}} (B_{\gamma_i})_{y_i}\, {}^\gamma\mathbf{T}^y_x f(x) y^\gamma dy. \tag{9.6}$$

При $j=1,\ldots,n$, интегрируя по частям, будем иметь

$$\int\limits_0^\infty (P\pm i0)_\gamma^{\frac{\alpha+2-n-|\gamma|}{2}} (B_{\gamma_j})_{y_j}\, {}^\gamma\mathbf{T}^y_x f(x) y_j^{\gamma_j} dy_j = \int\limits_0^\infty (P\pm i0)_\gamma^{\frac{\alpha+2-n-|\gamma|}{2}} \left[\frac{\partial}{\partial y_j} y_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial y_j}\, {}^\gamma\mathbf{T}^y_x f(x)\right] dy_j =$$

$$= \left\{u = (P\pm i0)_\gamma^{\frac{\alpha+2-n-|\gamma|}{2}},\ dv = \frac{\partial}{\partial y_j} y_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial y_j}\, {}^\gamma\mathbf{T}^y_x f(x) dy_j\right\} =$$

$$= (P\pm i0)_\gamma^{\frac{\alpha+2-n-|\gamma|}{2}} y_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial y_j}\, {}^\gamma\mathbf{T}^y_x f(x)\Big|_{y_j=0}^\infty - \int\limits_0^\infty y_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial y_j} (P\pm i0)_\gamma^{\frac{\alpha+2-n-|\gamma|}{2}} \left[\frac{\partial}{\partial y_j}\, {}^\gamma\mathbf{T}^y_x f(x)\right] dy_j =$$

$$= -\int\limits_0^\infty y_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial y_j} (P\pm i0)_\gamma^{\frac{\alpha+2-n-|\gamma|}{2}} \left[\frac{\partial}{\partial y_j}\, {}^\gamma\mathbf{T}^y_x f(x)\right] dy_j =$$

$$= \left\{u = y_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial y_j} (P\pm i0)_\gamma^{\frac{\alpha+2-n-|\gamma|}{2}},\ dv = \frac{\partial}{\partial y_j}\, {}^\gamma\mathbf{T}^y_x f(x) dy_j\right\} =$$

$$= -y_j^{\gamma_j} \left[\frac{\partial}{\partial y_j} (P\pm i0)_\gamma^{\frac{\alpha+2-n-|\gamma|}{2}}\right] {}^\gamma\mathbf{T}^y_x f(x)\Big|_{y_j=0}^\infty + \int\limits_0^\infty \left[\frac{\partial}{\partial y_j} y_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial y_j} (P\pm i0)_\gamma^{\frac{\alpha+2-n-|\gamma|}{2}}\right] {}^\gamma\mathbf{T}^y_x f(x) dy_j =$$

$$= \int\limits_0^\infty \left[(B_{\gamma_j})_{y_j} (P\pm i0)_\gamma^{\frac{\alpha+2-n-|\gamma|}{2}}\right] {}^\gamma\mathbf{T}^y_x f(x) dy_j.$$

Возвращаясь к (9.6) и применяя (9.4) при $k=1$, получим

$$(I^{\alpha+2}_{P\pm i0,\gamma} \Box_\gamma f)(x) = \frac{e^{\pm\frac{n-1+|\gamma'|}{2}i\pi}}{\gamma_{n,\gamma}(\alpha+2)} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} (\Box_\gamma)^k (P\pm i0)_\gamma^{\frac{\alpha+2-n-|\gamma|}{2}} ({}^\gamma\mathbf{T}^y_x f)(x) y^\gamma dy = (I^\alpha_{P\pm i0,\gamma} f)(x).$$

$\Box$

Последовательно применяя предыдущую теорему, запишем следующее утверждение.

Теорема 9.4. *Для $f \in S_{ev}$, $n+|\gamma|-2<\alpha$ и $k\in\mathbb{N}$ справедлива формула*

$$I^{\alpha+2k}_{P\pm i0,\gamma} (\Box_\gamma)^k f = I^\alpha_{P\pm i0,\gamma} f, \tag{9.7}$$

где

$$\Box_\gamma = B_{\gamma_1} - \sum_{i=2}^n B_{\gamma_i},$$

а функция f такова, что

$$x_i^{\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (\Box_\gamma)^m f\Big|_{x_i=0} = 0, \quad m=0,\ldots,k-1, \quad i=1,\ldots,n.$$

В силу плотности S_{ev} в L_p^γ равенства (9.3), (9.5) и (9.7) распространяются на функции из L_p^γ при $1<p<\dfrac{n+|\gamma|}{\alpha}$ в случае, если интеграл $I^\alpha_{P\pm i0,\gamma} f$ сходится абсолютно для $f\in L_p^\gamma$.

9.2. Примеры гиперболических B-потенциалов. В этом разделе приведем примеры гиперболических B-потенциалов. Для дальнейших вычислений нам потребуются следующие леммы.

Лемма 9.1. *При $n+|\gamma|-2<\alpha$ имеют место формулы*

$$\int\limits_{\{|y'|<y_1\}^+}(y_1^2-|y'|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\left({}^{\gamma'}\mathbf{T}_{x'}^{y'}\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)\right)(y')^{\gamma'}dy'=$$

$$=2^{\frac{\alpha-\gamma_1+1}{2}-n}\prod_{i=2}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+1\right)\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)(|b|y_1)^{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}J_{\frac{\alpha-1-\gamma_1}{2}}(y_1|b|), \tag{9.8}$$

$$\int\limits_{\{|y'|<y_1\}^+}(y_1^2-|y'|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\left({}^{\gamma'}\mathbf{T}_{x'}^{y'}\mathbf{i}_{\gamma}(x';b)\right)(y')^{\gamma'}dy'=$$

$$=2^{\frac{\alpha-\gamma_1+1}{2}-n}\prod_{i=2}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+1\right)\mathbf{i}_{\gamma}(x';b)(|b|y_1)^{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}I_{\frac{\alpha-1-\gamma_1}{2}}(y_1|b|), \tag{9.9}$$

где $\{|y'|<y_1\}^+=\{y\in\mathbb{R}_+^n:|y'|<y_1\}$, $b=(b_1,\ldots,b_{n-1})$, $b_i\in\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,n-1$.

Доказательство. Вычислим сначала

$$\int\limits_{\{|y'|<y_1\}^+}(y_1^2-|y'|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\mathbf{j}_{\gamma}(y';b)(y')^{\gamma'}dy'.$$

Получим

$$\int\limits_{\{|y'|<y_1\}^+}(y_1^2-|y'|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\left({}^{\gamma'}\mathbf{T}^{y'}\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)\right)(y')^{\gamma'}dy'=$$

$$=\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)\int\limits_{\{|y'|<y_1\}^+}(y_1^2-|y'|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\mathbf{j}_{\gamma}(y';b)(y')^{\gamma'}dy'=\{y'=y_1\,\eta\}=$$

$$=\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)y_1^{\alpha-\gamma_1-1}\int\limits_{\{|\eta|<1\}^+}(1-|\eta|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\mathbf{j}_{\gamma}(y_1\,\eta;b)\eta^{\gamma'}d\eta=$$

$$=\{\eta=\rho\theta\}=$$

$$=\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)y_1^{\alpha-\gamma_1-1}\int\limits_0^1(1-\rho^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\rho^{n+|\gamma'|-2}d\rho\int\limits_{S_1^+(n-1)}\mathbf{j}_{\gamma}(y_1\rho\theta;b)\theta^{\gamma'}dS.$$

Интеграл $\int\limits_{S_1^+(n-1)}\mathbf{j}_{\gamma}(y_1\rho\theta;b)\theta^{\gamma'}dS$ вычисляется по формуле (2.16):

$$\int\limits_{S_1^+(n-1)}\mathbf{j}_{\gamma}(y_1\rho\theta;b)\theta^{\gamma'}dS=\frac{\prod\limits_{i=2}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-2}\Gamma\left(\frac{n-1+|\gamma'|}{2}\right)}j_{\frac{n-1+|\gamma'|}{2}-1}(y_1\rho|b|)=$$

$$=\frac{2^{\frac{|\gamma'|-n+1}{2}}\prod\limits_{i=2}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{(y_1\rho|b|)^{\frac{n-1+|\gamma'|}{2}-1}}J_{\frac{n-1+|\gamma'|}{2}-1}(y_1\rho|b|).$$

Получим

$$\int\limits_{\{|y'|<y_1\}^+}(y_1^2-|y'|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\left({}^{\gamma'}\mathbf{T}^{y'}\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)\right)(y')^{\gamma'}dy'=$$

$$=\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)y_1^{\alpha-\gamma_1-1}\frac{2^{\frac{|\gamma'|-n+1}{2}}\prod\limits_{i=2}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{(y_1|b|)^{\frac{n-1+|\gamma'|}{2}-1}}\int\limits_0^1(1-\rho^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\rho^{\frac{n+|\gamma'|-1}{2}}J_{\frac{n-1+|\gamma'|}{2}-1}(y_1\rho|b|)d\rho.$$

Для нахождения интеграла по ρ используем соотношение [127, формула 2.12.4.6] в виде

$$\int\limits_0^a x^{\nu+1}(a^2-x^2)^{\beta-1}J_\nu(cx)dx=\frac{2^{\beta-1}a^{\beta+\nu}}{c^\beta}\Gamma(\beta)J_{\beta+\nu}(ac), \tag{9.10}$$

$$a>0,\qquad \operatorname{Re}\beta>0,\qquad \operatorname{Re}\nu>-1.$$

При $n+|\gamma|-2<\alpha$ имеем

$$\int\limits_0^1(1-\rho^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\rho^{\frac{n+|\gamma'|-1}{2}}J_{\frac{n-1+|\gamma'|}{2}-1}(y_1\rho|b|)d\rho=\frac{2^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+1\right)}{(y_1|b|)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+1}}J_{\frac{\alpha-1-\gamma_1}{2}}(y_1|b|)$$

и

$$\int\limits_{|y'|<y_1}(y_1^2-|y'|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\left({}^{\gamma'}\mathbf{T}^{y'}\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)\right)(y')^{\gamma'}dy'=$$

$$=2^{\frac{\alpha-\gamma_1+1}{2}-n}\prod_{i=2}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+1\right)\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)(|b|y_1)^{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}J_{\frac{\alpha-1-\gamma_1}{2}}(y_1|b|),$$

что и дает (9.8).

Аналогично

$$\int\limits_{\{|y'|<y_1\}^+}(y_1^2-|y'|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\left({}^{\gamma'}\mathbf{T}^{y'}\mathbf{i}_{\gamma}(x';b)\right)(y')^{\gamma'}dy'=$$

$$=\mathbf{i}_\gamma(x';b)y_1^{\alpha-\gamma_1-1}\int\limits_0^1(1-\rho^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\rho^{n+|\gamma'|-2}d\rho\int\limits_{S_1^+(n-1)}\mathbf{i}_\gamma(y_1\rho\theta;b)\theta^{\gamma'}dS.$$

Интеграл $\int\limits_{S_1^+(n-1)}\mathbf{i}_\gamma(y_1\rho\theta;b)\theta^{\gamma'}dS$ вычисляется по формуле (2.18):

$$\int\limits_{S_1^+(n-1)}\mathbf{i}_\gamma(y_1\rho\theta;b)\theta^{\gamma'}dS=\frac{\prod\limits_{i=2}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-2}\Gamma\left(\frac{n-1+|\gamma'|}{2}\right)}j_{\frac{n-1+|\gamma'|}{2}-1}(y_1\rho|b|)=$$

$$=\frac{2^{\frac{|\gamma'|-n+1}{2}}\prod\limits_{i=2}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{(y_1\rho|b|)^{\frac{n-1+|\gamma'|}{2}-1}}I_{\frac{n-1+|\gamma'|}{2}-1}(y_1\rho|b|).$$

Получим

$$\int\limits_{\{|y'|<y_1\}^+}(y_1^2-|y'|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\left({}^{\gamma'}\mathbf{T}^{y'}\mathbf{i}_{\gamma}(x';b)\right)(y')^{\gamma'}dy'=$$

$$=\mathbf{i}_\gamma(x';b)y_1^{\alpha-\gamma_1-1}\frac{2^{\frac{|\gamma'|-n+1}{2}}\prod\limits_{i=2}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{(y_1|b|)^{\frac{n-1+|\gamma'|}{2}-1}}\int\limits_0^1(1-\rho^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\rho^{\frac{n+|\gamma'|-1}{2}}I_{\frac{n-1+|\gamma'|}{2}-1}(y_1\rho|b|)d\rho.$$

Для нахождения интеграла по ρ используем соотношение [127, формула 2.15.4.6] в виде

$$\int\limits_0^a x^{\nu+1}(a^2-x^2)^{\beta-1}I_\nu(cx)dx=\frac{2^{\beta-1}a^{\beta+\nu}}{c^\beta}\Gamma(\beta)I_{\beta+\nu}(ac), \tag{9.11}$$

$$a>0,\qquad \operatorname{Re}\beta>0,\qquad \operatorname{Re}\nu>-1.$$

При $n+|\gamma|-2<\alpha$ имеем

$$\int\limits_0^1(1-\rho^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\rho^{\frac{n+|\gamma'|-1}{2}}I_{\frac{n-1+|\gamma'|}{2}-1}(y_1\rho|b|)d\rho=\frac{2^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+1\right)}{(y_1|b|)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+1}}I_{\frac{\alpha-1-\gamma_1}{2}}(y_1|b|)$$

и

$$\int\limits_{|y'|<y_1}(y_1^2-|y'|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\left({}^{\gamma'}\mathbf{T}^{y'}\mathbf{i}_\gamma(x';b)\right)(y')^{\gamma'}dy'=$$

$$=2^{\frac{\alpha-\gamma_1+1}{2}-n}\prod_{i=2}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+1\right)\mathbf{i}_\gamma(x';b)(|b|y_1)^{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}I_{\frac{\alpha-1-\gamma_1}{2}}(y_1|b|),$$

что и дает (9.9).

□

Лемма 9.2. *При $n+|\gamma|-2<\alpha$ имеют место формулы*

$$\int\limits_{\{|y'|>y_1\}^+}(|y'|^2-y_1^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\left({}^{\gamma'}\mathbf{T}^{y'}_{x'}\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)\right)(y')^{\gamma'}dy'=$$

$$=-\frac{2^{\frac{\alpha-\gamma_1+1}{2}-n}}{\cos\frac{\alpha-\gamma_1}{2}\pi}\prod_{i=2}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+1\right)\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)(|b|y_1)^{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}\times$$
$$\times\left(J_{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}(y_1|b|)\cos\frac{n+|\gamma'|}{2}\pi+J_{\frac{\gamma_1+1-\alpha}{2}}(y_1|b|)\sin\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\pi\right)\tag{9.12}$$

и

$$\int\limits_{\{|y'|>y_1\}^+}(|y'|^2-y_1^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\left({}^{\gamma'}\mathbf{T}^{y'}_{x'}\mathbf{i}_{\gamma}(x';b)\right)(y')^{\gamma'}dy'=$$

$$=-\frac{2^{\frac{\alpha-\gamma_1+1}{2}-n}}{\cos\frac{\alpha-\gamma_1}{2}\pi}\prod_{i=2}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+1\right)\mathbf{i}_{\gamma}(x';b)(|b|y_1)^{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}\times$$
$$\times\left(I_{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}(y_1|b|)\cos\frac{n+|\gamma'|}{2}\pi+I_{\frac{\gamma_1+1-\alpha}{2}}(y_1|b|)\sin\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\pi\sin\frac{\alpha-\gamma_1}{2}\pi\right),\tag{9.13}$$

где $\{|y'|>y_1\}^+=\{y\in\mathbb{R}^n_+:|y'|>y_1\}$, $b=(b_1,\ldots,b_{n-1})$, $b_i\in\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,n-1$.

Доказательство. Так же как в предыдущей лемме, придем к выражениям

$$\int\limits_{\{|y'|>y_1\}^+}(|y'|^2-y_1^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\left({}^{\gamma'}\mathbf{T}^{y'}\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)\right)(y')^{\gamma'}dy'=$$

$$=\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)y_1^{\alpha-\gamma_1-1}\frac{2^{\frac{|\gamma'|-n+1}{2}}\prod\limits_{i=2}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{(y_1|b|)^{\frac{n-1+|\gamma'|}{2}-1}}\int\limits_1^\infty(\rho^2-1)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\rho^{\frac{n+|\gamma'|-1}{2}}J_{\frac{n-1+|\gamma'|}{2}-1}(y_1\rho|b|)d\rho$$

и

$$\int\limits_{\{|y'|>y_1\}^+}(|y'|^2-y_1^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\left({}^{\gamma'}\mathbf{T}^{y'}\mathbf{i}_{\gamma}(x';b)\right)(y')^{\gamma'}dy'=$$

$$=\mathbf{i}_{\gamma}(x';b)y_1^{\alpha-\gamma_1-1}\frac{2^{\frac{|\gamma'|-n+1}{2}}\prod\limits_{i=2}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{(y_1|b|)^{\frac{n-1+|\gamma'|}{2}-1}}\int\limits_1^\infty(\rho^2-1)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\rho^{\frac{n+|\gamma'|-1}{2}}I_{\frac{n-1+|\gamma'|}{2}-1}(y_1\rho|b|)d\rho.$$

Применяя соотношение [127, формула 2.12.4.17] в виде

$$\int\limits_a^\infty x^{\nu+1}(x^2-a^2)^{\beta-1}J_\nu(cx)dx=\frac{2^{\beta-1}a^{\beta+\nu}}{c^\beta}\Gamma(\beta)\left[\cos\beta\pi J_{\beta+\nu}(ac)-\sin\beta\pi Y_{\beta+\nu}(ac)\right],$$

$$a>0,\qquad\operatorname{Re}\beta>0,\qquad\operatorname{Re}(2\beta+\nu)<\frac{3}{2},$$

при $n+|\gamma|-2<\alpha$ получим

$$\int\limits_1^\infty(\rho^2-1)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\rho^{\frac{n+|\gamma'|-1}{2}}\,J_{\frac{n-1+|\gamma'|}{2}-1}(y_1\rho|b|)d\rho=$$

$$=-\frac{2^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}}{\cos\frac{\alpha-\gamma_1}{2}\pi}(|b|y_1)^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}-1}\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+1\right)\times$$

$$\times\left(J_{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}(y_1|b|)\cos\frac{n+|\gamma'|}{2}\pi+J_{\frac{\gamma_1+1-\alpha}{2}}(y_1|b|)\sin\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\pi\right)$$

и

$$\int\limits_1^\infty(\rho^2-1)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\rho^{\frac{n+|\gamma'|-1}{2}}\,I_{\frac{n-1+|\gamma'|}{2}-1}(y_1\rho|b|)d\rho=$$

$$=-\frac{2^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}}{\cos\frac{\alpha-\gamma_1}{2}\pi}(|b|y_1)^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}-1}\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+1\right)\times$$

$$\times\left(I_{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}(y_1|b|)\cos\frac{n+|\gamma'|}{2}\pi+I_{\frac{\gamma_1+1-\alpha}{2}}(y_1|b|)\sin\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\pi\sin\frac{\alpha-\gamma_1}{2}\pi\right),$$

что и дает (9.12) и (9.13). □

Лемма 9.3. *Имеют место формулы*

$$\left({}^{\gamma_1}T_{x_1}^{y_1}J_{\frac{\alpha-1-\gamma_1}{2}}(x_1|b|)x_1^{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}\right)=\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m(x_1-y_1)^{2m+\alpha-\gamma_1-1}}{m!\,\Gamma\left(m+\frac{\alpha+1-\gamma_1}{2}\right)}\left(\frac{|b|}{2}\right)^{2m+\frac{\alpha-1-\gamma_1}{2}}\times$$

$$\times\,{}_2F_1\left(\frac{\gamma_1}{2},-m+\frac{\gamma_1+1-\alpha}{2};\gamma_1;-\frac{4x_1y_1}{(x_1-y_1)^2}\right)\tag{9.14}$$

и

$$\left({}^{\gamma_1}T_{x_1}^{y_1}J_{\frac{\gamma_1+1-\alpha}{2}}(x_1|b|)x_1^{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}\right)=$$

$$=\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m(x_1-y_1)^{2m}}{m!\,\Gamma\left(m+\frac{\gamma_1+1-\alpha}{2}\right)}\left(\frac{|b|}{2}\right)^{2m+\frac{\gamma_1+1-\alpha}{2}}{}_2F_1\left(\frac{\gamma_1}{2},-m;\gamma_1;-\frac{4x_1y_1}{(x_1-y_1)^2}\right).\tag{9.15}$$

Доказательство. Имеем

$$\left({}^{\gamma_1}T_{x_1}^{y_1}J_{\frac{\alpha-1-\gamma_1}{2}}(x_1|b|)x_1^{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}\right)=$$

$$=\frac{2^{\gamma_1}C(\gamma_1)}{(4x_1y_1)^{\gamma_1-1}}\int\limits_{|x_1-y_1|}^{x_1+y_1}zJ_{\frac{\alpha-1-\gamma_1}{2}}(z|b|)z^{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}[(z^2-(x_1-y_1)^2)((x_1+y_1)^2-z^2)]^{\frac{\gamma_1}{2}-1}dz.$$

Используем разложение $J_{\frac{\alpha-1-\gamma_1}{2}}$ в степенной ряд:

$$J_{\frac{\alpha-1-\gamma_1}{2}}(|b|z)=\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma\left(m+\frac{\alpha+1-\gamma_1}{2}\right)}\left(\frac{|b|z}{2}\right)^{2m+\frac{\alpha-1-\gamma_1}{2}},$$

получим

$$\left({}^{\gamma_1}T_{x_1}^{y_1}J_{\frac{\alpha-1-\gamma_1}{2}}(x_1|b|)x_1^{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}\right)=\frac{2^{\gamma_1}C(\gamma_1)}{(4x_1y_1)^{\gamma_1-1}}\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma\left(m+\frac{\alpha+1-\gamma_1}{2}\right)}\left(\frac{|b|}{2}\right)^{2m+\frac{\alpha-1-\gamma_1}{2}}\times$$

$$\times\int\limits_{|x_1-y_1|}^{x_1+y_1}z^{2m+\alpha-\gamma_1}[(z^2-(x_1-y_1)^2)((x_1+y_1)^2-z^2)]^{\frac{\gamma_1}{2}-1}dz.$$

Найдем интеграл

$$\int\limits_{|x_1-y_1|}^{x_1+y_1} z^{2m+\alpha-\gamma_1}[(z^2-(x_1-y_1)^2)((x_1+y_1)^2-z^2)]^{\frac{\gamma_1}{2}-1}dz=\{z^2=t\}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{(x_1-y_1)^2}^{(x_1+y_1)^2} t^{m+\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}[(t-(x_1-y_1)^2)((x_1+y_1)^2-t)]^{\frac{\gamma_1}{2}-1}dt.$$

Пусть $(x_1-y_1)^2=a$, $(x_1+y_1)^2=b$. Используя соотношение [126, формула 2.2.6.1] в виде

$$\int\limits_a^b (cx+d)^\mu(x-a)^{\alpha-1}(b-x)^{\beta-1}dx=(b-a)^{\alpha+\beta-1}(ac+d)^\mu B(\alpha,\beta)\,{}_2F_1\left(\alpha,-\mu;\alpha+\beta;\frac{c(a-b)}{ac+d}\right),$$

$$\operatorname{Re}\alpha,\operatorname{Re}\beta>0,\ \left|\arg\frac{d+cb}{d+ca}\right|<\pi,$$

запишем

$$\int\limits_{|x_1-y_1|}^{x_1+y_1} z^{2m+\alpha-\gamma_1}[(z^2-(x_1-y_1)^2)((x_1+y_1)^2-z^2)]^{\frac{\gamma_1}{2}-1}dz=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_a^b t^{m+\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}[(t-a)(b-t)]^{\frac{\gamma_1}{2}-1}dt=$$

$$=\frac{1}{2}(b-a)^{\gamma_1-1}\,a^{m+\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}B\left(\frac{\gamma_1}{2},\frac{\gamma_1}{2}\right)\,{}_2F_1\left(\frac{\gamma_1}{2},-m+\frac{\gamma_1+1-\alpha}{2};\gamma_1;\frac{a-b}{a}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(4x_1y_1)^{\gamma_1-1}\,(x_1-y_1)^{2m+\alpha-\gamma_1-1}B\left(\frac{\gamma_1}{2},\frac{\gamma_1}{2}\right)\,{}_2F_1\left(\frac{\gamma_1}{2},-m+\frac{\gamma_1+1-\alpha}{2};\gamma_1;-\frac{4x_1y_1}{(x_1-y_1)^2}\right).$$

Тогда, используя формулу удвоения Лежандра вида

$$\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2z}\,\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z),$$

получим

$$\left({}^{\gamma_1}T^{y_1}_{x_1}J_{\frac{\alpha-1-\gamma_1}{2}}(x_1|b|)x_1^{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}\right)=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(x_1-y_1)^{2m+\alpha-\gamma_1-1}}{m!\,\Gamma\left(m+\frac{\alpha+1-\gamma_1}{2}\right)}\left(\frac{|b|}{2}\right)^{2m+\frac{\alpha-1-\gamma_1}{2}}\,{}_2F_1\left(\frac{\gamma_1}{2},-m+\frac{\gamma_1+1-\alpha}{2};\gamma_1;-\frac{4x_1y_1}{(x_1-y_1)^2}\right).$$

Аналогично находится (9.15).

□

Лемма 9.4. *При* $\gamma_1=2$ *формулы* (9.14) *и* (9.15) *существенно упрощаются и имеют вид*

$$\left({}^{2}T^{y_1}_{x_1}J_{\frac{\alpha-3}{2}}(x_1|b|)x_1^{\frac{\alpha-3}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2|b|x_1y_1}\left((x_1+y_1)^{\frac{\alpha-1}{2}}J_{\frac{\alpha-1}{2}}(|b|(x_1+y_1))-|x_1-y_1|^{\frac{\alpha-1}{2}}J_{\frac{\alpha-1}{2}}(|b||x_1-y_1|)\right),$$

$$\left({}^{2}T^{y_1}_{x_1}J_{\frac{3-\alpha}{2}}(x_1|b|)x_1^{\frac{\alpha-3}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2|b|x_1y_1}\left(|x_1-y_1|^{\frac{\alpha-1}{2}}J_{\frac{1-\alpha}{2}}(|b||x_1-y_1|)-(x_1+y_1)^{\frac{\alpha-1}{2}}J_{\frac{1-\alpha}{2}}(|b|(x_1+y_1))\right).$$

Кроме того,

$$\left({}^{2}T^{y_1}_{x_1}I_{\frac{\alpha-3}{2}}(x_1|b|)x_1^{\frac{\alpha-3}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2|b|x_1y_1}\Big((x_1+y_1)^{\frac{\alpha-1}{2}}I_{\frac{\alpha-1}{2}}(|b|(x_1+y_1))-|x_1-y_1|^{\frac{\alpha-1}{2}}I_{\frac{\alpha-1}{2}}(|b||x_1-y_1|)\Big) \tag{9.16}$$

и

$$\left({}^2T^{y_1}_{x_1}I_{\frac{3-\alpha}{2}}(x_1|b|)x_1^{\frac{\alpha-3}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2|b|x_1y_1}\Big((x_1+y_1)^{\frac{\alpha-1}{2}}I_{\frac{1-\alpha}{2}}(|b|(x_1+y_1))-|x_1-y_1|^{\frac{\alpha-1}{2}}I_{\frac{1-\alpha}{2}}(|b||x_1-y_1|)\Big). \tag{9.17}$$

Если, к тому же, $\alpha=2$, *то*

$$\left({}^2T^{y_1}_{x_1}J_{-\frac{1}{2}}(x_1|b|)x_1^{-\frac{1}{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}|b|^{\frac{3}{2}}x_1y_1}\left(\sin(|b|(x_1+y_1))-\sin(|b||x_1-y_1|)\right), \tag{9.18}$$

$$\left({}^2T^{y_1}_{x_1}J_{\frac{1}{2}}(x_1|b|)x_1^{-\frac{1}{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}|b|^{\frac{3}{2}}x_1y_1}\left(\cos(|b|(x_1+y_1))-\cos(|b||x_1-y_1|)\right),$$

$$\left({}^2T^{y_1}_{x_1}I_{-\frac{1}{2}}(x_1|b|)x_1^{-\frac{1}{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}|b|^{\frac{3}{2}}x_1y_1}\left(\mathrm{sh}(|b|(x_1+y_1))-\mathrm{sh}(|b||x_1-y_1|)\right),$$

$$\left({}^2T^{y_1}_{x_1}I_{\frac{1}{2}}(x_1|b|)x_1^{-\frac{1}{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}|b|^{\frac{3}{2}}x_1y_1}\left(\mathrm{ch}(|b|(x_1+y_1))-\mathrm{ch}(|b||x_1-y_1|)\right).$$

При $\alpha=4$

$$\left({}^2T^{y_1}_{x_1}J_{\frac{1}{2}}(x_1|b|)x_1^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}|b|^{\frac{5}{2}}x_1y_1}\left(\sin(|b|(x_1+y_1))-|b|(x_1+y_1)\cos(|b|(x_1+y_1))-\right.$$
$$\left.-\sin(|b||x_1-y_1|)+|b||x_1-y_1|\cos(|b||x_1-y_1|)\right),$$

$$\left({}^2T^{y_1}_{x_1}J_{-\frac{1}{2}}(x_1|b|)x_1^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}|b|^{\frac{5}{2}}x_1y_1}\left(\cos(|b|(x_1+y_1))+|b|(x_1+y_1)\sin(|b|(x_1+y_1))-\right.$$
$$\left.-\cos(|b||x_1-y_1|)-|b||x_1-y_1|\sin(|b||x_1-y_1|)\right),$$

$$\left({}^2T^{y_1}_{x_1}I_{\frac{1}{2}}(x_1|b|)x_1^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}|b|^{\frac{5}{2}}x_1y_1}\left(|b|(x_1+y_1)\mathrm{ch}(|b|(x_1+y_1))-\mathrm{sh}(|b|(x_1+y_1))-\right.$$
$$\left.-|b||x_1-y_1|\mathrm{ch}(|b||x_1-y_1|)+\mathrm{sh}(|b||x_1-y_1|)\right),$$

$$\left({}^2T^{y_1}_{x_1}I_{-\frac{1}{2}}(x_1|b|)x_1^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}|b|^{\frac{5}{2}}x_1y_1}\left(|b|(x_1+y_1)\mathrm{sh}(|b|(x_1+y_1))-\mathrm{ch}(|b|(x_1+y_1))-\right.$$
$$\left.-|b||x_1-y_1|\mathrm{sh}(|b||x_1-y_1|)+\mathrm{ch}(|b||x_1-y_1|)\right).$$

Пример 9.1. Пусть $f(x)=\varphi(x_1)\mathbf{j}_{\gamma'}(x',b)\in L_p^\gamma$. Найдем $I^\alpha_{P\pm i0,\gamma}\varphi(x_1)\mathbf{j}_{\gamma'}(x',b)$. Для этого, учитывая (8.5), найдем сначала $I^\alpha_{P_+,\gamma}\varphi(x_1)\mathbf{j}_{\gamma'}(x',b)$ и $I^\alpha_{P_-,\gamma}\varphi(x_1)\mathbf{j}_{\gamma'}(x',b)$. Принимая во внимание (8.6) и (8.7), запишем

$$I^\alpha_{P_+,\gamma}\varphi(x_1)\mathbf{j}_{\gamma'}(x',b)=\int\limits_0^\infty({}^{\gamma_1}T^{y_1}_{x_1}\varphi)(x_1)y_1^{\gamma_1}dy_1\int\limits_{\{|y'|<y_1\}^+}(y_1^2-|y'|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\left({}^{\gamma'}\mathbf{T}^{y'}\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)\right)(y')^{\gamma'}dy',$$

$$I^\alpha_{P_-,\gamma}\varphi(x_1)\mathbf{j}_{\gamma'}(x',b)=\int\limits_0^\infty({}^{\gamma_1}T^{y_1}_{x_1}\varphi)(x_1)y_1^{\gamma_1}dy_1\int\limits_{\{|y'|>y_1\}^+}(|y'|^2-y_1^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\left({}^{\gamma'}\mathbf{T}^{y'}\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)\right)(y')^{\gamma'}dy',$$

где $\{|y'|<y_1\}^+=\{y\in\mathbb{R}^n_+:|y'|<y_1\}$, $\{|y'|>y_1\}^+=\{y\in\mathbb{R}^n_+:|y'|>y_1\}$.

Учитывая (9.8), (9.12) и перестановочность обобщенного сдвига, получим

$$I^\alpha_{P_+,\gamma}\varphi(x_1)\mathbf{j}_{\gamma'}(x',b)=2^{\frac{\alpha-\gamma_1+1}{2}-n}\prod_{i=2}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+1\right)\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)|b|^{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty({}^{\gamma_1}T^{y_1}_{x_1}\varphi)(x_1)J_{\frac{\alpha-1-\gamma_1}{2}}(y_1|b|)y_1^{\frac{\alpha+\gamma_1-1}{2}}dy_1=2^{\frac{\alpha-\gamma_1+1}{2}-n}\prod_{i=2}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+1\right)\times$$

$$\times\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)|b|^{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}\int\limits_0^\infty\varphi(y_1)\left({}^{\gamma_1}T_{x_1}^{y_1}J_{\frac{\alpha-1-\gamma_1}{2}}(x_1|b|)x_1^{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}\right)y_1^{\gamma_1}dy_1 \tag{9.19}$$

и

$$I^\alpha_{P_-,\gamma}\varphi(x_1)\mathbf{j}_{\gamma'}(x',b)=$$
$$=-\frac{2^{\frac{\alpha-\gamma_1+1}{2}-n}}{\cos\frac{\alpha-\gamma_1}{2}\pi}\prod_{i=2}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+1\right)\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)|b|^{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}\int\limits_0^\infty({}^{\gamma_1}T_{x_1}^{y_1}\varphi)(x_1)\times$$
$$\times\left(J_{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}(y_1|b|)\cos\frac{n+|\gamma'|}{2}\pi+J_{\frac{\gamma_1+1-\alpha}{2}}(y_1|b|)\sin\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\pi\right)y_1^{\frac{\alpha+\gamma_1-1}{2}}dy_1=$$
$$=-\frac{2^{\frac{\alpha-\gamma_1+1}{2}-n}}{\cos\frac{\alpha-\gamma_1}{2}\pi}\prod_{i=2}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+1\right)\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)|b|^{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}\int\limits_0^\infty\varphi(y_1)\times$$
$$\times\left(\left({}^{\gamma_1}T_{x_1}^{y_1}J_{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}(x_1|b|)x_1^{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}\right)\cos\frac{n+|\gamma'|}{2}\pi+\right.$$
$$\left.+\left({}^{\gamma_1}T_{x_1}^{y_1}J_{\frac{\gamma_1+1-\alpha}{2}}(x_1|b|)x_1^{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}\right)\sin\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\pi\right)y_1^{\gamma_1}dy_1. \tag{9.20}$$

Выражения $\left({}^{\gamma_1}T_{x_1}^{y_1}J_{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}(x_1|b|)x_1^{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}\right)$ и $\left({}^{\gamma_1}T_{x_1}^{y_1}J_{\frac{\gamma_1+1-\alpha}{2}}(x_1|b|)x_1^{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}\right)$ находятся по формулам (9.14) и (9.15), соответственно.

Принимая во внимание (8.5), будем иметь

$$I^\alpha_{P\pm i0,\gamma}\varphi(x_1)\mathbf{j}_{\gamma'}(x',b)=\frac{e^{\pm\frac{n-1+|\gamma'|}{2}i\pi}}{H_{n,\gamma}(\alpha)}\left[I^\alpha_{P_+,\gamma}\varphi(x_1)\mathbf{j}_{\gamma'}(x',b)+e^{\pm\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}\pi i}I^\alpha_{P_-,\gamma}\varphi(x_1)\mathbf{j}_{\gamma'}(x',b)\right]$$

при $n+|\gamma|-2<\alpha<\dfrac{n+|\gamma'|}{2}+\gamma_1+1$, где $I^\alpha_{P_+,\gamma}\varphi(x_1)\mathbf{j}_{\gamma'}(x',b)$ и $I^\alpha_{P_-,\gamma}\varphi(x_1)\mathbf{j}_{\gamma'}(x',b)$ находятся по формулам (9.19) и (9.20).

Пример 9.2. Пусть $f(x)=\varphi(x_1)\mathbf{i}_{\gamma'}(x',b)\in L_p^\gamma$, $\gamma_1=2$. Найдем $I^\alpha_{P\pm i0,\gamma}\varphi(x_1)\mathbf{i}_{\gamma'}(x',b)$. Принимая во внимание (9.9) и (9.13), получим

$$I^\alpha_{P_+,\gamma}\varphi(x_1)\mathbf{i}_{\gamma'}(x',b)=2^{\frac{\alpha-\gamma_1+1}{2}-n}\prod_{i=2}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+1\right)\times$$
$$\times\mathbf{i}_{\gamma'}(x';b)|b|^{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}\int\limits_0^\infty\varphi(y_1)\left({}^{2}T_{x_1}^{y_1}I_{\frac{\alpha-1-\gamma_1}{2}}(x_1|b|)x_1^{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}\right)y_1^{\gamma_1}dy_1 \tag{9.21}$$

и

$$I^\alpha_{P_-,\gamma}\varphi(x_1)\mathbf{i}_{\gamma'}(x',b)=$$
$$=-\frac{2^{\frac{\alpha-\gamma_1+1}{2}-n}}{\cos\frac{\alpha-\gamma_1}{2}\pi}\prod_{i=2}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+1\right)\mathbf{i}_{\gamma}(x';b)|b|^{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}\int\limits_0^\infty\varphi(y_1)\times$$
$$\times\left(\left({}^{2}T_{x_1}^{y_1}I_{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}(x_1|b|)x_1^{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}\right)\cos\frac{n+|\gamma'|}{2}\pi+\right.$$
$$\left.+\left({}^{2}T_{x_1}^{y_1}I_{\frac{\gamma_1+1-\alpha}{2}}(x_1|b|)x_1^{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}\right)\sin\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\pi\right)y_1^{\gamma_1}dy_1. \tag{9.22}$$

Выражения $\left({}^{2}T_{x_1}^{y_1}I_{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}(x_1|b|)x_1^{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}\right)$ и $\left({}^{2}T_{x_1}^{y_1}I_{\frac{\gamma_1+1-\alpha}{2}}(x_1|b|)x_1^{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}\right)$ находятся по формулам (9.16) и (9.17), соответственно.

Принимая во внимание (8.5), при $\gamma_1=2$ будем иметь

$$I^\alpha_{P\pm i0,\gamma}\varphi(x_1)\mathbf{i}_{\gamma'}(x',b)=\frac{e^{\pm\frac{n-1+|\gamma'|}{2}i\pi}}{H_{n,\gamma}(\alpha)}\left[I^\alpha_{P_+,\gamma}\varphi(x_1)\mathbf{i}_{\gamma'}(x',b)+e^{\pm\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}\pi i}I^\alpha_{P_-,\gamma}\varphi(x_1)\mathbf{i}_{\gamma'}(x',b)\right]$$

при $n+|\gamma|-2<\alpha<\dfrac{n+|\gamma'|}{2}+\gamma_1+1$, где $I^\alpha_{P_+,\gamma}\varphi(x_1)\mathbf{i}_{\gamma'}(x',b)$ и $I^\alpha_{P_-,\gamma}\varphi(x_1)\mathbf{i}_{\gamma'}(x',b)$ находятся по формулам (9.21) и (9.22).

Пример 9.3. Пусть $n=3$, $\gamma_1=2$, $\alpha=4$, $|\gamma'|=\gamma_2+\gamma_3<1$, $f(x)=x_1^2e^{-x_1}\mathbf{j}_{\gamma'}(x',b)$, $|b|=1$, $x\in\mathbb{R}^3_+$. Учитывая лемму 9.4 и предыдущие примеры, получим, что

$$I^4_{P_+,\gamma}x_1^2e^{-x_1}\mathbf{j}_{\gamma'}(x',b)=2^{-\frac{3}{2}}\prod_{i=2}^3\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-|\gamma'|}{2}\right)\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)\int\limits_0^\infty e^{-y_1}\left({}^2T^{y_1}_{x_1}J_{\frac{1}{2}}(x_1)x_1^{\frac{1}{2}}\right)y_1^4dy_1=$$

$$=2^{-\frac{3}{2}}\prod_{i=2}^3\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-|\gamma'|}{2}\right)\frac{C(2)\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}x_1}\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)\times$$

$$\times\left(\int\limits_0^\infty e^{-y_1}\left(\sin(x_1+y_1)-(x_1+y_1)\cos(x_1+y_1)\right)y_1^3dy_1-\right.$$

$$\left.-\int\limits_0^\infty e^{-y_1}\left(\sin(|x_1-y_1|)-|x_1-y_1|\cos(|x_1-y_1|)\right)y_1^3dy_1\right)=$$

$$=\prod_{i=2}^3\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-|\gamma'|}{2}\right)\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)\left(\frac{6(\cos x_1-e^{x_1})}{x_1}-12-6x_1-x_1^2\right)$$

и

$$I^4_{P_-,\gamma}x_1^2e^{-x_1}\mathbf{j}_{\gamma'}(x',b)=2^{-\frac{3}{2}}\prod_{i=2}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-|\gamma'|}{2}\right)\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)\int\limits_0^\infty e^{-y_1}\times$$

$$\times\left(\left({}^2T^{y_1}_{x_1}J_{\frac{1}{2}}(x_1)x_1^{\frac{1}{2}}\right)\cos\frac{3+|\gamma'|}{2}\pi+\left({}^2T^{y_1}_{x_1}J_{-\frac{1}{2}}(x_1)x_1^{\frac{1}{2}}\right)\sin\frac{1+|\gamma'|}{2}\pi\right)y_1^4dy_1=$$

$$=2^{-\frac{3}{2}}\prod_{i=2}^3\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-|\gamma'|}{2}\right)\frac{C(2)\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}x_1}\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)\left(\cos\left(\frac{3+|\gamma'|}{2}\right)\pi\int\limits_0^\infty e^{-y_1}y_1^3\times\right.$$

$$\times\left(\sin(x_1+y_1)-(x_1+y_1)\cos(x_1+y_1)-\sin(|x_1-y_1|)+|x_1-y_1|\cos(|x_1-y_1|)\right)dy_1+$$

$$+\sin\left(\frac{1+|\gamma'|}{2}\right)\pi\int\limits_0^\infty e^{-y_1}y_1^3\left(\cos(x_1+y_1)+(x_1+y_1)\sin(x_1+y_1)-\right.$$

$$\left.-\cos(|x_1-y_1|)-|x_1-y_1|\sin(|x_1-y_1|)dy_1\right)=$$

$$=\prod_{i=2}^3\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-|\gamma'|}{2}\right)\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)\times$$

$$\times\left(\cos\left(\frac{3+|\gamma'|}{2}\right)\pi\left(\frac{6(\cos x_1-e^{-x_1})}{x_1}-12-6x_1-x_1^2\right)-6\sin\left(\frac{1+|\gamma'|}{2}\right)\pi\,\frac{\sin x_1}{x_1}\right).$$

Тогда, учитывая, что

$$H_{3,\gamma}(4)=\frac{\sqrt{\pi}\prod\limits_{i=2}^3\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{|\gamma'|+1}{2}\right)},$$

получим

$$I^4_{P\pm i0,\gamma}x_1^2e^{-x_1}\mathbf{j}_{\gamma'}(x',b)=\frac{e^{\pm\frac{2+|\gamma'|}{2}i\pi}}{H_{3,\gamma}(4)}\left[I^4_{P_+,\gamma}x_1^2e^{-x_1}\mathbf{j}_{\gamma'}(x',b)+e^{\mp\frac{|\gamma'|+1}{2}\pi i}I^4_{P_-,\gamma}x_1^2e^{-x_1}\mathbf{j}_{\gamma'}(x',b)\right]=$$

$$= \frac{e^{\pm \frac{2+|\gamma'|}{2} i\pi}}{4\sin\left(\frac{1+|\gamma'|}{2}\right)\pi} \mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)\Bigg(\frac{6(\cos x_1 - e^{x_1})}{x_1} - 12 - 6x_1 - x_1^2 +$$

$$+ e^{\mp \frac{|\gamma'|+1}{2}\pi i}\left(\cos\left(\frac{3+|\gamma'|}{2}\right)\pi\left(\frac{6(\cos x_1 - e^{-x_1})}{x_1} - 12 - 6x_1 - x_1^2\right) - 6\sin\left(\frac{1+|\gamma'|}{2}\right)\pi\,\frac{\sin x_1}{x_1}\right)\Bigg) =$$

$$= \mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)\,\frac{e^{-x_1}(6 - 6e^{(1+i)x_1} + x_1(12 + x_1(6+x_1)))}{4x_1}.$$

Проверим выполнение равенства (9.3), т. е. что

$$\left((B_2)_{x_1} - (\Delta_{\gamma'})_{x_2,x_3}\right)^2 I^4_{P\pm i0,\gamma} x_1^2 e^{-x_1}\mathbf{j}_{\gamma'}(x',b) = x_1^2 e^{-x_1}\mathbf{j}_{\gamma'}(x',b).$$

Имеем

$$(B_2)_{x_1}\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)\,\frac{e^{-x_1}(6 - 6e^{(1+i)x_1} + x_1(12 + x_1(6+x_1)))}{4x_1} = \mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)\,\frac{e^{-x_1}(-6 + 6e^{(1+i)x_1} - 6x_1 + x_1^3)}{4x_1},$$

$$(\Delta_{\gamma'})_{x_2,x_3}\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)\,\frac{e^{-x_1}(6 - 6e^{(1+i)x_1} + x_1(12 + x_1(6+x_1)))}{4x_1} =$$

$$= -\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)\,\frac{e^{-x_1}(6 - 6e^{(1+i)x_1} + x_1(12 + x_1(6+x_1)))}{4x_1},$$

$$\left((B_2)_{x_1} - (\Delta_{\gamma'})_{x_2,x_3}\right)\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)\,\frac{e^{-x_1}(6 - 6e^{(1+i)x_1} + x_1(12 + x_1(6+x_1)))}{4x_1} =$$

$$= \mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)\,\frac{e^{x_1}}{2}(x_1^2 + 3x_1 + 3),$$

$$(B_2)_{x_1}\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)\,\frac{e^{-x_1}}{2}(x_1^2 + 3x_1 + 3) = \mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)\,\frac{e^{-x_1}}{2}(x_1^2 - 3x_1 - 3),$$

$$(\Delta_{\gamma'})_{x_2,x_3}\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)\,\frac{e^{-x_1}}{2}(x_1^2 + 3x_1 + 3) = -\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)\,\frac{e^{-x_1}}{2}(x_1^2 + 3x_1 + 3),$$

$$\left((B_2)_{x_1} - (\Delta_{\gamma'})_{x_2,x_3}\right)\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)\,\frac{e^{-x_1}}{2}(x_1^2 + 3x_1 + 3) = x_1^2 e^{-x_1}\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b).$$

Найдем предел $I^4_{P\pm i0,\gamma} x_1^2 e^{-x_1}\mathbf{j}_{\gamma'}(x',b)$ при $x_1 \to 0$:

$$\lim_{x_1\to 0} I^4_{P\pm i0,\gamma} x_1^2 e^{-x_1}\mathbf{j}_{\gamma'}(x',b) = \mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)\lim_{x_1\to 0}\frac{e^{-x_1}(6 - 6e^{(1+i)x_1} + x_1(12 + x_1(6+x_1)))}{4x_1} =$$

$$= \frac{3}{2}(1-i)\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b).$$

Кроме того, имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_1} I^4_{P\pm i0,\gamma} x_1^2 e^{-x_1}\mathbf{j}_{\gamma'}(x',b) = \mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)\,\frac{e^{-x_1}(-6 + (6 - 6ix_1)e^{(1+i)x_1} - x_1(6 + x_1(6 + x_1(4+x_1))))}{4x_1^2},$$

$$\lim_{x_1\to 0}\frac{\partial}{\partial x_1} I^4_{P\pm i0,\gamma} x_1^2 e^{-x_1}\mathbf{j}_{\gamma'}(x',b) = 0.$$

10. Обращение гиперболических B-потенциалов

10.1. Метод аппроксимативных обратных операторов. В этом разделе, следуя [116,117], опишем эффективный метод обращения сверточных операторов с особенностями — метод аппроксимативных обратных операторов.

Для поиска обратных операторов к $I^{\alpha}_{P\pm i0,\gamma}$ будем использовать метод аппроксимативных обратных операторов (АОО), разработанный В. А. Ногиным (см. [116]) с использованием преобразования Фурье. В рамках этого подхода предполагается находить обратный оператор как предел «хороших» операторов. Достоинство этого метода для потенциалов состоит в том, что при построении обратного оператора можно избежать использования конечных разностей.

Основная идея аппроксимативного подхода состоит в следующем. Задача о построении обратного к сверточному оператору

$$Af=a*f$$

сводится к умножению интегрального преобразования функции f на множитель $\dfrac{1}{\hat{a}}$:

$$Af=a*f,\qquad \widehat{Af}=\hat{a}\cdot\hat{f},\qquad \widehat{A^{-1}f}=\frac{1}{\hat{a}}\cdot\hat{f}.$$

Действительно,

$$g=Af,\qquad \widehat{A^{-1}g}=\frac{1}{\hat{a}}\cdot\hat{a}\cdot\hat{f}=\hat{f}.$$

Однако в случае потенциалов множитель $\dfrac{1}{\hat{a}}$, как правило, неограничен на бесконечности и, может быть, на некоторых множествах. В этом случае вводится «улучшающий» множитель m_ε, зависящий от ε, такой что $\dfrac{m_\varepsilon}{\hat{a}}$ обращается в нуль на тех множествах, на которых это необходимо, и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}m_\varepsilon=1$. Тогда строится оператор

$$\widehat{A_\varepsilon^{-1}f}=\frac{m_\varepsilon}{\hat{a}}\cdot\hat{f}.$$

Применяя обратное интегральное преобразование и переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим A^{-1}. Здесь, естественно, необходимо доказывать, что полученный оператор будет действительно обратным к оператору A в рамках рассматриваемых пространств. Поэтому множитель m_ε выбирается еще и так, чтобы его интегральное преобразование являлось достаточно хорошим для проведения указанных действий. В нашем случае мы берем преобразование Ханкеля.

Учитывая, что преобразование Ханкеля гиперболических B-потенциалов имеет вид

$$\mathbf{F}_\gamma I^{\alpha}_{P\pm i0,\gamma}f=(P\mp i0)^{-\frac{\alpha}{2}}_{\gamma}\mathbf{F}_\gamma f,$$

где $f\in\Phi^{\gamma}_{V}$, $V=\{x\in\mathbb{R}^n_+:P(x)=0\}$, будем улучшать поведение $(P\mp i0)^{\frac{\alpha}{2}}_{\gamma}$ на бесконечности и на границе части конуса $P(x)=0$. Для этого будем использовать множитель

$$M_{\varepsilon,\delta}=\frac{(P\mp i0)^m e^{-\delta|\xi|}}{(P(\xi)+i\varepsilon|\xi|^2)^m}.$$

Таким образом, обратный оператор к $I^{\alpha}_{P\pm i0,\gamma}$ будем искать в виде

$$(I^{\alpha}_{P\pm i0,\gamma})^{-1}f)=\overset{L^\gamma_p}{\lim_{\delta\to 0}}\ \overset{L^\gamma_2}{\lim_{\varepsilon\to 0}}\left(\left(\mathbf{F}^{-1}_\gamma\frac{(P\mp i0)^{m+\frac{\alpha}{2}}e^{-\delta|\xi|}}{(P(\xi)+i\varepsilon|\xi|^2)^m}\right)(x)*f(x)\right)_\gamma,$$

где предел при $\delta\to 0$ понимается по норме L^γ_p, а предел при $\varepsilon\to 0$ понимается по норме L^γ_2. Введем обозначение

$$(I^{\alpha}_{P\pm i0,\gamma})^{-1}_{\varepsilon,\delta}f=\left(\left(\mathbf{F}^{-1}_\gamma\frac{(P\mp i0)^{m+\frac{\alpha}{2}}e^{-\delta|\xi|}}{(P(\xi)+i\varepsilon|\xi|^2)^m}\right)(x)*f(x)\right)_\gamma=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}{}^{\mp}g^{\alpha}_{\varepsilon,\delta}(y)({}^\gamma\mathbf{T}^y_x f(x))y^\gamma dy,$$

где

$$
{}^{\mp}g^{\alpha}_{\varepsilon,\delta}(x)=\left(\mathbf{F}^{-1}_{\gamma}\frac{(P\mp i0)^{m+\frac{\alpha}{2}}e^{-\delta|\xi|}}{(P(\xi)+i\varepsilon|\xi|^2)^m}\right)(x)=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{(P\mp i0)^{m+\frac{\alpha}{2}}e^{-\delta|\xi|}}{(P(\xi)+i\varepsilon|\xi|^2)^m}\mathbf{j}_{\gamma}(x,\xi)\xi^{\gamma}\,d\xi,
$$

$m\geqslant n+|\gamma|-\dfrac{\alpha}{2}$, $n+|\gamma|-2<\alpha<n+|\gamma|$.

10.2. Общее ядро Пуассона. В этом пункте рассмотрим некоторую функцию, используемую при решении задачи об обращении гиперболического B-потенциала. Исходя из вида и свойств этой функции, будем называть ее общим ядром Пуассона.

Докажем сначала вспомогательную лемму.

Лемма 10.1. *Преобразование Ханкеля $e^{-\delta|x|}$ имеет вид*

$$
\mathbf{F}_{\gamma}[e^{-\delta|x|}](\xi)=\frac{2^{|\gamma|}\delta\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(\delta^2+|\xi|^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}}. \tag{10.1}
$$

Доказательство.

$$
\mathbf{F}_{\gamma}[e^{-\delta|x|}](\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}e^{-\delta|x|}\mathbf{j}_{\gamma}(x;\xi)x^{\gamma}dx=\{x=\rho\sigma\}=\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\delta\rho}\rho^{n+|\gamma|-1}d\rho\int\limits_{S^+_1(n)}\mathbf{j}_{\gamma}(\rho\sigma;\xi)\sigma^{\gamma}dS.
$$

Применяя формулу (2.16), получим

$$
\mathbf{F}_{\gamma}[e^{-\delta|x|}](\xi)=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\delta\rho}j_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(\rho|\xi|)\rho^{n+|\gamma|-1}d\rho=
$$

$$
=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{\frac{n-|\gamma|}{2}}|\xi|^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\delta\rho}J_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(\rho|\xi|)\rho^{\frac{n+|\gamma|}{2}}d\rho.
$$

Применяя соотношение [127, формула 2.12.8.4, с. 164] в виде

$$
\int\limits_{0}^{\infty}x^{\nu+2}e^{-px}J_{\nu}(cx)dx=\frac{2p(2c)^{\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(p^2+c^2)^{\nu+\frac{3}{2}}},\qquad \operatorname{Re}\nu>-1,
$$

будем иметь

$$
\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\delta\rho}J_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(\rho|\xi|)\rho^{\frac{n+|\gamma|}{2}}d\rho=\frac{2\delta(2|\xi|)^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(\delta^2+|\xi|^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}}
$$

и, следовательно,

$$
\mathbf{F}_{\gamma}[e^{-\delta|x|}](\xi)=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{\frac{n-|\gamma|}{2}}|\xi|^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}}\,\frac{2\delta(2|\xi|)^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(\delta^2+|\xi|^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}}=\frac{2^{|\gamma|}\delta\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(\delta^2+|\xi|^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}}.
$$

□

Приведем формулу «интеграла по сфере от весовой плоской волны» из [103, формула 1.7.13, с. 44] (где надо положить $N=n$):

$$
\int\limits_{S^+_1(n)}\mathcal{P}^{\gamma}_{\xi}f(\langle\xi,x\rangle)x^{\gamma}d\omega_x=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}2^{n-1}\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)}\int\limits_{-1}^{1}f(|\xi|p)(1-p^2)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}}\,dp, \tag{10.2}
$$

где $f(t)(1-t^2)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}}\in L_1(-1,1)$.

Определение 10.1. Функцию

$$P_\gamma(x,\delta)=\frac{2^n\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\,\delta\,(\delta^2+|x|^2)^{-\frac{n+|\gamma|+1}{2}},\qquad \delta>0. \tag{10.3}$$

будем называть *общим ядром Пуассона*.

Для $P_\gamma(x,\delta)$ справедливы следующие свойства.

Лемма 10.2. *Функция $P_\gamma(x,\delta)$ обладает свойствами*

1. $\mathbf{F}_\gamma[P_\gamma(x,\delta)](\xi)=e^{-\delta|\xi|}$,
2. $\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}P_\gamma(x,\delta)x^\gamma dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}P_\gamma(x,1)x^\gamma dx=1$,
3. $P_\gamma(x,\delta)\in L_p^\gamma$, $1\leqslant p\leqslant\infty$.

Доказательство. 1. Из леммы 10.1 имеем

$$\mathbf{F}_\gamma^{-1}[e^{-\delta|x|}](\xi)=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\mathbf{F}_\gamma[e^{-\delta|x|}](\xi)=$$

$$=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\,\frac{2^{|\gamma|}\delta\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(\delta^2+|\xi|^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}}=$$

$$=\frac{2^n\delta\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\,\frac{1}{(\delta^2+|\xi|^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}}=P_\gamma(x,\delta),$$

откуда и следует $\mathbf{F}_\gamma[P_\gamma(x,\delta)](\xi)=e^{-\delta|\xi|}$.

2. Рассмотрим $\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}P_\gamma(x,\delta)x^\gamma dx$. Имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}P_\gamma(x,\delta)x^\gamma dx=\frac{2^n\delta\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{x^\gamma\,dx}{(\delta^2+|x|^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}}=\{x=\delta y\}=$$

$$=\frac{2^n\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{y^\gamma\,dy}{(1+|y|^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}}=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}P_\gamma(x,1)x^\gamma dx.$$

Покажем теперь, что $\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}P_\gamma(x,1)x^\gamma dx=1$. Имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{y^\gamma\,dy}{(1+|y|^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}}=\{y=\rho\sigma\}=\int\limits_0^\infty\frac{\rho^{n+|\gamma|-1}\,d\rho}{(1+\rho^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}}\int\limits_{S_1^+(n)}\sigma^\gamma\,dS.$$

Интеграл по $S_1^+(n)$ находится с помощью [103, формула 1.2.5, с. 20], где надо положить $N=n$:

$$\int\limits_{S_1^+(n)}\sigma^\gamma dS=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}; \tag{10.4}$$

тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{y^\gamma\,dy}{(1+|y|^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}}=\{y=\rho\sigma\}=\frac{\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}\int\limits_0^\infty\frac{\rho^{n+|\gamma|-1}\,d\rho}{(1+\rho^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}}=\{\rho^2=r\}=$$

$$=\frac{\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}\int\limits_0^\infty\frac{r^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}}{(1+r)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}}dr.$$

Используя соотношение [126, формула 2.2.5.24, с. 239] вида

$$\int\limits_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}}{(x+z)^\beta}dx=z^{\alpha-\beta}B(\alpha,\beta-\alpha),\qquad 0<\operatorname{Re}\alpha<\operatorname{Re}\beta,$$

получим

$$2\int\limits_0^\infty\frac{\rho^{n+|\gamma|-1}\,d\rho}{(1+\rho^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}}=\int\limits_0^\infty\frac{r^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}}{(1+r)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}}dr=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}\tag{10.5}$$

и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{y^\gamma\,dy}{(1+|y|^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}}=\frac{\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}.$$

Наконец,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}P_\gamma(x,1)x^\gamma dx=\frac{2^n\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\prod\limits_{j=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{y^\gamma\,dy}{(1+|y|^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}}=\frac{2^n\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\prod\limits_{j=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\,\frac{\sqrt{\pi}\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}=1.$$

3. Докажем, наконец, что $P_\gamma(x,\delta)\in L_p^\gamma$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. Имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{x^\gamma dx}{(\delta^2+|x|^2)^{p\,\frac{n+|\gamma|+1}{2}}}=\delta^{(n+|\gamma|)(1-p)-p}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{x^\gamma dx}{(|x|^2+1)^{p\,\frac{n+|\gamma|+1}{2}}}=$$

$$=\{x=\rho\sigma,|x|=\rho\}=\delta^{(n+|\gamma|)(1-p)-p}\int\limits_0^\infty\frac{\rho^{n+|\gamma|-1}d\rho}{(\rho^2+1)^{p\,\frac{n+|\gamma|+1}{2}}}\int\limits_{S_1^+(n)}\sigma^\gamma dS.$$

Используя (10.4) и (10.5), при $1\leqslant p<\infty$, получим

$$||P_\gamma(x,\delta)||_{p,\gamma}=\left(\delta^{(n+|\gamma|)(1-p)-p}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}\frac{\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{p}}=$$

$$=\left(\delta^{(n+|\gamma|)(1-p)-p}\frac{\sqrt{\pi}\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{p}}<\infty.$$

При $p=\infty$ неравенство $||P_\gamma(x,\delta)||_{\infty,\gamma}<\infty$ получаем, используя (2.3).

□

Следуя [170, теорема 1.18, с. 17], сформулируем и докажем лемму о стремлении обобщенной свертки функции с ядром Пуассона к функции в L_p^γ.

Введем обозначение

$$(\mathbf{P}_{\gamma,\delta}f)(x)=(f(x)*P_\gamma(x,\delta))_\gamma.\tag{10.6}$$

Лемма 10.3. *Если $f\in L_p^\gamma$, $1\leqslant p\leqslant\infty$ или $f\in C_0\subset L_\infty^\gamma$, то*
$$||(\mathbf{P}_{\gamma,\delta}f)(x)-f(x)||_{p,\gamma}\to 0 \qquad \text{при} \qquad \delta\to 0.$$

Доказательство. Учитывая свойство 2 из леммы 10.2, запишем
$$(f(x)*P_\gamma(x,\delta))_\gamma-f(x)=\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}[\,^\gamma\mathbf{T}_x^y f(x)-f(y)]P_\gamma(y,\delta)y^\gamma dy.$$

Отсюда, применяя обобщенное неравенство Минковского, имеем
$$||(f(x)*P_\gamma(x,\delta))_\gamma-f(x)||_{p,\gamma}\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}[\,^\gamma\mathbf{T}_x^y f(x)-f(x)]^p x^\gamma dx\right)^{\frac{1}{p}}|P_\gamma(y,\delta)|y^\gamma dy=\{y=\delta t\}=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}[\,^\gamma\mathbf{T}_x^{\delta t} f(x)-f(x)]^p x^\gamma dx\right)^{\frac{1}{p}}|P_\gamma(t,1)|t^\gamma dt. \tag{10.7}$$

Из [124, лемма 3.6, с. 166] следует, что для $f\in L_p^\gamma$
$$||\,^\gamma\mathbf{T}_x^{\delta t}f(x)-f(x)||_{p,\gamma}\leqslant c||f(x)||_{p,\gamma},$$
а из [122, предложение 4.1, с. 182] и [123, с. 50], следует, что
$$\lim_{\delta\to 0}\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}[\,^\gamma\mathbf{T}_x^{\delta t} f(x)-f(x)]^p x^\gamma dx\right)^{\frac{1}{p}}=0.$$

Тогда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости интеграл (10.7) стремится к нулю при $\delta\to 0$, так как подынтегральная функция мажорируется интегрируемой функцией $c||f||_{p,\gamma}|P_\gamma(t,1)|t^\gamma$.

□

10.3. Представление ядра $^\mp g^\alpha_{\varepsilon,\delta}$.

Получим интегральное представления ядра $^\mp g^\alpha_{\varepsilon,\delta}$.

Теорема 10.1. *Функция $^\mp g^\alpha_{\varepsilon,\delta}$ представима в виде*
$$^\mp g^\alpha_{\varepsilon,\delta}(x)=\frac{2^{2-|\gamma|}}{\delta^{n+|\gamma|+\alpha}\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\frac{\Gamma(n+|\gamma|+\alpha)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_1+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|-1}{2}\right)}\times$$
$$\times\int\limits_0^\infty r^{n+|\gamma'|-2}\frac{(1-r^2\mp i0)^{m+\frac{\alpha}{2}}}{(1+r^2)^{\frac{n+|\gamma|+\alpha}{2}}(1-r^2+i\varepsilon(1+r^2))^m}\times$$
$$\times F_4\left(\frac{n+|\gamma|+\alpha}{2},\frac{n+|\gamma|+\alpha+1}{2};\frac{\gamma_1+1}{2},\frac{n+|\gamma'|-1}{2};-\frac{x_1^2}{\delta^2(1+r^2)},-\frac{(r|x'|)^2}{\delta^2(1+r^2)}\right)dr.$$
где $F_4(a,b,c_1,c_2;x,y)$ — функция Аппеля (1.23).

Доказательство. Представим функцию $^\mp g^\alpha_{\varepsilon,\delta}(t)$ в виде суммы
$$^\mp g^\alpha_{\varepsilon,\delta}(x)=\mathbf{F}_\gamma^{-1}\frac{(P\mp i0)^{m+\frac{\alpha}{2}}e^{-\delta|x|}}{(P(x)+i\varepsilon|x|^2)^m}=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^n\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\frac{(P\mp i0)^{m+\frac{\alpha}{2}}e^{-\delta|\xi|}}{(P(\xi)+i\varepsilon|\xi|^2)^m}\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\xi^\gamma\,d\xi=$$
$$=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^n\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\left[\int\limits_{\{P(\xi)>0\}^+}\frac{P^{m+\frac{\alpha}{2}}(\xi)e^{-\delta|\xi|}}{(P(\xi)+i\varepsilon|\xi|^2)^m}\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\xi^\gamma\,d\xi+\right.$$

$$+e^{\mp\left(m+\frac{\alpha}{2}\right)\pi i}\int\limits_{\{P(\xi)<0\}^+}\frac{|P(\xi)|^{m+\frac{\alpha}{2}}e^{-\delta|\xi|}}{(P(\xi)+i\varepsilon|\xi|^2)^m}\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\xi^\gamma\,d\xi\Bigg].$$

Положим

$$J_1=\int\limits_{\{P(\xi)>0\}^+}\frac{P^{m+\frac{\alpha}{2}}(\xi)e^{-\delta|\xi|}}{(P(\xi)+i\varepsilon|\xi|^2)^m}\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\xi^\gamma\,d\xi,$$

$$J_2=\int\limits_{\{P(\xi)<0\}^+}\frac{|P(\xi)|^{m+\frac{\alpha}{2}}e^{-\delta|\xi|}}{(P(\xi)+i\varepsilon|\xi|^2)^m}\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\xi^\gamma\,d\xi.$$

Перейдем в J_1 к сферическим координатам $\xi'=\rho\sigma$, $\sigma\in\mathbb{R}^{n-1}_+$, $\rho=|\xi'|$

$$J_1=\int\limits_0^\infty j_{\frac{\gamma_1-1}{2}}(x_1\xi_1)\xi_1^{\gamma_1}\,d\xi_1\int\limits_{|\xi'|^2<\xi_1^2}\frac{(\xi_1^2-|\xi'|^2)^{m+\frac{\alpha}{2}}e^{-\delta\sqrt{\xi_1^2+|\xi'|^2}}}{(\xi_1^2-|\xi'|^2+i\varepsilon(\xi_1^2+|\xi'|^2))^m}\mathbf{j}_\gamma(x',\xi')(\xi')^{\gamma'}\,d\xi'=$$

$$=\int\limits_0^\infty j_{\frac{\gamma_1-1}{2}}(x_1\xi_1)\xi_1^{\gamma_1}\,d\xi_1\int\limits_0^{\xi_1}\rho^{n+|\gamma'|-2}\frac{(\xi_1^2-\rho^2)^{m+\frac{\alpha}{2}}e^{-\delta\sqrt{\xi_1^2+\rho^2}}}{(\xi_1^2-\rho^2+i\varepsilon(\xi_1^2+\rho^2))^m}d\rho\int\limits_{S_1^+(n-1)}\mathbf{j}_\gamma(x',\rho\sigma)(\sigma)^{\gamma'}\,dS.$$

Справедлива формула

$$\int\limits_{S_1^+(n-1)}\mathbf{j}_\gamma(x',\rho\sigma)(\sigma)^{\gamma'}\,dS=\frac{\prod\limits_{i=2}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-2}\Gamma\left(\frac{n-1+|\gamma'|}{2}\right)}j_{\frac{n-1+|\gamma'|}{2}-1}(\rho|x'|),$$

следовательно

$$J_1=\frac{\prod\limits_{i=2}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-2}\Gamma\left(\frac{n-1+|\gamma'|}{2}\right)}\int\limits_0^\infty j_{\frac{\gamma_1-1}{2}}(x_1\xi_1)\xi_1^{\gamma_1}\,d\xi_1\times$$

$$\times\int\limits_0^{\xi_1}\rho^{n+|\gamma'|-2}j_{\frac{n-1+|\gamma'|}{2}-1}(\rho|x'|)\frac{(\xi_1^2-\rho^2)^{m+\frac{\alpha}{2}}e^{-\delta\sqrt{\xi_1^2+\rho^2}}}{(\xi_1^2-\rho^2+i\varepsilon(\xi_1^2+\rho^2))^m}d\rho=\{\rho=\xi_1 r\}=$$

$$=\frac{\prod\limits_{i=2}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-2}\Gamma\left(\frac{n-1+|\gamma'|}{2}\right)}\int\limits_0^\infty j_{\frac{\gamma_1-1}{2}}(x_1\xi_1)\xi_1^{n+|\gamma|-1+\alpha}\,d\xi_1\times$$

$$\times\int\limits_0^1 r^{n+|\gamma'|-2}j_{\frac{n-1+|\gamma'|}{2}-1}(r\xi_1|x'|)\frac{(1-r^2)^{m+\frac{\alpha}{2}}e^{-\delta\xi_1\sqrt{1+r^2}}}{(1-r^2+i\varepsilon(1+r^2))^m}dr=$$

$$=\frac{\prod\limits_{i=2}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-2}\Gamma\left(\frac{n-1+|\gamma'|}{2}\right)}\frac{2^{\frac{\gamma_1-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\gamma_1+1}{2}\right)}{x_1^{\frac{\gamma_1-1}{2}}}\frac{2^{\frac{n-1+|\gamma'|}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n-1+|\gamma'|}{2}\right)}{|x'|^{\frac{n-1+|\gamma'|}{2}-1}}\int\limits_0^1 r^{\frac{n+|\gamma'|-1}{2}}\frac{(1-r^2)^{m+\frac{\alpha}{2}}}{(1-r^2+i\varepsilon(1+r^2))^m}dr\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty\xi_1^{\frac{n+|\gamma|}{2}+\alpha+1}e^{-\delta\xi_1\sqrt{1+r^2}}J_{\frac{\gamma_1-1}{2}}(x_1\xi_1)J_{\frac{n-1+|\gamma'|}{2}-1}(r\xi_1|x'|)\,d\xi_1=$$

$$=\frac{2^{\frac{|\gamma|-n}{2}}\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{x_1^{\frac{\gamma_1-1}{2}}|x'|^{\frac{n-1+|\gamma'|}{2}-1}}\int\limits_0^1 r^{\frac{n+|\gamma'|-1}{2}}\frac{(1-r^2)^{m+\frac{\alpha}{2}}}{(1-r^2+i\varepsilon(1+r^2))^m}dr\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty \xi_1^{\frac{n+|\gamma|}{2}+\alpha+1}e^{-\delta\xi_1\sqrt{1+r^2}}J_{\frac{\gamma_1-1}{2}}(x_1\xi_1)J_{\frac{n-1+|\gamma'|}{2}-1}(r\xi_1|x'|)\,d\xi_1.$$

Для вычисления внутреннего интеграла применим соотношение [127, формула 2.12.38.2, с. 194] в виде

$$\int\limits_0^\infty x^{a-1}\,e^{-px}\,J_\mu(bx)\,J_\nu(cx)dx=\frac{b^\mu c^\nu}{2^{\mu+\nu}p^{a+\mu+\nu}}\frac{\Gamma(a+\mu+\nu)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}\times$$

$$\times F_4\left(\frac{a+\mu+\nu}{2},\frac{a+\mu+\nu+1}{2};\mu+1,\nu+1;-\frac{b^2}{p^2},-\frac{c^2}{p^2}\right),$$

$$\mathrm{Re}(a+\mu+\nu)>0;\ \mathrm{Re}\,p>0.$$

Имеем

$$a=\frac{n+|\gamma|}{2}+\alpha+2,\ p=\delta\sqrt{1+r^2},\ \mu=\frac{\gamma_1-1}{2},\ \nu=\frac{n-1+|\gamma'|}{2}-1,\ b=x_1,\ c=r|x'|$$

и

$$\int\limits_0^\infty \xi_1^{\frac{n+|\gamma|}{2}+\alpha+1}e^{-\delta\xi_1\sqrt{1+r^2}}J_{\frac{\gamma_1-1}{2}}(x_1\xi_1)J_{\frac{n-1+|\gamma'|}{2}-1}(r\xi_1|x'|)\,d\xi_1=$$

$$=\frac{x_1^{\frac{\gamma_1-1}{2}}(r|x'|)^{\frac{n+|\gamma'|-3}{2}}}{2^{\frac{n+|\gamma|}{2}-2}(\delta\sqrt{1+r^2})^{n+|\gamma|+\alpha}}\frac{\Gamma(n+|\gamma|+\alpha)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_1+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|-1}{2}\right)}\times$$

$$\times F_4\left(\frac{n+|\gamma|+\alpha}{2},\frac{n+|\gamma|+\alpha+1}{2};\frac{\gamma_1+1}{2},\frac{n+|\gamma'|-1}{2};-\frac{x_1^2}{\delta^2(1+r^2)},-\frac{(r|x'|)^2}{\delta^2(1+r^2)}\right).$$

Тогда

$$J_1=\frac{2^{\frac{|\gamma|-n}{2}}\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{x_1^{\frac{\gamma_1-1}{2}}|x'|^{\frac{n-1+|\gamma'|}{2}-1}}\int\limits_0^1 r^{\frac{n+|\gamma'|-1}{2}}\frac{(1-r^2)^{m+\frac{\alpha}{2}}}{(1-r^2+i\varepsilon(1+r^2))^m}dr\times$$

$$\times\frac{x_1^{\frac{\gamma_1-1}{2}}(r|x'|)^{\frac{n+|\gamma'|-3}{2}}}{2^{\frac{n+|\gamma|}{2}-2}(\delta\sqrt{1+r^2})^{n+|\gamma|+\alpha}}\frac{\Gamma(n+|\gamma|+\alpha)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_1+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|-1}{2}\right)}\times$$

$$\times F_4\left(\frac{n+|\gamma|+\alpha}{2},\frac{n+|\gamma|+\alpha+1}{2};\frac{\gamma_1+1}{2},\frac{n+|\gamma'|-1}{2};-\frac{x_1^2}{\delta^2(1+r^2)},-\frac{(r|x'|)^2}{\delta^2(1+r^2)}\right).$$

$$=\frac{\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-2}\delta^{n+|\gamma|+\alpha}}\frac{\Gamma(n+|\gamma|+\alpha)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_1+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|-1}{2}\right)}\int\limits_0^1 r^{n+|\gamma'|-2}\frac{(1-r^2)^{m+\frac{\alpha}{2}}}{(1+r^2)^{\frac{n+|\gamma|+\alpha}{2}}(1-r^2+i\varepsilon(1+r^2))^m}\times$$

$$\times F_4\left(\frac{n+|\gamma|+\alpha}{2},\frac{n+|\gamma|+\alpha+1}{2};\frac{\gamma_1+1}{2},\frac{n+|\gamma'|-1}{2};-\frac{x_1^2}{\delta^2(1+r^2)},-\frac{(r|x'|)^2}{\delta^2(1+r^2)}\right)dr.$$

Аналогично находим

$$J_2=\frac{\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-2}\delta^{n+|\gamma|+\alpha}}\frac{\Gamma(n+|\gamma|+\alpha)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_1+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|-1}{2}\right)}\int\limits_1^\infty r^{n+|\gamma'|-2}\frac{(1-r^2)^{m+\frac{\alpha}{2}}}{(1+r^2)^{\frac{n+|\gamma|+\alpha}{2}}(1-r^2+i\varepsilon(1+r^2))^m}\times$$

$$\times F_4\left(\frac{n+|\gamma|+\alpha}{2},\frac{n+|\gamma|+\alpha+1}{2};\frac{\gamma_1+1}{2},\frac{n+|\gamma'|-1}{2};-\frac{x_1^2}{\delta^2(1+r^2)},-\frac{(r|x'|)^2}{\delta^2(1+r^2)}\right)dr.$$

Домножая на соответствующие константы, складывая $J_1(x)$ и $J_2(x)$ и учитывая, что

$$(1-r^2\mp i0)^{m+\frac{\alpha}{2}}=(1-r^2)_+^{m+\frac{\alpha}{2}}+e^{\mp\left(m+\frac{\alpha}{2}\right)\pi i}(1-r^2)_-^{m+\frac{\alpha}{2}},$$

получим утверждение теоремы. □

Рассмотрим сверточный оператор

$$Af=(T*f)_\gamma,\qquad f\in S_{ev}. \tag{10.8}$$

В образах Ханкеля запишем

$$\mathbf{F}_\gamma[Af]=\mathbf{F}_\gamma[T]\cdot\mathbf{F}_\gamma[f].$$

Определение 10.2. Пусть $M\in S'_{ev}$. Весовая обобщенная функция называется *B-мультипликатором* в L_p^γ, если для всех $f\in S_{ev}$ обобщенная свертка $(\mathbf{F}_\gamma^{-1}M*f)_\gamma$ принадлежит L_p^γ и

$$\sup_{||f||_{p,\gamma}=1}||(\mathbf{F}_\gamma^{-1}M*f)_\gamma||_{p,\gamma} \tag{10.9}$$

конечен. Линейное пространство всех таких M обозначается $M_{p,\gamma}=M_{p,\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$. Норма в $M_{p,\gamma}$ есть супремум (10.9).

Рассмотрим сингулярный дифференциальный оператор

$$(D_B)_{x_i}^{\beta_i}=\begin{cases} B_{\gamma_i}^{\frac{\beta_i}{2}}, & \beta=0,2,4,\ldots,\\ D_{x_i}B_{\gamma_i}^{\frac{\beta_i-1}{2}}, & \beta=1,3,5,\ldots,\end{cases}$$

где $B_{\gamma_i}=\dfrac{\partial^2}{\partial x_i}+\dfrac{\gamma_i}{x_i}\dfrac{\partial}{\partial x_i}$.

В статье [102] доказан следующий критерий B-мультипликатора типа критерия Михлина.

Теорема 10.2. *Пусть $M(\xi)\in C_{ev}^k(\mathbb{R}_+^n)\backslash\{0\}$, где k — четное число, большее, чем $\dfrac{n+|\gamma|}{2,}$ и существует такая константа A, не зависящая от $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_m)$, $|\beta|<k$, что при $\xi\neq 0$, $\xi\in\overline{\mathbb{R}}_+^n$ выполняется условие*

$$\left|\xi^\beta\,(D_B)_\xi^\beta\;M(\xi)\right|\leqslant A.$$

Тогда $M(\xi)$ является B-мультипликатором при $1<p<\infty$.

Лемма 10.4. *Пусть $\varepsilon,\delta>0$ — фиксированные числа, $m\geqslant n+|\gamma|-\dfrac{\alpha}{2}$. Функция*

$$M_{\alpha,\varepsilon,\delta}^{\mp}(\xi)=\begin{cases}\dfrac{(P\mp i0)^{m+\frac{\alpha}{2}}e^{-\delta|\xi|}}{(P(\xi)+i\varepsilon|\xi|^2)^m}, & P(\xi)\neq 0;\\ 0, & P(\xi)=0\end{cases}$$

является B-мультипликатором при $1<p<\infty$.

Доказательство. Докажем оценку

$$\left|\xi_1^{\beta_1}\ldots\xi_n^{\beta_n}(D_B)_{\xi_1}^{\beta_1}\ldots(D_B)_{\xi_n}^{\beta_n}\,M_{\alpha,\varepsilon,\delta}^{\mp}(\xi)\right|\leqslant C(\varepsilon,\delta). \tag{10.10}$$

Для $\xi\notin V=\{\xi\in\mathbb{R}_+^n: P(\xi)=0\}$ имеем

$$|(D_B)_\xi^j(P\mp i0)^{m+\frac{\alpha}{2}}|\leqslant C_1|\xi^j|\cdot|P(\xi)|^{m+\frac{\alpha}{2}-|j|},$$

$$|(D_B)_\xi^k(P(\xi)+i\varepsilon|\xi|^2)^{-m}|\leqslant C_2|\xi^k|\cdot|P^2(\xi)+\varepsilon^2|\xi|^4|^{-\frac{m+|k|}{2}},$$

$$|(D_B)_\xi^r e^{-\delta|\xi|}|\leqslant C_3|\xi^r|\cdot\frac{e^{-\delta|\xi|}}{|\xi|^{2r-1}}.$$

Используя эти оценки и формулу типа формулы Лейбница для B-дифференцирования следующего вида [176]:

$$B_i^l(u\,v)=\sum_{k=0}^{2l}C_{2l}^k\left(D_{B_i}^{2l-k}u\right)\left(D_{B_i}^k v\right)+\sum_{m=1}^{2l-2}\frac{1}{x_i^m}\,\mathbf{P}_{2l-m}\left(D_{B_i}v;D_{B_i}u\right),$$

где

$$\mathbf{P}_{2l-m}\left(D_{B_i}v;D_{B_i}u\right)=\sum_{j=1}^{2l-v-1}a_{2l-m-j,j}(\gamma_j)\left(D_{B_i}^{2l-m-j}u\right)\left(D_{B_i}^j v\right),$$

получаем необходимую оценку (10.10).

Если $\xi \in V$, то оценка (10.10) следует из непрерывности функции $M^{\mp}_{\alpha,\varepsilon,\delta}(\xi)$ и ее производных на V. $\square$

Лемма 10.5. *Функция* ${}^{\mp}g^{\alpha}_{\varepsilon,\delta}(x)$ *принадлежит пространству* L^{γ}_{p}, $1<p<\infty$.

Доказательство. Поскольку функция

$$ {}^{\mp}g^{\alpha}_{\varepsilon,\delta}(t) = \mathbf{F}^{-1}_{\gamma}\frac{(P\mp i0)^{m+\frac{\alpha}{2}}e^{-\delta|x|}}{(P(x)+i\varepsilon|x|^2)^m} $$

представима оператором, порожденным B-мультипликатором $M^{\mp}_{\alpha,\varepsilon,\delta}(\xi)$ в L^{γ}_{p}, то ${}^{\mp}g^{\alpha}_{\varepsilon,\delta}\in L^{\gamma}_{p}$. $\square$

Лемма 10.6. *Пусть* $f\in S_{ev}$. *Оператор*

$$ (I^{\alpha}_{P\pm i0,\gamma})^{-1}_{\varepsilon,\delta}f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} {}^{\mp}g^{\alpha}_{\varepsilon,\delta}(t)({}^{\gamma}\mathbf{T}^t_x f(x))t^{\gamma}dt $$

ограничен в L^{γ}_{p}, $1<p<\infty$.

Доказательство. По определению оператора

$$ (I^{\alpha}_{P\pm i0,\gamma})^{-1}_{\varepsilon,\delta}f = \left(\left(\mathbf{F}^{-1}_{\gamma}\frac{(P\mp i0)^{m+\frac{\alpha}{2}}e^{-\delta|\xi|}}{(P(\xi)+i\varepsilon|\xi|^2)^m}\right)(x)*f(x)\right)_{\gamma}, $$

он представляет собой обобщенную свертку $(\mathbf{F}^{-1}_{\gamma}M^{\mp}_{\alpha,\varepsilon,\delta}*f)_{\gamma}$ с B-мультипликатором $M^{\mp}_{\alpha,\varepsilon,\delta}(\xi)$, следовательно, принадлежит L^{γ}_{p}. $\square$

10.4. Теоремы об обращении гиперболического B-потенциала Рисса.

Лемма 10.7. *Пусть* $f\in\Phi^{\gamma}_{V}$, $V=\{\xi\in\mathbb{R}^n_+ : P(\xi)=0\}$, *тогда*

$$ ((I^{\alpha}_{P\pm i0,\gamma})^{-1}_{\varepsilon,\delta}I^{\alpha}_{P\pm i0,\gamma}f)(x) = (\mathbf{P}_{\gamma,\delta}f)(x) + \frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\sum_{k=0}^{m}C^k_m(-i\varepsilon)^k(\mathbf{A}^{\gamma,\delta,\varepsilon}_k f)(x), $$

где $(\mathbf{P}_{\gamma,\delta}f)(x)$ — *обобщенная свертка с ядром Пуассона* (10.6),

$$ (\mathbf{A}^{\gamma,\delta,\varepsilon}_k f)(x) = (A^{\gamma,\delta,\varepsilon}_k(x)*f(x))_{\gamma}, \qquad A^{\gamma,\delta,\varepsilon}_k(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{|\xi|^{2k}e^{-\delta|\xi|}}{(P(\xi)+i\varepsilon|\xi|^2)^k}\mathbf{j}_{\gamma}(x,\xi)\xi^{\gamma}\,d\xi. $$

Доказательство. Пусть $I^{\alpha}_{P\pm i0,\gamma}f=g$. Имеем

$$ \mathbf{F}_{\gamma}((I^{\alpha}_{P\pm i0,\gamma})^{-1}_{\varepsilon,\delta}g)(x) = \mathbf{F}_{\gamma}\left(\left(\mathbf{F}^{-1}_{\gamma}\frac{(P\mp i0)^{m+\frac{\alpha}{2}}e^{-\delta|\xi|}}{(P(\xi)+i\varepsilon|\xi|^2)^m}\right)(x)*g(x)\right)_{\gamma} = $$

$$ = \frac{(P\mp i0)^{m+\frac{\alpha}{2}}_{\gamma}e^{-\delta|x|}}{(P(x)+i\varepsilon|x|^2)^m}\cdot\mathbf{F}_{\gamma}g = \frac{(P\mp i0)^{m+\frac{\alpha}{2}}_{\gamma}e^{-\delta|x|}}{(P(x)+i\varepsilon|x|^2)^m}\cdot(P\mp i0)^{-\frac{\alpha}{2}}_{\gamma}\mathbf{F}_{\gamma}f = \frac{(P\mp i0)^{m}_{\gamma}e^{-\delta|x|}}{(P(x)+i\varepsilon|x|^2)^m}\cdot\mathbf{F}_{\gamma}f. $$

Тогда

$$ ((I^{\alpha}_{P\pm i0,\gamma})^{-1}_{\varepsilon,\delta}I^{\alpha}_{P\pm i0,\gamma}f)(x) = \mathbf{F}^{-1}_{\gamma}\left(\frac{(P\mp i0)^{m}_{\gamma}e^{-\delta|x|}}{(P(x)+i\varepsilon|x|^2)^m}\cdot\mathbf{F}_{\gamma}f\right) = \left(\mathbf{F}^{-1}_{\gamma}\frac{(P\mp i0)^{m}_{\gamma}e^{-\delta|x|}}{(P(x)+i\varepsilon|x|^2)^m}*f\right)_{\gamma}. \quad (10.11) $$

Применим к $\mathbf{F}^{-1}_{\gamma}\dfrac{(P\mp i0)^{m}_{\gamma}e^{-\delta|x|}}{(P(x)+i\varepsilon|x|^2)^m}$ формулу бинома Ньютона. Имеем

$$ \mathbf{F}^{-1}_{\gamma}\frac{(P\mp i0)^{m}_{\gamma}e^{-\delta|x|}}{(P(x)+i\varepsilon|x|^2)^m} = \frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\left[\int\limits_{\{\xi_1>|\xi'|\}^+}\frac{(\xi_1^2-|\xi'|^2)^m e^{-\delta|\xi|}}{(P(\xi)+i\varepsilon|\xi|^2)^m}\mathbf{j}_{\gamma}(x,\xi)\xi^{\gamma}\,d\xi+\right. $$

$$+e^{\mp m\pi i}\int\limits_{\{\xi_1<|\xi'|\}^+}\frac{(|\xi'|^2-\xi_1^2)^m e^{-\delta|\xi|}}{(P(\xi)+i\varepsilon|\xi|^2)^m}\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\xi^\gamma\,d\xi\Bigg]=$$

$$=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\Bigg[\int\limits_{\{\xi_1>|\xi'|\}^+}\left((1-\frac{i\varepsilon|\xi|^2}{P(\xi)+i\varepsilon|\xi|^2}\right)^m e^{-\delta|\xi|}\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\xi^\gamma\,d\xi+$$

$$+e^{\mp m\pi i}(-1)^m\int\limits_{\{\xi_1<|\xi'|\}^+}\left((1-\frac{i\varepsilon|\xi|^2}{P(\xi)+i\varepsilon|\xi|^2}\right)^m e^{-\delta|\xi|}\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\xi^\gamma\,d\xi\Bigg]=$$

$$=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\sum_{k=0}^{m}C_m^k(-i\varepsilon)^k\Bigg[\int\limits_{\{\xi_1>|\xi'|\}^+}\frac{|\xi|^{2k}e^{-\delta|\xi|}}{(P(\xi)+i\varepsilon|\xi|^2)^k}\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\xi^\gamma\,d\xi+$$

$$+\int\limits_{\{\xi_1<|\xi'|\}^+}\frac{|\xi|^{2k}e^{-\delta|\xi|}}{(P(\xi)+i\varepsilon|\xi|^2)^k}\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\xi^\gamma\,d\xi\Bigg]=$$

$$=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\sum_{k=0}^{m}C_m^k(-i\varepsilon)^k\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{|\xi|^{2k}e^{-\delta|\xi|}}{(P(\xi)+i\varepsilon|\xi|^2)^k}\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\xi^\gamma\,d\xi.$$

При $m=0$ применение формулы (10.1) дает

$$(\mathbf{F}_\gamma^{-1}e^{-\delta|\xi|})(x)=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\frac{2^{|\gamma|}\delta\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(\delta^2+|x|^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}}=$$

$$=\frac{2^n\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\delta\,(\delta^2+|x|^2)^{-\frac{n+|\gamma|+1}{2}}=P_\gamma(x,\delta). \tag{10.12}$$

Здесь $P_\gamma(x,\delta)$ — общее ядро Пуассона (10.3). По лемме 10.2 $P_\gamma(x,\delta)\in L_p^\gamma$.

Вводя обозначение

$$A_k^{\gamma,\delta,\varepsilon}(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{|\xi|^{2k}e^{-\delta|\xi|}}{(P(\xi)+i\varepsilon|\xi|^2)^k}\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\xi^\gamma\,d\xi=\mathbf{F}_\gamma\frac{|x|^{2k}e^{-\delta|x|}}{(P(x)+i\varepsilon|x|^2)^k}$$

при $m>0$, получим

$$\mathbf{F}_\gamma^{-1}\frac{(P\mp i0)_\gamma^m e^{-\delta|x|}}{(P(x)+i\varepsilon|x|^2)^m}=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\sum_{k=0}^{m}C_m^k(-i\varepsilon)^kA_k^{\gamma,\delta,\varepsilon}(x). \tag{10.13}$$

Подставляя (10.12) и (10.13) в (10.11), получим утверждение теоремы для $f\in\Phi_V^\gamma$. □

Теорема 10.3. *Пусть* $f\in\Phi_V^\gamma$, $V=\{\xi\in\mathbb{R}^n_+{:}P(\xi)=0\}$, $1<p<\dfrac{n+|\gamma|}{\alpha}$, $p\leqslant 2$, $n+|\gamma|-2<\alpha<n+|\gamma|$. *Тогда*

$$((I^\alpha_{P\pm i0,\gamma})^{-1}I^\alpha_{P\pm i0,\gamma}f)(x)=f(x),$$

где

$$(I^\alpha_{P\pm i0,\gamma})^{-1}f)=\overset{L_p^\gamma}{\lim_{\delta\to0}}\;\overset{L_2^\gamma}{\lim_{\varepsilon\to0}}\left(\left(\mathbf{F}_\gamma^{-1}\frac{(P\mp i0)^{m+\frac{\alpha}{2}}e^{-\delta|\xi|}}{(P(\xi)+i\varepsilon|\xi|^2)^m}\right)(x)*f(x)\right)_\gamma,$$

предел по ε *понимается по норме* L_2^γ, *а предел по* δ — *в норме* L_p^γ.

Доказательство. Из леммы 10.7 следует, что достаточно показать

$$\lim_{\delta\to 0}^{L_p^\gamma}\lim_{\varepsilon\to 0}^{L_2^\gamma}\left[(\mathbf{P}_{\gamma,\delta}f)(x)+\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^n\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\sum_{k=0}^m C_m^k(-i\varepsilon)^k(\mathbf{A}_k^{\gamma,\delta,\varepsilon}f)(x)\right]=f(x).$$

Найдем предел по ε в L_2^γ. Имеем

$$(\mathbf{A}_k^{\gamma,\delta,\varepsilon}f)(x)=(A_k^{\gamma,\delta,\varepsilon}(x)*f(x))_\gamma=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\mathbf{F}_\gamma\left[\frac{|x|^{2k}e^{-\delta|x|}}{(P(x)+i\varepsilon|x|^2)^k}\right](y)({}^\gamma\mathbf{T}_x^y f)(x)y^\gamma\,dy=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\mathbf{F}_\gamma\left[\frac{|x|^{2k}e^{-\frac{\delta}{2}|x|}}{(P(x)+i\varepsilon|x|^2)^k}\,e^{-\frac{\delta}{2}|x|}\right](y)({}^\gamma\mathbf{T}_x^y f)(x)y^\gamma\,dy=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\mathbf{F}_\gamma\left[\frac{|x|^{2k}e^{-\frac{\delta}{2}|x|}}{(P(x)+i\varepsilon|x|^2)^k}\mathbf{F}_\gamma\left[P_\gamma\left(z,\frac{\delta}{2}\right)\right](x)\right](y)({}^\gamma\mathbf{T}_x^y f)(x)y^\gamma\,dy.$$

Используя равенство Парсеваля для преобразования Ханкеля (см. [57, с. 20]), получим

$$||(-i\varepsilon)^k(\mathbf{A}_k^{\gamma,\delta,\varepsilon}f)(x)||_{2,\gamma}^2=||(A_k^{\gamma,\delta,\varepsilon}(x)*f(x))_\gamma||_{2,\gamma}^2=||\mathbf{F}_\gamma A_k^{\gamma,\delta,\varepsilon}(x)\cdot\mathbf{F}_\gamma f(x))_\gamma||_{2,\gamma}^2=$$

$$=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^n\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\left|\frac{(-i\varepsilon)^k|x|^{2k}e^{-\frac{\delta}{2}|x|}}{(P(x)+i\varepsilon|x|^2)^k}\mathbf{F}_\gamma\left[P_\gamma\left(x,\frac{\delta}{2}\right)\right]\mathbf{F}_\gamma f(x)\right|^2x^\gamma dx=$$

$$=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^n\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\left|\frac{(-i\varepsilon)^k|x|^{2k}e^{-\frac{\delta}{2}|x|}}{(P(x)+i\varepsilon|x|^2)^k}\mathbf{F}_\gamma\left[(\mathbf{P}_{\gamma,\delta}f)(x)\right]\right|^2x^\gamma dx.$$

Учитывая, что

$$\left|\frac{(-i\varepsilon)^k|x|^{2k}e^{-\frac{\delta}{2}|x|}}{(P(x)+i\varepsilon|x|^2)^k}\mathbf{F}_\gamma\left[(\mathbf{P}_{\gamma,\delta}f)(x)\right]\right|^2\leqslant e^{-\delta|x|}\left|\mathbf{F}_\gamma\left[(\mathbf{P}_{\gamma,\delta}f)(x)\right]\right|^2$$

и $e^{-\delta|x|}\left|\mathbf{F}_\gamma\left[P_\gamma\left(x,\frac{\delta}{2}\right)\right]\right|^2\in L_1^\gamma$, на основании теоремы Лебега о мажорируемой сходимости получаем, что

$$(-i\varepsilon)^k(\mathbf{A}_k^{\gamma,\delta,\varepsilon}f)(x)\to 0\qquad\text{при}\quad\varepsilon\to 0\quad\text{в}\quad L_2^\gamma.$$

То, что

$$||(\mathbf{P}_{\gamma,\delta}f)(x)-f(x)||_{p,\gamma}\to 0\quad\text{при}\quad\delta\to 0,$$

доказано в лемме 10.3. Таким образом, теорема доказана. □

11. Гиперболический B-потенциал Рисса и его аналитическое продолжение

В этом разделе рассмотрим потенциал, обобщающий потенциал Рисса, вида

$$(I_{\square_\gamma}^\alpha f)(x)=\frac{1}{\mathscr{H}_{n,\gamma}(\alpha)}\int\limits_{K^+}(y_1^2-y_2^2-\ldots-y_n^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}({}^\gamma\mathbf{T}^y f)(x)y^\gamma dy,\quad y^\gamma=\prod_{i=1}^n y_i^{\gamma_i},\tag{11.1}$$

где

$$\mathscr{H}_{n,\gamma}(\alpha)=\frac{2^{\alpha-n}}{\pi}\sin\left(\frac{\gamma_1+1}{2}\pi\right)\prod_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+1\right),$$

$K^+=\{y\in\mathbb{R}_+^n: y_1^2\geqslant y_2^2+\ldots+y_n^2\}$ и $({}^\gamma\mathbf{T}^y f)(x)=({}^{\gamma_1}T_{x_1}^{y_1}\ldots{}^{\gamma_n}T_{x_n}^{y_n}f)(x)$ — многомерный обобщенный сдвиг (см. определение 3.3). Оператор (11.1) будем называть *гиперболическим B-потенциалом Рисса*. С точностью до константы этот оператор совпадает с первым слагаемым в формуле (8.2), поэтому для (11.1) справедливы те же утверждения об абсолютной сходимости (теорема 8.1) и об ограниченности (теорема 8.3), что и для (8.2).

Причиной рассмотрения этого оператора является его удобство при нахождении решения итерированного неоднородного общего уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу. Известно (см. теорему 8.1), что для $f \in S_{ev}$ потенциал $I^{\alpha}_{\square_\gamma}$ сходится абсолютно при $n+|\gamma|-2<\alpha$. Однако для того, чтобы было возможно выразить решение неоднородного общего уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу посредством $I^{\alpha}_{\square_\gamma}$, необходимо построить его аналитическое продолжение на все $\alpha \geqslant 0$ и доказать, что полученный при этом оператор $I^{0}_{\square_\gamma}$ является тождественным. Это и будет составлять содержание этого раздела.

Отметим, что (11.1) можно записать в виде

$$(I^{\alpha}_{\square_\gamma} f)(x) = \frac{1}{\mathscr{H}_{n,\gamma}(\alpha)} \int\limits_{K^+} (y_1^2 - y_2^2 - \ldots - y_n^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}} ({}^\gamma\mathbf{T}^y f)(x) y^\gamma dy =$$

$$= \frac{1}{\mathscr{H}_{n,\gamma}(\alpha)} \int\limits_0^\infty y_1^{\gamma_1} dy_1 \int\limits_{|y'|<y_1} (y_1^2 - |y'|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}} ({}^\gamma\mathbf{T}^y f)(x)(y')^{\gamma'} dy' = \{y' = y_1 z'\} =$$

$$= \frac{1}{\mathscr{H}_{n,\gamma}(\alpha)} \int\limits_0^\infty y_1^{\alpha-1} dy_1 \int\limits_{|z'|<1} (1 - |z'|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}} ({}^{\gamma_1,\gamma'}\mathbf{T}^{y_1,y_1 z'} f)(x)(z')^{\gamma'} dz'. \tag{11.2}$$

11.1. Замена переменных в пространстве Лоренца. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — координаты пространства Лоренца, такие, что $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $\ldots$, $x_n \geqslant 0$. Метрика в пространстве Лоренца задается следующим образом:

$$(x,x) = x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2.$$

Квадрат расстояния между точками x и y ($x, y \in \mathbb{R}^n_+$) имеет вид

$$r^2_{xy} = (x-y, x-y) = (x_1-y_1)^2 - (x_2-y_2)^2 - \ldots - (x_n-y_n)^2.$$

Скалярное произведение (a,b) двух векторов a и b ($a, b \in \mathbb{R}^n_+$) определяется как

$$(a,b) = a_1 b_1 - a_2 b_2 - \ldots - a_n b_n.$$

Два вектора, скалярное произведение которых обращается в нуль, называются *ортогональными* друг другу. Если скалярный квадрат (a,a) вектора a положителен, то вектор называется *времениподобным*. Если (a,a) — отрицателен, то вектор a называется *пространственноподобным*. *Светоподобный* вектор — это вектор a, такой, что $(a,a)=0$. *Световой конус* или характеристический конус с вершиной a задается равенством $(x-a, x-a)=0$.

Рассмотрим фиксированный времениподобный единичный вектор $a = (1, 0, \ldots, 0)$ и переменный пространственноподобный единичный вектор $v = (0, v_2, \ldots, v_n)$, ортогональный a, такой, что $\sum\limits_{k=2}^n v_k^2 = 1$. Если вектор v выходит из начала координат, то его конец описывает часть единичной сферы $S_1^+(n)$, ортогональной к a. Таким образом,

$$(a,a) = 1, \qquad (v,v) = -1, \qquad (a,v) = 0.$$

Пусть $t \geqslant 0$, $\rho \geqslant 0$. Произвольный вектор $y \in \overline{\mathbb{R}}{}^n_+$ можно записать как

$$y = ta + \rho v.$$

Перепишем выражение для y в виде

$$y = \frac{1}{2}(t+\rho)(a+v) + \frac{1}{2}(t-\rho)(a-v).$$

Введя обозначения

$$b = \frac{1}{2}(a+v), \qquad c = \frac{1}{2}(a-v),$$

запишем

$$y = (t+\rho)b + (t-\rho)c = (t+\rho)\left(b + \frac{t-\rho}{t+\rho}c\right).$$

Положив теперь
$$\tau = \frac{t-\rho}{t+\rho}, \qquad \sigma = t+\rho,$$
получим
$$y = \sigma(b+\tau c),$$
где b и c — некоторые вектора. Выражая ρ и t через σ и τ, будем иметь
$$\rho = \frac{1}{2}\sigma(1-\tau), \qquad t = \frac{1}{2}\sigma(1+\tau).$$
Из определения a и v следует, что
$$(b,b)=0, \qquad (c,c)=0, \qquad (b,c)=\frac{1}{2}.$$
Квадрат лоренцева расстояния от точки y до начала координат может быть выражен теперь как
$$r^2 = (y,y) = (ta+\rho v, ta+\rho v) = t^2-\rho^2 = (t+\rho)^2\,\frac{t-\rho}{t+\rho} = \sigma^2\tau.$$

Мы имеем
$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) = ta+\rho v = (t, \rho v_2, \ldots, \rho v_n), \qquad |v| = \sqrt{v_2^2+\ldots+v_n^2} = 1.$$
Таким образом, $y_1 = t$, $|y'| = \rho$. Пусть $\delta > 0$, $y' = (y_2, \ldots, y_n)$ и $|y'|^2 = (y_1-\delta)^2$ — часть конуса с вершиной $(\delta, 0, \ldots, 0)$. Рассмотрим его нижнюю часть $0 < y_1 < \delta$. Тогда, учитывая, что $|y'| = \rho$, можем записать $y_1+\rho = \delta$ или $t+\rho = \delta$. Следовательно, нижняя часть конуса, имеющая вид $|y'| = \delta - y_1$, или $\rho = \delta - t$ $(\rho + t = \delta)$, в новых координатах примет вид $\sigma = \delta$. На поверхности $(y,y) = 0$ $(t=\rho)$, за исключением вершины, получаем, что $\tau = 0$ и $\sigma{>}0$.

Внутренность $|y'| = \delta - y_1$ $(|y'| = \delta - y_1$, или $t+\rho < \delta)$ при $y_1 > \delta/2$ $(\rho < t)$ перейдет в $\sigma < \delta$ и $\tau > 0$. Внутренность $|y'| = y_1$ $(|y'| < y_1$, или $\rho < t)$ при $y_1 < \delta/2$ перейдет в $0 < \tau < 1$ и $\sigma > 0$.

Якобиан такой замены
$$I = \frac{\partial(\rho,t)}{\partial(\sigma,\tau)} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1-\tau & -\sigma \\ 1+\tau & \sigma \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\sigma(1-\tau+1+\tau) = \frac{1}{2}\sigma.$$

Обозначая K_δ^+ область, ограниченную нижней частью конуса $|y'|^2 = (y_1-\delta)^2$ $(t+\rho=\delta)$ сверху и частью конуса $(y,y)=0$ $(t=\rho)$ снизу, запишем, что $K^+ = K_\delta^+ \cup (K^+ \setminus K_\delta^+)$. Используя новые переменные τ и σ, получим неравенства $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ и $0 \leqslant \sigma \leqslant \delta$, характеризующие K_δ^+.

Пусть $0 < \varepsilon < \delta$. Тогда конус $(y_1-\varepsilon)^2 = |y'|^2$ перейдет в $\tau \cdot \sigma = \varepsilon$.

11.2. Тождественный оператор.

Теорема 11.1. *Для функции $f \in S_{ev}$ гиперболический B-потенциал Рисса продолжается аналитически на значения $\alpha > -1$, причем $(I_{\square_\gamma}^0 f)(x)$ представляет собой тождественный оператор*:
$$(I_{\square_\gamma}^0 f)(x) = f(x). \tag{11.3}$$

Доказательство. Пусть сначала $n+|\gamma|-2 < \alpha$. Рассмотрим гиперболический B-потенциал Рисса в точке $(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0) = O$:
$$(I_{\square_\gamma}^\alpha f)(O) = \frac{1}{\mathscr{H}_{n,\gamma}(\alpha)} \int\limits_{K^+} (y_1^2 - y_2^2 - \ldots - y_n^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}} f(y) y^\gamma dy, \quad y^\gamma = \prod_{i=1}^n y_i^{\gamma_i}.$$
Разделив область K^+ на две части K_δ^+ и $K^+ \setminus K_\delta^+$, запишем
$$(I_{\square_\gamma}^\alpha f)(O) = I_1^\alpha + I_2^\alpha,$$
где
$$I_1^\alpha = \frac{1}{\mathscr{H}_{n,\gamma}(\alpha)} \int\limits_{K_\delta^+} (y_1^2 - y_2^2 - \ldots - y_n^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}} f(y) y^\gamma dy,$$

$$I_2^\alpha = \frac{1}{\mathscr{H}_{n,\gamma}(\alpha)} \int\limits_{K^+\backslash K_\delta^+} (y_1^2 - y_2^2 - \ldots - y_n^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}} f(y) y^\gamma dy.$$

Покажем, что I_1^α и I_2^α голоморфны как функции α при $\alpha > -1$ и $(I_1^0)f(O) = f(O)$, $I_2^0 = 0$ что равносильно тому, что $(I_{\square_\gamma}^0 f)(O) = f(O)$.

Произведем в I_1^α переход к сферическим координатам по переменным $y' = (y_2, \ldots, y_n)$, получим

$$I_1^\alpha = \frac{1}{\mathscr{H}_{n,\gamma}(\alpha)} \int\limits_{K_\delta^+} (y_1^2 - |y'|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}} f(y) y^\gamma dy = \{y' = \rho\theta\} =$$

$$= \int\limits_{K_\delta^+} \rho^{n+|\gamma'|-2} (y_1^2 - \rho^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}} f(y_1, \rho\theta) \theta^{\gamma'} y_1^{\gamma_1} dS d\rho dy_1,$$

где $|y'| = \sqrt{y_2^2 + \ldots + y_n^2}$, $\gamma' = (\gamma_2, \ldots, \gamma_n)$, $|\gamma'| = \gamma_2 + \ldots + \gamma_n$, $\theta^{\gamma'} = \theta_1^{\gamma_2} \ldots \theta_{n-1}^{\gamma_n}$.

Производя замену переменных y_1 и ρ по формулам

$$\rho = \frac{1}{2}\sigma(1-\tau), \qquad y_1 = \frac{1}{2}\sigma(1+\tau), \tag{11.4}$$

учитывая, что $\dfrac{\partial(y_1, \rho)}{\partial(\sigma, \tau)} = \dfrac{1}{2}\sigma$ и $y = (y_1, \rho\theta) = \sigma(b + \tau c)$ (см. раздел 11.1), получим

$$I_1^\alpha = \frac{2^{1-n-|\gamma|}}{\mathscr{H}_{n,\gamma}(\alpha)} \int\limits_{S_1^+(n-1)} \theta^{\gamma'} dS \int\limits_0^\delta \sigma^{\alpha-1} d\sigma \int\limits_0^1 \tau^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}} (1+\tau)^{\gamma_1} (1-\tau)^{n+|\gamma'|-2} f(\sigma(b+\tau c)) d\tau.$$

Положим

$$A(\alpha, \sigma) = \frac{2^{1-n-|\gamma|}}{\mathscr{H}_{n,\gamma}(\alpha)} \int\limits_0^1 \tau^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}} (1+\tau)^{\gamma_1} (1-\tau)^{n+|\gamma'|-2} f(\sigma(b+\tau c)) d\tau,$$

тогда

$$I_1^\alpha = \int\limits_{S_1^+(n-1)} \theta^{\gamma'} dS \int\limits_0^\delta A(\alpha, \sigma) \sigma^{\alpha-1} d\sigma.$$

Разложим $f(\sigma(b+\tau c))$ по формуле Тейлора по переменной τ:

$$f(y) = f(\sigma(b+\tau c)) = \sum_{p=0}^{N-1} \frac{\tau^p}{p!} F_p(\sigma, \theta) + R_N(\tau),$$

где

$$F_p(\sigma, \theta) = \frac{\partial^p}{\partial \tau^p} f(\sigma(b+\tau c)) \bigg|_{\tau=0}$$

и

$$R_N(\tau) = \frac{1}{(N-1)!} \int\limits_0^\tau \frac{\partial^N}{\partial \tau^N} f(\sigma(b+\widetilde{\tau}c)) \, (\tau - \widetilde{\tau})^{N-1} d\widetilde{\tau}.$$

Получим следующее выражение для $A(\alpha, \sigma)$:

$$A(\alpha, \sigma) = \frac{2^{1-n-|\gamma|}}{\mathscr{H}_{n,\gamma}(\alpha)} \sum_{p=0}^{N-1} \frac{F_p(\sigma, \theta)}{p!} \int\limits_0^1 \tau^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+p} (1+\tau)^{\gamma_1} (1-\tau)^{n+|\gamma'|-2} d\tau +$$

$$+ \frac{2^{1-n-|\gamma|}}{\mathscr{H}_{n,\gamma}(\alpha)} \int\limits_0^1 \tau^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}} (1+\tau)^{\gamma_1} (1-\tau)^{n+|\gamma'|-2} R_N(\tau) d\tau.$$

Используя интегральное представление гипергеометрической функции Гаусса при $c-a-b>0$

$$ {}_2F_1(a,b;c;-1)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1+t)^{-a}\,dt, \tag{11.5}$$

в нашем случае будем иметь $c-a-b=n+|\gamma|-2>0$, $n+|\gamma|-2<\alpha$ и

$$\int\limits_0^1 \tau^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+p}(1-\tau)^{n+|\gamma'|-2}(1+\tau)^{\gamma_1}d\tau=\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+p+1\right)\Gamma(n+|\gamma'|-1)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+n+|\gamma'|-\gamma_1}{2}+p\right)}\times$$

$$\times\,{}_2F_1\left(-\gamma_1,\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+p+1;\frac{\alpha+n+|\gamma'|-\gamma_1}{2}+p;-1\right).$$

Интеграл (11.5) сходится при $b>0$, $c-b>0$ и $c-a-b>0$ и имеет аналитическое продолжение на значения $b\leqslant 0$, $c-b\leqslant 0$ в виде ряда

$$F(a,b;c;-1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n(-1)^n}{(c)_n n!}.$$

Используя это аналитическое продолжение, продолжим интеграл

$$\int\limits_0^1 \tau^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+p}(1+\tau)^{\gamma_1}(1-\tau)^{n+|\gamma'|-2}d\tau$$

на значения $\alpha\leqslant n+|\gamma|-2$.

Вводя обозначение

$$A_p(\alpha)=\frac{2^{1-n-|\gamma|}}{\mathscr{H}_{n,\gamma}(\alpha)p!}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+p+1\right)\Gamma(n+|\gamma'|-1)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+n+|\gamma'|-\gamma_1}{2}+p\right)}\times$$

$$\times\,{}_2F_1\left(-\gamma_1,\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+p+1;\frac{\alpha+n+|\gamma'|-\gamma_1}{2}+p;-1\right)=\frac{K_p(\alpha)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)},$$

где

$$K_p(\alpha)=\frac{\pi 2^{1-|\gamma|-\alpha}}{p!\sin\left(\frac{\gamma_1+1}{2}\pi\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+1\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+p+1\right)\Gamma(n+|\gamma'|-1)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+n+|\gamma'|-\gamma_1}{2}+p\right)}\times$$

$$\times\,{}_2F_1\left(-\gamma_1,\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+p+1;\frac{\alpha+n+|\gamma'|-\gamma_1}{2}+p;-1\right),$$

запишем

$$A(\alpha,\sigma)=\sum_{p=0}^{N-1}F_p(\sigma,\theta)A_p(\alpha)+\frac{2^{1-n-|\gamma|}}{\mathscr{H}_{n,\gamma}(\alpha)}\int\limits_0^1 \tau^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}(1+\tau)^{\gamma_1}(1-\tau)^{n+|\gamma'|-2}R_N(\tau)d\tau \tag{11.6}$$

и

$$I_1^\alpha=\sum_{p=0}^{N-1}A_p(\alpha)\int\limits_{S_1^+(n-1)}\theta^{\gamma'}dS\int\limits_0^\delta F_p(\sigma,\theta)\sigma^{\alpha-1}d\sigma+$$

$$+\frac{2^{1-n-|\gamma|}}{\mathscr{H}_{n,\gamma}(\alpha)}\int\limits_{S_1^+(n-1)}\theta^{\gamma'}dS\int\limits_0^\delta\sigma^{\alpha-1}d\sigma\int\limits_0^1\tau^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}(1+\tau)^{\gamma_1}(1-\tau)^{n+|\gamma'|-2}R_N(\tau)d\tau=$$

$$=A_0(\alpha)\int\limits_{S_1^+(n-1)}\theta^{\gamma'}dS\int\limits_0^\delta F_0(\sigma,\theta)\sigma^{\alpha-1}d\sigma+\sum_{p=1}^{N-1}A_p(\alpha)\int\limits_{S_1^+(n-1)}\theta^{\gamma'}dS\int\limits_0^\delta F_p(\sigma,\theta)\sigma^{\alpha-1}d\sigma+$$

$$+\frac{2^{1-n-|\gamma|}}{\mathscr{H}_{n,\gamma}(\alpha)}\int\limits_{S_1^+(n-1)}\theta^{\gamma'}dS\int\limits_0^\delta\sigma^{\alpha-1}d\sigma\int\limits_0^1\tau^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}(1+\tau)^{\gamma_1}(1-\tau)^{n+|\gamma'|-2}R_N(\tau)d\tau. \qquad (11.7)$$

Наиболее важное слагаемое в (11.7) — это $A_0(\alpha)\int\limits_{S_1^+(n-1)}\theta^{\gamma'}dS\int\limits_0^\delta F_0(\sigma,\theta)\sigma^{\alpha-1}d\sigma$. Покажем, что

$$\lim_{\alpha\to 0}A_0(\alpha)\int\limits_{S_1^+(n-1)}\theta^{\gamma'}dS\int\limits_0^\delta F_0(\sigma,\theta)\sigma^{\alpha-1}d\sigma=f(0), \qquad (11.8)$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\sum_{p=1}^{N-1}A_p(\alpha)\int\limits_{S_1^+(n-1)}\theta^{\gamma'}dS\int\limits_0^\delta F_p(\sigma,\theta)\sigma^{\alpha-1}d\sigma=0, \qquad (11.9)$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{2^{1-n-|\gamma|}}{\mathscr{H}_{n,\gamma}(\alpha)}\int\limits_{S_1^+(n-1)}\theta^{\gamma'}dS\int\limits_0^\delta\sigma^{\alpha-1}d\sigma\int\limits_0^1\tau^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}(1+\tau)^{\gamma_1}(1-\tau)^{n+|\gamma'|-2}R_N(\tau)d\tau=0. \qquad (11.10)$$

Для доказательства (11.8) рассмотрим $F_0(\sigma,\theta)A_0(\alpha)=\dfrac{K_0(\alpha)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}f(\sigma b)$. Имеем:

$$K_0(0)=\frac{\pi 2^{1-|\gamma|}}{\sin\left(\frac{\gamma_1+1}{2}\pi\right)\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(1-\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\Gamma(n+|\gamma'|-1)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|-\gamma_1}{2}\right)}\times$$

$$\times{}_2F_1\left(-\gamma_1,1-\frac{n+|\gamma|}{2};\frac{n+|\gamma'|-\gamma_1}{2};-1\right)=$$

$$=\frac{\pi 2^{1-|\gamma|}\Gamma(n+|\gamma'|-1)}{\sin\left(\frac{\gamma_1+1}{2}\pi\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|-\gamma_1}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\,{}_2F_1\left(-\gamma_1,1-\frac{n+|\gamma|}{2};\frac{n+|\gamma'|-\gamma_1}{2};-1\right).$$

Используя соотношение [1, формула 15.1.21] в виде

$${}_2F_1(a,b;a-b+1;-1)=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(a-b+1)}{2^a\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)},\qquad a-b+1\neq 0,-1,-2,\ldots,$$

получим $a=-\gamma_1$, $b=1-\dfrac{n+|\gamma|}{2}$, $a-b+1=\dfrac{n+|\gamma'|-\gamma_1}{2}\neq 0,-1,-2,\ldots,$

$${}_2F_1\left(-\gamma_1,1-\frac{n+|\gamma|}{2};\frac{n+|\gamma'|-\gamma_1}{2};-1\right)=\frac{2^{\gamma_1}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|-\gamma_1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\gamma_1}{2}\right)}$$

и, следовательно,

$$K_0(0)=\frac{\pi 2^{1-|\gamma|}\Gamma(n+|\gamma'|-1)}{\sin\left(\frac{\gamma_1+1}{2}\pi\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|-\gamma_1}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\frac{2^{\gamma_1}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|-\gamma_1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\gamma_1}{2}\right)}=$$

$$=\frac{2^{1-|\gamma'|}\pi\sqrt{\pi}\Gamma(n+|\gamma'|-1)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma_1+1}{2}\pi\right)\Gamma\left(\frac{1-\gamma_1}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}.$$

Принимая во внимание формулу (см. [1])

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)},\qquad z\notin\mathbb{Z},$$

будем иметь

$$K_0(0)=\frac{2^{1-|\gamma'|}\sqrt{\pi}\Gamma(n+|\gamma'|-1)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|}{2}\right)\prod\limits_{i=2}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}. \tag{11.11}$$

Теперь мы построим аналитическое продолжение выражения

$$\int\limits_0^\delta A(\alpha,\sigma)\sigma^{\alpha-1}d\sigma.$$

Самое важное слагаемое в (11.6) — это слагаемое, содержащее $F_0(\sigma,\theta)A_0(\alpha)$. Запишем его в виде

$$A_0(\alpha)\int\limits_0^\delta F_0(\sigma,\theta)\sigma^{\alpha-1}d\sigma=\frac{K_0(\alpha)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int\limits_0^\delta f(\sigma b)\sigma^{\alpha-1}d\sigma.$$

Множитель $K_0(\alpha)$ не имеет особенности при $\alpha=0$ и для $\gamma_1\neq 2k-1$, $k\in\mathbb{N}$ вычисляется по формуле (11.11). Интегрируя $\int\limits_0^\delta f(\sigma b)\sigma^{\alpha-1}d\sigma$ по частям, получим

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int\limits_0^\delta f(\sigma b)\sigma^{\alpha-1}d\sigma=\frac{1}{\alpha\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\left(f(\sigma b)\sigma^\alpha\Big|_{\sigma=0}^{\delta}-\int\limits_0^\delta f'_\sigma(\sigma b)\sigma^\alpha d\sigma\right)=$$

$$=\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}\left(f(\delta b)\delta^\alpha-\int\limits_0^\delta f'_\sigma(\sigma b)\sigma^\alpha d\sigma\right).$$

Тогда

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{K_0(\alpha)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int\limits_0^\delta f(\sigma b)\sigma^{\alpha-1}d\sigma=\frac{K_0(0)}{2}\left(f(\delta b)-\int\limits_0^\delta f'_\sigma(\sigma b)d\sigma\right)=$$

$$=\frac{K_0(0)}{2}\left(f(\delta b)-f(\delta b)+f(0)\right)=\frac{K_0(0)}{2}f(0).$$

Таким образом, имеем

$$\lim_{\alpha\to0}A_0(\alpha)\int\limits_{S_1^+(n-1)}\theta^{\gamma'}dS\int\limits_0^\delta F_0(\sigma,\theta)\sigma^{\alpha-1}d\sigma=\frac{K_0(0)}{2}f(0)\int\limits_{S_1^+(n-1)}\theta^{\gamma'}dS.$$

Используя формулу удвоения вида

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\tfrac12\right)=2^{1-2z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z),$$

получим

$$\frac{K_0(0)}{2}\int\limits_{S_1^+(n-1)}\theta^{\gamma'}dS=\frac{2^{-|\gamma'|}\sqrt{\pi}\Gamma(n+|\gamma'|-1)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|}{2}\right)\prod\limits_{i=2}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\frac{\prod\limits_{i=2}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-2}\Gamma\left(\frac{n-1+|\gamma'|}{2}\right)}=1,$$

что и доказывает (11.8).

Для того, чтобы показать (11.9) и (11.10), рассмотрим выражение $A_p(\alpha)\int\limits_0^\delta F_p(\sigma,\theta)\sigma^{\alpha-1}d\sigma$ при $p>0$:

$$A_p(\alpha)=\frac{2^{1-n-|\gamma|}}{\mathscr{H}_{n,\gamma}(\alpha)p!}\frac{\Gamma\left(p+1-\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\right)\Gamma(n+|\gamma'|-1)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+n+|\gamma'|-\gamma_1}{2}+p\right)}\times$$

$$\times{}_2F_1\left(-\gamma_1,\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+p+1;\frac{\alpha+n+|\gamma'|-\gamma_1}{2}+p;-1\right)=$$

$$
=\frac{2^{1-|\gamma|-\alpha}\pi}{p!\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(p+1-\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\right)\Gamma(n+|\gamma'|-1)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+n+|\gamma'|-\gamma_1}{2}+p\right)}\times
$$
$$
\times{}_2F_1\left(-\gamma_1,\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+p+1;\frac{\alpha+n+|\gamma'|-\gamma_1}{2}+p;-1\right).
$$

Применяя формулу $\Gamma(z+m+1)=z(z+1)\cdots(z+m)\Gamma(z)$, $m\in\mathbb{N}$ к $\Gamma\left(p+1-\dfrac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\right)$, получим

$$
\Gamma\left(p+1-\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\right)=
$$
$$
=\left(1-\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\right)\left(2-\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\right)\ldots\left(p-\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\right)
$$

и

$$
A_p(\alpha)=\frac{2^{1-|\gamma|-\alpha}\pi\Gamma(n+|\gamma'|-1)\left(1-\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\right)\left(2-\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\right)\ldots\left(p-\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\right)}{p!\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+n+|\gamma'|-\gamma_1}{2}+p\right)}\times
$$
$$
\times{}_2F_1\left(-\gamma_1,\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+p+1;\frac{\alpha+n+|\gamma'|-\gamma_1}{2}+p;-1\right)=\frac{K_p(\alpha)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)},
$$

где

$$
K_p(\alpha)=\frac{2^{1-|\gamma|-\alpha}\pi\Gamma(n+|\gamma'|-1)\left(1-\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\right)\left(2-\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\right)\ldots\left(p-\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\right)}{p!\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+n+|\gamma'|-\gamma_1}{2}+p\right)}\times
$$
$$
\times{}_2F_1\left(-\gamma_1,\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+p+1;\frac{\alpha+n+|\gamma'|-\gamma_1}{2}+p;-1\right).
$$

Получаем, что выражение

$$
K_p(0)=\frac{2^{1-|\gamma|}\pi\Gamma(n+|\gamma'|-1)\left(1-\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\left(2-\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\ldots\left(p-\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{p!\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|-\gamma_1}{2}+p\right)}\times
$$
$$
\times{}_2F_1\left(-\gamma_1,p+1-\frac{n+|\gamma|}{2};\frac{n+|\gamma'|-\gamma_1}{2}+p;-1\right)
$$

конечно при $n+|\gamma'|-\gamma_1\neq-2k$, $k\in\mathbb{N}$. Для любого целого p имеем

$$
\frac{\partial^p}{\partial\tau^p}f(\sigma(b+\tau c))=\sigma^p\left(\sum_{k=1}^{n}c^k\partial_k\right)^p f, \tag{11.12}
$$

где $\partial_k=\dfrac{\partial}{\partial y_k}$, $y=\sigma(b+\tau c)$. Учитывая (11.12), замечаем, что $\dfrac{\partial^p}{\partial\tau^p}f(\sigma(b+\tau c))$ содержит множитель σ^p, $p=1,2,\ldots$. Таким образом, все интегралы

$$
\int\limits_0^\delta F_p(\sigma,\theta)\sigma^{\alpha-1}d\sigma,\qquad p=1,2,\ldots
$$

и

$$
\int\limits_0^\delta\sigma^{\alpha-1}d\sigma\int\limits_0^1\tau^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}(1+\tau)^{\gamma_1}(1-\tau)^{n+|\gamma'|-2}R_N(\tau)d\tau
$$

сходятся при $\alpha>-1$. Принимая во внимание, что $K_p(0)$ конечно и $\lim\dfrac{1}{\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}=0$, равенства (11.9) и (11.10) доказаны.

Рассмотрим теперь I_2^α:

$$I_2^\alpha = \frac{1}{\mathscr{H}_{n,\gamma}(\alpha)} \int\limits_{K^+\backslash K_\delta^+} r^{\alpha-n-|\gamma|}(y) f(y) y^\gamma dy = \{y' = \rho\theta\} =$$

$$= \frac{1}{\mathscr{H}_{n,\gamma}(\alpha)} \int\limits_{K^+\backslash K_\delta^+} \rho^{n+|\gamma'|-2} (y_1^2 - \rho^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}} f(y_1, \rho\theta) \theta^{\gamma'} y_1^{\gamma_1} dS d\rho dy_1.$$

Переходя в последнем выражении к переменным (11.4), получим

$$I_2^\alpha = \frac{2^{1-n-|\gamma|}}{\mathscr{H}_{n,\gamma}(\alpha)} \int\limits_{S_1^+(n-1)} \theta^{\gamma'} dS \int\limits_0^1 \tau^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}} (1+\tau)^{\gamma_1} (1-\tau)^{n+|\gamma'|-2} d\tau \int\limits_\delta^\infty \sigma^{\alpha-1} f(\sigma(b+\tau c)) d\sigma.$$

Поскольку $f \in S_{ev}$ и $\delta > 0$, то функция $G(\tau,\theta,\alpha) = \int\limits_\delta^\infty \sigma^{\alpha-1} f(\sigma(b+\tau c)) d\sigma$ принадлежит S_{ev} по (τ,θ) и голоморфна по α. Полагая $\dfrac{2^{1-|\gamma|-\alpha}\pi}{\prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\dfrac{\gamma_i+1}{2}\right)} (1+\tau)^{\gamma_1}(1-\tau)^{n+|\gamma'|-2} G(\tau,\theta,\alpha) = W(\tau)$, получим

$$I_2^\alpha = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+1\right)} \int\limits_{S_1^+(n-1)} \theta^{\gamma'} dS \int\limits_0^1 \tau^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}} W(\tau) d\tau.$$

Выражение $\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+1\right)} \int\limits_0^1 \tau^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}} W(\tau) d\tau$ интегрированием по частям может быть продолжено аналитически как голоморфная функция α для всех $\alpha > \alpha_0$, где α_0 — произвольное число. Таким образом, функция

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+1\right)} \int\limits_{S_1^+(n-1)} \theta^{\gamma'} dS \int\limits_0^1 \tau^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}} W(\tau) d\tau$$

голоморфна при $\alpha > -1$, и поскольку I_2^α содержит множитель $\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$, то I_2^α стремится к нулю при $\alpha \to 0$. Следовательно, показано, что $(I_{\Box_\gamma}^0 f)(O) = f(O)$. Взяв $g(O) = {}^\gamma\mathbf{T}_y^O f(y)$ вместо $f(O)$, можем записать $(I_{\Box_\gamma,\gamma}^0 f)(x) = f(x)$, что и означает, что $I_{\Box_\gamma}^0$ — тождественный оператор. $\Box$

Исходя из доказанной теоремы и равенства (9.3) для гиперболического B-потенциала, для $f \in S_{ev}$, $0 < \alpha$ и $k \in \mathbb{N}$ справедлива формула

$$(\Box_\gamma)^k I_{\Box_\gamma}^{\alpha+2k} f = I_{\Box_\gamma}^\alpha f, \tag{11.13}$$

где $\Box_\gamma = B_{\gamma_1} - \sum\limits_{i=2}^n B_{\gamma_i}$.

Кроме того, при $0 < \alpha$ и $f \in S_{ev}$ такой, что $x_i^{\gamma_i} \dfrac{\partial}{\partial x_i} f \Big|_{x_i=0} = 0$, $i = 1, \ldots, n$ будет справедливо равенство

$$I_{\Box_\gamma}^{\alpha+2} \Box_\gamma f = I_{\Box_\gamma}^\alpha f, \tag{11.14}$$

а если f такова, что $x_i^{\gamma_i} \dfrac{\partial}{\partial x_i} (\Box_\gamma)^m f \Big|_{x_i=0} = 0$, $m = 0, \ldots, k-1$, $i = 1, \ldots, n$, то и равенство

$$I_{\Box_\gamma}^{\alpha+2k} (\Box_\gamma)^k f = I_{\Box_\gamma}^\alpha f \tag{11.15}$$

(см. теоремы 9.2 и 9.4).

В силу плотности S_{ev} в L_p^γ равенства (11.13), (11.14) и (11.15) распространяются на функции из L_p^γ при $1<p<\dfrac{n+|\gamma|}{\alpha}$ в случае, если интеграл $I^\alpha_{\square_\gamma}f$ сходится абсолютно для $f\in L_p^\gamma$.

11.3. Аналитическое продолжение гиперболического B-потенциала Рисса $I^\alpha_{\square_\gamma}$. Если существует аналитическое продолжение $I^\alpha_{\square_\gamma}$ на случай $0<\alpha$, то в силу того, что $(I^0_{\square_\gamma}u)(x)=u(x)$, и в силу формул (11.14) и (11.15) следует, что гиперболические B-потенциалы Рисса могут быть использованы для решения неоднородных итерированных уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу вида

$$(\square_\gamma)^k u(x)=f(x) \tag{11.16}$$

при соответствующих условиях на функцию f. А именно, формально, применяя $I^{\alpha+2k}_{\square_\gamma}$ к обеим частям (11.16), получим

$$(I^\alpha_{\square_\gamma}u)(x)=(I^{\alpha+2k}_{\square_\gamma}f)(x).$$

Далее при переходе к пределу при $\alpha\to 0$, формально, получаем решение рассматриваемой задачи вида $u(x)=(I^{2k}_{\square_\gamma}f)(x)$. Однако для применения $I^\alpha_{\square_\gamma}$ к решению дифференциальных уравнений в частных производных необходимо построить явные формулы аналитического продолжения этих операторов, расширив область значения порядка α. Сначала для $I^\alpha_{\square_\gamma}$ который сходится абсолютно при $f\in S_{ev}$ и $n+|\gamma|-2<\alpha$ (см. теорему 8.1), докажем справедливость его представления в виде интеграла по $\mathbb{R}^n_+$.

Лемма 11.1. *При $n+|\gamma|-2<\alpha$ для оператора $I^\alpha_{\square_\gamma}$ справедливо представление*

$$(I^\alpha_{\square_\gamma}f)(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|y|^{\gamma_1-1}\,({}^{\gamma_1}T^{|y|}_{x_1}\,{}^{\gamma'}\mathbf{T}^{y'}_{x'}f)(x)y_1^{\alpha-n-|\gamma|+1}(y')^{\gamma'}dy. \tag{11.17}$$

Доказательство. Учитывая, что $r=\sqrt{y_1^2-|y'|^2}$, $y'=(y_2,\ldots,y_n)$, $|y'|=\sqrt{y_2^2+\ldots+y_n^2}$, $\gamma'=(\gamma_2,\ldots,\gamma_n)$, $|\gamma'|=\gamma_2+\ldots+\gamma_n$, тогда запишем оператор $I^\alpha_{\square_\gamma}$ в виде

$$(I^\alpha_{\square_\gamma}f)(x)=\int\limits_{K^+}r^{\alpha-n-|\gamma|}(y)({}^\gamma\mathbf{T}^y_x f)(x)y^\gamma dy=$$

$$=\int\limits_0^\infty(y_1)^{\gamma_1}dy_1\int\limits_{\{|y'|<y_1\}^+}r^{\alpha-n-|\gamma|}(y)\,({}^\gamma\mathbf{T}^y f)(x)(y')^{\gamma'}dy'=$$

$$=\int\limits_0^\infty(y_1)^{\gamma_1}dy_1\int\limits_{\{|y'|<y_1\}^+}r^{\alpha-n-|\gamma|}(y)\,({}^{\gamma_1}T^{y_1}_{x_1}\,{}^{\gamma'}\mathbf{T}^{y'}_{x'}f)(x)(y')^{\gamma'}dy'.$$

Положим

$$I=\int\limits_{\{|y'|<y_1\}^+}r^{\alpha-n-|\gamma|}(y)\,({}^{\gamma_1}T^{y_1}_{x_1}\,{}^{\gamma'}\mathbf{T}^{y'}_{x'}f)(x)(y')^{\gamma'}dy'=$$

$$=C(\gamma')\int\limits_{\{|y'|<y_1\}^+}\int\limits_0^\pi\ldots\int\limits_0^\pi{}^{\gamma_1}T^{y_1}_{x_1}\,f(x_1,\sqrt{x_2^2+y_2^2+2x_2y_2\cos\varphi_2},\ldots,\sqrt{x_n^2+y_n^2+2x_ny_n\cos\varphi_n})\times$$

$$\times r^{\alpha-n-|\gamma|}(y)\;(y')^{\gamma'}\prod_{i=2}^n\sin^{\gamma_i-1}\varphi_i\,d\varphi_i dy'=$$

$$=C(\gamma')\int\limits_{\{|y'|<y_1\}^+}\int\limits_0^\pi\ldots\int\limits_0^\pi{}^{\gamma_1}T^{y_1}_{x_1}\,f\Biggl(x_1,\sqrt{(y_2\cos\varphi_2+x_2)^2+y_2^2\sin^2\varphi_2},\ldots$$

$$\ldots,\sqrt{(y_n\cos\varphi_n+x_n)^2+y_n^2\sin^2\varphi_n}\Biggr)\,r^{\alpha-n-|\gamma|}(y)\;(y')^{\gamma'}\prod_{i=2}^n\sin^{\gamma_i-1}\varphi_i\,d\varphi_i dy'.$$

Произведя в I замену (см. [103])

$$z_1=y_2\cos\varphi_2,\ z_2=y_2\sin\varphi_2,\ \ldots,\ z_{2n-3}=y_n\cos\varphi_n,\ z_{2n-2}=y_n\sin\varphi_n,\ 0\leqslant\varphi_i\leqslant\pi,\ i=2,\ldots,n \tag{11.18}$$

и обозначив $\{|z|<y_1\}^+=\{z_{2i-1}\in\mathbb{R},z_{2i}\in\mathbb{R}_+,i=1,\ldots,n-1:|z|<y_1\}$, получим

$$I=C(\gamma')\int\limits_{\{|z|<y_1\}^+}{}^{\gamma_1}T^{y_1}_{x_1}f(x_1,\sqrt{(z_1+x_2)^2+z_2^2},\ldots,\sqrt{(z_{2n-3}+x_n)^2+z_{2n-2}^2})\times$$

$$\times(y_1^2-|z|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\prod_{i=1}^{n-1}z_{2i}^{\gamma_i-1}dz=\{(z_{2i-1}+x_{i+1})\to z_{2i-1}\}=$$

$$=C(\gamma')\int\limits_{\{|\widetilde{z}|<y_1\}^+}{}^{\gamma_1}T^{y_1}_{x_1}f(x_1,\sqrt{z_1^2+z_2^2},\ldots,\sqrt{z_{2n-3}^2+z_{2n-2}^2})(y_1^2-|\widetilde{z}|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\prod_{i=1}^{n-1}z_{2i}^{\gamma_i-1}dz,$$

где $|\widetilde{z}|=\sqrt{(z_1-x_2)^2+z_2^2+(z_3-x_3)^2+z_4^2+\ldots+(z_{2n-3}-x_n)^2+z_{2n-2}^2}$. Интегрирование в I производится по $(2n-2)$-м переменным.

Рассмотрим часть сферы в пространстве размерности $2n-1$ точек $(z_1,\ldots,z_{2n-2},\xi)$ с центром в начале координат радиуса y_1:

$$|\widetilde{z}|^2+\xi^2=y_1^2,\quad z_{2i-1}\in\mathbb{R},\quad z_{2i}\in\mathbb{R}_+,\quad i=1,\ldots,n-1,\qquad \xi\geqslant 0.$$

Проекция этой части сферы на плоскость $\xi=0$ и элемент поверхности имеют, соответственно, вид $|\widetilde{z}|\leqslant y_1$ и $dS=\dfrac{y_1}{\xi}dz$; следовательно, интеграл по $|\widetilde{z}|<y_1$ можно переписать в виде

$$I=C(\gamma')\int\limits_{\{|\widetilde{z}|<y_1\}^+}{}^{\gamma_1}T^{y_1}_{x_1}f(x_1,\sqrt{z_1^2+z_2^2},\ldots,\sqrt{z_{2n-3}^2+z_{2n-2}^2})(y_1^2-|\widetilde{z}|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\prod_{i=1}^{n-1}z_{2i}^{\gamma_i-1}\frac{\xi}{y_1}\frac{y_1}{\xi}dz=$$

$$=C(\gamma')\int\limits_{\{|\widetilde{z}|^2+\xi^2=y_1^2\}^+}{}^{\gamma_1}T^{y_1}_{x_1}f\left(x_1,\sqrt{z_1^2+z_2^2},\ldots,\sqrt{z_{2n-3}^2+z_{2n-2}^2}\right)\frac{\xi^{\alpha-n-|\gamma|+1}}{y_1}\prod_{i=1}^{n-1}z_{2i}^{\gamma_i-1}dS.$$

Используя полученное представление для I, запишем $(I^\alpha_{\square_\gamma}f)(x)$ в виде

$$(I^\alpha_{\square_\gamma}f)(x)=C(\gamma')\int\limits_0^\infty(y_1)^{\gamma_1-1}dy_1\times$$

$$\times\int\limits_{\{|\widetilde{z}|^2+\xi^2=y_1^2\}^+}{}^{\gamma_1}T^{y_1}_{x_1}f\left(x_1,\sqrt{z_1^2+z_2^2},\ldots,\sqrt{z_{2n-3}^2+z_{2n-2}^2}\right)\xi^{\alpha-n-|\gamma|+1}\prod_{i=1}^{n-1}z_{2i}^{\gamma_i-1}dS=$$

$$=C(\gamma')\int\limits_0^\infty(y_1)^{\gamma_1-1}dy_1\int\limits_{\{|z|^2+\xi^2=y_1^2\}^+}\xi^{\alpha-n-|\gamma|+1}\times$$

$$\times{}^{\gamma_1}T^{y_1}_{x_1}f\left(x_1,\sqrt{(z_1+x_2)^2+z_2^2},\ldots,\sqrt{(z_{2n-3}-x_n)^2+z_{2n-2}^2}\right)\prod_{i=1}^{n-1}z_{2i}^{\gamma_i-1}dS=$$

$$=C(\gamma')\int\limits_{\mathbb{R}^{2n-1}_+}{}^{\gamma_1}T^{\sqrt{|z|^2+\xi^2}}_{x_1}f\left(x_1,\sqrt{(z_1+x_2)^2+z_2^2},\ldots,\sqrt{(z_{2n-3}-x_n)^2+z_{2n-2}^2}\right)\times$$

$$\times(|z|^2+\xi^2)^{\frac{\gamma_1-1}{2}}\xi^{\alpha-n-|\gamma|+1}\prod_{i=1}^{n-1}z_{2i}^{\gamma_i-1}dzd\xi. \tag{11.19}$$

Вернемся к переменным y по формулам (11.18), получим

$$(I^{\alpha}_{\square_\gamma}f)(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}(|y'|^2+\xi^2)^{\frac{\gamma_1-1}{2}}\,({}^{\gamma_1}T_{x_1}^{\sqrt{|y'|^2+\xi^2}}\,{}^{\gamma'}\mathbf{T}^{y'}_{x'}f)(x)\xi^{\alpha-n-|\gamma|+1}(y')^{\gamma'}dy'd\xi.$$

Переобозначив переменную интегрирования ξ через y_1, будем иметь (11.17). $\square$

Как отмечено, для $f\in S_{ev}$ интеграл $I^{\alpha}_{\square_\gamma}f$ сходится абсолютно при $n+|\gamma|-2<\alpha$. Продолжим $I^{\alpha}_{\square_\gamma}f$ на множество $n+|\gamma|-4<\alpha$.

Теорема 11.2. *Пусть $f\in S_{ev}$. При $n+|\gamma|-4<\alpha$ и $n>3$ справедлива формула для $I^{\alpha}_{\square_\gamma}f$ вида*

$$(I^{\alpha}_{\square_\gamma}f)(x)=\frac{(n-3)C(\gamma')}{(\alpha-n-|\gamma|+3)}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}_+}(z')^{\gamma'-1}dz'\int\limits_0^\infty(\rho^2+|z'|^2)^{\frac{\gamma_1-1}{2}}\rho^{\alpha-|\gamma|}d\rho\times$$

$$\times\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{\alpha-n-|\gamma|+3}\varphi_1\sin\varphi_1\varphi_1d\varphi_1\int\limits_0^{\pi}\ldots\int\limits_0^{\pi}\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}d\varphi_2\ldots d\varphi_{n-2}\times$$

$$\times\int\limits_0^{2\pi}[\sin^{n-5}\varphi_1\mathscr{F}+\sin^{n-4}\varphi_1G(\rho,\varphi)]d\varphi_{n-1},\tag{11.20}$$

где

$$\mathscr{F}={}^{\gamma_1}T_{x_1}^{\sqrt{\rho^2+|z'|^2}}f\left(x_1,\sqrt{(\rho\sigma_2+x_2)^2+z_2^2},\ldots,\sqrt{(\rho\sigma_n+x_n)^2+z_{2n-2}^2}\right),$$

$$G(\rho,\varphi)=\rho\left(\mathscr{F}'_2\frac{\rho\sigma_2+x_2}{\sqrt{(\rho\sigma_2+x_2)^2+z_2^2}}\cos\varphi_2+\ldots+\mathscr{F}'_n\frac{\rho\sigma_n+x_n}{\sqrt{(\rho\sigma_n+x_n)^2+z_4^2}}\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}\right),$$

$\mathscr{F}'_2,\ldots,\mathscr{F}'_n$ — производные от $\mathscr{F}$, взятые по указанному в индексе аргументу.

Доказательство. Рассмотрим представление $(I^{\alpha}_{\square_\gamma}f)(x)$ вида (11.19) из леммы 11.17 и произведем в нем переход к сферическим координатам только по ξ и z_{2i-1}, $i=1,\ldots,n-1$ по формулам

$$\xi_1=\rho\cos\varphi_1,$$
$$z_1=\rho\sin\varphi_1\cos\varphi_2=\rho\sigma_2,$$
$$z_3=\rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3=\rho\sigma_3,$$
$$\ldots$$
$$z_{2n-5}=\rho\sin\varphi_1\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}=\rho\sigma_{n-1},$$
$$z_{2n-3}=\rho\sin\varphi_1\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}=\rho\sigma_n,$$

где $\rho=\sqrt{\xi^2+z_1^2+\ldots+z_{2n-3}^2}>0$, $0<\varphi_1<\pi/2$, $0<\varphi_2<\pi$,$\ldots$,$0<\varphi_{n-2}<\pi$, $0<\varphi_{n-1}<2\pi$. Якобиан такой замены имеет вид

$$\mathcal{J}=\rho^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}.$$

Обозначив $z'=(z_2,\ldots,z_{2n-2})$, $\gamma'=(\gamma_2,\ldots,\gamma_n)$, $(z')^{\gamma'-1}=\prod\limits_{i=1}^{n-1}z_{2i}^{\gamma_{i+1}-1}$, $|z'|=z_2^2+\ldots+z_{2n-2}^2$, получим $|z|^2+\xi^2=\rho^2+|z'|^2$ и

$$(I^{\alpha}_{\square_\gamma}f)(x)=C(\gamma')\int\limits_{\mathbb{R}^{2n-1}_+}(|z|^2+\xi^2)^{\frac{\gamma_1-1}{2}}\,{}^{\gamma_1}T_{x_1}^{\sqrt{|z|^2+\xi^2}}f\left(x_1,\sqrt{z_1^2+z_2^2},\ldots,\sqrt{z_{2n-3}^2+z_{2n-2}^2}\right)\times$$

$$\times\xi^{\alpha-n-|\gamma|+1}\prod_{i=1}^{n-1}z_{2i}^{\gamma_i-1}dzd\xi=C(\gamma')\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}_+}(z')^{\gamma'-1}dz'\int\limits_0^\infty(\rho^2+|z'|^2)^{\frac{\gamma_1-1}{2}}\rho^{\alpha-|\gamma|}d\rho\times$$

$$\times\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{\alpha-n-|\gamma|+1}\varphi_1\sin^{n-2}\varphi_1\varphi_1 d\varphi_1\int\limits_0^{\pi}\ldots\int\limits_0^{\pi}\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}d\varphi_2\ldots d\varphi_{n-2}\int\limits_0^{2\pi}\mathscr{F}d\varphi_{n-1},$$

где

$$\mathscr{F}={}^{\gamma_1}T_{x_1}^{\sqrt{\rho^2+|z'|^2}}f\left(x_1,\sqrt{(\rho\sigma_2+x_2)^2+z_2^2},\ldots,\sqrt{(\rho\sigma_n+x_n)^2+z_{2n-2}^2}\right).$$

Проинтегрируем интеграл $\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{\alpha-n-|\gamma|+1}\varphi_1\sin^{n-2}\varphi_1\mathscr{F}d\varphi_1$ по φ_1 по частям, положив

$$dv=\cos^{\alpha-n-|\gamma|+1}\varphi_1\sin\varphi_1 d\varphi_1,\qquad v=-\frac{\cos^{\alpha-n-|\gamma|+2}\varphi_1}{\alpha-n-|\gamma|+2},$$

$$u=\sin^{n-3}\varphi_1\mathscr{F},\qquad du=\frac{\partial}{\partial\varphi_1}(\sin^{n-3}\varphi_1\mathscr{F})d\varphi_1;$$

при $n>3$, $n+|\gamma|-2<\alpha$ получим

$$\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{\alpha-n-|\gamma|+1}\varphi_1\sin^{n-2}\varphi_1\mathscr{F}d\varphi_1=\left(-\frac{\cos^{\alpha-n-|\gamma|+2}\varphi_1}{\alpha-n-|\gamma|+2}\sin^{n-3}\varphi_1\mathscr{F}\right)\Bigg|_{\varphi_1=0}^{\pi/2}+$$

$$+\frac{1}{\alpha-n-|\gamma|+2}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{\alpha-n-|\gamma|+2}\varphi_1\frac{\partial}{\partial\varphi_1}(\sin^{n-3}\varphi_1\mathscr{F})d\varphi_1=$$

$$=\frac{1}{\alpha-n-|\gamma|+2}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{\alpha-n-|\gamma|+2}\varphi_1\frac{\partial}{\partial\varphi_1}(\sin^{n-3}\varphi_1\mathscr{F})d\varphi_1.$$

Полученный интеграл сходится уже при $n+|\gamma|-4<\alpha$, поскольку

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_1}(\sin^{n-3}\varphi_1\mathscr{F})d=(n-3)[\sin^{n-4}\varphi_1\cos\varphi_1\mathscr{F}+\sin^{n-3}\varphi_1\mathscr{F}'_{\varphi_1}]=$$

$$=(n-3)\sin\varphi_1[\sin^{n-5}\varphi_1\cos\varphi_1\mathscr{F}+\sin^{n-4}\varphi_1\mathscr{F}'_{\varphi_1}]=$$

$$=(n-3)\sin\varphi_1\cos\varphi_1[\sin^{n-5}\varphi_1\mathscr{F}+\sin^{n-4}\varphi_1 G(\rho,\varphi)],$$

где

$$\mathscr{F}'_{\varphi_1}=G(\rho,\varphi)\cos\varphi_1,$$

$$G(\rho,\varphi)=\rho\left(\mathscr{F}'_2\frac{\rho\sigma_2+x_2}{\sqrt{(\rho\sigma_2+x_2)^2+z_2^2}}\cos\varphi_2+\ldots+\mathscr{F}'_n\frac{\rho\sigma_n+x_n}{\sqrt{(\rho\sigma_n+x_n)^2+z_4^2}}\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}\right)$$

и

$$\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{\alpha-n-|\gamma|+1}\varphi_1\sin^{n-2}\varphi_1\mathscr{F}d\varphi_1=$$

$$=\frac{n-3}{\alpha-n-|\gamma|+3}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{\alpha-n-|\gamma|+3}\varphi_1\sin\varphi_1[\sin^{n-5}\varphi_1\mathscr{F}+\sin^{n-4}\varphi_1 G(\rho,\varphi)]d\varphi_1.$$

Таким образом, при $n+|\gamma|-4<\alpha$ и $n>3$ справедлива формула аналитического продолжения

$$(I^\alpha_{\square_\gamma}f)(x)=\frac{(n-3)C(\gamma')}{(\alpha-n-|\gamma|+3)H(\alpha,n,\gamma)}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}_+}(z')^{\gamma'-1}dz'\int\limits_0^\infty(\rho^2+|z'|^2)^{\frac{\gamma_1-1}{2}}\rho^{\alpha-|\gamma|}d\rho\times$$

$$\times\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{\alpha-n-|\gamma|+3}\varphi_1\sin\varphi_1\varphi_1 d\varphi_1\int\limits_0^{\pi}\ldots\int\limits_0^{\pi}\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}d\varphi_2\ldots d\varphi_{n-2}\times$$

$$\times\int\limits_0^{2\pi}[\sin^{n-5}\varphi_1\mathscr{F}+\sin^{n-4}\varphi_1 G(\rho,\varphi)]d\varphi_{n-1}.$$

$\square$

Аналогично (11.20) можно получить формулу аналитического продолжения для $n+|\gamma|-6<\alpha$ и $n>4$ и т. д. Ввиду важности случая $n=3$ и того, что он не попадает в рамки теоремы 11.2, построим аналитическое продолжение для случая $n=3$ отдельно в теореме 11.3.

Теорема 11.3. *Пусть $f\in S_{ev}$, $n=3$. Для $I^\alpha_{\square_\gamma}f$ справедлива формула при $\alpha>|\gamma|-1$ вида*

$$(I^\alpha_{\square_\gamma}f)(x)=\int\limits_{K^+}r^{\alpha-3-|\gamma|}(y)({}^\gamma\mathbf{T}^y_x f)(x)y^\gamma dy=\frac{C(\gamma')}{\alpha-1-|\gamma|}\left(2\pi\int\limits_{\mathbb{R}^2_+}z_2^{\gamma_2-1}z_4^{\gamma_3-1}dz_2dz_4\times\right.$$

$$\times\int\limits_0^\infty {}^{\gamma_1}T_{x_1}^{\sqrt{r^2+z_2^2+z_4^2}}f\left(x_1,\sqrt{x_2^2+z_2^2},\sqrt{x_3^2+z_4^2}\right)(r^2+z_2^2+z_4^2)^{\frac{\gamma_1-1}{2}}r^{\alpha-|\gamma|}dr+$$

$$\left.+\int\limits_{\mathbb{R}^2_+}z_2^{\gamma_2-1}z_4^{\gamma_3-1}dz_2dz_4\int\limits_0^\infty(r^2+z_2^2+z_4^2)^{\frac{\gamma_1-1}{2}}r^{\alpha-|\gamma|+1}dr\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{\alpha-|\gamma|}\theta F(r,\theta,\varphi)d\theta\right),\qquad(11.21)$$

где

$$F(r,\theta,\varphi)=\widetilde{f}'_2\frac{r\sin\theta\cos\varphi+x_2}{\sqrt{(r\sin\theta\cos\varphi+x_2)^2+z_2^2}}\cos\varphi+\widetilde{f}'_3\frac{r\sin\theta\sin\varphi+x_3}{\sqrt{(r\sin\theta\sin\varphi+x_3)^2+z_4^2}}\sin\varphi.$$

Доказательство. В случае $n=3$ имеем $K^+=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3_+:x_2^2+x_2^2<x_1^2\}$ и, используя лемму 11.1, запишем

$$(I^\alpha_{\square_\gamma}f)(x)=\int\limits_{K^+}r^{\alpha-3-|\gamma|}(y)({}^\gamma\mathbf{T}^y_x f)(x)y^\gamma dy=\int\limits_{\mathbb{R}^3_+}|y|^{\gamma_1-1}\,({}^{\gamma_1}T^{|y|}_{x_1}\,{}^{\gamma'}\mathbf{T}^{y'}_{x'}f)(x)y_1^{\alpha-2-|\gamma|}(y')^{\gamma'}dy=$$

$$=C(\gamma')\int\limits_{\mathbb{R}^3_+}|y|^{\gamma_1-1}y_1^{\alpha-2-|\gamma|}(y')^{\gamma'}dy\times$$

$$\times\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi{}^{\gamma_1}T^{|y|}_{x_1}f(x_1,\sqrt{(y_2\cos\varphi_2+x_2)^2+y_2^2\sin^2\varphi_2},\sqrt{(y_3\cos\varphi_3+x_3)^2+y_3^2\sin^3\varphi_3})\times$$

$$\times\sin^{\gamma_2-1}\varphi_2\sin^{\gamma_3-1}\varphi_3\,d\varphi_2d\varphi_3.$$

Произведем замену $y_2\cos\varphi_2=z_1$, $y_2\sin\varphi_2=z_2$, $y_3\cos\varphi_3=z_3$, $y_3\sin\varphi_3=z_4$:

$$\int\limits_{K^+}r^{\alpha-3-|\gamma|}(y)({}^\gamma\mathbf{T}^y_x f)(x)y^\gamma dy=C(\gamma')\int\limits_{\mathbb{R}^5_+}(y_1^2+|z|^2)^{\frac{\gamma_1-1}{2}}y_1^{\alpha-2-|\gamma|}\times$$

$$\times{}^{\gamma_1}T_{x_1}^{\sqrt{y_1^2+|z|^2}}f(x_1,\sqrt{(z_1+x_2)^2+z_2^2},\sqrt{(z_3+x_3)^2+z_4^2})z_2^{\gamma_2-1}z_4^{\gamma_3-1}dy_1dz.$$

Перейдем к сферическим координатам:

$$y_1=r\cos\theta,\quad 0<\theta<\pi/2,\quad z_1=r\sin\theta\cos\varphi,\quad 0<\varphi<2\pi,\quad z_3=r\sin\theta\sin\varphi;$$

$$(I^\alpha_{\square_\gamma}f)(x)=\int\limits_{K^+}r^{\alpha-3-|\gamma|}(y)({}^\gamma\mathbf{T}^y_x f)(x)y^\gamma dy=$$

$$=C(\gamma')\int\limits_{\mathbb{R}^2_+}z_2^{\gamma_2-1}z_4^{\gamma_3-1}dz_2dz_4\int\limits_0^\infty(r^2+z_2^2+z_4^2)^{\frac{\gamma_1-1}{2}}r^{\alpha-|\gamma|}dr\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\widetilde{f}\cos^{\alpha-2-|\gamma|}\theta\sin\theta d\theta,$$

где

$$\widetilde{f}={}^{\gamma_1}T_{x_1}^{\sqrt{r^2+z_2^2+z_4^2}}f\left(x_1,\sqrt{(r\sin\theta\cos\varphi+x_2)^2+z_2^2},\sqrt{(r\sin\theta\sin\varphi+x_3)^2+z_4^2}\right).$$

Проинтегрируем интеграл по θ по частям:

$$\int\limits_0^{\pi/2}\widetilde{f}\cos^{\alpha-2-|\gamma|}\theta\sin\theta d\theta=$$

$$=\{dv=\cos^{\alpha-2-|\gamma|}\theta\sin\theta d\theta, v=-\frac{\cos^{\alpha-1-|\gamma|}\theta}{\alpha-1-|\gamma|}, u=\widetilde{f}, du=\widetilde{f}'_\theta d\theta\}=$$

$$=\left(-\frac{\cos^{\alpha-1-|\gamma|}\theta}{\alpha-1-|\gamma|}\widetilde{f}\right)_{\theta=0}^{\pi/2}+\frac{1}{\alpha-1-|\gamma|}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{\alpha-1-|\gamma|}\theta\widetilde{f}'_\theta d\theta=$$

$$=\frac{1}{\alpha-1-|\gamma|}\left({}^{\gamma_1}T_{x_1}^{\sqrt{r^2+z_2^2+z_4^2}}f\left(x_1,\sqrt{x_2^2+z_2^2},\sqrt{x_3^2+z_4^2}\right)+\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{\alpha-1-|\gamma|}\theta\widetilde{f}'_\theta d\theta\right).$$

Тогда

$$(I^\alpha_{\square_\gamma}f)(x)=\int\limits_{K^+}r^{\alpha-3-|\gamma|}(y)({}^\gamma\mathbf{T}^y_xf)(x)y^\gamma dy=\frac{C(\gamma')}{\alpha-1-|\gamma|}\left(2\pi\int\limits_{\mathbb{R}^2_+}z_2^{\gamma_2-1}z_4^{\gamma_3-1}dz_2dz_4\times\right.$$

$$\times\int\limits_0^\infty{}^{\gamma_1}T_{x_1}^{\sqrt{r^2+z_2^2+z_4^2}}f\left(x_1,\sqrt{x_2^2+z_2^2},\sqrt{x_3^2+z_4^2}\right)(r^2+z_2^2+z_4^2)^{\frac{\gamma_1-1}{2}}r^{\alpha-|\gamma|}dr+$$

$$\left.+\int\limits_{\mathbb{R}^2_+}z_2^{\gamma_2-1}z_4^{\gamma_3-1}dz_2dz_4\int\limits_0^R(r^2+z_2^2+z_4^2)^{\frac{\gamma_1-1}{2}}r^{\alpha-|\gamma|}dr\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{\alpha-1-|\gamma|}\theta_1\widetilde{f}'_\theta d\theta\right).$$

Найдем $\widetilde{f}'_\theta$:

$$\widetilde{f}'_\theta=\left(\widetilde{f}'_2\frac{r\sin\theta\cos\varphi+x_2}{\sqrt{(r\sin\theta\cos\varphi+x_2)^2+z_2^2}}\cos\varphi+\widetilde{f}'_3\frac{r\sin\theta\sin\varphi+x_3}{\sqrt{(r\sin\theta\sin\varphi+x_3)^2+z_4^2}}\sin\varphi\right)r\cos\theta=$$

$$=F(r,\theta,\varphi)r\cos\theta,$$

где

$$F(r,\theta,\varphi)=\widetilde{f}'_2\frac{r\sin\theta\cos\varphi+x_2}{\sqrt{(r\sin\theta\cos\varphi+x_2)^2+z_2^2}}\cos\varphi+\widetilde{f}'_3\frac{r\sin\theta\sin\varphi+x_3}{\sqrt{(r\sin\theta\sin\varphi+x_3)^2+z_4^2}}\sin\varphi.$$

Имеем

$$(I^\alpha_{\square_\gamma}f)(x)=\int\limits_{K^+}r^{\alpha-3-|\gamma|}(y)({}^\gamma\mathbf{T}^y_xf)(x)y^\gamma dy=\frac{C(\gamma')}{\alpha-1-|\gamma|}\left(2\pi\int\limits_{\mathbb{R}^2_+}z_2^{\gamma_2-1}z_4^{\gamma_3-1}dz_2dz_4\times\right.$$

$$\times\int\limits_0^\infty{}^{\gamma_1}T_{x_1}^{\sqrt{r^2+z_2^2+z_4^2}}f\left(x_1,\sqrt{x_2^2+z_2^2},\sqrt{x_3^2+z_4^2}\right)(r^2+z_2^2+z_4^2)^{\frac{\gamma_1-1}{2}}r^{\alpha-|\gamma|}dr+$$

$$\left.+\int\limits_{\mathbb{R}^2_+}z_2^{\gamma_2-1}z_4^{\gamma_3-1}dz_2dz_4\int\limits_0^\infty(r^2+z_2^2+z_4^2)^{\frac{\gamma_1-1}{2}}r^{\alpha-|\gamma|+1}dr\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{\alpha-|\gamma|}\theta F(r,\theta,\varphi)d\theta\right).$$

Полученные интегралы сходятся при $\alpha>|\gamma|-1$. Доказательство закончено.

$\square$

11.4. Примеры гиперболических B-потенциалов Рисса.

Пример 11.1. Пусть $f(x)=\varphi(x_1)$. Тогда, используя (11.2) и перестановочность обобщенного сдвига, получим

$$(I^\alpha_{\Box_\gamma}\varphi(y_1))(x)=\frac{1}{\mathscr{H}_{n,\gamma}(\alpha)}\int\limits_0^\infty ({}^{\gamma_1}T^{y_1}_{x_1}\varphi)(x_1)y_1^{\alpha-1}dy_1\int\limits_{|z'|<1}(1-|z'|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}(z')^{\gamma'}dz'=$$

$$=\frac{1}{\mathscr{H}_{n,\gamma}(\alpha)}\int\limits_0^\infty \varphi(y_1)({}^{\gamma_1}T^{y_1}_{x_1}x_1^{\alpha-\gamma_1-1})y_1^{\gamma_1}dy_1\int\limits_{|z'|<1}(1-|z'|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}(z')^{\gamma'}dz'.$$

Используя формулу (3.14), представляющую обобщенный сдвиг от степенной функции, получим

$$({}^{\gamma_1}T^{y_1}_{x_1}x_1^{\alpha-\gamma_1-1})=\begin{cases} x_1^{\alpha-\gamma_1-1}\,{}_2F_1\left(\dfrac{\gamma_1+1-\alpha}{2},1-\dfrac{\alpha}{2},\dfrac{\gamma_1+1}{2};\dfrac{y_1^2}{x_1^2}\right), & x_1\geqslant y_1;\\ y_1^{\alpha-\gamma_1-1}\,{}_2F_1\left(\dfrac{\gamma_1+1-\alpha}{2},1-\dfrac{\alpha}{2},\dfrac{\gamma_1+1}{2};\dfrac{x_1^2}{y_1^2}\right), & x_1<y_1\end{cases}$$

и

$$(I^\alpha_{\Box_\gamma}\varphi(y_1))(x)=\frac{1}{\mathscr{H}_{n,\gamma}(\alpha)}\left(x_1^{\alpha-\gamma_1-1}\int\limits_0^{x_1}{}_2F_1\left(\frac{\gamma_1+1-\alpha}{2},1-\frac{\alpha}{2},\frac{\gamma_1+1}{2};\frac{y_1^2}{x_1^2}\right)\varphi(y_1)y_1^{2\gamma_1-\alpha+1}dy_1\times\right.$$

$$\times\int\limits_{|y'|<y_1}(y_1^2-|y'|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}(y')^{\gamma'}dy'+$$

$$\left.+\int\limits_{x_1}^\infty{}_2F_1\left(\frac{\gamma_1+1-\alpha}{2},1-\frac{\alpha}{2},\frac{\gamma_1+1}{2};\frac{x_1^2}{y_1^2}\right)\varphi(y_1)y_1^{\gamma_1}dy_1\int\limits_{|y'|<y_1}(y_1^2-|y'|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}(y')^{\gamma'}dy'\right)=$$

$$=\frac{1}{\mathscr{H}_{n,\gamma}(\alpha)}\left(x_1^{\alpha-\gamma_1-1}\int\limits_0^{x_1}{}_2F_1\left(\frac{\gamma_1+1-\alpha}{2},1-\frac{\alpha}{2},\frac{\gamma_1+1}{2};\frac{y_1^2}{x_1^2}\right)\varphi(y_1)y_1^{\gamma_1}dy_1\times\right.$$

$$\times\int\limits_{|y'|<1}(1-|y'|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}(y')^{\gamma'}dy'+$$

$$\left.+\int\limits_{x_1}^\infty{}_2F_1\left(\frac{\gamma_1+1-\alpha}{2},1-\frac{\alpha}{2},\frac{\gamma_1+1}{2};\frac{x_1^2}{y_1^2}\right)\varphi(y_1)y_1^{\alpha-1}dy_1\int\limits_{|y'|<1}(1-|y'|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}(y')^{\gamma'}dy'\right).$$

Рассмотрим

$$\int\limits_{|y'|<1}(1-|y'|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}(y')^{\gamma'}dy'=\{y'=\rho\theta\}=\int\limits_0^1(1-\rho^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}\rho^{n+|\gamma'|-2}d\rho\int\limits_{S_1^+(n-1)}\theta^{\gamma'}dS=$$

$$=\{\rho^2=r\}=\frac{1}{2}\int\limits_0^1(1-r)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}r^{\frac{n+|\gamma'|-1}{2}-1}dr\int\limits_{S_1^+(n-1)}\theta^{\gamma'}dS=$$

$$=\frac{1}{2}|S_1^+(n-1)|_{\gamma'}B\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+1,\frac{n+|\gamma'|-1}{2}\right)=\mathscr{C}(\alpha,n,\gamma),$$

тогда

$$(I^\alpha_{\Box_\gamma}\varphi)(x_1)=\frac{\mathscr{C}(\alpha,n,\gamma)}{\mathscr{H}_{n,\gamma}(\alpha)}\left(x_1^{\alpha-\gamma_1-1}\int\limits_0^{x_1}{}_2F_1\left(\frac{\gamma_1+1-\alpha}{2},1-\frac{\alpha}{2},\frac{\gamma_1+1}{2};\frac{y_1^2}{x_1^2}\right)\varphi(y_1)y_1^{\gamma_1}dy_1+\right.$$

$$+\int\limits_{x_1}^{\infty} {}_2F_1\left(\frac{\gamma_1+1-\alpha}{2}, 1-\frac{\alpha}{2}, \frac{\gamma_1+1}{2}; \frac{x_1^2}{y_1^2}\right)\varphi(y_1)y_1^{\alpha-1}dy_1\Biggr).$$

Найдем $\dfrac{\mathscr{C}(\alpha,n,\gamma)}{\mathscr{H}_{n,\gamma}(\alpha)}$:

$$\frac{\mathscr{C}(\alpha,n,\gamma)}{\mathscr{H}_{n,\gamma}(\alpha)}=\frac{1}{2}\frac{\prod\limits_{i=2}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-2}\Gamma\left(\frac{n-1+|\gamma'|}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha-\gamma_1+1}{2}\right)}\times$$

$$\times\frac{\pi 2^{n-\alpha}}{\sin\left(\frac{\gamma_1+1}{2}\pi\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}+1\right)}=\frac{\pi 2^{1-\alpha}}{\sin\left(\frac{\gamma_1+1}{2}\pi\right)\Gamma\left(\frac{\gamma_1+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-\gamma_1+1}{2}\right)}.$$

При $\alpha=2$, используя формулу дополнения Эйлера (1.6), получим

$$\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\gamma_1+1}{2}\pi\right)\Gamma\left(\frac{\gamma_1+1}{2}\right)}=\Gamma\left(\frac{1-\gamma_1}{2}\right),\qquad \frac{\mathscr{C}(2,n,\gamma)}{\mathscr{H}_{n,\gamma}(2)}=\frac{\Gamma\left(\frac{1-\gamma_1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{3-\gamma_1}{2}\right)}=\frac{1}{1-\gamma_1}.$$

Для $\varphi(x_1)=x_1^{\beta}$ имеем

$$I^{\alpha}_{\square_\gamma}x_1^{\beta}=\frac{\mathscr{C}(\alpha,n,\gamma)}{\mathscr{H}_{n,\gamma}(\alpha)}\Biggl(x_1^{\alpha-\gamma_1-1}\int\limits_0^{x_1} {}_2F_1\left(\frac{\gamma_1+1-\alpha}{2}, 1-\frac{\alpha}{2}, \frac{\gamma_1+1}{2}; \frac{y_1^2}{x_1^2}\right)y_1^{\gamma_1+\beta}dy_1+$$

$$+\int\limits_{x_1}^{\infty} {}_2F_1\left(\frac{\gamma_1+1-\alpha}{2}, 1-\frac{\alpha}{2}, \frac{\gamma_1+1}{2}; \frac{x_1^2}{y_1^2}\right)y_1^{\alpha+\beta-1}dy_1\Biggr).$$

Рассмотрим первый интеграл:

$$\int\limits_0^{x_1} {}_2F_1\left(\frac{\gamma_1+1-\alpha}{2}, 1-\frac{\alpha}{2}, \frac{\gamma_1+1}{2}; \frac{y_1^2}{x_1^2}\right)y_1^{\gamma_1+\beta}dy_1=\left\{\frac{y_1^2}{x_1^2}=t\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}x_1^{\beta+\gamma_1+1}\int\limits_0^1 {}_2F_1\left(\frac{\gamma_1+1-\alpha}{2}, 1-\frac{\alpha}{2}, \frac{\gamma_1+1}{2}; t\right)t^{\frac{\gamma_1+\beta-1}{2}}dt=$$

$$=\frac{x_1^{\beta+\gamma_1+1}}{\gamma_1+\beta+1}\,{}_3F_2\left(1-\frac{\alpha}{2}, \frac{1-\alpha+\gamma_1}{2}, \frac{1+\beta+\gamma_1}{2}; \frac{\gamma_1+1}{2}, 1+\frac{\beta+\gamma_1}{2}; 1\right)$$

при $\beta+\gamma_1>-1$, $\alpha>0$.

Рассмотрим второй интеграл:

$$\int\limits_{x_1}^{\infty} {}_2F_1\left(\frac{\gamma_1+1-\alpha}{2}, 1-\frac{\alpha}{2}, \frac{\gamma_1+1}{2}; \frac{x_1^2}{y_1^2}\right)y_1^{\alpha+\beta-1}dy_1=\left\{\frac{x_1^2}{y_1^2}=t\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}x_1^{\alpha+\beta}\int\limits_0^1 {}_2F_1\left(\frac{\gamma_1+1-\alpha}{2}, 1-\frac{\alpha}{2}, \frac{\gamma_1+1}{2}; t\right)t^{-\frac{\alpha+\beta}{2}-1}dt=$$

$$=-\frac{1}{\alpha+\beta}x_1^{\alpha+\beta}\,{}_3F_2\left(1-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{1+\gamma_1-\alpha}{2}; \frac{\gamma_1+1}{2}, 1-\frac{\alpha+\beta}{2}; 1\right)$$

при $\alpha+\beta<0$, $\alpha>0$.

Тогда при $-\gamma_1-1<\beta<-\alpha$, $\alpha>0$ имеем

$$I^{\alpha}_{\square_\gamma}x_1^{\beta}=\frac{\mathscr{C}(\alpha,n,\gamma)}{\mathscr{H}_{n,\gamma}(\alpha)}\left(\frac{x_1^{\alpha+\beta}}{\gamma_1+\beta+1}\,{}_3F_2\left(1-\frac{\alpha}{2}, \frac{1-\alpha+\gamma_1}{2}, \frac{1+\beta+\gamma_1}{2}; \frac{\gamma_1+1}{2}, 1+\frac{\beta+\gamma_1}{2}; 1\right)-\right.$$

$$-\frac{x_1^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}\,{}_3F_2\left(1-\frac{\alpha}{2},-\frac{\alpha+\beta}{2},\frac{1+\gamma_1-\alpha}{2};\frac{\gamma_1+1}{2},1-\frac{\alpha+\beta}{2};1\right)\Bigg).$$

При $\alpha=2$, $-\gamma_1-1<\beta<-2$, учитывая, что $\dfrac{\mathscr{C}(2,n,\gamma)}{\mathscr{H}_{n,\gamma}(2)}=\dfrac{1}{1-\gamma_1}$, получим

$$I^2_{\square_\gamma}x_1^\beta=\frac{\mathscr{C}(2,n,\gamma)}{\mathscr{H}_{n,\gamma}(2)}\left(\frac{x_1^{\beta+2}}{\gamma_1+\beta+1}-\frac{x_1^{2+\beta}}{2+\beta}\right)=$$

$$=\frac{1}{1-\gamma_1}\left(\frac{x_1^{\beta+2}}{\gamma_1+\beta+1}-\frac{x_1^{2+\beta}}{2+\beta}\right)=\frac{x_1^{\beta+2}}{(\beta+2)(\beta+\gamma_1+1)}.$$

Поскольку

$$(B_{\gamma_1})_{x_1}x_1^{\beta+2}=(\beta+2)(\beta+\gamma_1+1)x_1^\beta,$$

то легко видеть, что

$$(B_{\gamma_1})_{x_1}I^2_{\square_\gamma}x_1^\beta=x_1^\beta,\qquad -\gamma_1-1<\beta<-2.$$

Пример 11.2. Учитывая пример 9.1, при $f(x)=\varphi(x_1)\mathbf{j}_{\gamma'}(x',b)\in L_p^\gamma$ имеем

$$(I^\alpha_{\square_\gamma}\varphi(y_1)\mathbf{j}_{\gamma'}(y';b))(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{1-\gamma_1}{2}\right)}{2^{\frac{\alpha+\gamma_1+1}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)|b|^{\frac{\alpha-\gamma_1-1}{2}}\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma\left(m+\frac{\alpha+1-\gamma_1}{2}\right)}\left(\frac{|b|}{2}\right)^{2m+\frac{\alpha-1-\gamma_1}{2}}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty\varphi(y_1)|x_1-y_1|^{2m+\alpha-\gamma_1-1}\,{}_2F_1\left(\frac{\gamma_1}{2},-m+\frac{\gamma_1+1-\alpha}{2};\gamma_1;-\frac{4x_1y_1}{(x_1-y_1)^2}\right)y_1^{\gamma_1}dy_1.\tag{11.22}$$

При $\alpha=2$, $\gamma_1=2$ и $|b|=1$, используя (9.18) и то, что $\Gamma\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-2\pi$, имеем

$$(I^2_{\square_\gamma}\varphi(y_1)\mathbf{j}_{\gamma'}(y';b))(x)=-\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)\frac{1}{2x_1}\int\limits_0^\infty\varphi(y_1)\left(\sin(x_1+y_1)-\sin|x_1-y_1|\right)y_1dy_1.$$

Пусть $\varphi(x_1)=x_1^2e^{-x_1}$, тогда

$$I^2_{\square_\gamma}x_1^2e^{-x_1}\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)=-\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)\frac{1}{2x_1}\int\limits_0^\infty\varphi(y_1)e^{-y_1}\left(\sin(x_1+y_1)-\sin|x_1-y_1|\right)y_1^3dy_1=$$

$$=\frac{1}{2}\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)e^{-x_1}(x_1^2+3x_1+3).$$

Проверим выполнение равенства (11.13):

$$(B_2)_{x_1}\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)e^{-x_1}(x_1^2+3x_1+3)=\frac{1}{2}\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)e^{-x_1}(x_1^2-3x_1-3),$$

$$\Delta_{\gamma'}\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)e^{-x_1}(x_1^2+3x_1+3)=-\frac{1}{2}\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)e^{-x_1}(x_1^2+3x_1+3),$$

$$((B_2)_{x_1}-\Delta_{\gamma'})\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)e^{-x_1}(x_1^2+3x_1+3)=x_1^2e^{-x_1}\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b).$$

Пусть $\varphi(x_1)=x_1^2$ при $0<x_1\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ и $\varphi(x_1)=0$ при $x_1>\dfrac{\pi}{2}$, тогда

$$(I^2_{\square_\gamma}x_1^2\mathbf{j}_{\gamma'}(y';b))(x)=-\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)\frac{1}{2x_1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin(x_1+y_1)-\sin|x_1-y_1|\right)y_1^3dy_1=$$

$$=\left(x_1^2-6+\frac{\pi\sin x_1}{x_1}\left(3-\frac{\pi^2}{8}\right)\right)\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b).$$

Проверим выполнение равенства (11.13):

$$(B_2)_{x_1}\left(x_1^2-6+\frac{\pi\sin x_1}{x_1}\left(3-\frac{\pi^2}{8}\right)\right)\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)=\left(6+\frac{\pi\sin x_1}{x_1}\left(\frac{\pi^2}{8}-3\right)\right)\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b),$$

$$\Delta_{\gamma'}\left(x_1^2-6+\frac{\pi\sin x_1}{x_1}\left(3-\frac{\pi^2}{8}\right)\right)\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)=-\left(x_1^2-6+\frac{\pi\sin x_1}{x_1}\left(3-\frac{\pi^2}{8}\right)\right)\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b),$$

$$((B_2)_{x_1}-\Delta_{\gamma'})\left(x_1^2-6+\frac{\pi\sin x_1}{x_1}\left(3-\frac{\pi^2}{8}\right)\right)\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b)=x_1^2\mathbf{j}_{\gamma'}(x';b).$$

Глава 4

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

В этой главе мы рассмотрим методы решения гиперболических уравнений с оператором Бесселя только целого порядка. О гиперболических уравнениях с оператором Бесселя дробного порядка см. [183].

Уравнения математической физики с операторами Бесселя

$$B_\gamma=D^2+\frac{\gamma}{x}D,\qquad D=\frac{d}{dx},\qquad \gamma\in\mathbb{R} \tag{11.23}$$

относятся к сингулярным уравнениям (см., например, [192]), поскольку коэффициент при D стремится к бесконечности при x, стремящемся к нулю. Оператор B_γ тесно связан с оператором

$$\mathscr{B}_l=D^2+\frac{l}{x^2},\qquad l\in\mathbb{R}, \tag{11.24}$$

а именно, пусть $D^2v+\frac{l}{x^2}v$ и $l=\frac{\gamma}{2}\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)$, тогда при замене $v=x^{\frac{\gamma}{2}}u$ выражение $D^2v+\frac{l}{x^2}v$ перейдет в $x^{\frac{\gamma}{2}}\left(D^2+\frac{\gamma}{x}D\right)u$.

Следуя классификации, введенной И. А. Киприяновым (см. [50, 52, 57, 75]), уравнения с оператором Бесселя вида

$$\sum_{i=1}^n a_i(B_{\gamma_i})_{x_i}u+F(x_1,\cdots,x_n,u)=0,\qquad u=u(x_1,\ldots,x_n),\qquad a_i\in\mathbb{R}, \tag{11.25}$$

называется уравнением *B-эллиптического типа*, если все коэффициенты a_i, $i=1,\ldots,n$ отличны от нуля и одного знака. Если (11.25) имеет коэффициенты различных знаков, но при этом все они отличны от 0, то уравнение (11.25) называется уравнением *B-гиперболического типа*. Если хотя бы один коэффициент a_i, $i=1,\ldots,n$ равен 0, то уравнение (11.25) называется уравнением *B-параболического типа*.

B-гиперболический тип может быть дополнительно классифицирован как:

1. *нормальный B-гиперболический тип*, если один коэффициент одного знака, а остальные другого;
2. *B-ультрагиперболический тип*, если коэффициентов как одного знака, так и другого, больше, чем один.

Начало систематического исследования уравнений B-эллиптического типа было положено в работах [281, 282]. Дальнейшее изучение таких уравнений было продолжено в [48, 55, 55, 62, 111, 286] и др. Среди работ, посвященных уравнениям B-гиперболического типа, отметим [166, 171, 173, 174]. К таким уравнениям относятся и уравнения типа Эйлера—Пуассона—Дарбу [188, 189, 210, 283–285], включая абстрактные [18, 20, 22–24]. B-параболические уравнения рассматривались в [36, 37, 111] и др. Сингулярные функционально-дифференциальные B-параболические уравнения были рассмотрены в [113, 247, 248] с применением методов [164, 165].

Первыми книгами, посвященными уравнениям B-эллиптического, B-гиперболического и B-параболического типов, были, соответственно, [57], [192] и [110].

Особый интерес представляют обратные задачи спектрального анализа для уравнений с возмущенным оператором Бесселя (11.24) вида

$$[\mathscr{B}_l - q(x)]u = -\lambda u, \tag{11.26}$$

где $q(x)$ — суммируемая с некоторым весом на конечном интервале функция, λ — спектральный параметр. Некоторые задачи спектральной теории для уравнения (11.26) решены в [13, 167, 168].

В [190, 193, 232–241] новый продуктивный подход, основанный на применении операторов преобразования в теории рядов, применен к решению уравнения (11.26), но в силу своей универсальности может быть применен и к широкому классу дифференциальных уравнений.

В этой главе рассмотрены следующие методы решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных с оператором (11.23):

1. использование весовых обобщенных функций, порожденных символом линейного дифференциального оператора;
2. метод спуска (применение теоремы о среднем значении);
3. метод операторов преобразования;
4. метод преобразований Ханкеля;
5. метод потенциалов Рисса.

Применение аппарата обобщенных функций к нахождению фундаментальных решений линейных уравнений в частных производных и решению задач Коши для таких уравнений разработано в [15, 16, 261]. В связи с потребностями теоретической и математической физики и теории дифференциальных уравнений вводятся различные обобщения этого аппарата. Одним из таких обобщений являются изученные в главе 2 весовые обобщенные функции, связанные с квадратичной формой. Метод применения весовых обобщенных функций к отысканию фундаментальных решений линейного дифференциального оператора состоит в том, что вместо этого оператора рассматривается соответствующая ему весовая обобщенная функция. Находятся особые точки этой функции, и в них вычисляются вычеты. Из формул для вычетов следуют формулы для фундаментального решения. В разделе 12.1 этой главы применением формул для вычетов (см. пункт 5.2) получены фундаментальные решения итерированного B-ультрагиперболического уравнения. Частично эти результаты были опубликованы в [181, 264].

Метод спуска состоит в применении теоремы о среднем значении типа теоремы Асгейрссона к нахождению решения задачи Коши. Этот метод приведен в [86, с. 475], [219, с. 318], и [220, I, с. 183], где он применен к нахождению решения задачи Коши волнового уравнения. Метод спуска заключается в следующем. Если для решения уравнения, обобщающего ультрагиперболическое (в нашем случае, B-ультрагиперболическое) уравнение, доказана теорема о равенстве средних значений типа теоремы Асгейрссона, то можно получить решение задачи Коши для уравнения, обобщающего гиперболическое (в нашем случае, B-гиперболическое) уравнение. Для этого вводятся фиктивные переменные так, чтобы рассматриваемое уравнение гиперболического типа превратилось в уравнение ультрагиперболического типа, затем выписывается равенство для средних с учетом начального условия, и, наконец, применением соответствующего обратного оператора (в нашем случае дробной производной Римана—Лиувилля) находится искомое решение. В разделе 12.2 мы распространим теорему Асгейрссона о среднем значении на случай B-ультрагиперболического уравнения и применим ее к решению задачи Коши для общего уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу, используя дробные производные Римана—Лиувилля. Эти результаты приведены в [104, 105].

Метод операторов преобразования для решения дифференциальных уравнений состоит в следующем [155, 156, 191, 192, 274]. Пусть оператор преобразования T сплетает два оператора A и B, причем A сложнее, чем B: $TB = AT$. Тогда уравнение $Bu = f$ применением оператора T сведется к более сложному уравнению $Av = g$, где $v = Tu$ и $g = Tf$. Таким образом, если известно решение более простого уравнения $Bu = f$, то решение более сложного уравнения $Av = g$ дается формулой $v = Tu$. Остается вопрос: как построить нужный оператор T? Известно много примеров, когда нужный оператор преобразования подбирался исходя из свойств оператора A (см., например, [6, 192]). Однако существует общий метод, позволяющий построить любой оператор преобразования по двум заданным операторам A и B. Это композиционный метод, разработанный в [49, 50, 156] (см. также [208]). В этой главе метод операторов преобразования применяется к решению задачи Коши для общего уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу (раздел 13.1) и его обобщения со спектральным параметром (раздел 14.2).

Для решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами удобно применять преобразование Фурье, потому что его применение преобразует такие уравнения в уравнения, которые легче решить (см. [11, 12, 188, 189]). Для уравнений с оператором Бесселя, т. е. с непостоянными коэффициентами с особенностью в нуле, используется преобразование Ханкеля (Фурье—Бесселя). А именно, если рассматриваем задачу Коши для B-гиперболического уравнения, где по всем переменным действует оператор Бесселя с ненулевым первым условием и нулевым вторым условием, то, применяя к обеим частям уравнения преобразование Ханкеля только по пространственным переменным, получаем задачу Коши для более простого уравнения с одной переменной. Решаем задачу Коши для полученного уравнения с единичным первым условием и нулевым вторым условием. Находим обратное преобразование Ханкеля от полученного решения и сворачиваем его (при помощи обобщенной свертки) с функцией из первого ненулевого условия исходной задачи, получаем решение изначальной задачи Коши. Метод преобразований Ханкеля применен к решению задачи Коши для общего уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу в разделе 13.2 и для его обобщения со спектральным параметром в разделе 14.1 этой главы. При этом применялись преобразования Ханкеля весовых обобщенных функций, полученных в главе 2 в разделе 7. Частично эти результаты опубликованы в [266, 267, 269–272].

12. B-ультрагиперболическое уравнение

Классическое ультрагиперболическое уравнение имеет вид

$$\Delta_x u = \Delta_y u, \qquad u = u(x,y), \qquad x \in \mathbb{R}^p, \qquad y \in \mathbb{R}^q. \tag{12.1}$$

Уравнение (12.1) изучалось многими авторами (см. [5, 8, 9, 79, 195, 222, 252, 255]). При $p = 1$ или $q = 1$ уравнение (12.1) представляет собой обычное волновое уравнение, описывающая динамическое развитие многих процессов классической и квантовой физики. К уравнениям вида (12.1) при $p = q = 2$ приводят, например: исследования проблемы Гильберта определения в трехмерном декартовом пространстве всех метрик, геодезическими которых являются прямые (см. [253]); обратная задача дифракции при изучении неоднородности распределения зерен поликристаллических материалов; гиперсферическое рентгеновское преобразование с функциями плотности кристаллографических полюсов, удовлетворяющими ультрагиперболическому уравнению с оператором Лапласа—Бельтрами (см. [249]). Случай, когда в (12.1) $p > 2$ и $q > 2$, является важным с математической точки зрения благодаря теореме Асгейрссона о среднем значении (см. [184], [86, с. 475], [39, с. 84], [219, с. 318], [220, I, с. 183]), которая является обобщением теоремы о среднем значении для гармонических функций, а также обобщением формулы для функции Грина линейного волнового уравнения с постоянным коэффициентами.

Вообще говоря, начальная задача для ультрагиперболического уравнения (12.1) некорректна. В частности, в общем случае решение начальной задачи для него либо не существует, либо не единственно, и в случае, если удается найти какое-то решение, оно является неустойчивым. Однако в статье [195] показано, что начальная задача для ультрагиперболического уравнения при нелокальном ограничении на гиперпространствах коразмерности один имеет единственное глобальное решение в пространствах Соболева H^m. Таким образом, в этом случае начальная задача для (12.1) оказывается корректной.

Мы будем рассматривать обобщение уравнения (12.1) на случай, когда вместо каждой второй производной по каждой переменной действует оператор Бесселя.

Пусть $n = p+q$, p и q — натуральные числа; $\gamma = (\gamma', \gamma'')$, $\gamma' = (\gamma_1, \ldots, \gamma_p)$, $\gamma'' = (\gamma_{p+1}, \ldots, \gamma_{p+q})$, $\gamma_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, $x' \in \mathbb{R}^p_+$, $x'' \in \mathbb{R}^q_+$, $x = (x', x'') \in \mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^p_+ \times \mathbb{R}^q_+$.

B-ультрагиперболическое уравнение, или сингулярное ультрагиперболическое уравнение, имеет вид

$$\Box_\gamma u = 0, \quad u = u(x), \tag{12.2}$$

где $\Box_\gamma$ — однородный линейный дифференциальный оператор вида

$$\Box_\gamma = (\Delta_{\gamma'})_{x'} - (\Delta_{\gamma''})_{x''} = B_{\gamma_1} + \ldots + B_{\gamma_p} - B_{\gamma_{p+1}} - \ldots - B_{\gamma_{p+q}},$$

$(\Delta_{\gamma'})_{x'}=\sum\limits_{i=1}^{p}(B_{\gamma_i})_{x_i}$, $(\Delta_{\gamma''})_{x''}=\sum\limits_{j=p+1}^{p+q}(B_{\gamma_j})_{x_j}$, $B_{\gamma_i}=\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\dfrac{\gamma_i}{x_i}\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $i=1,\ldots,n$.

Итерированным B-ультрагиперболическим уравнением будем назвать уравнение вида

$$\Box_\gamma^k u=f,$$

где $k\in\mathbb{N}$, $f=f(x)$ — некоторая функция. В следующем пункте найдем фундаментальное решение уравнения $\Box_\gamma^k u=f$, а в пункте 12.2 докажем теоремы о весовых сферических средних для решения уравнения (12.2).

12.1. Фундаментальное решение итерированного B-ультрагиперболического уравнения.

С помощью результатов, полученных для весовых обобщенных функций, связанных с неопределенной квадратичной формой, найдем фундаментальное решение итерированного B-ультрагиперболического уравнения.

Пусть $x\in\mathbb{R}_+^n$, $n=p+q$, $p,q\in\mathbb{N}$. Будем искать фундаментальное решение уравнения

$$\Box_\gamma^k u=f, \tag{12.3}$$

где $k\in\mathbb{N}$.

Фундаментальным решением уравнения (12.3) будем называть обобщенную весовую функцию u, такую что

$$\Box_\gamma^k u=\delta_\gamma. \tag{12.4}$$

Отметим, что фундаментальные решения для гиперболического и ультрагиперболического уравнение с оператором Бесселя, примененным по одной переменной, получены в [60,62], а по нескольким переменным (кроме временной) — в [58].

Докажем следующее утверждение для уравнения (12.3).

Теорема 12.1. *За исключением случая, когда $n+|\gamma|=2,4,6,\ldots$ и $k\geqslant\dfrac{n+|\gamma|}{2}$, функции*

$$u=(-1)^k\frac{e^{\pm i\frac{\pi(q+|\gamma''|)}{2}}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}-k\right)}{4^k(k-1)!|S_1^+(n)|_\gamma\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}-1\right)}(P\pm i0)_\gamma^{-\frac{n+|\gamma|}{2}+k} \tag{12.5}$$

являются фундаментальными решениями уравнения $\Box_\gamma^k u=f$ в смысле (12.4). *Если же $n+|\gamma|=2,4,6,\ldots$ и $k\geqslant\dfrac{n+|\gamma|}{2}$, то функция $(P+i0)_\gamma^{-\frac{n+|\gamma|}{2}+k}=(P-i0)_\gamma^{-\frac{n+|\gamma|}{2}+k}$ является решением однородного уравнения $\Box_\gamma^k u=0$.*

Доказательство. Из соотношения (5.30) имеем

$$\Box_\gamma^k(P+i0)_\gamma^{\lambda+k}=4^k(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)\left(\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\ldots\left(\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}+k-1\right)(P+i0)_\gamma^\lambda.$$

Переходя к пределу при $\lambda\to-\dfrac{n+|\gamma|}{2}$ в последнем равенстве и используя формулу (5.43) при $k=0$, получим

$$\Box_\gamma^k(P+i0)_\gamma^{-\frac{n+|\gamma|}{2}+k}=$$

$$=4^k\left(1-\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\ldots\left(k-\frac{n+|\gamma|}{2}\right)(k-1)!\lim_{\lambda\to-\frac{n+|\gamma|}{2}}\left(\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}\right)(P+i0)_\gamma^\lambda=$$

$$=4^k\left(1-\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\ldots\left(k-\frac{n+|\gamma|}{2}\right)(k-1)!\operatorname*{res}_{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}}(P+i0)_\gamma^\lambda=$$

$$=4^k\left(1-\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\ldots\left(k-\frac{n+|\gamma|}{2}\right)(k-1)!e^{-i\frac{\pi(q+|\gamma''|)}{2}}|S_1^+(n)|_\gamma\,\delta_\gamma(x).$$

Если число $n+|\gamma|$ — четное и $k \geqslant \dfrac{n+|\gamma|}{2}$, то среди множителей $\left(1-\dfrac{n+|\gamma|}{2}\right)\ldots\left(k-\dfrac{n+|\gamma|}{2}\right)$ найдется равный нулю, и, следовательно, $\square_\gamma^k (P+i0)_\gamma^{-\frac{n+|\gamma|}{2}+k}=0$, и $u=(P+i0)_\gamma^{-\frac{n+|\gamma|}{2}+k}$ есть решение однородного уравнения $\square_\gamma^k u=0$. При всех остальных значениях $n+|\gamma|$ и k функция

$$u=(-1)^k\frac{e^{i\frac{\pi(q+|\gamma''|)}{2}}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}-k\right)}{4^k(k-1)!|S_1^+(n)|_\gamma\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}-1\right)}(P+i0)_\gamma^{-\frac{n+|\gamma|}{2}+k} \tag{12.6}$$

является фундаментальным в смысле (12.4) решением уравнения (12.3). В (12.6) было использованы соотношения

$$\left(1-\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\ldots\left(k-\frac{n+|\gamma|}{2}\right)=(-1)^k\left(\frac{n+|\gamma|}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{n+|\gamma|}{2}-k\right)=(-1)^k\frac{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}-k\right)}.$$

Аналогично, используя (5.44), можно показать, что если число $n+|\gamma|$ четное и $k \geqslant \dfrac{n+|\gamma|}{2}$, то $u=(P-i0)_\gamma^{-\frac{n+|\gamma|}{2}+k}$ есть решение однородного уравнения $\square_\gamma^k u=0$. При всех остальных значениях $n+|\gamma|$ и k функция

$$u=(-1)^k\frac{e^{-i\frac{\pi(q+|\gamma''|)}{2}}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}-k\right)}{4^k(k-1)!|S_1^+(n)|_\gamma\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}-1\right)}(P-i0)_\gamma^{-\frac{n+|\gamma|}{2}+k}$$

является фундаментальным в смысле (12.4) решением уравнения (12.3). □

Отметим, что в [259] было получено фундаментальное решение (12.3), выраженное через вещественнозначные функции. Однако там не был учтен случай, когда $n+|\gamma|=2,4,6,\ldots$ и $k \geqslant \dfrac{n+|\gamma|}{2}$. Кроме того, полученные в данной статье представления фундаментальных решений являются наиболее удобными с точки зрения обобщений на случай произвольного вещественного параметра k.

12.2. B-ультрагиперболическое уравнение и обобщение теоремы Асгейрссона. В этом пункте мы докажем теорему о весовых сферических средних типа теоремы Асгейрссона для B-ультрагиперболического уравнения и покажем, что с ее помощью также можно получить решение задачи для общего уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу вида

$$(\square_{k,\gamma})_{t,x}u=0, \qquad u=u(x,t;k), \qquad x\in\mathbb{R}_+^n, \qquad t>0, \tag{12.7}$$

$$u(x,0;k)=\varphi(x), \qquad u_t(x,0;k)=0. \tag{12.8}$$

Пусть $u(x)=u(x',x'')\in C_{ev}^2(\mathbb{R}_+^n)$. Для B-ультрагиперболического уравнения

$$(\Delta_{\gamma'})_{x'}u=(\Delta_{\gamma''})_{x''}u, \qquad u=u(x)=u(x',x''), \tag{12.9}$$

$$x=(x',x''), \qquad x'=(x_1,\ldots,x_p), \qquad x''=(x_{p+1},\ldots,x_{p+q}), \qquad p+q=n$$

при условии $p+|\gamma'|=q+|\gamma''|$ докажем теорему о равенстве весовых сферических средних по каждой из групп переменных x' и x''.

Рассмотрим весовые сферические, взятые по частям поверхностей единичных сфер $S_1^+(p)\in\mathbb{R}_p^+$ и $S_1^+(q)\in\mathbb{R}_q^+$, по каждой из групп переменных x' и x'', соответственно:

$$(M_r^{\gamma'})_{x'}u(x',x'')=\frac{1}{|S_1^+(p)|_{\gamma'}}\int\limits_{S_1^+(q)}T_{x'}^{r\xi}u(x',x'')\;\xi^{\gamma'}\,dS_\xi,$$

$$(M_s^{\gamma''})_{x''}u(x',x'')=\frac{1}{|S_1^+(q)|_{\gamma''}}\int\limits_{S_1^+(q)}T_{x''}^{s\zeta}u(x',x'')\;\zeta^{\gamma''}\,dS_\zeta.$$

Кроме того, определим *двойное весовое сферическое среднее* по переменным x' и x'' вида

$$U(x',r;x'',s)=\frac{1}{|S_1^+(q)|_{\gamma'}\ |S_1^+(q)|_{\gamma''}}\int\limits_{S_1^+(q)}\zeta^{\gamma''}\,dS_\zeta\int\limits_{S_1^+(q)}T_{x',x''}^{r\xi,s\zeta}u(x',x'')\xi^{\gamma'}dS_\xi.$$

Очевидно, что

$$U(x',r;x'',s)=(M_r^{\gamma'})_{x'}(M_s^{\gamma''})_{x''}u(x',x''),$$

$$(M_r^{\gamma'})_{x'}u(x',x'')=U(x',r;x'',0),\qquad (M_s^{\gamma''})_{x''}u(x',x'')=U(x',0;x'',s).\tag{12.10}$$

Теорема 12.2. *Если* $p+|\gamma'|=q+|\gamma''|$, *а функция* $u(x',x'')\in C_{ev}^2$ *удовлетворяет* B*-ультрагиперболическому уравнению* (12.9), *то двойное весовое сферическое среднее симметрично относительно радиусов* r *и* s *весовых сферических средних* $(M_r^{\gamma'})_{x'}$ *и* $(M_s^{\gamma''})_{x''}$ *соответственно*:

$$(M_r^{\gamma'})_{x'}(M_s^{\gamma''})_{x''}u(x',x'')=(M_s^{\gamma'})_{x'}(M_r^{\gamma''})_{x''}u(x',x'').\tag{12.11}$$

Доказательство. В силу (3.44) имеем

$$(\Delta_{\gamma'})_{x'}(M_r^{\gamma'})_{x'}(M_s^{\gamma''})_{x''}u(x',x'')=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{p+|\gamma'|-1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}\right)(M_r^{\gamma'})_{x'}(M_s^{\gamma''})_{x''}u(x',x''),\tag{12.12}$$

$$(\Delta_{\gamma''})_{x''}(M_r^{\gamma'})_{x'}(M_s^{\gamma''})_{x''}u(x',x'')=\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\frac{q+|\gamma''|-1}{s}\ \frac{\partial}{\partial s}\right)(M_r^{\gamma'})_{x'}(M_s^{\gamma''})_{x''}u(x',x'').\tag{12.13}$$

Поскольку u удовлетворяет уравнению (12.9) и весовое сферическое среднее перестановочно с оператором Лапласа—Бесселя, то справедливо равенство

$$(\Delta_{\gamma'})_{x'}(M_r^{\gamma'})_{x'}(M_s^{\gamma''})_{x''}u(x',x'')=(\Delta_{\gamma''})_{x''}(M_r^{\gamma'})_{x'}(M_s^{\gamma''})_{x''}u(x',x'').\tag{12.14}$$

Из (12.12), (12.13) и (12.14) следует, что

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{p+|\gamma'|-1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}\right)(M_r^{\gamma'})_{x'}(M_s^{\gamma''})_{x''}u(x',x'')=$$

$$=\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\frac{q+|\gamma''|-1}{s}\ \frac{\partial}{\partial s}\right)(M_r^{\gamma'})_{x'}(M_s^{\gamma''})_{x''}u(x',x''),$$

или

$$(B_{p+|\gamma'|-1})_r(M_r^{\gamma'})_{x'}(M_s^{\gamma''})_{x''}u(x',x'')=(B_{q+|\gamma''|-1})_s(M_r^{\gamma'})_{x'}(M_s^{\gamma''})_{x''}u(x',x'').\tag{12.15}$$

Поскольку

$$p+|\gamma'|-1=q+|\gamma''|-1,\quad U(x',r;x'',0)=(M_r^{\gamma'})_{x'}u(x',x''),\quad \frac{\partial}{\partial s}(M_r^{\gamma'})_{x'}(M_s^{\gamma''})_{x''}u(x',x'')\bigg|_{s=0}=0,$$

то, полагая

$$p+|\gamma'|-1=q+|\gamma''|-1=\mu,\quad (M_r^{\gamma'})_{x'}(M_s^{\gamma''})_{x''}u(x',x'')=v(r,s),\quad (M_r^{\gamma'})_{x'}u(x',x'')=h(r),$$

получаем, что $v(r,s)$ удовлетворяет задаче Коши

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\frac{\mu_1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\right)v(r,s)=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\mu_1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)v(r,s),\tag{12.16}$$

$$v(r,s)\bigg|_{s=0}=h(r),\quad v'_r(r,s)\bigg|_{s=0}=0.$$

Решение $v(r,s)$ этой задачи является единственным и представляет собой одномерный обобщенный сдвиг (3.1):

$$v(r,s)={}^{\mu}T_r^sh(r)=\frac{\Gamma\left(\frac{\mu_1+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma\left(\frac{\mu_1}{2}\right)}\int\limits_0^\pi h(\sqrt{r^2+s^2-2rs\cos\psi})\ \sin^{\mu_1-1}\psi\ d\psi.$$

При этом в силу элементарного свойства 5 обобщенного сдвига имеем

$$v(r,s)={}^{\mu}T_r^sf(r)={}^{\mu}T_s^rf(s)=v(s,r),\tag{12.17}$$

или
$$(M_r^{\gamma'})_{x'}(M_s^{\gamma''})_{x''}u(x',x'') = (M_s^{\gamma'})_{x'}(M_r^{\gamma''})_{x''}u(x',x'').$$
Доказательство закончено. □

Из теоремы 12.2 получается утверждение, обобщающее теорему Асгейрссона на случай B-ультрагиперболического уравнения.

Теорема 12.3. *Если $p+|\gamma'|=q+|\gamma''|$, а функция $u(x',x'')\in C^2_{ev}$ удовлетворяет B-ультрагиперболическому уравнению* (12.9)*, то справедливо равенство*
$$(M_u^{\gamma'})_x(x,y,r) = (M_u^{\gamma''})_y(x,y,r). \tag{12.18}$$

Доказательство. Утверждение теоремы получается, если положить $s=0$ в (12.11), учитывая (12.10):
$$(M_r^{\gamma'})_{x'}u(x',x'') = (M_r^{\gamma'})_{x'}(M_0^{\gamma''})_{x''}u(x',x'') = (M_0^{\gamma'})_{x'}(M_r^{\gamma''})_{x''}u(x',x'') = (M_r^{\gamma''})_{x''}u(x',x'').$$
□

Справедливо утверждение, обратное по отношению к теореме 12.3, впервые доказанное в [125].

Теорема 12.4. *Пусть $u(x',x'')\in C^2_{ev}$ и для всяких неотрицательных r и s выполнено условие* (12.18)*. Тогда, если выполнены равенства $p+|\gamma'|=q+|\gamma''|$ и $(M_u^{\gamma'})_x(x,y,r)=(M_u^{\gamma''})_y(x,y,r)$, то функция $u(x',x'')$ удовлетворяет B-ультрагиперболическому уравнению $(\Delta_{\gamma'})_{x'}u=(\Delta_{\gamma''})_{x''}u$.*

Доказательство. Для весовых сферических средних $(M_u^{\gamma'})_x(x,y,r)$ и $(M_u^{\gamma''})_y(x,y,r)$ справедливы равенства
$$(\Delta_{\gamma'})_{x'}(M_r^{\gamma'})_{x'}(M_s^{\gamma''})_{x''}u(x',x'') = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{p+|\gamma'|-1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\right)(M_r^{\gamma'})_{x'}(M_s^{\gamma''})_{x''}u(x',x''), \tag{12.19}$$
$$(\Delta_{\gamma''})_{x''}(M_r^{\gamma'})_{x'}(M_r^{\gamma''})_{x''}u(x',x'') = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{q+|\gamma''|-1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\right)(M_r^{\gamma'})_{x'}(M_s^{\gamma''})_{x''}u(x',x''). \tag{12.20}$$
Тогда
$$(\Delta_{\gamma'})_{x'}(M_r^{\gamma'})_{x'}(M_s^{\gamma''})_{x''}u(x',x'') = (\Delta_{\gamma''})_{x''}(M_r^{\gamma'})_{x'}(M_r^{\gamma''})_{x''}u(x',x'').$$
Воспользуемся свойством перестановочности оператора Лапласа—Бесселя и весового сферического среднего, получим
$$(M_r^{\gamma'})_{x'}(M_s^{\gamma''})_{x''}(\Delta_{\gamma'})_{x'}u(x',x'') = (M_r^{\gamma'})_{x'}(M_r^{\gamma''})_{x''}(\Delta_{\gamma''})_{x''}u(x',x'').$$
Последнее равенство выполняются для всех r, что возможно лишь в случае, когда равенство
$$(\Delta_{\gamma'})_{x'}u(x',x'') = (\Delta_{\gamma''})_{x''}u(x',x'').$$
выполняется почти всюду. По условию функции $(\Delta_{\gamma'})_{x'}u(x',x'')$ и $(\Delta_{\gamma''})_{x''}u(x',x'')$ непрерывны, поэтому это равенство выполняется всюду. Доказательство закончено. □

Справедливо уточнение теоремы 12.3, доказанное для ультрагиперболического уравнения в [220, с. 222].

Теорема 12.5. *Пусть $u(x',x'')\in C^2_{ev}$ является непрерывным в некоторой окрестности множества $K=\{\theta\in\mathbb{R}^p_+,\omega\in\mathbb{R}^q_+\colon|\theta|+|\omega|=r\}$ решением B-ультрагиперболического уравнения $(\Delta_{\gamma'})_{x'}u=(\Delta_{\gamma''})_{x''}u$, и пусть выполнено условие $p+|\gamma'|=q+|\gamma''|\geqslant 3$. Тогда справедливо соотношение*
$$\frac{1}{|S_1(p)|_\gamma}\int\limits_{S_1^+(p)} u(r\theta;0)\,\prod_{i=1}^{p}\theta_i^{\gamma_i}\,dS_\theta = \frac{1}{|S_1(q)|_\gamma}\int\limits_{S_1^+(q)} u(0;r\omega)\,\prod_{i=1}^{q}\omega_i^{\nu_i}\,dS_\omega.$$

13. Общее уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу

В этом разделе применим операторы преобразования, введенные в разделах 2 и 3 для нахождения решения обобщения классического уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу на случай, когда по всем пространственным переменным действует оператор Бесселя (11.23).

Классическое уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{k}{t}\frac{\partial u}{\partial t},\quad u=u(x,t),\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t>0,\quad -\infty<k<\infty. \tag{13.1}$$

Уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу (13.1) при $n=1$ впервые было рассмотрено Л. Эйлером (Leonhard Euler) в [206, с. 227] и позднее исследовано в [254] С. Д. Пуассоном (Siméon Denis Poisson), в [131] Б. Риманом (Bernhard Riemann) и в [196] Г. Дарбу (Gaston Darboux) (см. также историю вопроса в [112, с. 532]). Многомерное уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу (13.1) рассмотрено, например, в [119, 286]. А. Ванштейном (Alexander Weinstein) в статьях [283, 284] решена задача Коши для уравнения (13.1), где k в правой части есть произвольное вещественное число и первое условие ненулевое, а второе нулевое. С. А. Терсеновым в [171] рассмотрена общая задача Коши для (13.1), где и первое, и второе условия ненулевые. Кроме того, уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу рассмотрено в [33, 83, 166, 172]. Аппарат операторов преобразования Бушмана—Эрдейи применен к задаче Дирихле в четверти плоскости для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу в [51].

Поскольку в этом разделе мы будем рассматривать задачи Коши, то удобно выделить одну переменную, которая будет соответствовать времени, и обозначить t. В связи с этим будем рассматривать часть евклидова пространства вида

$$\mathbb{R}_+^{n+1}=\{(t,x)=(t,x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1},\ t>0,\, x_1{>}0,\ldots,x_n{>}0\}.$$

Пусть $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $|x|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}$. Аналогично определению из пункта 2.1 введем $C_{ev}^m(\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ и $C_{ev}^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1})$. А именно, пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^{n+1}$, симметричное относительно каждой гиперплоскости $t=0$, $x_i=0$, $i=1,\ldots,n$, $\Omega_+=\Omega\cap\mathbb{R}_+^{n+1}$ и $\overline{\Omega}_+=\Omega\cap\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1}$, где

$$\overline{\mathbb{R}}{}_+^{n+1}=\{(t,x)=(t,x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1},\ t>0,x_1\geqslant 0,\ldots,x_n\geqslant 0\}.$$

Рассмотрим класс функций $C^m(\Omega_+)$, состоящий из m раз непрерывно дифференцируемых на Ω_+ функций и обозначим $C^m(\overline{\Omega}_+)$ подмножество функций из $C^m(\Omega_+)$ таких, что все существующие производные этих функций по t и по x_i для всех $i=1,\ldots,n$ непрерывны вплоть до $t=0$ и $x_i=0$. Пусть класс $C_{ev}^m(\overline{\Omega}_+)$ состоит из функций из $C^m(\overline{\Omega}_+)$ таких, что $\left.\dfrac{\partial^{2k+1}f}{\partial t^{2k+1}}\right|_{t=0,x=0}=0$, $\left.\dfrac{\partial^{2k+1}f}{\partial x_i^{2k+1}}\right|_{t=0,x=0}=0$ для всех неотрицательных целых $k\leqslant\dfrac{m-1}{2}$ (см. [57, с. 21]). Будем обозначать $C_{ev}^m(\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ через C_{ev}^m. Положим

$$C_{ev}^\infty(\overline{\Omega}_+)=\bigcap C_{ev}^m(\overline{\Omega}_+),$$

где пересечение берется по всем конечным m. Пусть $C_{ev}^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1})=C_{ev}^\infty$.

Рассмотрим оператор

$$(\Box_{k,\gamma})_{t,x}=(B_k)_t,\qquad -\triangle_\gamma-\infty<k<\infty,\qquad \gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n), \tag{13.2}$$

где

$$\triangle_\gamma=(\triangle_\gamma)_x=\sum_{i=1}^{n}(B_{\gamma_i})_{x_i}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^{\gamma_i}}\frac{\partial}{\partial x_i}x_i^{\gamma_i}\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Будем находить решения задач Коши для *однородного общего уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу* вида

$$(\Box_{k,\gamma})_{t,x}u=0,\qquad u=u(x,t),\qquad (t,x)\in\mathbb{R}_+^{n+1}, \tag{13.3}$$

для *однородного обобщенного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу* вида

$$(\Box_{k,\gamma})_{t,x}u=c^2u,\qquad u=u(x,t),\qquad c\in\mathbb{R},\qquad (t,x)\in\mathbb{R}_+^{n+1}, \tag{13.4}$$

а также для *неоднородных общего и обобщенного уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу*

$$(\square_{k,\gamma})_{t,x}u = f, \qquad u = u(x,t), \qquad f = f(t,x), \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}_+, \tag{13.5}$$

$$\left((\square_{k,\gamma})_{t,x} - c^2\right)u = f, \qquad u = u(x,t), \qquad f = f(t,x), \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}_+, \tag{13.6}$$

соответственно.

В работах [105, 210] (см. также [192, с. 243] и [278]) рассмотрены различные подходы к решению уравнения (13.3) в случае первого ненулевого и второго нулевого начальных условий для всех вещественных $k \neq -1, -3, -5, \ldots$. В статье [3] методом, отличным от методов, использующихся в [192, 210], было получено решение этой задачи при любых вещественных k.

Используя терминологию из книги [192], задачу для уравнения типа

$$A(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B(t)\frac{\partial u}{\partial t} + C(t)u = Gu, \qquad u = u(t,x), \qquad x = (x_1, \ldots, x_n),$$

где G — линейный оператор, действующий только по переменным $x_1, \ldots, x_n$, назовем *сингулярной*, если по крайней мере один из коэффициентов A, B или C стремится (в некотором смысле) к нулю при $t \to 0$.

В [192] даны пять общих методов решения сингулярной задачи Коши

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad u = u(x,t;k), \tag{13.7}$$

$$u(x,0;k) = \varphi(x), \quad u_t(x,0;k) = 0. \tag{13.8}$$

Перечислим эти методы:

1. метод преобразования Фурье в пространстве обобщенных функций;
2. спектральные методы в пространстве Гильберта;
3. метод операторов преобразования;
4. изучение связанных с рассматриваемым, но более простых уравнений;
5. энергетические методы.

Некоторые из этих методов были успешно применены к решению задач Коши для уравнений (13.3)–(13.6). А именно, используя преобразование Ханкеля вместо преобразования Фурье, в [266, 272] были получены решения задач Коши для (13.3) и (13.4), соответственно. Третий и тесно связанный с ним четвертый методы были использованы для решения уравнения (13.3) в [268, 272] при различных условиях. В [144] метод операторов преобразования был использован для получения новых интегральных начальных условий для уравнения (13.3). Абстрактные дифференциальные уравнения с оператором Бесселя типа (13.3) и (13.4) изучались в [192], а также в работах [18, 20, 22–24]. В [280] задача для уравнения (13.7) была решена с использованием оператора «спуска по параметру», который является частным случаем оператора преобразования Бушмана—Эрдейи (см. [275, 276]). В этом разделе мы будем использовать метод преобразования Ханкеля, метод операторов преобразования и метод потенциалов Рисса для решения задач для уравнений (13.3)–(13.6).

13.1. Метод операторов преобразования решения задачи Коши для общего уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу. В этом пункте применим весовое сферическое среднее и оператор спуска по параметру к решению задачи Коши для общего уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу в случае первого ненулевого и второго нулевого начальных условий вида

$$\triangle_\gamma u = (B_k)_t\, u, \quad -\infty < k < \infty, \quad u = u(x,t;k), \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \quad t > 0, \tag{13.9}$$

$$u(x,0;k) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0;k) = 0. \tag{13.10}$$

Отметим, что при $k \geqslant 0$ решение задачи Коши (13.9)-(13.10) единственно, но не является единственным при $k < 0$ (см. [210]).

Уравнение (13.9) является примером абстрактного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу вида

$$Au = (B_k)_t\, u, \qquad u = u(x,t;k), \tag{13.11}$$

где A — линейный оператор, действующий только по переменным $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Уравнению (13.11) посвящены работы А. В. Глушака и его соавторов [14, 17–24]. Помимо рассмотренного классического подхода, к решению такого уравнения и его обобщениям можно применять метод операторов преобразования. Приведем известный факт с доказательством о рекуррентных формулах, связывающих решения уравнения (13.11) (см. [192]).

Лемма 13.1. *Пусть* $u(x,t;k)$ — *решение уравнения* (13.11). *Справедливы две рекуррентные формулы*:

$$u(x,t;k) = t^{1-k}u(x,t;2-k), \tag{13.12}$$

$$u_t(x,t;k) = tu(x,t;k+2). \tag{13.13}$$

Доказательство. Докажем сначала (13.12). Положим $w = t^{k-1}v$, $v = u(x,t;k)$. Будем иметь

$$w_t = (k-1)t^{k-2}v + t^{k-1}v_t = \frac{k-1}{t}w + t^{k-1}v_t,$$

$$w_{tt} = (k-1)(k-2)t^{k-3}v + (k-1)t^{k-2}v_t + (k-1)t^{k-2}v_t + t^{k-1}v_{tt} =$$
$$= \frac{(k-1)(k-2)}{t^2}w + 2(k-1)t^{k-2}v_t + t^{k-1}v_{tt},$$

$$\frac{2-k}{t}w_t = -\frac{(k-1)(k-2)}{t^2}w + (2-k)t^{k-2}v_t,$$

$$w_{tt} + \frac{2-k}{t}w_t = 2(k-1)t^{k-2}v_t + t^{k-1}v_{tt} + (2-k)t^{k-2}v_t = t^{k-1}\left(v_{tt} + \frac{k}{t}v_t\right),$$

или

$$w_{tt} + \frac{2-k}{t}w_t = t^{k-1}\left(v_{tt} + \frac{k}{t}v_t\right). \tag{13.14}$$

Если $w = t^{k-1}v$ удовлетворяет уравнению

$$Aw = w_{tt} + \frac{2-k}{t}w_t,$$

то, используя (13.14), получим

$$t^{k-1}Av = t^{k-1}\left(v_{tt} + \frac{k}{t}v_t\right),$$

что означает, что v удовлетворяет уравнению

$$Av = v_{tt} + \frac{k}{t}v_t.$$

Обозначая $w = u(x,t;2-k)$, получим (13.12).

Докажем теперь (13.13). Пусть $tw = v_t$, $v = u(x,t;k)$. Запишем

$$w_t = -\frac{1}{t^2}v_t + \frac{1}{t}v_{tt},$$

$$w_{tt} = \frac{2}{t^3}v_t - \frac{2}{t^2}v_{tt} + \frac{1}{t}v_{ttt}.$$

Найдем теперь $\dfrac{k+2}{t}w_t$:

$$\frac{k+2}{t}w_t = -\frac{k+2}{t^3}v_t + \frac{k+2}{t^2}v_{tt}.$$

Имеем

$$w_{tt} + \frac{k+2}{t}w_t = \frac{2}{t^3}v_t - \frac{2}{t^2}v_{tt} + \frac{1}{t}v_{ttt} - \frac{k+2}{t^3}v_t + \frac{k+2}{t^2}v_{tt} =$$
$$= \frac{1}{t}v_{ttt} - \frac{k}{t^3}v_t + \frac{k}{t^2}v_{tt} = \frac{1}{t}\left(v_{ttt} - \frac{k}{t^2}v_t + \frac{k}{t}v_{tt}\right) = \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\left(v_{tt} + \frac{k}{t}v_t\right),$$

или

$$w_{tt} + \frac{k+2}{t}w_t = \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\left(v_{tt} + \frac{k}{t}v_t\right). \tag{13.15}$$

Если $w = \dfrac{1}{t}v_t$ удовлетворяет уравнению

$$Aw = w_{tt} + \frac{k+2}{t}w_t,$$

то используя (13.15), получим
$$\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}Av=\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\left(v_{tt}+\frac{k}{t}v_t\right),$$
что означает, что v удовлетворяет уравнению вида
$$Av=v_{tt}+\frac{k}{t}v_t.$$
Обозначая $w=u(x,t;k+2)$, $v=u(x,t;k)$, получим (13.13). □

Перейдем теперь к решению (13.9)-(13.10) методом операторов преобразования. Известно, что весовое сферическое среднее (3.39) тесно связано с общим уравнением Эйлера—Пуассона—Дарбу (13.9), а именно, справедливо равенство (3.44). Используя это равенство, получим решение (13.9)-(13.10) при $k\geqslant n+|\gamma|-1$. К уравнению
$$\triangle_\gamma u=(B_k)_t\,u$$
по переменным $x=(x_1,\ldots,x_n)$ применим весовое сферическое среднее M_t^γ, которое преобразует оператор $(\triangle_\gamma)_x$ в $B_{n+|\gamma|-1}$. Учитывая свойство (3.44) весового сферического среднего, получим
$$(B_{n+|\gamma|-1})_t(M_t^\gamma)_x[u(x,t;k)]=(B_k)_t\,(M_t^\gamma)_x[u(x,t;k)]. \tag{13.16}$$
При $k=n+|\gamma|-1$ уравнение (13.16) превращается в тождество, а с учетом условия $u(x,0;k)=\varphi(x)$ получаем равенство
$$(\triangle_\gamma)_xM_t^\gamma[\varphi(x)]=(B_{n+|\gamma|-1})_tM_t^\gamma[\varphi(x)]. \tag{13.17}$$
Учитывая (3.41), получаем, что решение задачи (13.9)-(13.10) при $k=n+|\gamma|-1$ единственно и имеет вид
$$u(x,t;n+|\gamma|-1)=M_t^\gamma[\varphi(x)].$$
Для того, чтобы получить решение задачи (13.9)-(13.10) при $k>n+|\gamma|+1$, используем оператор спуска по параметру вида
$$I_\beta^k\varphi(t)=\frac{2t^{1-k}\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}\int\limits_0^t(t^2-r^2)^{\frac{k-\beta}{2}-1}r^\beta\varphi(r)dr. \tag{13.18}$$
Известно (см. [208]), что при $k-\beta>2$, $\beta>0$ оператор преобразования I_β^k обладает свойствами
$$I_\beta^k(B_\beta\varphi(t))=B_kI_\beta^k\varphi(t),$$
$$I_\beta^k[1]=1.$$
Применив к обеим частям (13.17) по переменной t оператор (13.18) при $\beta=n+|\gamma|-1$, будем иметь
$$I_{n+|\gamma|-1}^k(B_{n+|\gamma|-1})_tM_t^\gamma[\varphi(x)]=B_kI_{n+|\gamma|-1}^kM_t^\gamma[\varphi(x)].$$
Возвращаясь к (13.17), получаем равенство
$$(\triangle_\gamma)_xI_{n+|\gamma|-1}^kM_t^\gamma[\varphi(x)]=B_kI_{n+|\gamma|-1}^kM_t^\gamma[\varphi(x)],$$
причем
$$(I_{n+|\gamma|-1}^k)_tM_t^\gamma[\varphi(x)]|_{t=0}=\varphi(x),\qquad \left.\frac{\partial(I_{n+|\gamma|-1}^k)_tM_t^\gamma[\varphi(x)]}{\partial t}\right|_{t=0}=0,$$
следовательно,
$$u(x,t;k)=(I_{n+|\gamma|-1}^k)_tM_t^\gamma[\varphi(x)]=\frac{2t^{1-k}\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-n-|\gamma|+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}\int\limits_0^t(t^2-r^2)^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}}r^{n+|\gamma|-1}M_r^\gamma[\varphi(x)]dr \tag{13.19}$$
есть единственное решение задачи (13.9)-(13.10) при $k>n+|\gamma|+1$.

Хотя (13.19) было получено как решение задачи (13.9)-(13.10) при $k>n+|\gamma|+1$, легко заметить, что интеграл (13.19) сходится при $k>n+|\gamma|-1$. Непосредственная подстановка выражения $(I_{n+|\gamma|-1}^k)_tM_t^\gamma[\varphi(x)]$ в (13.9)-(13.10) дает, что (13.19) является единственным решением (13.9)-(13.10) и при $n+|\gamma|-1<k\leqslant n+|\gamma|+1$. Таким образом, доказана теорема:

Теорема 13.1. *Пусть $\varphi \in C^2_{ev}$. Тогда при $n+|\gamma|-1 \leqslant k$ единственное решение задачи*

$$\triangle_\gamma u(x,t) = (B_k)_t\, u, \quad u = u(x,t;k), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}_+,$$

$$u(x,0;k) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0;k) = 0$$

имеет вид

$$u(x,t;k) = \frac{2t^{1-k}\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-n-|\gamma|+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \int\limits_0^t (t^2-r^2)^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}} r^{n+|\gamma|-1} M_r^\gamma[\varphi(x)]dr. \tag{13.20}$$

Для получения решения задачи (13.9)-(13.10) в случае $k \leqslant n+|\gamma|-1$ будем использовать рекуррентные формулы (13.12) и (13.13). При этом необходимо повысить гладкость функции φ. А именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 13.2. *Пусть $\varphi \in C_{ev}^{\left[\frac{n+|\gamma|-k}{2}\right]+2}$. Решение задачи Коши*

$$\triangle_\gamma u(x,t) = (B_k)_t\, u, \quad u = u(x,t;k), \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \quad t>0, \tag{13.21}$$

$$u(x,0;k) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0;k) = 0 \tag{13.22}$$

при $k < n+|\gamma|-1$, $k \neq -1,-3,-5,\ldots$ имеет вид

$$u(x,t;k) = t^{1-k}\left(\frac{\partial}{t\partial t}\right)^m (t^{k+2m-1}u(x,t;k+2m)), \tag{13.23}$$

где m — минимальное целое число, такое что $m \geqslant \dfrac{n+|\gamma|-k-1}{2}$ и $u(x,t;k+2m)$ — решение задачи Коши

$$(B_{k+2m})_t u = (\Delta_\gamma)_x u, \tag{13.24}$$

$$u(x,0;k+2m) = \frac{\varphi(x)}{(k+1)(k+3)\ldots(k+2m-1)}, \qquad u_t(x,0;k+2m) = 0. \tag{13.25}$$

Решение (13.23) *единственно при $k \geqslant 0$ и не единственно при $k<0$.*

Доказательство. Для того, чтобы показать, что (13.23) есть решение рассматриваемой задачи при $k<n+|\gamma|-1$, $k\neq -1,-3,-5,\ldots$ выберем наименьшее целое число m, такое что $k+2m \geqslant n+|\gamma|-1$. Выпишем теперь решение задачи Коши вида

$$(B_{k+2m})_t u = (\Delta_\gamma)_x u, \tag{13.26}$$

$$u(x,0;k+2m) = g(x), \qquad u_t(x,0;k+2m) = 0, \quad g \in C^2_{ev}, \tag{13.27}$$

используя формулу (13.20):

$$u(x,t;k+2m) = \frac{2t^{1-k-2m}\,\Gamma\left(\frac{k+2m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2m-n-|\gamma|+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \int\limits_0^t (t^2-r^2)^{\frac{k+2m-n-|\gamma|-1}{2}} r^{n+|\gamma|-1} M_r^\gamma[g(x)]dr.$$

Используя (13.12), получим

$$t^{k+2m-1}u(x,t;k+2m) = u(x,t;2-k-2m).$$

Применяя (13.13) к последней формуле m раз, запишем

$$\left(\frac{\partial}{t\partial t}\right)^m (t^{k+2m-1}u(x,t;k+2m) = u(x,t;2-k).$$

Снова применив (13.12), получим искомое решение уравнения (13.21) вида

$$u(x,t;k) = t^{1-k}\left(\frac{\partial}{t\partial t}\right)^m (t^{k+2m-1}u(x,t;k+2m)). \tag{13.28}$$

Найдем теперь функцию g такую, чтобы выполнялись условия (13.22). Учитывая вид решения (13.28), запишем

$$u(x,t;k) = (k+1)(k+3)\ldots(k+2m-1)u(x,t;k+2m) + C\,t\,u(x,t;k+2m) + O(t^2), \quad t\to 0,$$

где C — некоторая постоянная. Таким образом, если

$$g(x)=\frac{\varphi(x)}{(k+1)(k+3)\dots(k+2m-1)},$$

то функция $u(x,t;k)$, определяемая формулой (13.28) удовлетворяет (13.22).

Заметим, что для того, чтобы $u(x,t;k+2m)$ было решением (13.26)-(13.27), достаточно, чтобы $g\in C^2_{ev}$. Однако для того, чтобы имела место формула (13.28), необходимо, чтобы $\varphi\in C_{ev}^{\left[\frac{n+|\gamma|-k}{2}\right]+2}$.

Теорема доказана. □

Запишем, наконец, решение задачи Коши (13.9)-(13.10) при $k=-1,-3,-5,\dots$. Для этого нам потребуется определить B-полигармоническую функцию. А именно, если функция $f(x)=f(x_1,\dots,x_n)$ вещественных переменных, определенная в некоторой области пространства $\mathbb{R}^n_+$, имеет непрерывные частные производные до $2m$-го порядка включительно и удовлетворяет всюду в рассматриваемой области B-полигармоническому уравнению

$$\Delta^m_\gamma f=0, \tag{13.29}$$

то f называется *B-полигармонической функцией* порядка m.

Пусть сначала $k=-1$. Предположим, что $u_{tt}(x,0;-1)$ существует. Устремляя t к 0 в уравнении

$$\Delta_\gamma u(x,t;-1)=u_{tt}(x,t;-1)-\frac{1}{t}u_t(x,t;-1),$$

получим, что $\Delta_\gamma u(x,0;-1)=0$, то есть φ должна быть B-гармонической, и решение (13.9)-(13.10) при $k=-1$ есть

$$u(x,t;-1)=\varphi(x). \tag{13.30}$$

Переходя далее к $k=-3,-5,\dots$, получаем, что решение задачи Коши (13.9)-(13.10) при $k=-3,-5,\dots$ дается формулой

$$u(x,t;k)=f(x)+\sum_{h=1}^{-\frac{k+1}{2}}\frac{\Delta^h_\gamma\varphi}{(k+1)\dots(k+2h-1)}\,\frac{t^{2h}}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot 2h},\qquad k=-3,-5,\dots \tag{13.31}$$

Итак, в случае $k=-1,-3,-5,\dots$ решение задачи Коши (13.9)-(13.10) $u(x,t;k)$ существует, когда φ имеет $\dfrac{1}{2}(n-k+3)$ непрерывных производных.

Поставим и решим задачу Коши для общего уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу с нулевым первым условием и ненулевым вторым условием. Классическая постановка такой задачи Коши невозможна. Однако С. А. Терсеновым было замечено, что, исходя из вида общего решения классического уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу, производную во втором начальном условии нужно умножать на степенную функцию, степень которой равна индексу оператора Бесселя, действующего по временной переменной, а затем переходить к пределе при t, стремящемся к нулю. Первое начальное условие остается в обычной формулировке. С такой подобранной формой начальных условий рассматриваемое нами уравнение имеет решение.

Теорема 13.3. *Если $\psi\in C_{ev}^{\left[\frac{n+|\gamma|+k-1}{2}\right]}$, то решение $u=u(x,t;k)$ задачи*

$$(\triangle_\gamma)_x u=(B_k)_t u,\quad 0<\gamma_i,\quad i=1,\dots,n,\quad k<1,\quad x\in\mathbb{R}^n_+,\quad t>0, \tag{13.32}$$

$$u(x,0;k)=0,\qquad \lim_{t\to0}t^k\frac{\partial u}{\partial t}=\psi(x) \tag{13.33}$$

в случае, когда $n+|\gamma|+k$ не является целым нечетным числом, имеет вид

$$u(x,t;k)=\frac{\Gamma\left(\frac{3-k+2q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-k+2q-n-|\gamma|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}\sum_{s=0}^{q}\frac{C^s_q\,t^{1-k+2s}}{2^s\Gamma\left(\frac{3-k}{2}+s\right)}\times$$

$$\times\int\limits_0^1(1-r^2)^{\frac{1-k+2q-n-|\gamma|}{2}}r^{n+|\gamma|-1}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^s M^\gamma_{tr}[\psi(x)]dr. \tag{13.34}$$

Если $n+|\gamma|+k$ является целым нечетным числом, то решение (13.32)-(13.33) *имеет вид*

$$u(x,t;k)=\frac{2^{-q}\Gamma\left(\frac{3-k}{2}\right)}{(1-k)\Gamma\left(\frac{3-k+2q}{2}\right)}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^q\left(t^{n+|\gamma|-2}M_t^\gamma[\psi(x)]\right).$$

Здесь $q\geqslant 0$ — наименьшее положительное целое число, такое что $2-k+2q\geqslant n+|\gamma|-1$.

Доказательство. Пусть $q\geqslant 0$ — наименьшее положительное целое число, такое что $2-k+2q\geqslant n+|\gamma|-1$, т. е. $q=\left[\dfrac{n+|\gamma|+k-1}{2}\right]$, и пусть $u(x,t;2-k+2q)$ — решение уравнения (13.32), в котором взято $2-k+2q$ вместо k, такое что

$$u(x,0;2-k+2q)=\psi(x),\qquad u_t(x,0;2-k+2q)=0. \tag{13.35}$$

Тогда, используя рекуррентную формулу (13.12), получим, что функция

$$u(x,t;k-2q)=t^{1-k+2q}u(x,t;2-k+2q)$$

есть решение уравнения

$$(\triangle_\gamma)_x u=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{k-2q}{t}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Далее, применяя q раз формулу (13.13), получим, что

$$u(x,t;k)=\frac{2^{-q}\Gamma\left(\frac{3-k}{2}\right)}{(1-k)\Gamma\left(\frac{3-k+2q}{2}\right)}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^q\left(t^{1-k+2q}u(x,t;2-k+2q)\right) \tag{13.36}$$

есть решение (13.32).

Покажем, что (13.36) удовлетворяет условиям (13.33). Для $u(x,t;2-k+2q)\in C^q_{ev}(\Omega_+)$ справедлива формула (см. [171, с. 9])

$$\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^q(t^{1-k+2q}u(x,t;2-k+2q))=\sum_{s=0}^{q}\frac{2^{q-s}C_q^s\Gamma\left(\frac{3-k+2q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}+s+1\right)}t^{1-k+2s}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^s u(x,t;2-k+2q). \tag{13.37}$$

Принимая во внимание (13.37), получим $u(x,0;k)=0$ и

$$\lim_{t\to 0}t^k u_t(x,t;k)=\frac{2^{-q}\Gamma\left(\frac{3-k}{2}\right)}{(1-k)\Gamma\left(\frac{3-k+2q}{2}\right)}\lim_{t\to 0}t^k\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^q(t^{1-k+2q}u(x,t;2-k+2q))=$$

$$=\frac{2^{-q}\Gamma\left(\frac{3-k}{2}\right)}{(1-k)\Gamma\left(\frac{3-k+2q}{2}\right)}\lim_{t\to 0}t^k\frac{\partial}{\partial t}\sum_{s=0}^{q}\frac{2^{q-s}C_q^s\Gamma\left(\frac{3-k+2q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}+s+1\right)}t^{1-k+2s}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^s u(x,t;2-k+2q)=$$

$$=\frac{1}{1-k}\lim_{t\to 0}t^k\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{1-k}u(x,t;2-k+2q)\right)=$$

$$=\frac{1}{1-k}\lim_{t\to 0}t^k\left((1-k)t^{-k}v^{2-k+2q}+t^{1-k}u_t(x,t;2-k+2q)\right)=$$

$$=\frac{1}{1-k}\lim_{t\to 0}((1-k)u(x,t;2-k+2q)+tu_t(x,t;2-k+2q))=\psi(x).$$

Получим теперь представление $u(x,t;k)$ через интеграл. Используя формулу (13.20), получим

$$u(x,t;2-k+2q)=\frac{2t^{k-2q-1}\,\Gamma\left(\frac{3-k+2q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-k+2q-n-|\gamma|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}\int\limits_0^t(t^2-r^2)^{\frac{1-k+2q-n-|\gamma|}{2}}r^{n+|\gamma|-1}M_r^\gamma[\psi(x)]dr.$$

Заменим r на tr в последней формуле, тогда

$$u(x,t;2-k+2q)=\frac{2\,\Gamma\left(\frac{3-k+2q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-k+2q-n-|\gamma|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}\int\limits_0^1(1-r^2)^{\frac{1-k+2q-n-|\gamma|}{2}}r^{n+|\gamma|-1}M_{tr}^\gamma[\psi(x)]dr.$$

Если $2-k+2q>n+|\gamma|-1$, то применяя (13.36) и (13.37), запишем

$$u(x,t;k)=\frac{2^{-q}\Gamma\left(\frac{3-k}{2}\right)}{(1-k)\Gamma\left(\frac{3-k+2q}{2}\right)}\sum_{s=0}^{q}\frac{2^{q-s}C_q^s\Gamma\left(\frac{3-k+2q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-k}{2}+s\right)}t^{1-k+2s}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^s u(x,t;2-k+2q)=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{3-k}{2}\right)}{1-k}\sum_{s=0}^{q}\frac{C_q^s\,t^{1-k+2s}}{2^s\Gamma\left(\frac{3-k}{2}+s\right)}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^s u(x,t;2-k+2q)=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{3-k+2q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-k+2q-n-|\gamma|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}\sum_{s=0}^{q}\frac{C_q^s\,t^{1-k+2s}}{2^s\Gamma\left(\frac{3-k}{2}+s\right)}\times$$

$$\times\int\limits_0^1(1-r^2)^{\frac{1-k+2q-n-|\gamma|}{2}}r^{n+|\gamma|-1}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^s M_{tr}^{\gamma}[\psi(x)]dr.$$

Что и дает (13.34).

Если $2-k+2q=n+|\gamma|-1$, то $u(x,t;2-k+2q)=M_t^{\gamma}[\psi(x)]$ и, используя (13.37), получим

$$u(x,t;k)=\frac{2^{-q}\Gamma\left(\frac{3-k}{2}\right)}{(1-k)\Gamma\left(\frac{3-k+2q}{2}\right)}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^q\left(t^{n+|\gamma|-2}M_t^{\gamma}[\psi(x)]\right)=$$

$$=\frac{2^{-1-q}\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-k+2q}{2}\right)}\sum_{s=0}^{q}\frac{2^{q-s}C_q^s\Gamma\left(\frac{3-k+2q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-k}{2}+s\right)}t^{1-k+2s}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^s M_t^{\gamma}[\psi(x)]=$$

$$=\sum_{s=0}^{q}\frac{C_q^s\,\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)}{2^{s+1}\Gamma\left(\frac{3-k}{2}+s\right)}t^{1-k+2s}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^s M_t^{\gamma}[\psi(x)].$$

Доказательство закончено. □

Объединение предыдущих результатов дает решение рассматриваемой задачи с двумя ненулевыми условиями, представленное в виде суммы двух слагаемых.

Теорема 13.4. *Пусть* $\varphi=\varphi(x)$, $\varphi\in C_{ev}^{\left[\frac{n+|\gamma|-k}{2}\right]+2}$, $\psi=\psi(x)$, $\psi\in C_{ev}^{\left[\frac{n+|\gamma|+k-1}{2}\right]}$. *Тогда решение задачи*

$$(\triangle_\gamma)_x u=(B_k)_t u,\qquad u=u(t,x),\qquad (t,x)\in\mathbb{R}_+^{n+1},\tag{13.38}$$

$$u(x,0;k)=\varphi(x),\quad \lim_{t\to+0}t^k u_t(x,t;k)=\psi(x),\tag{13.39}$$

при $k\leqslant\min\{n+|\gamma|-1,1\}$ *дается формулой*

$$u(x,t;k)=u_1(x,t;k)+u_2(x,t;k),$$

где $u_1(x,t;k)$ *находится либо по теореме* 13.2*, либо по одной из формул* (13.30) *или* (13.31)*, и* $u_2(x,t;k)$ *находится по теореме* 13.3*.*

13.2. Преобразования Ханкеля и задача Коши для общего уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу. В этом пункте найдем решение[1] $u\in S'_{ev}(\mathbb{R}_+^n)\times C_{ev}^2(0,\infty)$ задачи Коши для общего уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу вида

$$(B_k)_t u=(\Delta_\gamma)_x u,\quad u=u(x,t;k),\quad x\in\mathbb{R}_+^n,\quad t>0,\tag{13.40}$$

$$u(x,0;k)=\varphi(x),\qquad u_t(x,0;k)=0.\tag{13.41}$$

при $\varphi(x)\in S'_{ev}$, $k\in\mathbb{R}$, применяя преобразование Ханкеля.

Докажем теорему о решении задачи Коши (13.40)-(13.41). В отличие от решений этой задачи, полученного методом операторов преобразования в пункте 13.1, метод преобразования Ханкеля дает возможность представления решения в виде одного выражения для всех $k\neq-1,-3,-5,\ldots$.

[1]Обозначение $u\in S'_{ev}(\mathbb{R}_+^n)\times C_{ev}^2(0,\infty)$ означает, что $u(x,t;k)$ принадлежит $S'_{ev}(\mathbb{R}_+^n)$ по переменной x и принадлежит $C_{ev}^2(0,\infty)$ по переменной t.

Теорема 13.5. *Решение* $u \in S'_{ev}(\mathbb{R}^n_+) \times C^2_{ev}(0,\infty)$ *задачи* (13.40)-(13.41) *при* $k \neq -1,-3,-5,\ldots$ *определяется равенством*

$$u(x,t;k) = \frac{2^n t^{1-k}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-n-|\gamma|+1}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}((t^2-|x|^2)_{+,\gamma}^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}} * \varphi(x))_\gamma. \tag{13.42}$$

Решение (13.42) *единственно при* $k \geqslant 0$ *и не единственно при* $k<0$.

При $k<0$ *и* $k \neq -1,-3,-5,\ldots$ *разность между двумя произвольными решениями задачи* (13.40)-(13.41) *всегда имеет вид*

$$At^{1-k}u(t,x;2-k), \tag{13.43}$$

где A — *произвольное комплексное число,* $u(t,x;2-k)$ — *решение задачи Коши*

$$[(\triangle_\gamma)_x - (B_{2-k})_t]\, u = 0,$$

$$u(x,0;2-k) = \tau(x), \qquad u_t(x,0;2-k) = 0,$$

$\tau(x)$ — *произвольная из* S'_{ev}. *При* $k=-1,-3,-5,\ldots$ *решение задачи Коши будет содержать слагаемое* (13.43) *и слагаемое*

$$\frac{e^{\pm\frac{1}{2}\pi n i}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|-k+1}{2}\right)}{2^n\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}t^{1-k}\left((t^2-|x|^2\pm i0)_\gamma^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}} * \varphi(x)\right)_\gamma.$$

Доказательство. Применяя к (13.40) по каждой из переменных $x_1,\ldots,x_n$ преобразование Ханкеля и учитывая (2.19), получим

$$\left(|\xi|^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)(\mathbf{F}_\gamma)_x[u(x,t;k)](\xi) = 0, \tag{13.44}$$

$$\lim_{t\to 0}(\mathbf{F}_\gamma)_x[u(x,t;k)](\xi) = \mathbf{F}_\gamma[\varphi(x)](\xi), \qquad \lim_{t\to 0}\frac{\partial(\mathbf{F}_\gamma)_x[u(x,t;k)](\xi)}{\partial t} = 0, \tag{13.45}$$

где $\xi = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n_+$ соответствует $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n_+$, $|\xi|^2 = \xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2$. Введем обозначения

$$\widehat{u}(\xi,t;k) = (\mathbf{F}_\gamma)_x[u(x,t;k)](\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} u(x,t;k)\,\mathbf{j}_\gamma(x;\xi)x^\gamma dx$$

и $\widehat{\varphi}(\xi) = \mathbf{F}_\gamma[\varphi(x)](\xi)$. Тогда (13.44)-(13.45) запишется в виде

$$\left(|\xi|^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)\widehat{u}(\xi,t) = 0, \tag{13.46}$$

$$\widehat{u}(\xi,0;k) = \widehat{f}(\xi), \qquad \widehat{u}_t(\xi,0;k) = 0. \tag{13.47}$$

В [188] получено решение $\widehat{G}^k(\xi,t)$ задачи Коши

$$\left(|\xi|^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)\widehat{G}^k(\xi,t) = 0, \tag{13.48}$$

$$\widehat{G}^k(\xi,0) = 1, \qquad \widehat{G}^k_t(\xi,0) = 0 \tag{13.49}$$

в виде

$$\widehat{G}^k(\xi,t) = j_{\frac{k-1}{2}}(|\xi|t), \tag{13.50}$$

для $k \geqslant 0$,

$$\widehat{G}^k(\xi,t) = j_{\frac{k-1}{2}}(|\xi|t) + At^{\frac{1-k}{2}}J_{\frac{1-k}{2}}(|\xi|t), \tag{13.51}$$

для $k<0$, $k\neq -1,-3,-5,\ldots$,

$$\widehat{G}^k(\xi,t) = Bt^{\frac{1-k}{2}}J_{\frac{1-k}{2}}(|\xi|t) - \frac{\pi 2^{\frac{k-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)}(|\xi|t)^{\frac{1-k}{2}}Y_{\frac{1-k}{2}}(|\xi|t), \tag{13.52}$$

для $k=-1,-3,-5,\ldots$.

В (13.50)–(13.52) A и B — произвольные комплексные числа и $Y_\nu(z)$ — функция Бесселя второго рода. Решения (13.51) и (13.52) зависят от постоянных A и B, поэтому они не единственны (см. [188]). Поскольку функция $\widehat{G}^k(\xi,t)$ найдена, то решение (13.44)-(13.45) имеет вид

$$\widehat{u}(\xi,t;k)=\widehat{G}^k(\xi,t)\cdot\widehat{\varphi}(\xi),$$

а решение (13.40)-(13.41) есть обобщенная свертка

$$u(x,t;k)=((\mathbf{F}_\gamma^{-1})_\xi[\widehat{G}^k(\xi,t)]*\varphi(x))_\gamma=(G^k(x,t)*\varphi(x))_\gamma.$$

Найдем теперь решение при $k\neq-1,-3,-5,\ldots$ и $A=0$. Полученное решение будет единственным при $k\geqslant 0$ и будет одним из возможных решений при $k<0$, $k\neq-1,-3,-5,\ldots$. Рассмотрим случай, когда $\widehat{G}^k(\xi,t)=j_{\frac{k-1}{2}}(|\xi|t)$. Используя (7.9) найдем $(\mathbf{F}_\gamma^{-1})_\xi[j_{\frac{k-1}{2}}(|\xi|t)](x)$:

$$G^k(x,t)=(\mathbf{F}_\gamma^{-1})_\xi[j_{\frac{k-1}{2}}(|\xi|\cdot t)](x)=\frac{2^n t^{1-k}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-n-|\gamma|+1}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}(t^2-|x|^2)_{+,\gamma}^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}}.$$

Тогда решение (13.40)-(13.41) имеет вид

$$u(x,t;k)=\frac{2^n t^{1-k}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-n-|\gamma|+1}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\left((t^2-|x|^2)_{+,\gamma}^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}}*\varphi(x)\right)_\gamma,\quad k\neq-1,-3,-5,\ldots \tag{13.53}$$

Поскольку $(t^2-|x|^2)_{+,\gamma}^{\lambda}$ имеет своим носителем замыкание внутренности части сферы $S_1^+(n)$ при $x_1\geqslant 0,\ldots,x_n\geqslant 0$, можно заключить, что обобщенная свертка существует для произвольного $\varphi(x)\in S'_+$.

Заметим теперь, что разность между двумя решениями задачи Коши (13.48)-(13.49) при $k<0$ имеет вид

$$Ct^{\frac{1-k}{2}}J_{\frac{1-k}{2}}(|\xi|t),$$

где C — произвольная комплексная постоянная. Тогда разность между двумя решениями задачи (13.40)-(13.41) при $k<0$ всегда записывается в виде

$$(G^k(x,t)*\varphi(x))_\gamma,\qquad \text{где}\qquad G^k(x,t)=(\mathbf{F}_\gamma^{-1})_\xi[Ct^{\frac{1-k}{2}}J_{\frac{1-k}{2}}(|\xi|t)](x).$$

Принимая во внимание лемму 13.1, запишем разность между двумя произвольными решениями (13.40)-(13.41) при $k<0$ в виде

$$\tau(x))_\gamma=At^{1-k}u(t,x;2-k),$$

где $\tau(x)\in S'_{ev}$, $u(t,x;2-k)$ — решение задачи Коши

$$[(\triangle_\gamma)_x-(B_{2-k})_t]\,u=0,$$

$$u(x,0;2-k)=\tau(x),\qquad u_t(x,0;2-k)=0,$$

а $G^{2-k}(x,t)$ — решение задачи

$$[(\triangle_\gamma)_x-(B_{2-k})_t]\,G^{2-k}(x,t)=0,$$

$$G^{2-k}(x,0)=\delta_\gamma,\qquad G_t^{2-k}(x,0)=0.$$

Рассмотрим, наконец, случай $k=-1,-3,-5,\ldots$. В этом случае решение задачи

$$[(\triangle_\gamma)_x-(B_k)_t]\,G^k(x,t)=0, \tag{13.54}$$

$$G^k(x,0)=\delta_\gamma,\qquad G_t^k(x,0)=0, \tag{13.55}$$

имеет другой характер по сравнению с рассмотренными случаями, а именно, оно будет содержать слагаемое

$$G^k(t,x)=\frac{\pi 2^{\frac{k-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)}(\mathbf{F}_\gamma^{-1})_\xi\left[(|\xi|\,t)^{\frac{1-k}{2}}\,Y_{\frac{1-k}{2}}(|\xi|\,t)\right](x).$$

Из определений функций Бесселя $H_\nu^{(1)}$, $H_\nu^{(2)}$ (см. (1.12) и (1.13)) ясно, что в этом случае

$$G_{(1)}^k(t,x)=\frac{i\pi 2^{\frac{k-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)}(\mathbf{F}_\gamma^{-1})_\xi\left[(|\xi|\,t)^{\frac{1-k}{2}}\,H_{\frac{1-k}{2}}^{(1)}(|\xi|\,t)\right](x),$$

$$G_{(2)}^k(t,x)=-\frac{i\pi 2^{\frac{k-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)}(\mathbf{F}_\gamma^{-1})_\xi\left[(|\xi|\,t)^{\frac{1-k}{2}}\,H_{\frac{1-k}{2}}^{(2)}(|\xi|\,t)\right](x)$$

также будут решениями (13.54)-(13.55). Тогда, используя (7.17) и (7.18), получим

$$G^k(x,t)=\frac{e^{\pm\frac{1}{2}\pi ni}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|-k+1}{2}\right)}{2^n\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\,t^{1-k}(t^2-|x|^2\pm i0)_\gamma^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}}.$$

Обобщенная свертка $(G^k(x,t)*\varphi(x))_\gamma$ существует для $f\in S'_{ev}$. Доказательство закончено. $\square$

Следствие 13.1. *Для* $k>n+|\gamma|-1$ *при* $f\in C_{ev}$ *решение* (13.40)-(13.41) *существует в классическом смысле и имеет вид*

$$u(x,t;k)=\frac{2^n\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-n-|\gamma|+1}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\int\limits_{B_1^+(n)}(1-|y|^2)^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}}\,{}^\gamma\mathbf{T}_x^{ty}\varphi(x)y^\gamma dy. \tag{13.56}$$

Используя весовое сферическое среднее (3.39), $u(x,t;k)$ *можно переписать в виде*

$$u(x,t;k)=\frac{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-n-|\gamma|+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}\int\limits_0^1(1-\rho^2)^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}}M_{t\rho}^\gamma[\varphi(x)]\rho^{n+|\gamma|-1}d\rho. \tag{13.57}$$

Доказательство. В случае $k>n+|\gamma|-1$ и $f(x)\in C_{ev}$ интеграл в (13.42) существует в классическом смысле. Тогда, рассматривая в (13.42) обычную функцию $(t^2-|x|^2)^\lambda$ вместо весовой обобщенной $(t^2-|x|^2)_{+,\gamma}^\lambda$, переходя к интегралу по части шара $B_t^+=\{x\in\mathbb{R}_+^n{:}|x|<t\}$ и производя замену переменных $x=ty$, получим (13.56).

Чтобы получить (13.57), перейдем в (13.56) к сферическим координатам $y=\rho\theta$ и воспользуемся тем, что

$$\int\limits_{S_1^+(n)}{}^\gamma\mathbf{T}_x^{t\rho\theta}f(x)\theta^\gamma dS=|S_1^+(n)|_\gamma M_{t\rho}^\gamma[\varphi(x)].$$

Доказательство закончено. Легко видеть, что (13.57) совпадает с полученной методом операторов преобразования формулой (13.20). $\square$

Замечание 13.1. Решение задачи, близкой к (13.40)-(13.41), было получено в [210] (см. также [192, с. 243]) при $k\neq-1,-3,-5,\ldots$ в терминах функции Лауричеллы [277, с. 33]:

$$\mathscr{F}_\gamma^{(n)}(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n;c;z_1,\ldots,z_n)=\sum_{m_1,\ldots,m_n}^{\infty}\frac{(a_1)_{m_1}\ldots(a_n)_{m_n}(b_1)_{m_1}\ldots(b_n)_{m_n}}{(c)_{m_1+\ldots+m_n}}\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\ldots\frac{z_n^{m_n}}{m_n!},$$

$$\max\{|z_1|,\ldots,|z_n|\}<1.$$

А именно, в [210] решение задачи

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{k}{t}\frac{\partial v}{\partial t}-\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}+\frac{\lambda_i}{x_i^2}v\right)=0,\qquad v=v(t,x), \tag{13.58}$$

$$v(0,x)=T(x),\qquad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \tag{13.59}$$

было найдено в виде

$$v(t,x)=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{k-n+1}{2}\right)}\int\limits_{|x-\xi|=|t|}|t|^{1-k}(t^2-|x-\xi|^2)^{\frac{k-n-1}{2}}T(\xi)\times$$

$$\times \mathscr{F}_{\gamma}^{(n)}\left(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n;\frac{k-n+1}{2};z_1,\ldots,z_n\right)dS_\xi, \tag{13.60}$$

где

$$a_1=\frac{1+\sqrt{1-4\lambda_1}}{2},\ldots,a_n\frac{1+\sqrt{1-4\lambda_n}}{2},\qquad b_1=\frac{1-\sqrt{1-4\lambda_1}}{2},\ldots,b_n=\frac{1-\sqrt{1-4\lambda_n}}{2},$$

$$z_1=\frac{t^2-|x-\xi|^2}{2x_1\xi_1},\ldots,z_n=\frac{t^2-|x-\xi|^2}{2x_n\xi_n}.$$

Если $\lambda_k=\frac{\gamma_k}{2}\left(1-\frac{\gamma_k}{2}\right)$, $i=1,\ldots,n$ и $u=x^{\frac{\gamma}{2}}v=x_1^{\frac{\gamma_1}{2}}\ldots x_n^{\frac{\gamma_n}{2}}v$, то мы получим нашу задачу (13.40)-(13.41). Очевидно, выражение (13.56) дает более удобную формулу для решения задачи (13.40)-(13.41).

13.3. Метод спуска для общего уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу. В этом пункте докажем теорему о решении задачи Коши для общего уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу применением теоремы 12.3.

Теорема 13.6. *Пусть* $\varphi\in C_{ev}^{\left[\frac{n+|\gamma|-k}{2}\right]+2}$. *Тогда решение задачи Коши*

$$(B_k)_t u=\Delta_\gamma u,\qquad u=u(x,t;k),\qquad (x,t)\in\mathbb{R}_+^{n+1}, \tag{13.61}$$

$$u(x,0;k)=\varphi(x),\quad u_t(x,0;k)=0 \tag{13.62}$$

при $n+|\gamma|-k>1$, $k\neq-1,-3,-5,\ldots$ *имеет вид*

$$u(x,t;k)=\frac{2t^{1-k}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\Gamma\left(m-\frac{n+|\gamma|-k-1}{2}\right)}\left(\frac{d}{2tdt}\right)^m\int\limits_0^t(t^2-s^2)^{m-\frac{n+|\gamma|-k-1}{2}-1}s^{n+|\gamma|-1}M_s^\gamma[\varphi(x)]ds,$$

где $m=\left[\dfrac{n+|\gamma|-k-1}{2}\right]+1.$

Доказательство. Выберем некоторое произвольное натуральное $q>1$. Если функция $u(x,t;k)$ удовлетворяет уравнению (13.61), то функция $\widetilde{u}(x,x'')$, где $x''=(t,x_{n+2},\ldots,x_{n+q})\in\mathbb{R}_+^q$, представляющая собой продолжение константой функции $u(x,t;k)$ по переменным $x_{n+2},\ldots,x_{n+q}$, очевидно, удовлетворяет B-ультрагиперболическому уравнению

$$(\Delta_\gamma)_x\widetilde{u}(x,x'')=(\Delta_\nu)_{x''}\widetilde{u}(x,x''), \tag{13.63}$$

где $\nu=(k,\nu_2,\ldots,\nu_q)$, $\nu_i>0$, $i=2,\ldots,q$. Мультииндекс ν содержит уже заданный в уравнении (12.3) параметр k, а остальные параметры $\nu_2,\ldots,\nu_q$ произвольны. Теперь подберем натуральное число $q>1$ и вещественные положительные числа ν_i, $i=2,\ldots,q$ так, чтобы выполнялось равенство $n+|\gamma|=q+|\nu|$, где $|\nu|=k+\nu_2+\ldots+\nu_q$. Это возможно, поскольку $n+|\gamma|-k>1$. Тогда в силу теоремы 12.3 для функции $\widetilde{u}(x,x'')$ справедливо равенство весовых сферических средних:

$$(M_r^\gamma)_x[\widetilde{u}(x,x'')]=(M_r^\nu)_{x'}[\widetilde{u}(x,x'')],\quad x''=(t,x_{n+2},\ldots,x_{n+q})\in\mathbb{R}_+^q.$$

Перепишем это соотношение в виде

$$\frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma}\int\limits_{S_1^+(n)}{}^\gamma\mathbf{T}_x^{r\xi}\widetilde{u}(x,y)\;\xi^\gamma\,dS=\frac{1}{|S_1^+(q)|_\nu}\int\limits_{S_1^+(q)}{}^\nu\mathbf{T}_{x''}^{r\zeta}\widetilde{u}(x,x'')\;\zeta^\nu\,dS, \tag{13.64}$$

где $S_1^+(n)=\{\xi\in\mathbb{R}_+^n{:}|\xi|=1\}$, $S_1^+(q)=\{\zeta\in\mathbb{R}_+^q{:}|\zeta|=1\}$. Поскольку функция $\widetilde{u}(x,x'')$ продолжена по переменным $x_{n+2},\ldots,x_{n+q}$ как константа, а каждый из одномерных обобщенных сдвигов не меняет констант, то полагая $t=0$ в ${}^\nu T_{x''}^{r\zeta}\widetilde{u}(x,x'')$, получаем

$${}^\nu T_{x''}^{r\zeta}\widetilde{u}(x,x'')|_{t=0}={}^kT_t^{r\zeta_1}\widetilde{u}(x,t,x_{n+2},\ldots,x_{n+q})|_{t=0}=u(x,r\zeta_1;k).$$

Следовательно, полагая $t=0$ в (13.64) и используя первое из начальных условий (13.62), имеем

$$\frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma}\int\limits_{S_1^+(n)}{}^\gamma\mathbf{T}_x^{r\xi}\varphi(x)\;\xi^\gamma\,dS=\frac{1}{|S_1^+(q)|_\nu}\int\limits_{S_1^+(q)}u(x,r\zeta_1;k)\;\zeta^\nu\,dS.$$

Слева в последнем равенстве получилось весовое сферическое среднее заданной начальным условием (13.62) функции φ. Поэтому для нахождения функции $u=u(x,t;k)$ остается решить интегральное уравнение

$$\frac{1}{|S_1^+(q)|_\nu}\int\limits_{S_1^+(q)} u(x,r\zeta_1;k)\ \zeta^\nu\,dS=M_r^\gamma[\varphi(x)]. \tag{13.65}$$

Выражение слева в (13.65) сводится к одномерному интегрированию переходом к сферическим координатам

$$\zeta_1=\cos\theta_1,$$
$$\zeta_2=\sin\theta_1\ \cos\theta_2,$$
$$\ldots$$
$$\zeta_{q-1}=\sin\theta_1\ \sin\theta_2\ldots\sin\theta_{q-2}\cos\theta_{q-1},$$
$$\zeta_q=\sin\theta_1\ \sin\theta_2\ldots\sin\theta_{q-2}\sin\theta_{q-1},$$
$$dS=\sin^{q-2}\theta_1\ d\theta_1\ \ \sin^{q-2}\theta_2\ d\theta_2\ \ldots\ \sin\theta_{q-2}\ d\theta_{q-2}\ d\theta_{q-1}.$$

Тогда, полагая $\nu'=(\nu_2,\ldots,\nu_q)$, получим

$$\frac{1}{|S_1^+(q)|_\nu}\int\limits_{S_1^+(q)} u(x,r\zeta_1;k)\ \zeta^\nu\,dS=\frac{1}{|S_1^+(q)|_\nu}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} u(x,r\cos\theta_1;k)\ \sin^{q+|\nu'|-2}\theta_1\ \cos^k\theta_1\ d\theta_1\ \times$$

$$\times\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{q+|\nu'|-3}\theta_2\ \cos^{\nu_2}\theta_2\ d\theta_2\ldots\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{1+\nu_{q-1}}\theta_2\ \cos^{\nu_q}\theta_{q-1}\ d\theta_2\ \times$$

$$\times\int\limits_0^{\pi}\sin^{\nu_{q-1}}\theta_2\ \cos^{\nu_q}\theta_{q-1}\ d\theta_2=\frac{1}{|S_1^+(q)|_\nu}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} u(x,r\cos\theta;k)\ \sin^{q+|\nu'|-2}\theta\ \cos^k\theta\ d\theta\ \times$$

$$\times\frac{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{q+|\nu|-2}\theta_1\cos^k\theta_1\,d\theta_1}{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{q+|\nu|-2}\theta_1\cos^k\theta_1\,d\theta_1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{q+\nu_2-3}\theta_2\cos^{\nu_2}\theta_2\,d\theta_2\ldots\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{1+\nu_2}\theta_2\cos^{\nu_q}\theta_{q-1}\ d\theta_2\times$$

$$\times\int\limits_0^{\pi}\sin^{\nu_{q-2}}\theta_2\ \cos^{\nu_q}\theta_{q-2}\ d\theta_2.$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{q+|\nu|-2}\theta_1\ \cos^k\theta_1\ d\theta_1}=\frac{2}{B\left(\frac{q+|\nu'|-1}{2},\ \frac{k+1}{2}\right)}=\frac{2\Gamma\left(\frac{q+|\nu|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q+|\nu'|-1}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)},$$

получаем

$$\frac{1}{|S_1^+(q)|_\nu}\int\limits_{S_1^+(q)} u(x,r\zeta_1;k)\ \zeta^\nu\,dS=\frac{2\Gamma\left(\frac{q+|\nu|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q+|\nu'|-1}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} u(x,r\cos\theta;k)\ \sin^{q+|\nu'|-2}\theta\ \cos^k\theta\ d\theta=$$

$$=\frac{2r^{2-q-|\nu'|-k}\Gamma\left(\frac{q+|\nu|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q+|\nu'|-1}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}\int\limits_0^{r}(r^2-z^2)^{\frac{q+|\nu'|-1}{2}-1}\,z^k\,u(x,z;k)\,dz.$$

В силу равенства $n+|\gamma|=q+|\nu|$, имеем $q+|\nu'|=n+|\gamma|-k$ и

$$\frac{1}{|S_1^+(q)|_\nu}\int\limits_{S_1^+(q)} u(x,r\zeta_1;k)\,\zeta^\nu\,dS=\frac{2r^{2-(n+|\gamma|)}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|-k-1}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}\int\limits_0^r(r^2-z^2)^{\frac{n+|\gamma|-k-1}{2}-1}\,z^k\,u(x,z;k)\,dz. \tag{13.66}$$

Для $\alpha>0$ определен левосторонний интеграл Эрдейи—Кобера (см. [136, формула 18.1, с. 246])

$$I^\alpha_{a+;2,\eta}f(r)=\frac{2r^{-2(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^r(r^2-s^2)^{\alpha-1}s^{2\eta+1}f(s)ds,$$

поэтому равенство (13.66) можно переписать в виде

$$\frac{1}{|S_1^+(q)|_\nu}\int\limits_{S_1^+(q)} u(x,r\zeta_1;k)\,\zeta^\nu\,dS=\frac{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}\left(I^{\frac{n+|\gamma|-k-1}{2}}_{0+;2,\frac{k-1}{2}}\right)_r u(x,r;k). \tag{13.67}$$

Тогда, возвращаясь к (13.65), получим

$$\left(I^{\frac{n+|\gamma|-k-1}{2}}_{0+;2,\frac{k-1}{2}}\right)_r u(x,r;k)=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}M_r^\gamma[\varphi(x)]. \tag{13.68}$$

Интеграл Эрдейи—Кобера $I^\alpha_{a+;2,\eta}f(r)$ связан с интегралом Римана—Лиувилля (Лиувилля) формулой:

$$I^\alpha_{a+;2,\eta}f(r)=y^{-\alpha-\eta}(I^\alpha_{a^2+}g)(y),\qquad g(y)=y^\eta f(r),\qquad y=r^2,$$

поэтому для этого оператора существует обратный для некоторого класса функций (см. пункт 2.4). Значение обратного оператора к $I^\alpha_{a+;2,\eta}f(r)$ определяется формулой (см. [136, формула 18.17, с. 247]) вида

$$(I^\alpha_{a+;2,\eta})^{-1}f(r)=I^{-\alpha}_{a+;2,\eta+\alpha}f(r),$$

где

$$I^{-\alpha}_{a+;2,\eta+\alpha}f(r)=r^{-2\eta}\left(\frac{d}{2rdr}\right)^m r^{2(m+\eta)}I^{m-\alpha}_{a+;2,\eta+\alpha}f(r),\qquad m=[\alpha]+1.$$

Тогда, применяя к обеим частям в (13.68) по r оператор $I^{-\frac{n+|\gamma|-k-1}{2}}_{0+;2,\dfrac{n+|\gamma|}{2}-1}$, получим

$$u(x,r;k)=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}\left(I^{-\frac{n+|\gamma|-k-1}{2}}_{0+;2,\frac{n+|\gamma|}{2}-1}\right)_r M_r^\gamma[\varphi(x)],$$

или

$$u(x,t;k)=t^{1-k}\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}\left(\frac{d}{2tdt}\right)^m t^{2m+k-1}\left(I^{m-\frac{n+|\gamma|-k-1}{2}}_{0+;2,\frac{n+|\gamma|}{2}-1}\right)_t M_t^\gamma[\varphi(x)].$$

Поскольку

$$I^{m-\frac{n+|\gamma|-k-1}{2}}_{0+;2,\frac{n+|\gamma|}{2}-1}f(t)=\frac{2t^{1-2m-k}}{\Gamma\left(m-\frac{n+|\gamma|-k-1}{2}\right)}\int\limits_0^t(t^2-s^2)^{m-\frac{n+|\gamma|-k-1}{2}-1}s^{n+|\gamma|-1}f(s)ds,$$

то

$$u(x,t;k)=\frac{2t^{1-k}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\Gamma\left(m-\frac{n+|\gamma|-k-1}{2}\right)}\left(\frac{d}{2tdt}\right)^m\int\limits_0^t(t^2-s^2)^{m-\frac{n+|\gamma|-k-1}{2}-1}s^{n+|\gamma|-1}M_s^\gamma[\varphi(x)]ds,$$

где $m=\left[\dfrac{n+|\gamma|-k-1}{2}\right]+1$. Теорема доказана. □

13.4. Примеры. В этом пункте приведем примеры решения рассмотренных задач Коши в случае, когда x одномерно. Графики построены при помощи Wolfram | Alpha.

Для первой задачи Коши имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\gamma}{x}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{k}{t}\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{13.69}$$

$$u(x,0;k)=\varphi(x), \qquad u_t(x,0;k)=0, \qquad \varphi(x)\in C^2_{ev}(\overline{\mathbb{R}}^1_+). \tag{13.70}$$

При $k>\gamma>0$ решение (13.69)-(13.70) дается формулой (13.20)

$$u(x,t;k)=\frac{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\int\limits_0^1(1-y^2)^{\frac{k-\gamma-2}{2}}\,{}^\gamma T_x^{ty}\varphi(x)y^\gamma dy. \tag{13.71}$$

При $k<\gamma$ решение (13.69)-(13.70) находится по формулам (13.23), (13.30) или (13.31).

Обозначим

$${}^{k,\gamma}T_x^t\varphi(x)=C(\gamma,k)\int\limits_0^1(1-y^2)^{\frac{k-\gamma-2}{2}}T_x^{ty}[\varphi(x)]y^\gamma dy, \tag{13.72}$$

$$C(\gamma,k)=\frac{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}.$$

Оператор (13.72) представляет собой преобразования, поскольку для него справедливо равенство

$${}^{k,\gamma}T_x^t(B_\gamma)_x\varphi(x)=(B_k)_t\,{}^{k,\gamma}T_x^t\varphi(x).$$

Кроме того, ${}^{k,\gamma}T_x^t j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)=j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)j_{\frac{k-1}{2}}(t)$ (см. пример 13.1).

Рассмотрим теперь вторую задачу Коши. Пусть $k<1$, $\gamma>0$ и $2-k>\gamma$. Для задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\gamma}{x}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{k}{t}\frac{\partial u}{\partial t} \tag{13.73}$$

$$u(x,0;k)=0, \qquad \lim_{t\to 0}t^k\frac{\partial u}{\partial t}=\psi(x), \qquad \psi\in C_{ev}^{\left[\frac{n+|\gamma|+k-1}{2}\right]}. \tag{13.74}$$

условие $2-k>\gamma$ означает, что можно взять $q=0$ в формуле (13.34). Решение $u(x,t;k)$ задачи (13.73)-(13.74) имеет вид

$$u(x,t;k)=\frac{1}{(1-k)}\,t^{1-k}\,u(x,t;2-k)=\frac{2\Gamma\left(\frac{3-k}{2}\right)t^{1-k}}{(1-k)\Gamma\left(\frac{2-k-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\int\limits_0^1(1-\xi^2)^{-\frac{k+\gamma}{2}}\,{}^\gamma T_x^{t\xi}\psi(x)\,\xi^\gamma d\xi. \tag{13.75}$$

При $0<k<1$ и $k<\gamma<2-k$ решение задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\gamma}{x}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{k}{t}\frac{\partial u}{\partial t} \tag{13.76}$$

$$u(x,0;k)=\varphi(x), \qquad \lim_{t\to 0}t^k\frac{\partial u}{\partial t}=\psi(x), \qquad \psi\in C_{ev}^{\left[\frac{n+|\gamma|+k-1}{2}\right]} \tag{13.77}$$

имеет вид

$$u(x,t;k)=\frac{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\int\limits_0^1(1-y^2)^{\frac{k-\gamma-2}{2}}\,{}^\gamma T_x^{ty}\varphi(x)y^\gamma dy+$$

$$+\frac{2\Gamma\left(\frac{3-k}{2}\right)t^{1-k}}{(1-k)\Gamma\left(\frac{2-k-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\int\limits_0^1(1-y^2)^{-\frac{k+\gamma}{2}}\,{}^\gamma T_x^{ty}\psi(x)\,y^\gamma d\xi. \tag{13.78}$$

Пример 13.1. Найдем решение задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\gamma}{x}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{k}{t}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad k>\gamma>0,$$

$$u(x,0;k)=j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x), \qquad \left.\frac{\partial u(x,t;k)}{\partial t}\right|_{t=0}=0.$$

По формуле (13.71) получим

$$u(x,t;k)=\frac{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\int\limits_0^1(1-y^2)^{\frac{k-\gamma-2}{2}}\,{}^\gamma T_x^{ty} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)y^\gamma dy.$$

Справедлива формула (3.19):

$${}^\gamma T_x^{ty} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)=j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)j_{\frac{\gamma-1}{2}}(ty),$$

следовательно,

$$u(x,t;k)=j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)\,t^{\frac{1-\gamma}{2}}\,\frac{2^{\frac{\gamma+1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\gamma}{2}\right)}\int\limits_0^1(1-y^2)^{\frac{k-\gamma-2}{2}}J_{\frac{\gamma-1}{2}}(ty)\,y^{\frac{\gamma+1}{2}}dy.$$

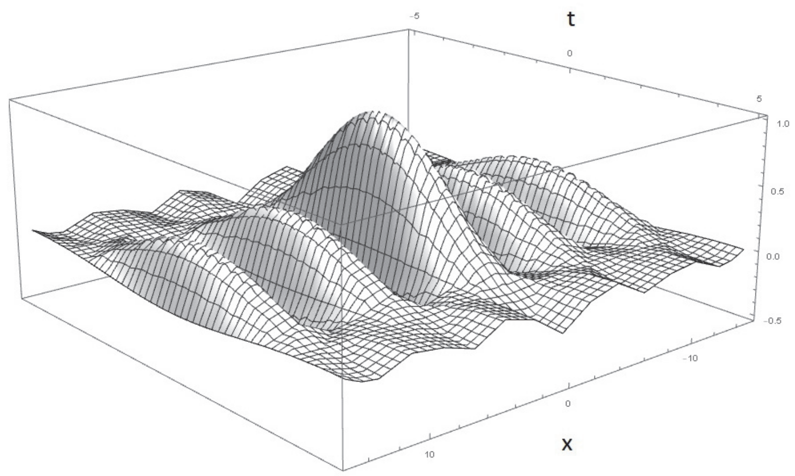

Рис. 1. $u(x,t;k)=j_{-\frac{1}{6}}(x)j_{\frac{3}{4}}(t)$.

Используя соотношение [127, формула 2.12.4.6] в виде

$$\int\limits_0^a x^{\nu+1}(a^2-x^2)^{\beta-1}J_\nu(cx)dx=\frac{2^{\beta-1}a^{\beta+\nu}}{c^\beta}\Gamma(\beta)J_{\beta+\nu}(ac), \tag{13.79}$$

$$a>0, \qquad \operatorname{Re}\beta>0, \qquad \operatorname{Re}\nu>-1,$$

получим

$$u\left(x,t;\frac{5}{2}\right)=j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)j_{\frac{k-1}{2}}(t). \tag{13.80}$$

График решения (13.80) при $k=\dfrac{5}{2}$ и $\gamma=\dfrac{2}{3}$, продолженного четным образом на отрицательные значения x и t, приведен на рис. 1.

Пример 13.2. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\gamma}{x}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{k}{t}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 1-\gamma\leqslant k<\gamma, \quad k\neq-1,-3,-5,\ldots, \quad \gamma>\frac{1}{2},$$

$$u(x,0;k) = j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x), \qquad \left.\frac{\partial u(x,t;k)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Решение такой задачи дается формулой (13.23) при $n = m = 1$:

$$u(x,t;k) = \frac{1}{t^k}\frac{\partial}{\partial t}(t^{k+1}u(x,t;k+2)),$$

где $u(x,t;k+2)$ — решение задачи Коши вида

$$(B_{k+2})_t u = (\Delta_\gamma)_x u,$$

$$u(x,0;k+2) = \frac{j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)}{k+1}, \qquad u_t(x,0;k+2) = 0.$$

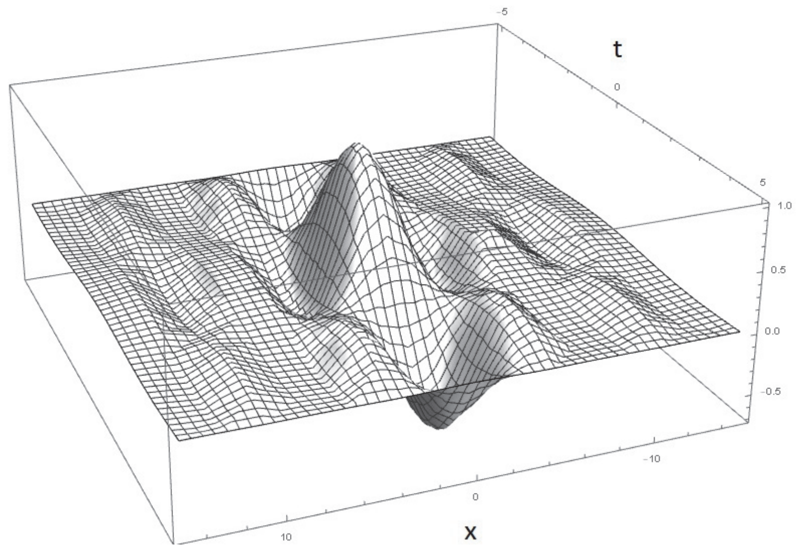

Рис. 2. $u\left(x,t;\dfrac{1}{3}\right) = {}_0F_1\left(;\dfrac{2}{3};-\dfrac{t^2}{4}\right) {}_0F_1\left(;\dfrac{5}{4};-\dfrac{x^2}{4}\right)$.

Используя предыдущий пример, получим

$$u(x,t;k+2) = \frac{1}{k+1} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x) j_{\frac{k+1}{2}}(t).$$

и, следовательно,

$$u(x,t;k) = {}_0F_1\left(;\frac{\gamma+1}{2};-\frac{x^2}{4}\right) {}_0F_1\left(;\frac{k+1}{2};-\frac{t^2}{4}\right). \tag{13.81}$$

График решения (13.81) при $k = \dfrac{1}{3}$ и $\gamma = \dfrac{3}{2}$, продолженного четным образом на отрицательные значения x и t, приведен на рис. 2.

Пример 13.3. Найдем решение задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad k > \gamma > 0,$$

$$u(x,0;k) = i_{\frac{\gamma-1}{2}}(x), \qquad \left.\frac{\partial u(x,t;k)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Используя формулы (13.71), (3.20) и [127, формула 2.15.2.6], получим

$$u(x,t;k) = i_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)\, t^{\frac{1-\gamma}{2}}\, \frac{2^{\frac{\gamma+1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\gamma}{2}\right)} \int\limits_0^1 (1-y^2)^{\frac{k-\gamma-2}{2}} I_{\frac{\gamma-1}{2}}(ty)\, y^{\frac{\gamma+1}{2}} dy = i_{\frac{\gamma-1}{2}}(x) i_{\frac{k-1}{2}}(t).$$

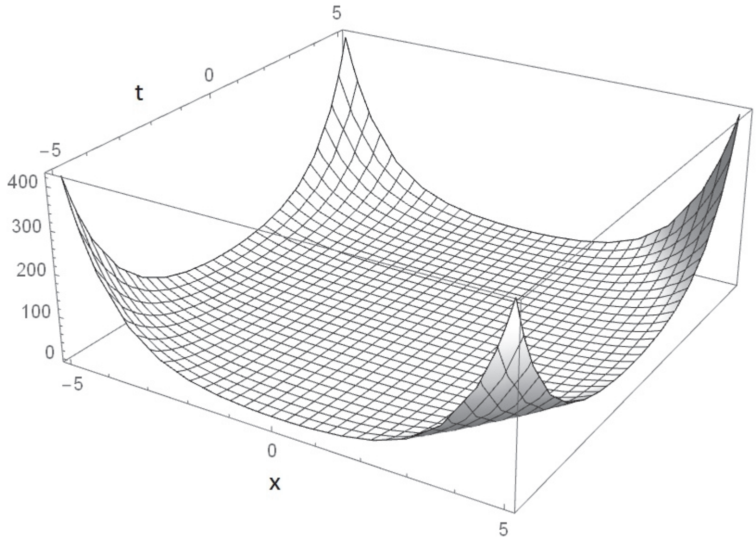

Рис. 3. $u\left(x,t;\dfrac{5}{2}\right)=i_{-\frac{1}{6}}(x)i_{\frac{3}{4}}(t)$.

График решения (13.80) при $k=\dfrac{5}{2}$ и $\gamma=\dfrac{2}{3}$, продолженного четным образом на отрицательные значения x и t, приведен на рис. 3.

Пример 13.4. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\gamma}{x}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{k}{t}\frac{\partial u}{\partial t},\qquad k>\gamma>0,$$

$$u(x,0;k)=e^{-x^2},\qquad \left.\frac{\partial u(x,t;k)}{\partial t}\right|_{t=0}=0.$$

Учитывая формулы (13.71) и (3.16), будем иметь

$$u(x,t;k)=\frac{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\int\limits_0^1(1-y^2)^{\frac{k-\gamma-2}{2}}\,{}^{\gamma}T_x^{ty}e^{-x^2}\,y^{\gamma}dy=$$

$$=\frac{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\gamma}{2}\right)}e^{-x^2}(xt)^{\frac{1-\gamma}{2}}\int\limits_0^1(1-y^2)^{\frac{k-\gamma-2}{2}}e^{-(ty)^2}I_{\frac{\gamma-1}{2}}(2xyt)\;y^{\frac{\gamma+1}{2}}dy.$$

Пусть $k=4$, $\gamma=2$. Получим

$$u(x,t;4)=\frac{2\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\sqrt{\pi}xt}e^{-x^2}\int\limits_0^1 e^{-(ty)^2}\operatorname{sh}(2xyt)\,ydy=\frac{3e^{-x^2}}{2xt}\int\limits_0^1 e^{-(ty)^2}\operatorname{sh}(2xyt)\,ydy=$$

$$=\frac{3}{8t^3}\left[\sqrt{\pi}(\operatorname{erf}(t-x)+\operatorname{erf}(t+x))-\frac{e^{-(t+x)^2(e^{4tx-1})}}{x}\right],\tag{13.82}$$

где $\operatorname{erf}(z)$ — функция ошибок (1.11).

График решения (13.82), продолженного четным образом на отрицательные значения x и t, приведен на рис. 4.

Пример 13.5. Найдем решение задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\gamma}{x}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{k}{t}\frac{\partial u}{\partial t},\qquad k>\gamma>0,$$

$$u(x,0;k)=x^{2m},\qquad \left.\frac{\partial u(x,t;k)}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\qquad m\in\mathbb{N}.$$

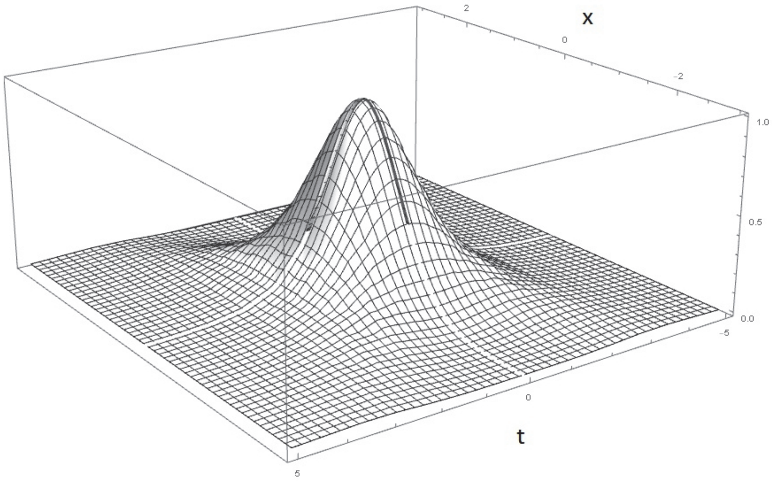

Рис. 4. $u(x,t;4)=\dfrac{3}{8t^3}\left[\sqrt{\pi}(\operatorname{erf}(t-x)+\operatorname{erf}(t+x))-\dfrac{e^{-(t+x)^2(e^{4tx-1})}}{x}\right].$

Используя (13.56) и (3.14), получим

$$u(x,t;k)=\frac{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\int\limits_0^1(1-y^2)^{\frac{k-\gamma-2}{2}}\,{}^\gamma T_x^{ty}x^{2m}y^\gamma dy=$$

$$=\frac{2x^{2m}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\int\limits_0^{x/t}(1-y^2)^{\frac{k-\gamma-2}{2}}\,{}_2F_1\left(-m,\frac{1-\gamma}{2}-m,\frac{\gamma+1}{2};\frac{(ty)^2}{x^2}\right)y^\gamma dy+$$

$$+\frac{2t^{2m}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\int\limits_{x/t}^1(1-y^2)^{\frac{k-\gamma-2}{2}}\,{}_2F_1\left(-m,\frac{1-\gamma}{2}-m,\frac{\gamma+1}{2};\frac{x^2}{(ty)^2}\right)y^{\gamma+2m}dy=$$

$$\{y^2=\eta,\ x^2=\xi,\ t^2=\tau\}$$

$$=\frac{\xi^m\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\int\limits_0^{\xi/\tau}(1-\eta)^{\frac{k-\gamma-2}{2}}\,{}_2F_1\left(-m,\frac{1-\gamma}{2}-m,\frac{\gamma+1}{2};\frac{\tau\eta}{\xi}\right)\eta^{\frac{\gamma-1}{2}}d\eta+$$

$$+\frac{\tau^m\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\int\limits_{\xi/\tau}^1(1-\eta)^{\frac{k-\gamma-2}{2}}\,{}_2F_1\left(-m,\frac{1-\gamma}{2}-m,\frac{\gamma+1}{2};\frac{\xi}{\tau\eta}\right)\eta^{\frac{\gamma+2m-1}{2}}d\eta.$$

Применяя соотношение [1, формула 15.4.1] в виде

$${}_2F_1(-m,b;c;z)=\sum_{j=0}^m\frac{(-m)_j(b)_j}{(c)_j}\frac{z^j}{j!},\qquad m\in\mathbb{N},$$

получим при $y^2=\eta$, $x^2=\xi$, $t^2=\tau$

$$u(x,t;k)=\frac{\xi^m\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\sum_{j=0}^m\frac{(-m)_j\left(\frac{1-\gamma}{2}-m\right)_j}{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)_j}\frac{1}{j!}\left(\frac{\tau}{\xi}\right)^j\int\limits_0^{\xi/\tau}(1-\eta)^{\frac{k-\gamma-2}{2}}\eta^{j+\frac{\gamma-1}{2}}d\eta+$$

$$+\frac{\tau^m\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\sum_{j=0}^m\frac{(-m)_j\left(\frac{1-\gamma}{2}-m\right)_j}{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)_j}\frac{1}{j!}\left(\frac{\xi}{\tau}\right)^j\int\limits_{\xi/\tau}^1(1-\eta)^{\frac{k-\gamma-2}{2}}\eta^{\frac{\gamma+2m-1}{2}-j}d\eta.$$

Рассмотрим интеграл в первом слагаемом:

$$\int\limits_0^{\xi/\tau}(1-\eta)^{\frac{k-\gamma-2}{2}}\eta^{j+\frac{\gamma-1}{2}}d\eta=\left\{\eta=\frac{\xi}{\tau}w\right\}=\left(\frac{\xi}{\tau}\right)^{j+\frac{\gamma-1}{2}+1}\int\limits_0^1\left(1-\frac{\xi}{\tau}w\right)^{\frac{k-\gamma-2}{2}}w^{j+\frac{\gamma-1}{2}}dw=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}+j\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}+j+1\right)}\left(\frac{\xi}{\tau}\right)^{j+\frac{\gamma-1}{2}+1}{}_2F_1\left(\frac{2+\gamma-k}{2},\frac{\gamma+1}{2}+j;\frac{\gamma+1}{2}+j+1;\frac{\xi}{\tau}\right).$$

Рассмотрим интеграл во втором слагаемом:

$$\int\limits_{\xi/\tau}^1(1-\eta)^{\frac{k-\gamma-2}{2}}\eta^{\frac{\gamma+2m-1}{2}-j}d\eta=\left\{1-\eta=\left(1-\frac{\xi}{\tau}\right)w\right\}=$$

$$=\left(1-\frac{\xi}{\tau}\right)^{\frac{k-\gamma}{2}}\int\limits_0^1 w^{\frac{k-\gamma-2}{2}}\left(1-\left(1-\frac{\xi}{\tau}\right)w\right)^{\frac{\gamma+2m-1}{2}-j}dw=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{k-\gamma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\gamma}{2}+1\right)}\left(1-\frac{\xi}{\tau}\right)^{\frac{k-\gamma}{2}}{}_2F_1\left(j-m-\frac{\gamma-1}{2},\frac{k-\gamma}{2};\frac{k-\gamma}{2}+1;1-\frac{\xi}{\tau}\right).$$

Будем иметь при $y^2=\eta$, $x^2=\xi$, $t^2=\tau$:

$$u(x,t;k)=\frac{\xi^m\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\left(\frac{\xi}{\tau}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}+1}\sum_{j=0}^m\frac{(-m)_j\left(\frac{1-\gamma}{2}-m\right)_j}{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)_j}\frac{1}{j!}\frac{2}{\gamma+1+2j}\times$$

$$\times{}_2F_1\left(\frac{2+\gamma-k}{2},\frac{\gamma+1}{2}+j;\frac{\gamma+1}{2}+j+1;\frac{\xi}{\tau}\right)+$$

$$+\frac{\tau^m\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\left(1-\frac{\xi}{\tau}\right)^{\frac{k-\gamma}{2}}\sum_{j=0}^m\frac{(-m)_j\left(\frac{1-\gamma}{2}-m\right)_j}{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)_j}\frac{1}{j!}\left(\frac{\xi}{\tau}\right)^j\frac{2}{k-\gamma}\times$$

$$\times{}_2F_1\left(j-m-\frac{\gamma-1}{2},\frac{k-\gamma}{2};\frac{k-\gamma}{2}+1;1-\frac{\xi}{\tau}\right)=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\sum_{j=0}^m\frac{(-m)_j\left(\frac{1-\gamma}{2}-m\right)_j}{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)_j}\frac{1}{j!}\times$$

$$\times\left[\frac{2\xi^m}{\gamma+1+2j}\left(\frac{\xi}{\tau}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}+1}{}_2F_1\left(\frac{2+\gamma-k}{2},\frac{\gamma+1}{2}+j;\frac{\gamma+1}{2}+j+1;\frac{\xi}{\tau}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{2\tau^m}{k-\gamma}\left(1-\frac{\xi}{\tau}\right)^{\frac{k-\gamma}{2}}\left(\frac{\xi}{\tau}\right)^j{}_2F_1\left(j-m-\frac{\gamma-1}{2},\frac{k-\gamma}{2};\frac{k-\gamma}{2}+1;1-\frac{\xi}{\tau}\right)\right].$$

Возвращаясь к x и t, запишем

$$u(x,t;k)=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\sum_{j=0}^m\frac{(-m)_j\left(\frac{1-\gamma}{2}-m\right)_j}{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)_j}\frac{1}{j!}\times$$

$$\times\left[\frac{2x^{2m}}{\gamma+1+2j}\left(\frac{x^2}{t^2}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}+1}{}_2F_1\left(\frac{2+\gamma-k}{2},\frac{\gamma+1}{2}+j;\frac{\gamma+1}{2}+j+1;\frac{x^2}{t^2}\right)+\right.$$

$$+\frac{2t^{2m}}{k-\gamma}\left(1-\frac{x^2}{t^2}\right)^{\frac{k-\gamma}{2}}\left(\frac{x^2}{t^2}\right)^j {}_2F_1\left(j-m-\frac{\gamma-1}{2},\frac{k-\gamma}{2};\frac{k-\gamma}{2}+1;1-\frac{x^2}{t^2}\right)\Bigg].$$

При $k=4$, $\gamma=2$, $m=1$, получим

$$u(x,t;4)=\frac{3}{2}\sum_{j=0}^{1}\frac{(-1)_j\left(-\frac{3}{2}\right)_j}{\left(\frac{3}{2}\right)_j}\frac{1}{j!}\left[\frac{2x^2}{3+2j}\left(\frac{x}{t}\right)^3+(t^2-x^2)\left(\frac{x^2}{t^2}\right)^j {}_2F_1\left(j-\frac{3}{2},1;2;1-\frac{x^2}{t^2}\right)\right]=$$

$$=\frac{3}{2}\frac{(-1)_0\left(-\frac{3}{2}\right)_0}{\left(\frac{3}{2}\right)_0}\left[\frac{2x^2}{3}\left(\frac{x}{t}\right)^3+(t^2-x^2)\,{}_2F_1\left(-\frac{3}{2},1;2;1-\frac{x^2}{t^2}\right)\right]+$$

$$+\frac{3}{2}\frac{(-1)_1\left(-\frac{3}{2}\right)_1}{\left(\frac{3}{2}\right)_1}\left[\frac{2x^2}{5}\left(\frac{x}{t}\right)^3+(t^2-x^2)\left(\frac{x^2}{t^2}\right){}_2F_1\left(-\frac{1}{2},1;2;1-\frac{x^2}{t^2}\right)\right]=$$

$$=\frac{3}{2}\left[\frac{2x^5}{3t^3}+\frac{2}{5}\left(t^2-\frac{x^5}{t^3}\right)\right]+\frac{3}{2}\left[\frac{2x^5}{5t^3}+\frac{2}{3}\left(x^2-\frac{x^5}{t^3}\right)\right]=\frac{3}{5}t^2+x^2.$$

График решения при $k=\dfrac{1}{2}$ и $\gamma=1$, продолженного четным образом на отрицательные значения x и t, приведен на рис. 5.

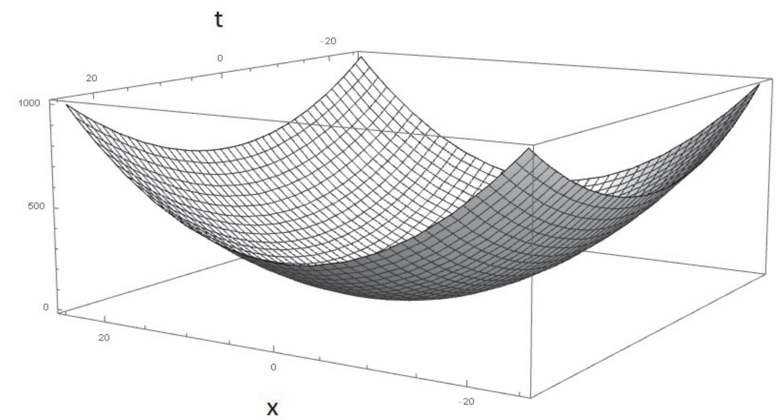

Рис. 5. $u(x,t;4)=\dfrac{3}{5}t^2+x^2$.

Пример 13.6. Решим задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\gamma}{x}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{k}{t}\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{13.83}$$

$$u(x,0;k)=0,\qquad \lim_{t\to 0}t^k\frac{\partial u}{\partial t}=j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x),\qquad k<1,\qquad \gamma>0,\qquad 2-k>\gamma. \tag{13.84}$$

Используя (13.75) и (3.7), получим

$$u(x,t;k)=\frac{2\Gamma\left(\frac{3-k}{2}\right)\,t^{1-k}\,j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)}{(1-k)\Gamma\left(\frac{2-k-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\int\limits_0^1(1-\xi^2)^{-\frac{k+\gamma}{2}}j_{\frac{\gamma-1}{2}}(t\xi)\xi^\gamma d\xi=\frac{t^{1-k}}{1-k}\,j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)j_{\frac{1-k}{2}}(t). \tag{13.85}$$

График решения (13.85) при $k=\dfrac{1}{2}$ и $\gamma=1$, продолженного четным образом на отрицательные значения x и t, приведен на рис. 6.

Пример 13.7. Из рассмотренных примеров следует, что при $0<k<1$ и $k<\gamma<2-k$ решение задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\gamma}{x}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{k}{t}\frac{\partial u}{\partial t} \tag{13.86}$$

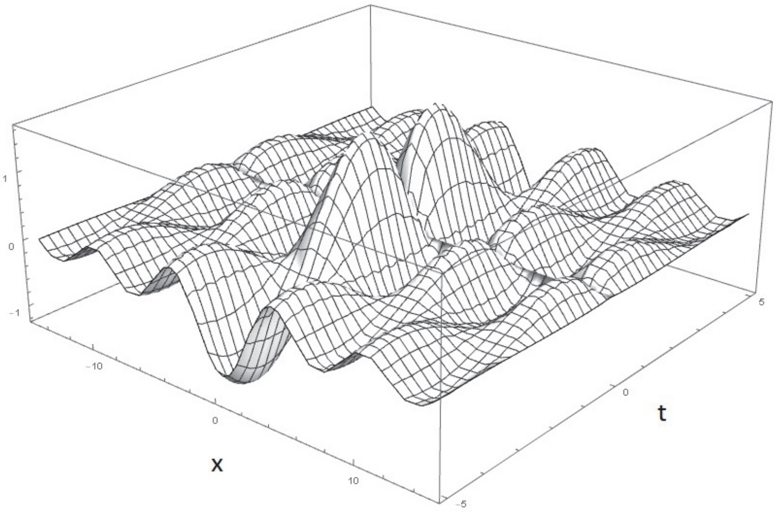

Рис. 6. $u\left(x,t;\dfrac{1}{2}\right)=2\sqrt{t}j_0(x)j_{\frac{1}{4}}(t)$.

$$u(x,0;k)=j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x),\qquad \lim_{t\to0}t^k\,\frac{\partial u}{\partial t}=j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x), \tag{13.87}$$

имеет вид

$$u(x,t;k)=j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)\left(j_{\frac{k-1}{2}}(t)+\frac{t^{1-k}}{1-k}\,j_{\frac{1-k}{2}}(t)\right).$$

График решения при $k=\dfrac{1}{2}$ и $\gamma=\dfrac{3}{4}$, продолженного четным образом на отрицательные значения x и t, приведен на рис. 7.

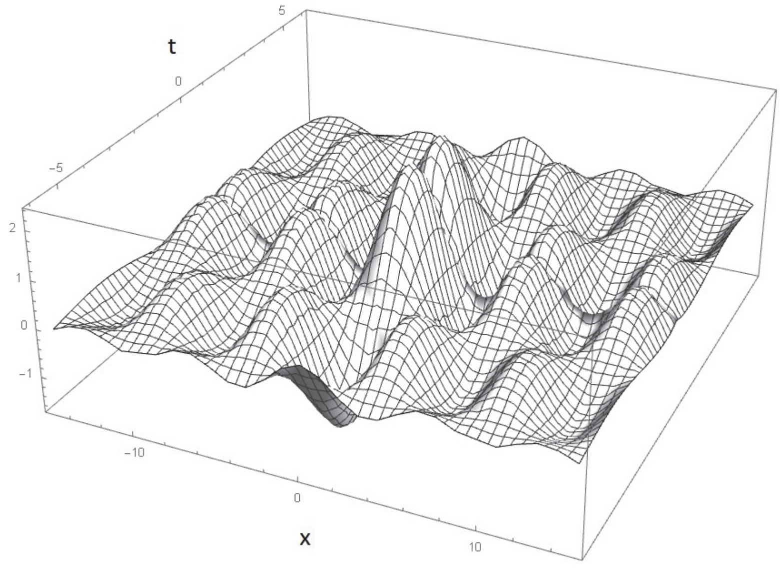

Рис. 7. $u\left(x,t;\dfrac{1}{2}\right)=j_{-\frac{1}{8}}(x)\left(j_{-\frac{1}{4}}(t)+2t^{\frac{1}{2}}\,j_{\frac{1}{4}}(t)\right)$.

14. Уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу со спектральным параметром

14.1. Решение задачи Коши для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу со спектральным параметром применением преобразования Ханкеля. В этом пункте будем использовать преобразование Ханкеля для решения задачи обобщенного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу, в котором по каждой из переменных действует оператор Бесселя, а справа присутствует спектральный параметр (см. [266]).

Рассмотрим задачу Коши вида

$$[(\triangle_\gamma)_x - (B_k)_t\,]\,u = c^2 u, \quad k \in \mathbb{R}, \quad c > 0, \quad u = u(x,t;k), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+, \tag{14.1}$$

$$u(x,0;k) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0;k) = 0. \tag{14.2}$$

В случае $\gamma_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$ такая задача изучалась в [188]. Будем искать решение $u \in S'_{ev}(\mathbb{R}^n_+) \times C^2_{ev}(0,\infty)$ задачи (14.1)-(14.2). Принадлежность $u \in S'_{ev}(\mathbb{R}^n_+) \times C^2_{ev}(0,\infty)$ означает, что $u(x,t;k)$ принадлежит $S'_{ev}(\mathbb{R}^n_+)$ по x и принадлежит $C^2_{ev}(0,\infty)$ по t.

Теорема 14.1. *Решение* $u \in S'_{ev}(\mathbb{R}^n_+) \times C^2_{ev}(0,\infty)$ *задачи* (14.1)-(14.2) *для* $k \neq -1, -3, -5, \ldots$ *задается формулой*

$$u(x,t;k) = C(n,\gamma,k) \left(t^{1-k} (t^2 - |x|^2)_+^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}} \, j_{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}} \left((t^2 - |x|^2)_+^{\frac{1}{2}} \cdot c \right) * \varphi(x) \right)_\gamma, \tag{14.3}$$

где

$$C(n,\gamma,k) = \frac{2^n \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-n-|\gamma|+1}{2}\right) \prod\limits_{i=1}^{n} \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}.$$

При $k \geqslant 0$ *решение* (14.3) *задачи* (14.1)-(14.2) *единственно. В случае* $k < 0$ *решение* (14.1)-(14.2) *не единственно. При* $k < 0$ *в случае, когда* $k \neq -1, -3, -5, \ldots$, *разность между любыми двумя произвольными решениями имеет вид*

$$A t^{1-k} u(t,x;2-k), \qquad A = \mathrm{const}, \tag{14.4}$$

где $u(t,x;2-k)$ — *решение задачи*

$$[(\triangle_\gamma)_x - (B_{2-k})_t\,]\,u = c^2 u,$$

$$u(x,0;2-k) = \tau(x), \qquad u_t(x,0;2-k) = 0,$$

$\tau(x)$ — *произвольная функция* S_{ev} *или распределение* S'_{ev}. *При* $k = -1, -3, -5, \ldots$ *не единственное решение задачи Коши* (14.1)-(14.2) *будет содержать слагаемое* (14.4) *и*

$$\frac{e^{\pm\frac{1}{2}\pi n i}\,\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|-k+1}{2}\right)}{2^n \Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right) \prod\limits_{i=1}^{n} \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} \, t^{1-k} \left((t^2 - |x|^2 - c^2 \pm i0)_\gamma^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}} * \varphi(x) \right)_\gamma.$$

Доказательство. Применяя к (14.1) преобразование Ханкеля только по переменным $x_1, \ldots, x_n$ и используя (2.19), получим

$$\left(|\xi|^2 + c^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial}{\partial t} \right) \widehat{u}(\xi,t;k) = 0, \tag{14.5}$$

$$\widehat{u}(\xi,0;k) = \widehat{\varphi}(\xi), \qquad \widehat{u}_t(\xi,0;k) = 0, \tag{14.6}$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n_+$ соответствует $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2$,

$$\widehat{u}(\xi,t;k) = (\mathbf{F}_\gamma)_x [u(x,t;k)](\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} u(x,t;k)\,\mathbf{j}_\gamma(x;\xi) x^\gamma dx$$

и $\widehat{\varphi}(\xi) = \mathbf{F}_\gamma[\varphi](\xi)$.

Решение $\widehat{G}^k(\xi,t)$ задачи Коши

$$\left(|\xi|^2 + c^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial}{\partial t} \right) \widehat{G}^k(\xi,t) = 0,$$

$$\widehat{G}^k(\xi,0) = 1, \qquad \widehat{G}^k_t(\xi,0) = 0$$

получено в [188]. Запишем решения для положительных и отрицательных значений k:

1. при $k \geqslant 0$

$$\widehat{G}^k(\xi,t) = j_{\frac{k-1}{2}}(\sqrt{|\xi|^2 + c^2}\;t); \tag{14.7}$$

2. при $k<0$, $k\neq -1,-3,-5,\ldots$

$$\widetilde{G}^k(\xi,t)=At^{1-k}j_{\frac{1-k}{2}}(\sqrt{|\xi|^2+c^2}\;t)+j_{\frac{k-1}{2}}(\sqrt{|\xi|^2+c^2}\;t), \tag{14.8}$$

где A — произвольное комплексное число, которое может зависеть от c;

3. при $k=-1,-3,-5,\ldots$

$$\widehat{G}^k(\xi,t)=Bt^{1-k}j_{\frac{1-k}{2}}(\sqrt{|\xi|^2+c^2}\;t)-\frac{\pi 2^{\frac{k-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)}\left[\sqrt{|\xi|^2+c^2}\,t\right]^{\frac{1-k}{2}}Y_{\frac{1-k}{2}}(\sqrt{|\xi|^2+c^2}\;t), \tag{14.9}$$

где B — произвольное комплексное число, которое может зависеть от c.

Из (14.7)–(14.9) заключаем, что задача (14.1)-(14.2) имеет единственное решение только при $k\geqslant 0$. Кроме того, мы замечаем, что разность между двумя произвольными решениями при $k<0$ имеет вид

$$At^{1-k}j_{\frac{1-k}{2}}(\sqrt{|\xi|^2+c^2}\;t). \tag{14.10}$$

Найдем

$$G^k(x,t)=\left((\mathbf{F}^{-1}_\gamma)_\xi\widehat{G}^k(\xi,t)\right)(x).$$

Обратное преобразование Ханкеля $\left((\mathbf{F}^{-1}_\gamma)_\xi\widehat{G}^k(\xi,t)\right)(x)$ проще всего найти, рассматривая c как дополнительную независимую переменную. Положив $\xi'=(\xi_1,\ldots,\xi_n,c)$ запишем

$$\widehat{G}^k(\xi,t)=j_{\frac{k-1}{2}}(|\xi'|\,t)$$

для $k\geqslant 0$ и найдем обратное преобразование Ханкеля от $j_{\frac{k-1}{2}}(|\xi'|\,t)$ по переменным ξ', используя (7.9). Получим

$$\left((\mathbf{F}^{-1}_{\gamma'})_{\xi'}j_{\frac{k-1}{2}}(|\xi'|\,t)\right)(x')=\frac{2^{n+1}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-n-|\gamma'|}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^{n+1}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\,t^{1-k}(t^2-|x'|^2)_{+,\gamma'}^{\frac{k-n-|\gamma'|-2}{2}},$$

где $\gamma'=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\gamma_{n+1})$ и γ_{n+1} — произвольное положительное число, $x'=(x,\sigma)$, $\sigma\in\mathbb{R}_+$ — двойственная к c переменная. Теперь для нахождения $G^k(x,t)$ применим прямое преобразование Ханкеля только по одномерной переменной σ. Будем иметь

$$G^k(x,t)=\frac{2^{n+1}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-n-|\gamma'|}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^{n+1}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\,t^{1-k}\left((F_{\gamma_{n+1}})_\sigma(t^2-|x|^2-\sigma^2)_{+,\gamma'}^{\frac{k-n-|\gamma'|-2}{2}}\right)(c)=$$

$$=\frac{2^{n}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-n-|\gamma|+1}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\,t^{1-k}(t^2-|x|^2)_+^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}}\;j_{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}}\left((t^2-|x|^2)_+^{\frac12}\cdot c\right).$$

Таким образом, решение (14.1)-(14.2) для $k\geqslant 0$ дается обобщенной сверткой

$$u(x,t;k)=(G^k(x,t)*\varphi(x))_\gamma. \tag{14.11}$$

Легко видеть, что (14.11) остается решением (14.1)-(14.2) и при $k<0$, $k\neq -1,-3,-5,\ldots$. Более того, рассуждая, как при доказательстве теоремы 13.5, получаем, что разность между этим решением и любым другим при $k<0$ имеет вид

$$A(t^{1-k}G^{2-k}(x,t)*\psi(x))_\gamma=At^{1-k}u(t,x;2-k), \tag{14.12}$$

где $\psi(x)$ — произвольная функция из S'_{ev}, $u(t,x;2-k)$ — решение задачи Коши

$$[(\triangle_\gamma)_x-(B_{2-k})_t\,]\,u=c^2u,$$

$$u(x,0;2-k)=\psi(x),\qquad u_t(x,0;2-k)=0.$$

и $G^{2-k}(x,t)$ — решение задачи

$$[(\triangle_\gamma)_x-(B_{2-k})_t\,]\,G^{2-k}(x,t)=c^2G^{2-k}(x,t), \tag{14.13}$$

$$G^{2-k}(x,0)=\delta_\gamma(x),\qquad G^{2-k}_t(x,t)(x,0)=0. \tag{14.14}$$

Наконец рассмотрим случай $k=-1,-3,-5,\ldots$. В этом случае решение (14.13)-(14.14) содержит слагаемое

$$G^k(x,t)=\frac{\pi 2^{\frac{k-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)}\mathbf{F}_\gamma^{-1}\left[\left(\sqrt{|\xi|^2+c^2}\,t\right)^{\frac{1-k}{2}}Y_{\frac{1-k}{2}}(\sqrt{|\xi|^2+c^2}\;t)\right].$$

Тогда

$$G^k_{(1)}(x,t)=\frac{i\pi 2^{\frac{k-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)}\mathbf{F}_\gamma^{-1}\left[\left(\sqrt{|\xi|^2+c^2}\,t\right)^{\frac{1-k}{2}}H^{(1)}_{\frac{1-k}{2}}(\sqrt{|\xi|^2+c^2}\;t)\right],$$

$$G^k_{(2)}(x,t)=-\frac{i\pi 2^{\frac{k-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)}\mathbf{F}_\gamma^{-1}\left[\left(\sqrt{|\xi|^2+c^2}\,t\right)^{\frac{1-k}{2}}H^{(2)}_{\frac{1-k}{2}}(\sqrt{|\xi|^2+c^2}\;t)\right]$$

тоже будут решениями (14.13)-(14.14). Применяя (7.17) и (7.18), получим

$$G^k(x,t)=\frac{e^{\pm\frac{1}{2}\pi ni}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|-k+1}{2}\right)}{2^n\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\,t^{1-k}(t^2-|x|^2-c^2\pm i0)_\gamma^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}}.$$

Тогда при $k=-1,-3,-5,\ldots$ не единственное решение задачи Коши (14.1)-(14.2) будет содержать слагаемое

$$\frac{e^{\pm\frac{1}{2}\pi ni}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|-k+1}{2}\right)}{2^n\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\,t^{1-k}\left((t^2-|x|^2-c^2\pm i0)_\gamma^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}}*\varphi(x)\right)_\gamma.$$

Найденная обобщенная свертка существует для $\varphi(x)\in S'_{ev}$. □

Следствие 14.1. *Решение $u\in S'_{ev}(\mathbb{R}^n_+)\times C^2(0,\infty)$ задачи Коши для сингулярного уравнения Клейна—Гордона*

$$\left[(\triangle_\gamma)_x-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]v=c^2v,\quad c>0,\quad v=v(x,t),\qquad (x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+, \tag{14.15}$$

$$v(x,0)=\varphi(x),\qquad v_t(x,0)=0,\qquad \varphi(x)\in S'_{ev} \tag{14.16}$$

имеет вид

$$v(x,t)=\frac{2^n\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-n-|\gamma|}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\left(t(t^2-|x|^2)_+^{-\frac{n+|\gamma|+1}{2}}j_{-\frac{n+|\gamma|+1}{2}}\left((t^2-|x|^2)_+^{\frac{1}{2}}\cdot c\right)*\varphi(x)\right)_\gamma. \tag{14.17}$$

Это решение получается предельным переходом при $k\to 0$ в (14.3).

Уравнение Клейна—Гордона

$$\left[\triangle_z-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]v=c^2v,\qquad v=v(z,t),\qquad z\in\mathbb{R}^N \tag{14.18}$$

— наиболее часто используемое волновое уравнения для описания динамики частиц в квантовой механике. Когда функция v радиально симметрична по некоторым группам переменных $z_1,\ldots,z_N$ в (14.18), мы получаем (14.15) с меньшим числом пространственных переменных. В этом случае числа γ_i, $i=1,\ldots,n$ в (14.15) будут натуральными.

14.2. Классическое решение уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу со спектральным параметром.

Теорема 14.2. *В случае $k>n+|\gamma|-1$ решение задачи Коши*

$$[(\triangle_\gamma)_x-(B_k)_t]\,u=c^2u,\qquad c>0,\qquad u=u(x,t;k),\qquad (x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+, \tag{14.19}$$

$$u(x,0;k)=\varphi(x),\qquad u_t(x,0;k)=0 \tag{14.20}$$

единственно и имеет вид

$$u(x,t;k)=A(n,\gamma,k)\,t^{1-k}\int\limits_0^t (t^2-r^2)^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}} j_{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}}\left(c\sqrt{t^2-r^2}\right) r^{n+|\gamma|-1}M_r^\gamma[\varphi(x)]dr, \quad (14.21)$$

где $M_r^\gamma[\varphi(x)]$ — *весовое сферическое среднее функции* $\varphi(x)$,

$$A(n,\gamma,k)=\frac{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k-n-|\gamma|+1}{2}\right)}.$$

Доказательство. При $k>n+|\gamma|-1$ интеграл в (14.3) существует в обычном (не обобщенном) смысле. Переходя при $k>n+|\gamma|-1$ в (14.3) к сферическим координатам, получим

$$u(x,t;k)=C(n,\gamma,k)\,t^{1-k}\int\limits_{B_t^+(n)} (t^2-|y|^2)^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}} j_{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}}\left((t^2-|y|^2)^{\frac12}\cdot c\right)\, {}^\gamma\mathbf{T}_x^y\varphi(x)\,y^\gamma dy=$$

$$=C(n,\gamma,k)\int\limits_{B_1^+(n)} (1-|y|^2)^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}} j_{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}}\left((1-|y|^2)^{\frac12}\cdot tc\right)\, {}^\gamma\mathbf{T}_x^{ty}\varphi(x)\,y^\gamma dy=$$

$$=C(n,\gamma,k)\int\limits_0^1 (1-r^2)^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}} j_{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}}\left((1-r^2)^{\frac12}\cdot tc\right) r^{n+|\gamma|-1}dr\int\limits_{S_1^+(n)} {}^\gamma\mathbf{T}_x^{tr\theta}\varphi(x)\,\theta^\gamma dS=$$

$$=\frac{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k-n-|\gamma|+1}{2}\right)}\int\limits_0^1 (1-r^2)^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}} j_{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}}\left((1-r^2)^{\frac12}\cdot tc\right) r^{n+|\gamma|-1}M_{rt}^\gamma[\varphi(x)]dr=$$

$$=\frac{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)t^{1-k}}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k-n-|\gamma|+1}{2}\right)}\int\limits_0^t (t^2-r^2)^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}} j_{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}}\left((t^2-r^2)^{\frac12}\cdot c\right) r^{n+|\gamma|-1}M_r^\gamma[\varphi(x)]dr.$$

□

Докажем теперь теорему о классическом решении задачи (14.19)-(14.20) при $k\leqslant n+|\gamma|-1$, $k\neq-1,-3,-5,\ldots$.

Теорема 14.3. *Пусть* $\varphi=\varphi(x)$, $\varphi\in C_{ev}^{\left[\frac{n+|\gamma|-k}{2}\right]+2}$. *Тогда решение* (14.19)-(14.20) *при* $k\leqslant n+|\gamma|-1$, $k\neq-1,-3,-5,\ldots$ *имеет вид*

$$u(x,t;k)=t^{1-k}\left(\frac{\partial}{t\partial t}\right)^m\left(t^{k+2m-1}u(x,t;k+2m)\right), \quad (14.22)$$

где m — *наименьшее целое, такое что* $m\geqslant\dfrac{n+|\gamma|-k-1}{2}$ *и* $u(x,t;k+2m)$ — *решение задачи Коши*

$$[(\triangle_\gamma)_x-(B_{k+2m})_t]\,u=c^2u,\qquad c>0, \quad (14.23)$$

$$u(x,0;k+2m)=\frac{\varphi(x)}{(k+1)(k+3)\ldots(k+2m-1)},\qquad u_t(x,0;k+2m)=0. \quad (14.24)$$

Доказательство. Для того, чтобы показать, что (14.22) представляет собой решение (14.19)-(14.20) при $k\leqslant n+|\gamma|-1$, $k\neq-1,-3,-5,\ldots$, используем рекуррентные формулы (13.12) и (13.13) вида $u(x,t;k)=t^{1-k}u(x,t;2-k)$, $u(x,t;k)_t=tu(x,t;2+k)$, справедливые для решения уравнения (14.19). Выберем наименьшее целое m, такое что $k+2m>n+|\gamma|-1$. Используя (14.21), запишем решение задачи Коши вида

$$[(\triangle_\gamma)_x-(B_{k+2m})_t]\,u=c^2u,\qquad c>0,$$

$$u(x,0;k+2m)=g(x),\qquad u_t(x,0;k+2m)=0,\quad g\in C_{ev}^2.$$

Имеем

$$u(x,t;k+2m)=A(n,\gamma,k+2m)\,t^{1-k-2m}\int\limits_0^t(t^2-r^2)^{\frac{k+2m-n-|\gamma|-1}{2}}\times$$

$$\times j_{\frac{k+2m-n-|\gamma|-1}{2}}\left(c\sqrt{t^2-r^2}\right)r^{n+|\gamma|-1}M_r^\gamma[g(x)]dr,$$

где

$$A(n,\gamma,k+2m)=\frac{2\Gamma\left(\frac{k+2m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k+2m-n-|\gamma|+1}{2}\right)}.$$

Принимая во внимание (13.12), легко видеть, что

$$t^{k+2m-1}u(x,t;k+2m)=u(x,t;2-k-2m).$$

Применяя (13.13) к последней формуле m раз, получим

$$\left(\frac{\partial}{t\partial t}\right)^m(t^{k+2m-1}u(x,t;k+2m)=u(x,t;2-k).$$

Снова применяя (13.12), запишем

$$u(x,t;k)=t^{1-k}\left(\frac{\partial}{t\partial t}\right)^m\left(t^{k+2m-1}u(x,t;k+2m)\right), \tag{14.25}$$

что и дает решение уравнения (14.19). Теперь найдем функцию g, такую что выполняются (14.20). Из (14.20) следует, что

$$u(x,t;k)=(k+1)(k+3)\dots(k+2m-1)u(x,t;k+2m)+C\,t\,u(x,t;k+2m)+O(t^2),$$

при $t\to0$, где C — константа. Тогда, если

$$g(x)=\frac{\varphi(x)}{(k+1)(k+3)\dots(k+2m-1)},$$

то функция $u(x,t;k)$, определенная с помощью равенства (14.25), удовлетворяет начальным условиям (14.20).

Учитывая, что для того, чтобы $u(x,t;k+2m)$ было решением (14.23)-(14.24), достаточно, чтобы $\varphi\in C^2_{ev}$, получаем, что для того, чтобы $u(x,t;k)$ было решением (14.19)-(14.20), достаточно потребовать $\varphi\in C_{ev}^{\left[\frac{n+|\gamma|-k}{2}\right]+2}$. □

Теорема 14.4. *Пусть* $\psi\in C_{ev}^{\left[\frac{n+|\gamma|+k-1}{2}\right]}$. *Решение* $u=u(x,t;k)$ *задачи*

$$[(\triangle_\gamma)_x-(B_k)_t\,]\,u=c^2u,\qquad c>0, \tag{14.26}$$

$$u(x,0;k)=0,\quad \lim_{t\to+0}t^ku_t(x,t;k)=\psi(x), \tag{14.27}$$

при $k<1$ *определяется формулой*

$$u(t,x;k)=B(n,\gamma,k,q)\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^q\left(\int\limits_0^t(t^2-r^2)^{\frac{1-k+2q-n-|\gamma|}{2}}\times\right.$$

$$\left.\times j_{\frac{1-k+2q-n-|\gamma|}{2}}\left(c\sqrt{t^2-r^2}\right)r^{n+|\gamma|-1}M_r^\gamma[\psi(x)]dr\right), \tag{14.28}$$

где

$$B(n,\gamma,k,q)=\frac{2^{-q}\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2-k+2q-n-|\gamma|+1}{2}\right)}.$$

Доказательство. Пусть $q \geqslant 0$ — наименьшее положительное целое число, такое что $2-k+2q > n+|\gamma|-1$, т. е. $q > \dfrac{n+|\gamma|+k-3}{2}$, и пусть $u(x,t;2-k+2q)$ — решение уравнения (14.26) при $2-k+2q$, взятом вместо k, такое что

$$u(x,0;2-k+2q)=\psi(x), \qquad u_t(x,0;2-k+2q)=0. \tag{14.29}$$

Тогда, используя свойство (13.12), получим, что функция

$$u(t,x;k-2q)=t^{1-k+2q}u(t,x;2-k+2q)$$

есть решение уравнения

$$(\triangle_\gamma)_x u-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{k-2q}{t}\frac{\partial v}{\partial t}=c^2u.$$

Далее, применяя q раз формулу (13.13), получим, что

$$\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^q u(t,x;k-2q)=\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^q\left(t^{1-k+2q}u(t,x;2-k+2q)\right)$$

есть решение уравнения (14.26). Для того, чтобы полученное решение удовлетворяло условиям (14.27), будем использовать множитель $\dfrac{2^{-q}\Gamma\left(\frac{3-k}{2}\right)}{(1-k)\Gamma\left(\frac{3-k+2q}{2}\right)}$. Пусть

$$u(t,x;k)=\frac{2^{-q}\Gamma\left(\frac{3-k}{2}\right)}{(1-k)\Gamma\left(\frac{3-k+2q}{2}\right)}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^q\left(t^{1-k+2q}u(t,x;2-k+2q)\right). \tag{14.30}$$

Функция (14.30) удовлетворяет уравнению (14.26). Покажем, что $u(t,x;k)$, определенная в (14.30), удовлетворяет условиям (14.29). Используя соотношение [171, формула 1.13, с. 9], получим

$$\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^q\left(t^{1-k+2q}u(t,x;2-k+2q)\right)=\sum_{s=0}^{q}\frac{2^{q-s}C_q^s\Gamma\left(\frac{1-k}{2}+q+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}+s+1\right)}t^{1-k+2s}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^s u(t,x;2-k+2q)$$

и $u(0,x;k)=0$ при $k<1$. Для второго условия (14.29) получим

$$\lim_{t\to 0}t^k u_t(t,x;k)=\frac{2^{-q}\Gamma\left(\frac{3-k}{2}\right)}{(1-k)\Gamma\left(\frac{3-k+2q}{2}\right)}\lim_{t\to 0}t^k\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^q\left(t^{1-k+2q}u(t,x;2-k+2q)\right)=$$

$$=\frac{2^{-q}\Gamma\left(\frac{3-k}{2}\right)}{(1-k)\Gamma\left(\frac{3-k+2q}{2}\right)}\lim_{t\to 0}t^k\frac{\partial}{\partial t}\sum_{s=0}^{q}\frac{2^{q-s}C_q^s\Gamma\left(\frac{1-k}{2}+q+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}+s+1\right)}t^{1-k+2s}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^s u(t,x;2-k+2q)=$$

$$=\frac{1}{1-k}\lim_{t\to 0}t^k\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{1-k}u(t,x;2-k+2q)\right)=\frac{1}{1-k}\lim_{t\to 0}t^k\times$$

$$\times\left((1-k)t^{-k}u(t,x;2-k+2q)+t^{1-k}u_t(t,x;2-k+2q)\right)=$$

$$=\frac{1}{1-k}\lim_{t\to 0}\left((1-k)u(t,x;2-k+2q)+tu_t(t,x;2-k+2q)\right)=$$

$$=\lim_{t\to 0}u(t,x;2-k+2q)=\psi(x).$$

Теперь запишем представление $u(t,x;k)$ через интеграл. Используя формулу (14.21), получим

$$u(x,t;2-k+2q)=A(n,\gamma,2-k+2q)\,t^{k-1-2q}\int\limits_0^t(t^2-r^2)^{\frac{1-k+2q-n-|\gamma|}{2}}\times$$

$$\times j_{\frac{1-k+2q-n-|\gamma|}{2}}\left(c\sqrt{t^2-r^2}\right)r^{n+|\gamma|-1}M_r^\gamma[\psi(x)]dr.$$

Принимая во внимание (14.30), запишем

$$u(t,x;k)=A(n,\gamma,2-k+2q)\frac{2^{-q}\Gamma\left(\frac{3-k}{2}\right)}{(1-k)\Gamma\left(\frac{3-k+2q}{2}\right)}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^q\int\limits_0^t (t^2-r^2)^{\frac{1-k+2q-n-|\gamma|}{2}} j_{\frac{1-k+2q-n-|\gamma|}{2}}\left(c\sqrt{t^2-r^2}\right) r^{n+|\gamma|-1}M_r^\gamma[\psi(x)]dr.$$

Упрощая, мы получаем (14.28), что и заканчивает доказательство. □

Объединение теорем 14.2, 14.3 и 14.4 дает следующее утверждение.

Теорема 14.5. *Пусть* $\varphi=\varphi(x)$, $\varphi\in C_{ev}^{\left[\frac{n+|\gamma|-k}{2}\right]+2}$, $\psi=\psi(x)$, $\psi\in C_{ev}^{\left[\frac{n+|\gamma|+k-1}{2}\right]}$. *Решение задачи*

$$[(\triangle_\gamma)_x-(B_k)_t]\,u=c^2u,\qquad c>0,\tag{14.31}$$

$$u(x,0;k)=\varphi(x),\quad \lim_{t\to+0}t^ku_t(x,t;k)=\psi(x)\tag{14.32}$$

при $k\leqslant\min\{n+|\gamma|-1,1\}$, $k\neq-1,-3,-5,\ldots$ *дается формулой*

$$u(x,t;k)=u_1(x,t;k)+u_2(x,t;k),$$

где $u_1(x,t;k)$ *находится по теореме* 14.2 *или* 14.3, *а* $u_1(x,t;k)$ *находится по теореме* 14.4.

14.3. Примеры. Приведем примеры решения сингулярной задачи Коши для обобщенного однородного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу с постоянным потенциалом, в котором оператор Бесселя действует вместо каждой второй производной. Графики построены при помощи Wolfram | Alpha.

Пример 14.1. Рассмотрим задачу Коши при $k>n+|\gamma|-1$:

$$[(\triangle_\gamma)_x-(B_k)_t]\,u=c^2u,\tag{14.33}$$

$$u(x,0;k)=\mathbf{j}_\gamma(x;\xi),\qquad u_t(x,0;k)=0.\tag{14.34}$$

В этом случае решение единственно и определяется формулой (14.21):

$$u(x,t;k)=A(n,\gamma,k)\,t^{1-k}\int\limits_0^t(t^2-r^2)^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}}j_{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}}\left(c\sqrt{t^2-r^2}\right)r^{n+|\gamma|-1}M_r^\gamma\mathbf{j}_\gamma(x;\xi)dr,$$

$$A(n,\gamma,k)=\frac{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k-n-|\gamma|+1}{2}\right)}.$$

Для весового сферического среднего $M_r^\gamma\mathbf{j}_\gamma(x;\xi)$ имеем формулу (см. [104])

$$M_r^\gamma\mathbf{j}_\gamma(x;\xi)=\mathbf{j}_\gamma(x;\xi)j_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(r|\xi|).\tag{14.35}$$

Используя (14.35), получим

$$u(x,t;k)=\frac{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k-n-|\gamma|+1}{2}\right)}\,t^{1-k}\,\mathbf{j}_\gamma(x;\xi)\times$$

$$\times\int\limits_0^t(t^2-r^2)^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}}r^{n+|\gamma|-1}j_{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}}\left(c\sqrt{t^2-r^2}\right)j_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(r|\xi|)dr=$$

$$=\frac{2^{\frac{k-1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{c^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}}|\xi|^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}}\,t^{1-k}\,\mathbf{j}_\gamma(x;\xi)\int\limits_0^t(t^2-r^2)^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{4}}r^{\frac{n+|\gamma|}{2}}J_{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}}\left(c\sqrt{t^2-r^2}\right)J_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(r|\xi|)dr.$$

Применяя соотношение [127, формула 2.12.35.2] в виде

$$\int\limits_0^t(t^2-x^2)^{m+\frac{\mu}{2}}x^{\nu+1+2l}J_\mu(c\sqrt{t^2-x^2})J_\nu(hx)dx=$$

$$=t^{\mu+\nu-m-l+1}c^\mu h^\nu\left(\frac{\partial}{c\partial c}\right)^m\left(\frac{\partial}{h\partial h}\right)^l[(c^2+h^2)^{-\frac{\mu+\nu+m+l+1}{2}}J_{\mu+\nu+m+l+1}(t\sqrt{c^2+h^2})],$$

$$t>0,\qquad \mathrm{Re}\,\nu>-l-1,\qquad \mathrm{Re}\,\mu>-m-1,$$

будем иметь $k=m=0$, $\nu=\dfrac{n+|\gamma|}{2}-1$, $\mu=\dfrac{k-n-|\gamma|-1}{2}$, $h=|\xi|$ и

$$\int\limits_0^t (t^2-r^2)^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{4}} r^{\frac{n+|\gamma|}{2}} J_{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}}\left(c\sqrt{t^2-r^2}\right) J_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(r|\xi|)dr=$$

$$=\frac{t^{\frac{k-1}{2}} c^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}} |\xi|^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}}{(\sqrt{c^2+|\xi|^2})^{\frac{k-1}{2}}} J_{\frac{k-1}{2}}(t\sqrt{c^2+|\xi|^2}).$$

Таким образом,

$$u(x,t;k)=\frac{2^{\frac{k-1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{c^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}}|\xi|^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}}\, t^{1-k}\, \mathbf{j}_\gamma(x;\xi)\, \frac{t^{\frac{k-1}{2}} c^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}} |\xi|^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}}{(\sqrt{c^2+|\xi|^2})^{\frac{k-1}{2}}} J_{\frac{k-1}{2}}(t\sqrt{c^2+|\xi|^2})=$$

$$=\mathbf{j}_\gamma(x;\xi) j_{\frac{k-1}{2}}(t\sqrt{c^2+|\xi|^2}).$$

В случае, когда $x\in\mathbb{R}^1_+$, решение задачи

$$[(B_\gamma)_x-(B_k)_t\,]\,u=c^2u,\qquad c>0,\qquad u=u(x,t;k),\qquad (x,t)\in\mathbb{R}^2_+, \tag{14.36}$$

$$u(x,0;k)=j_\gamma(ax),\quad u_t(x,0;k)=0, \tag{14.37}$$

где $\gamma-2\leqslant k\leqslant\gamma$, $k\neq -1$, $0<\gamma$, $a\in\mathbb{R}$, дается формулой

$$u(t,x;k)=j_{\frac{\gamma-1}{2}}(ax)j_{\frac{k-1}{2}}\left(t\sqrt{a^2+c^2}\right). \tag{14.38}$$

Пример 14.2. Рассмотрим задачу

$$[(B_\gamma)_x-(B_k)_t\,]\,u=c^2u,\qquad c>0,\qquad u=u(t,x;k),\qquad (t,x)\in\mathbb{R}^2_+, \tag{14.39}$$

$$u(x,0;k)=0,\quad \lim_{t\to+0} t^k u_t(x,t;k)=j_\gamma(bx), \tag{14.40}$$

где $n=1$, $k<1$, $0<\gamma<3$, $b\in\mathbb{R}$.

В этом случае будем иметь $q=1$. Принимая во внимание (14.28), получим

$$u(t,x;k)=B(1,\gamma,k,1)\,j_{\frac{\gamma-1}{2}}(bx)\,\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_0^t (t^2-r^2)^{1-\frac{k+\gamma}{2}} j_{1-\frac{k+\gamma}{2}}\left(c\sqrt{t^2-r^2}\right) j_{\frac{\gamma-1}{2}}(br) r^\gamma dr\right)=$$

$$=\frac{B(1,\gamma,k,1)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{k+\gamma}{2}\right)}{2^{\frac{k-1}{2}} b^{\frac{\gamma-1}{2}} c^{1-\frac{k+\gamma}{2}}}\, j_{\frac{\gamma-1}{2}}(bx)\,\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_0^t (t^2-r^2)^{\frac{2-k-\gamma}{4}}\times\right.$$

$$\left.\times J_{1-\frac{k+\gamma}{2}}\left(c\sqrt{t^2-r^2}\right) J_{\frac{\gamma-1}{2}}(br) r^{\frac{\gamma-1}{2}+1}dr\right),$$

где

$$B(1,\gamma,k,1)=\frac{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{k+\gamma}{2}\right)}.$$

Применяя соотношение [127, формула 2.12.35.2] в виде

$$\int\limits_0^t (t^2-x^2)^{m+\frac{\mu}{2}} x^{\nu+1+2l} J_\mu(c\sqrt{t^2-x^2}) J_\nu(hx)dx=$$

$$=t^{\mu+\nu-m-l+1}c^\mu h^\nu\left(\frac{\partial}{c\partial c}\right)^m\left(\frac{\partial}{h\partial h}\right)^l[(c^2+h^2)^{-\frac{\mu+\nu+m+l+1}{2}} J_{\mu+\nu+m+l+1}(t\sqrt{c^2+h^2})],$$

$$t>0,\qquad \mathrm{Re}\,\nu>-l-1,\qquad \mathrm{Re}\,\mu>-m-1,$$

получим

$$\int\limits_0^t (t^2-r^2)^{\frac{2-k-\gamma}{4}} J_{1-\frac{k+\gamma}{2}}\left(c\sqrt{t^2-r^2}\right) J_{\frac{\gamma-1}{2}}(br) r^{\frac{\gamma-1}{2}+1}dr=$$

$$= b^{\frac{\gamma-1}{2}} c^{1-\frac{k+\gamma}{2}} (b^2+c^2)^{\frac{k-3}{4}} t^{\frac{3-k}{2}} J_{\frac{3-k}{2}} \left(t\sqrt{b^2+c^2}\right)\Bigg),$$

$$u(t,x;k) = 2^{\frac{1-k}{2}} B(1,\gamma,k,1)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{k+\gamma}{2}\right)(b^2+c^2)^{\frac{k-3}{4}} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(bx)\times$$

$$\times\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{\frac{3-k}{2}} J_{\frac{3-k}{2}}\left(t\sqrt{b^2+c^2}\right)\right) =$$

$$= 2^{-\frac{k+1}{2}}\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)(\sqrt{b^2+c^2})^{\frac{k-1}{2}} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(bx)\, t^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}\left(t\sqrt{b^2+c^2}\right) =$$

$$= \frac{t^{1-k}}{1-k}\, j_{\frac{\gamma-1}{2}}(bx)\, j_{\frac{1-k}{2}}\left(t\sqrt{b^2+c^2}\right).$$

Принимая во внимание (1.18) и (1.19), легко проверить, что

$$(B_\gamma)_x \frac{t^{1-k}}{1-k}\, j_{\frac{\gamma-1}{2}}(bx)\, j_{\frac{1-k}{2}}\left(t\sqrt{b^2+c^2}\right) = -b^2\frac{t^{1-k}}{1-k}\, j_{\frac{\gamma-1}{2}}(bx)\, j_{\frac{1-k}{2}}\left(t\sqrt{b^2+c^2}\right),$$

$$(B_k)_t \frac{t^{1-k}}{1-k}\, j_{\frac{\gamma-1}{2}}(bx)\, j_{\frac{1-k}{2}}\left(t\sqrt{b^2+c^2}\right) = -(b^2+c^2)\frac{t^{1-k}}{1-k}\, j_{\frac{\gamma-1}{2}}(bx)\, j_{\frac{1-k}{2}}\left(t\sqrt{b^2+c^2}\right),$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^{1-k}}{1-k}\, j_{\frac{\gamma-1}{2}}(bx)\, j_{\frac{1-k}{2}}\left(t\sqrt{b^2+c^2}\right) = 0,$$

$$j_{\frac{\gamma-1}{2}}(bx)\lim_{t\to 0} t^k\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t^{1-k}}{1-k}\, j_{\frac{1-k}{2}}\left(t\sqrt{b^2+c^2}\right)\right) = j_{\frac{\gamma-1}{2}}(bx),$$

что подтверждает, что

$$u(t,x;k) = \frac{t^{1-k}}{1-k}\, j_{\frac{\gamma-1}{2}}(bx)\, j_{\frac{1-k}{2}}\left(t\sqrt{b^2+c^2}\right) \tag{14.41}$$

удовлетворяет (14.39)-(14.40).

Пример 14.3. Из приведенных примеров следует, что решение задачи Коши вида

$$[(B_\gamma)_x - (B_k)_t]\, u = c^2 u, \qquad c>0, \qquad u=u(t,x;k), \qquad (t,x)\in\mathbb{R}^2_+, \tag{14.42}$$

$$u(x,0;k) = j_\gamma(ax), \quad \lim_{t\to+0} t^k u_t(x,t;k) = j_\gamma(bx), \tag{14.43}$$

где $0<\gamma<1$ $\gamma-2\leqslant k\leqslant\gamma$, $k\neq -1$, $a,b\in\mathbb{R}$ есть

$$u(t,x;k) = j_{\frac{\gamma-1}{2}}(ax) j_{\frac{k-1}{2}}\left(t\sqrt{a^2+c^2}\right) + \frac{t^{1-k}}{1-k}\, j_{\frac{\gamma-1}{2}}(bx)\, j_{\frac{1-k}{2}}\left(t\sqrt{b^2+c^2}\right). \tag{14.44}$$

График решения (14.44) при $k=\dfrac{1}{2}$, $\gamma=\dfrac{3}{4}$, $a=b=2$, $c=1$, продолженного четным образом на отрицательные значения x и t, приведен на рис. 8.

Пример 14.4. Решение задачи

$$[(B_\gamma)_x - (B_k)_t]\, u = c^2 u, \qquad c>0, \qquad u=u(t,x;k), \qquad (t,x)\in\mathbb{R}^2_+, \tag{14.45}$$

$$u(x,0;k) = i_\gamma(ax), \quad \lim_{t\to+0} t^k u_t(x,t;k) = j_\gamma(bx), \tag{14.46}$$

где $0<\gamma<1$, $\gamma-2\leqslant k\leqslant\gamma$, $k\neq -1$, $a,b\in\mathbb{R}$, находится по формуле

$$u(t,x;k) = i_{\frac{\gamma-1}{2}}(ax) i_{\frac{k-1}{2}}\left(t\sqrt{a^2+c^2}\right) + \frac{t^{1-k}}{1-k}\, j_{\frac{\gamma-1}{2}}(bx)\, j_{\frac{1-k}{2}}\left(t\sqrt{b^2+c^2}\right). \tag{14.47}$$

График решения (14.47) при $k=\dfrac{1}{2}$, $\gamma=\dfrac{3}{4}$, $a=b=2$, $c=1$, продолженного четным образом на отрицательные значения x и t, приведен на рис. 9.

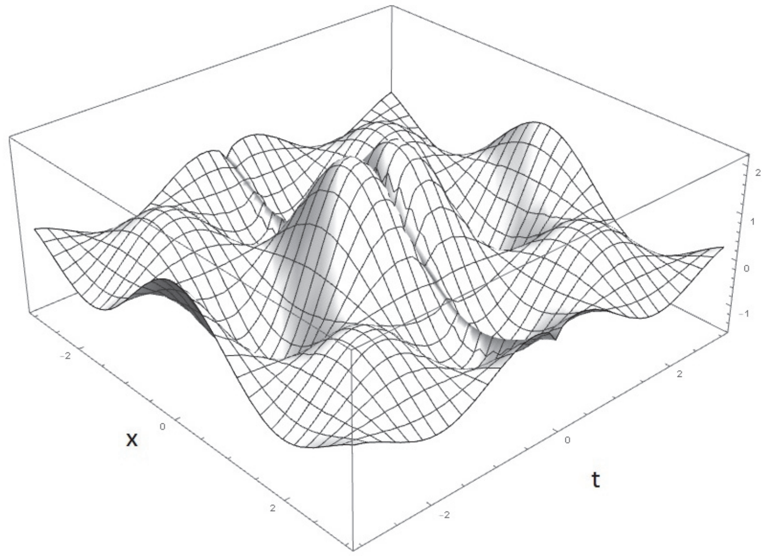

Рис. 8. $u\left(x,t;\dfrac{1}{2}\right)=j_{-\frac{1}{8}}(2x)j_{-\frac{1}{4}}(\sqrt{5}t)+2t^{\frac{1}{2}}j_{-\frac{1}{8}}(2x)\,j_{\frac{1}{4}}(t).$

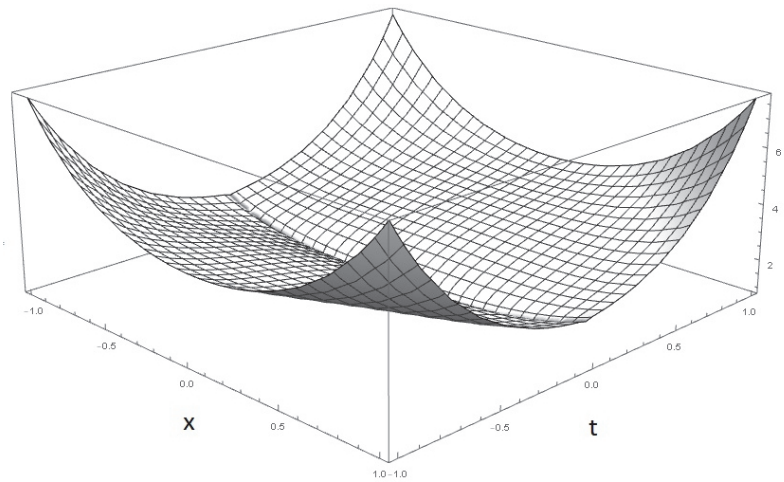

Рис. 9. $u\left(x,t;\dfrac{1}{2}\right)=i_{-\frac{1}{8}}(2x)i_{-\frac{1}{4}}(\sqrt{5}t)+2t^{\frac{1}{2}}j_{-\frac{1}{8}}(2x)\,j_{\frac{1}{4}}(t).$

15. Метод потенциалов Рисса решения неоднородных уравнений типа Эйлера—Пуассона—Дарбу

Потенциалы Рисса являются обобщенными свертками с дробными степенями некоторого расстояния (евклидова, лоренцева или другого) до точки. С точки зрения приложений такие потенциалы являются инструментами для решения дифференциальных уравнений математической физики и обратных задач. Например, Марсель Рисс использовал такие операторы для получения решения задачи Коши для волнового уравнения. Современная теория преобразований Радона основана на потенциалах Рисса.

В этом разделе мы используем потенциалы Рисса, построенные с помощью обобщенной свертки, для решения волновых уравнений с операторами Бесселя. Во-первых, мы опишем общий метод потенциалов Рисса, введем решаемые уравнения и сопоставим каждому уравнению подходящий потенциал. Затем, используя связь гиперболических B-потенциалов Рисса с операторами Даламбера, в которых вместо вторых производных стоят операторы Бесселя, и аналитических продолжений рассматриваемых потенциалов на требуемые значения параметров, выпишем решения исследуемых уравнений. Наконец, в качестве примеров решим некоторые сингулярные гиперболические начальные задачи.

15.1. Общее неоднородное уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу. В этом пункте мы рассматриваем неоднородное уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу с оператором Бесселя, действующим по каждой из переменных, вида

$$(\Box_{k,\gamma})_{t,x}u = f(x,t), \qquad u = u(x,t;k), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+, \tag{15.1}$$

где

$$(\Box_{k,\gamma})_{t,x} = (B_k)_t - (\Delta_\gamma)_x, \qquad (B_k)_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial}{\partial t}, \qquad (\Delta_\gamma)_x = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right),$$

$f(x,t) \in S_{ev}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. При необходимости f может быть взято из более широкого класса функций, такого что соответствующий B-потенциал Рисса будет существовать и решение u будет иметь желаемые свойства. Для решения уравнения (15.1) будем использовать потенциал, построенный и изученный в разделе 11.

В качестве потенциала, обращающего $(\Box_{k,\gamma})_{t,x}$, будем рассматривать гиперболический B-потенциал Рисса, изученный в разделе 11, записанный в виде

$$(I^\alpha_{\Box_{k,\gamma}}f)(x,t) = \frac{1}{H_{n,k,\gamma}(\alpha)}\int\limits_{K^+}(\tau^2 - |y|^2)^{\frac{\alpha-n-1-k-|\gamma|}{2}}({}^kT_t^\tau\,{}^\gamma\mathbf{T}_x^y f(x,t))\tau^k y^\gamma d\tau dy, \tag{15.2}$$

где $y = (y_1,\ldots,y_n)$, $|y| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n y_i^2}$, $y^\gamma = \prod\limits_{i=1}^n y_i^{\gamma_i}$, $K^+ = \{(t,y) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ : t^2 \geqslant |y|^2\}$,

$$H_{n,k,\gamma}(\alpha) = \frac{2^{\alpha-n-1}}{\pi}\sin\left(\frac{k+1}{2}\pi\right)\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\prod_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1-n-k-|\gamma|}{2}\right).$$

Используя аналитическое продолжение по параметру α гиперболического B-потенциала Рисса $I^\alpha_{\Box_{k,\gamma}}$ (см. пункт 11.3) и тот факт, что $I^0_{\Box_{k,\gamma}}$ — тождественный оператор (см. пункт 11.2), получим решение уравнения (15.1).

Пусть $f \in S_{ev}$ и $x_i^{\gamma_i}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{x_i=0} = 0$, $i = 1,\ldots,n$. Применяя оператор $I^{\alpha+2}_{\Box_{k,\gamma}}$ к обеим частям (15.1), используя равенство (11.14), получим

$$I^\alpha_{\Box_{k,\gamma}}u(x,t;k) = I^{\alpha+2}_{\Box_{k,\gamma}}f(x,t).$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\alpha \to 0$, с учетом (11.3) будем иметь

$$u(x,t;k) = (I^2_{\Box_{k,\gamma}}f)(x,t).$$

Найденное решение будет удовлетворять условию

$$u(x,0;k) = (I^2_{\Box_{k,\gamma}}f)(x,t)\Big|_{t=0}.$$

Аналогично, если f такова, что

$$x_i^{\gamma_i}\frac{\partial}{\partial x_i}(\Box_\gamma)^j f\Big|_{x_i=0} = 0, \quad j = 0,\ldots,m-1, \quad i = 1,\ldots,n,$$

то решением итерированного уравнения

$$(\Box_{k,\gamma})^m_{t,x}u(x,t) = f(x,t), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \tag{15.3}$$

будет

$$u(x,t) = (I^{2m}_{\Box_{k,\gamma}}f)(x,t).$$

15.2. Примеры. Приведем примеры решения задач для неоднородных сингулярных волновых уравнений.

Пример 15.1. Рассмотрим задачу

$$((B_2)_t - (B_\gamma)_x)\, u(x,t;2) = t^2 e^{-t} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2_+, \qquad \gamma > 0, \tag{15.4}$$

$$u(x,0;2) = 3j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x), \qquad u_t(x,0;2) = 0. \tag{15.5}$$

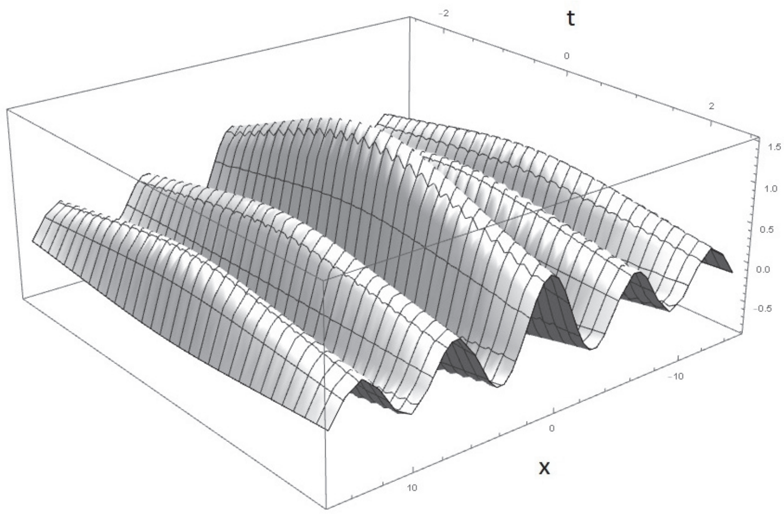

Рис. 10. $u(x,t;2) = \dfrac{1}{2} e^{-t}(t^2+3t+3) j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)$.

Решение задачи (15.4)-(15.5), полученное описанным в этом пункте способом, имеет вид

$$u(x,t;2) = \frac{1}{2} e^{-t}(t^2+3t+3) j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x).$$

График $u(x,t;2)$ при $\gamma = \dfrac{1}{2}$, продолженной четным образом на отрицательные значения x и t, изображен на рис. 10.

Проверяя, получим

$$(B_2)_t \frac{1}{2} e^{-t}(t^2+3t+3) j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x) = \frac{1}{2} e^{-t}(t^2-3t-3) j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x),$$

$$(B_\gamma)_x \frac{1}{2} e^{-t} e^{-t}(t^2+3t+3) j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x) = -\frac{1}{2} e^{-t}(t^2+3t+3) j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x),$$

$$((B_2)_t - (B_\gamma)_x)\, \frac{1}{2} e^{-t}(t^2+3t+3) j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x) = t^2 e^{-t} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x),$$

$$u(x,0;2) = 3j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x), \qquad u_t(x,0;2) = 0.$$

Пример 15.2. Найдем решение начальной задачи

$$\Big((B_{\frac{1}{2}})_t - (B_2)_x - 1\Big)\, u(x) = j_{-\frac{1}{4}}(t) x^2, \qquad \gamma > 0, \tag{15.6}$$

$$u\left(x,0;\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(3-x^2), \qquad u_t\left(x,0;\frac{1}{2}\right) = 0. \tag{15.7}$$

Решение (15.6)-(15.7) имеет вид

$$u\left(x,0;\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(3-x^2) j_{-\frac{1}{4}}(t).$$

График $u\left(x,0;\dfrac{1}{2}\right)$, продолженной четным образом на отрицательные значения x и t, изображен на рис. 11.

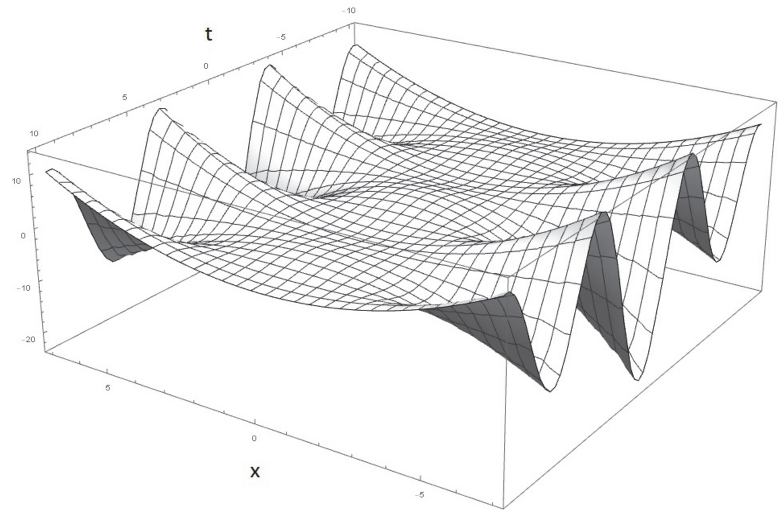

Рис. 11. $u(x,t;2)=\dfrac{1}{2}e^{-t}(t^2+3t+3)j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)$.

Проверим, что найденное решение удовлетворяет поставленной задаче:

$$(B_{\frac{1}{2}})_{x_1}\left(\frac{1}{2}(3-x_2^2)j_{-\frac{1}{4}}(x_1)\right)=\frac{1}{2}(x_2^2-3)j_{-\frac{1}{4}}(x_1),$$

$$(B_2)_{x_2}\left(\frac{1}{2}(3-x_2^2)j_{-\frac{1}{4}}(x_1)\right)=-3j_{-\frac{1}{4}}(x_1),$$

$$\Big((B_{\frac{1}{2}})_{x_1}-(B_2)_{x_2}-1\Big)\left(\frac{1}{2}(3-x_2^2)j_{-\frac{1}{4}}(x_1)\right)=j_{-\frac{1}{4}}(x_1)x_2^2,$$

$$u(0,x_2)=\frac{1}{2}(3-x_2^2),\qquad u_{x_1}(0,x_2)=0.$$

Пример 15.3. Рассмотрим задачу

$$(D_t^2-(B_\gamma)_x)u(x,t)=\theta(t)t^2j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x),$$

$$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда.

Решение этой задачи получим переходом к пределу при $k\to+0$ в $I^2_{\square_{k,\gamma}}\theta(t)t^2j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)$. Оно имеет вид

$$u(x,t)=\lim_{k\to+0}I^2_{\square_{k,\gamma}}\theta(t)t^2j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)=\frac{\sqrt{\pi}j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)}{2^{\frac{1}{2}}}\int\limits_0^t(t-\tau)^2\tau^{\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2}}(\tau)d\tau=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(3)\Gamma(2)}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(5)}t^4\,{}_1F_2\left(1;\frac{5}{2},3;-\frac{t^2}{4}\right)j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)=(2(\cos t-1)+t^2)j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x).$$

График $u(x,t)$, продолженной четным образом на отрицательные значения x и t, изображен на рис. 12.

Проверяя, имеем:

$$D_t^2(2(\cos t-1)+t^2)j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)=-2(\cos t-1)j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x),$$

$$(B_\gamma)_x(2(\cos t-1)+t^2)j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)=-(2(\cos t-1)+t^2)j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x),$$

$$(D_t^2-(B_\gamma)_x)(2(\cos t-1)+t^2)j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)=t^2j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x),$$

$$u(x,0)=0,$$

$$u_t(x,t)=2(t-\sin t),\ u_t(x,0)=0.$$

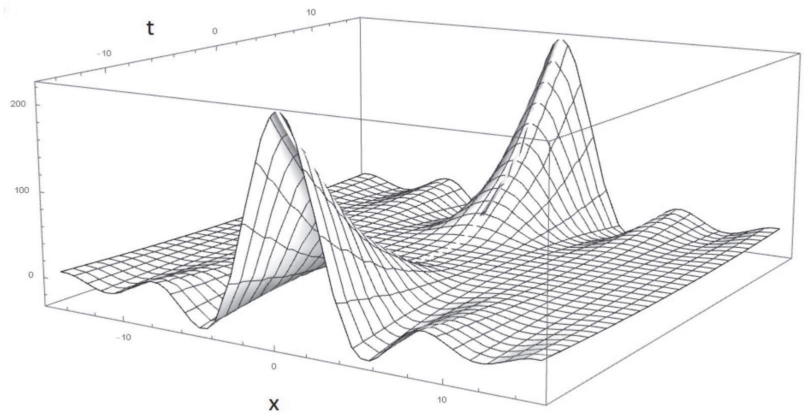

Рис. 12. $u(x,t) = (2(\cos t - 1) + t^2)j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные в работе методы, примененные к задачам с оператором Бесселя, могут быть обобщены на случай, когда вместо оператора Бесселя взят какой-либо другой оператор L, для которого может быть построен оператор обобщенного сдвига. Приведем формальные алгоритмы создания инструментов для решения задач с оператором L.

Рассмотрим обобщение оператора сдвига, предложенное Ж. Дельсартом (Jean Delsarte) в [197–200] (см. также [87–90, 109, 246]).

Если f — функция, определенная на вещественной оси, то оператор сдвига T_x^y, $y \in \mathbb{R}$, определяется равенством

$$T_x^y f(x) = f(x+y). \tag{15.8}$$

Пусть теперь $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Подход Ж. Дельсарта заключался в нахождении обобщения формулы Тейлора

$$T_x^y f(x) = f(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x), \tag{15.9}$$

которая дает разложение оператора сдвига T_x^y по степеням оператора дифференцирования $\dfrac{d}{dx}$. Для сдвига (15.8), опираясь на (15.9), Дельсарт сопоставлял функцию $\varphi_n(y) = \dfrac{y^n}{n!}$ дифференциальному оператору $L_x = \dfrac{d}{dx}$ в некотором специальном смысле. А именно, он исходил из того, что решение $\varphi(y,\lambda)$, $y \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ задачи

$$L_y\varphi = \lambda\varphi, \qquad \varphi(0,\lambda) = 1 \tag{15.10}$$

есть

$$\varphi(y,\lambda) = e^{\lambda y},$$

для каждого вещественного y эта функция является целой функцией λ и

$$\varphi(y,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(y)\lambda^n \qquad \text{или} \qquad e^{\lambda y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\,\lambda^n. \tag{15.11}$$

Функции $\varphi_n(y) = \dfrac{y^n}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ удовлетворяют условиям

$$L_y\varphi_0 = 0, \qquad \varphi_0(1) = 1,$$

$$L_y\varphi_n = \varphi_{n-1}, \qquad \varphi_n(0) = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

С учетом (15.10), Дельсарт обобщает формулу Тейлора (15.9) следующим образом:

$$T_x^y f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(y)(L_x)^n f(x), \tag{15.12}$$

где L_x — некоторый оператор. Очевидно, что поскольку $L_y\varphi_0 = 0$ и $L_y\varphi_n = \varphi_{n-1}$, то формально

$$L_y T_x^y f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_y\varphi_n(y)(L_x)^n f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{n-1}(y)(L_x)^n f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(y)(L_x)^{n+1} f(x) = L_x T^y f(x),$$

то есть $T_x^y f(x)$ формально удовлетворяет уравнению

$$L_x T_x^y f(x) = L_y T_x^y f(x) \tag{15.13}$$

при начальных условиях

$$T_x^y f(x)|_{y=0} = f(x), \qquad \left.\frac{\partial}{\partial y} T_x^y f(x)\right|_{y=0} = 0. \tag{15.14}$$

Операторы T_x^y Дельсарт назвал операторами обобщенного сдвига и установил для них ряд свойств. Обобщенный сдвиг, соответствующий оператору Бесселя (3.1), является одним из примеров оператора преобразования (см. определение (2.1)).

В работе [197] Дельсарт подробно изучает оператор обобщенного сдвига, соответствующий оператору Бесселя

$$L_x = (B_\gamma)_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{x}\frac{\partial}{\partial x}.$$

Такой обобщенный сдвиг также подробно рассматривается в статье [90].

Таким образом, если для некоторого оператора L и некоторого класса функций может быть построен оператор обобщенного сдвига либо по формуле (15.12), либо как решение задачи (15.13)-(15.14), то, используя этот сдвиг, можно ввести обобщенную свертку, обобщенное сферическое среднее и соответствующие потенциалы и решать задачи с оператором L.

Интегральное преобразование $\mathscr{F}_L$, удобное для работы с выражениями, содержащими L, строится как интегральный оператор с ядром φ, удовлетворяющим уравнению

$$L\varphi = \lambda\varphi$$

и условию

$$\varphi(0, \lambda) = 1$$

и подходящей весовой функцией.

Для использования метода операторов преобразования для решения задач с оператором L можно сконструировать необходимые операторы преобразования композиционным методом (см. [49, 50, 208, 274, 275]).

Для решения неоднородных уравнений с оператором L можно построить обобщенный потенциал Рисса, порожденный оператором L. Приведем алгоритм построения потенциала, применением которого можно решить уравнение

$$\mathscr{W}_L u = f,$$

содержащее оператор L, действующий по одной, нескольким или всем переменным, во всем евклидовом пространстве или его части.

1. Выберем интегральное преобразование $\mathbf{F}_L$, удобное для работы с выражением $\mathscr{W}_L$. При этом по тем переменным, по которым действует оператор L, применяется соответствующее ему преобразование $\mathscr{F}_L$. Для подходящего класса функций f имеем $\mathbf{F}_L\mathscr{W}_L f = P\mathbf{F}_L f$, где P — символ оператора $\mathscr{W}_L$.
2. Дробная отрицательная степень оператора $\mathscr{W}_L$ или потенциал Рисса конструируется по формуле
$$\mathscr{W}_L^{-\frac{\alpha}{2}} f = \mathbf{F}_L^{-1} P^{-\frac{\alpha}{2}} \mathbf{F}_L f.$$
Здесь $P^{-\frac{\alpha}{2}}$ может быть обобщенной функцией, например, порожденной индефинитной квадратичной формой.
3. Интегральное представление полученного потенциала Рисса реализуется в форме обобщенной свертки
$$I^\alpha f = (\mathbf{F}_L P^{-\frac{\alpha}{2}} * f)_L.$$
Свертка $(\cdot * \cdot)_L$ должна соответствовать выбранному интегральному преобразованию $\mathbf{F}_L$.

4. Полученный интеграл $I^\alpha f$ исследуется на абсолютную сходимость для некоторого класса функций f. Находятся значения α, при которых этот интеграл сходится абсолютно. Помимо этого могут быть изучены и другие свойства, такие как ограниченность, полугрупповое свойство и др.
5. Выясняются дополнительные условия, которым должна удовлетворять функция f, для того, чтобы выполнялось равенство
$$I^{\alpha+k} L f = I^\alpha f$$
для некоторого натурального k (например, $k = 2$, когда P — квадратичная форма).
6. Конструируя аналитическое продолжение (или обходясь без этого, если возможно), показываем, что при $\alpha = 0$ потенциал $I^\alpha f$ есть тождественный оператор
$$I^0 f = f$$
для некоторого класса функций.
7. Используя полученные результаты, легко выписать решение уравнения
$$\mathscr{W}_L u = f$$
для некоторого класса функций f. Для этого достаточно применить оператор $I^{\alpha+k}$ к обеим частям уравнения $\mathscr{W}_L u = f$:
$$I^{\alpha+k} \mathscr{W}_L u = I^\alpha u = I^{\alpha+k} f.$$
Полагая $\alpha = 0$, получим $u = I^k f$. Здесь используется аналитическое продолжение потенциала $I^\alpha f$, если необходимо.

Легко видеть, что, используя эту схему, можно получить решение уравнения
$$\mathscr{W}_L^m u = f, \quad m \in \mathbb{N}$$
с итерированным оператором $\mathscr{W}_L$.

Следуя приведенным алгоритмам, можно решать широкий спектр задач с оператором L. Однако, чтобы формальные выражения превратились в действующие формулы, требуются строгие доказательства для каждого пункта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.
2. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. — М.: Наука, 1978.
3. *Барабаш О. П., Шишкина Э. Л.* Решение общего уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу, содержащее оператор Бесселя по всем переменным// Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. Техн. науки. — 2016. — № 6. — С. 2146–2151.
4. *Берг Й., Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства. Введение. — М.: Мир, 1980.
5. *Березанский Ю. М.* Об операторе, порожденном ультрагиперболическим дифференциальным выражением// Укр. мат. ж. — 1959. — *11*, № 3. — С. 315–321.
6. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1966.
7. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975.
8. *Благовещенский А. С.* О некоторых корректных задачах для ультрагиперболического и волнового уравнений с данными на характеристическом конусе// Докл. АН СССР. — 1961. — *140*, № 5. — С. 990–993.
9. *Благовещенский А. С.* О характеристической задаче для ультрагиперболического уравнения// Мат. сб. — 1964. — *63*, № 1. — С. 137–168.
10. *Ватсон Г. И.* Теория бесселевых функций. Часть первая. — М.: ИЛ, 1949.
11. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. Учебн. для физ. и мех.-мат. спец. вузов. — М.: Наука, 1981.
12. *Владимиров В. С., Жаринов В. В.* Уравнения математической физики. — М.: Физматлит, 2004.
13. *Волк В. Я.* О формулах обращения для дифференциального уравнения с особенностью при $x = 0$// Усп. мат. наук. — 1953. — *111*, № 4. — С. 141–151.
14. *Воробьева С. А., Глушак А. В.* Абстрактное уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу, содержащее степени неограниченного оператора// Дифф. уравн. — 2001. — *37*, № 5. — С. 706–709.
15. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. Учеб. пособие. — М.: Физматлит, 1958.

16. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. Обобщенные функции. Вып. 3. — М.: Физматлит, 1958.
17. *Глушак А. В.* Об одном абстрактном уравнении Эйлера—Пуассона—Дарбу с младшим членом, содержащим особенность// Изв. вузов. Сер. Мат. — 1995. — № 3. — С. 3–7.
18. *Глушак А. В.* О возмущении абстрактного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу// Мат. заметки. — 1996. — *60*, № 3. — С. 363–369.
19. *Глушак А. В.* Регулярное и сингулярное возмущения абстрактного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу// Мат. заметки. — 1999. — *66*, № 3. — С. 364–371.
20. *Глушак А. В.* Нелокальная задача для абстрактного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу// Изв. вузов. Сер. Мат. — 2016. — № 6. — С. 27–35.
21. *Глушак А. В.* Операторная формула сдвига решения задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу// Мат. заметки. — 2019. — *105*, № 5. — С. 656–665.
22. *Глушак А. В., Покручин О. А.* Критерий разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу// Дифф. уравн. — 2016. — *52*, № 1. — С. 41–59.
23. *Глушак А. В., Попова В. А.* Обратная задача для абстрактного дифференциального уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2006. — *15*. — С. 126–141.
24. *Глушак А. В., Романченко Т. Г.* Формулы связи между решениями абстрактных сингулярных дифференциальных уравнений// Научн. ведом. БелГУ. Сер. Мат. Физ. — 2016. — *42*, № 6. — С. 36–39.
25. *Гольдман М. Л.* Обобщенные ядра дробного порядка// Дифф. уравн. — 1971. — *7*, № 12. — С. 2199–2210.
26. *Гольдман М. Л.* Интегральные свойства обобщенных бесселевых потенциалов// Докл. РАН. — 2007. — *414*, № 2. — С. 159–164.
27. *Гольдман М. Л.* Перестановочно-инвариантные оболочки обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса// Докл. РАН. — 2008. — *423*, № 1. — С. 14–18.
28. *Гольдман М. Л.* Конус перестановок для обобщенных бесселевых потенциалов// Тр. МИАН. — 2008. — *260*. — С. 151–163.
29. *Гольдман М. Л.* Оптимальные вложения потенциалов типа Бесселя и Рисса// Докл. РАН. — 2009. — *428*, № 3. — С. 305–309.
30. *Гольдман М. Л.* Об оптимальных вложениях обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса// Тр. МИАН. — 2010. — *269*. — С. 91–111.
31. *Гольдман М. Л., Гусельникова О. М.* Оптимальные вложения потенциалов типа Бесселя и типа Рисса. Ч. 1// Вестн. РУДН. Сер. Мат. Информ. Физ. — 2011. — № 3. — С. 4–16.
32. *Гольдман М. Л., Малышева А. В.* Об оценке равномерного модуля непрерывности обобщенного потенциала Бесселя// Тр. МИАН. — 2013. — *283*. — С. 80–91.
33. *Гордеев А. М.* Некоторые краевые задачи для обобщенного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу// Волжский мат. сб. — 1968. — № 6. — С. 56–61.
34. *Дончев Д. С., Ситник С. М., Шишкина Э. Л.* Об обобщении биноминальной теоремы, возникающем в теории дифференциальных уравнений// Научн. ведом. БелГУ. Сер. Мат. Физ. — 2017. — *49*, № 27. — С. 19–25.
35. *Дончев Д. С., Ситник С. М., Шишкина Э. Л.* Об уточнениях неоклассического неравенства и его приложениях в теории стохастических дифференциальных уравнений и броуновского движения// Челябинск. физ.-мат. ж. — 2017. — *2*, № 3. — С. 257–265.
36. *Житомирский Я. И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя// Мат. сб. — 1955. — *36*, № 2. — С. 299–310.
37. *Загорский Г. Я.* Смешанные задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа. — Львов: Изд-во Львовского ун-та, 1961.
38. *Ильин В. А.* Ядра дробного порядка// Мат. сб. — 1957. — *41*, № 4. — С. 459–480.
39. *Йон Ф.* Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. — М.: ИЛ, 1958.
40. *Каримов Ш. Т.* Многомерный оператор Эрдейи—Кобера и его приложение к решению задачи Коши для трехмерного гиперболического уравнения с сингулярными коэффициентами// Узб. мат. ж. — 2013. — № 1. — С. 70–80.
41. *Каримов Ш. Т.* Об одном методе решения задачи Коши для обобщенного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу// Узб. мат. ж. — 2013. — № 3. — С. 57–69.
42. *Каримов Ш. Т.* Решение задачи Коши для многомерного гиперболического уравнения с сингулярными коэффициентами методом дробных интегралов// Докл. АН Респ. Узбекистан. — 2013. — № 1. — С. 11–13.

43. *Каримов Ш. Т.* Решение задачи Коши для трехмерного гиперболического уравнения с сингулярными коэффициентами и со спектральным параметром// Узб. мат. ж. — 2014. — № 2. — С. 55–65.
44. *Каримов Ш. Т.* О некоторых обобщениях свойств оператора Эрдейи—Кобера и их приложения// Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. — 2017. — № 2. — С. 20–40.
45. *Каримов Ш. Т.* Об одном методе решения задачи Коши для одномерного поливолнового уравнения с сингулярным оператором Бесселя// Изв. вузов. Сер. Мат. — 2017. — № 8. — С. 27–41.
46. *Каримов Ш. Т.* Об одном методе решения аналога задачи Коши для поликалорического уравнения с сингулярным оператором Бесселя// Укр. мат. ж. — 2017. — *69*, № 10. — С. 1372–1384.
47. *Карп Д. Б., Ситник С. М.* Дробное преобразование Ханкеля и его приложения// Тез. докл. Воронежская весенняя математическая школа (17–23 апреля 1996 г.) Современные методы в теории краевых задач. «Понтрягинские чтения-VII». — Воронеж: ВГУ. — 1996. — С. 92.
48. *Катрахов В. В.* Общие краевые задачи для одного класса сингулярных и вырождающихся эллиптических уравнений// Мат. сб. — 1980. — *112*, № 3. — С. 354–379.
49. *Катрахов В. В., Ситник С. М.* Метод факторизации в теории операторов преобразования// В сб.: «Мемориальный сборник памяти Бориса Алексеевича Бубнова: неклассические уравнения и уравнения смешанного типа». — Новосибирск, 1990. — С. 104–122.
50. *Катрахов В. В., Ситник С. М.* Композиционный метод построения B-эллиптических, B-параболических и B-гиперболических операторов преобразования// Докл. РАН. — 1994. — *337*, № 3. — С. 307–311.
51. *Катрахов В. В., Ситник С. М.* Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2018. — sl 64, № 2. — С. 211–426.
52. *Киприянов И. А.* О краевых задачах для уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя// Докл. АН СССР. — 1964. — *158*, № 2. — С. 275–278.
53. *Киприянов И. А.* Преобразования Фурье—Бесселя и теоремы вложения для весовых классов// Тр. МИАН. — 1967. — *89*. — С. 130–213.
54. *Киприянов И. А.* Краевые задачи для сингулярных эллиптических операторов в частных производных// Докл. АН СССР. — 1970. — *195*, № 1. — С. 32–35.
55. *Киприянов И. А.* Об одном классе сингулярных эллиптических операторов// Дифф. уравн. — 1971. — *7*, № 11. — С. 2065–2077.
56. *Киприянов И. А.* Об одном классе сингулярных эллиптических уравнений// Сиб. мат. ж. — 1973. — *14*, № 3. — С. 560–568.
57. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М.: Физматлит, 1997.
58. *Киприянов И. А., Засорин Ю. В.* О фундаментальном решении волнового уравнения с многими особенностями и о принципе Гюйгенса// Дифф. уравн. — 1992. — *28*, № 3. — С. 452–462.
59. *Киприянов И. А., Иванов Л. А.* О лакунах для некоторых классов уравнений с особенностями// Мат. сб. — 1979. — *110*, № 2. — С. 235–250.
60. *Киприянов И. А., Иванов Л. А.* Фундаментальные решения для однородных B-гиперболических уравнений// Сиб. мат. ж. — 1980. — *21*, № 4. — С. 95–102.
61. *Киприянов И. А., Иванов Л. А.* Уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу в римановом пространстве// Докл. АН СССР. — 1981. — *260*, № 4. — С. 790–794.
62. *Киприянов И. А., Иванов Л. А.* Получение фундаментальных решений для однородных уравнений с особенностями по нескольким переменным// Тр. сем. С. Л. Соболева. — 1983. — № 1. — С. 55–77.
63. *Киприянов И. А., Иванов Л. А.* Задача Коши для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу в однородном симметрическом римановом пространстве. I.// Тр. МИАН. — 1984. — *170*. — С. 139–147.
64. *Киприянов И. А., Иванов Л. А.* Задача Коши для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу в симметрическом пространстве// Мат. сб. — 1984. — *124*, № 1. — С. 45–55.
65. *Киприянов И. А., Иванов Л. А.* Потенциалы Рисса на пространствах Лоренца// Мат. сб. — 1986. — *130*, № 4. — С. 465–474.
66. *Киприянов И. А., Иванов Л. А.* К теории потенциалов Рисса на пространствах Лоренца// Тр. МИАН. — 1987. — *180*. — С. 134–135.
67. *Киприянов И. А., Иванов Л. А.* Представление Даламбера и равнораспределение энергии// Дифф. уравн. — 1990. — *26*, № 3. — С. 458–464.
68. *Киприянов И. А., Катрахов В. В.* Об одном классе многомерных сингулярных псевдодифференциальных операторов// Мат. сб. — 1977. — *104*, № 1. — С. 49–68.
69. *Киприянов И. А., Катрахов В. В.* Краевая задача для эллиптических уравнений второго порядка при наличии особенностей в изолированных граничных точках// Докл. АН СССР. — 1984. — *276*, № 2. — С. 274–276.
70. *Киприянов И. А., Катрахов В. В.* Об одной сингулярной эллиптической краевой задаче в областях на сфере// Препринт ИПМ ДВО РАН. — 1989.

71. *Киприянов И. А., Катрахов В. В.* Сингулярные краевые задачи для некоторых эллиптических уравнений высших порядков// Препринт ИПМ ДВО РАН. — 1989.
72. *Киприянов И. А., Катрахов В. В.* Об одной краевой задаче для эллиптических уравнений второго порядка в областях на сфере// Докл. АН СССР. — 1990. — *313*, № 3. — С. 545–548.
73. *Киприянов И. А., Ключанцев М. И.* О ядрах Пуассона для краевых задач с дифференциальным оператором Бесселя// В сб.: «Дифференциальные уравнения с частными производными». — М., 1970. — С. 119–134.
74. *Киприянов И. А., Кононенко В. И.* О фундаментальных решениях уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя// Докл. АН СССР. — 1966. — *170*, № 2. — С. 261–264.
75. *Киприянов И. А., Кононенко В. И.* Фундаментальные решения B-эллиптических уравнений// Дифф. уравн. — 1967. — *3*, № 1. — С. 114–129.
76. *Киприянов И. А., Кононенко В. И.* О фундаментальных решениях некоторых сингулярных уравнений в частных производных// Дифф. уравн. — 1969. — *5*, № 8. — С. 1470–1483.
77. *Киприянов И. А., Куликов А. А.* Фундаментальные решения B-гипоэллиптических уравнений// Дифф. уравн. — 1991. — *27*, № 8. — С. 1387–1395.
78. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981.
79. *Костомаров Д. П.* Задачи Коши для ультрагиперболических уравнений. — М.: Наука, 2003.
80. *Кравченко В. В., Шишкина Э. Л., Торба С. Н.* О представлении в виде ряда интегральных ядер операторов преобразования для возмущенных уравнений Бесселя// Мат. заметки. — 2018. — *104*, № 4. — С. 552–570.
81. *Кратцер А., Франц В.* Трансцендентные функции. — М.: ИЛ, 1963.
82. *Кудрявцев Л. Д.* Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений// Тр. МИАН. — 1959. — *55*. — С. 3–182.
83. *Кузьмин А. Г.* Неклассические уравнения смешанного типа и их применения в газовой динамике. — Л.: ЛГУ, 1990.
84. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1979.
85. *Курант Р., Гильберт Д.* Уравнения математической физики. Т. 1. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1933.
86. *Курант Р., Гильберт Д.* Уравнения математической физики. Т. 2. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1945.
87. *Левитан Б. М.* Некоторые вопросы теории почти периодических функций. I// Усп. мат. наук. — 1947. — *2*, № 21. — С. 133–192.
88. *Левитан Б. М.* Некоторые вопросы теории почти периодических функций. II// Усп. мат. наук. — 1947. — *2*, № 22. — С. 174–214.
89. *Левитан Б. М.* Применение операторов обобщенного сдвига к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка// Усп. мат. наук. — 1949. — *4*, № 29. — С. 3–112.
90. *Левитан Б. М.* Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье// Усп. мат. наук. — 1951. — *6*, № 2. — С. 102–143.
91. *Лизоркин П. И.* Неизотропные бесселевы потенциалы. Теоремы вложения для пространства Соболева $L_p(r_1,\ldots,r_n)$ с дробными производными// Докл. АН СССР. — 1966. — *170*, № 3. — С. 508–511.
92. *Лизоркин П. И.* Поведение функций из лиувиллевских классов на бесконечности. О риссовых потенциалах произвольного порядка// Тр. МИАН. — 1979. — *150*. — С. 174–197.
93. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с сильным вырождением (случай обобщенных решений)// Докл. АН СССР. — 1981. — *259*, № 1. — С. 28–30.
94. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Эллиптическое уравнение с вырождением. Вариационный метод// Докл. АН СССР. — 1981. — *257*, № 1. — С. 42–45.
95. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Эллиптические уравнения с вырождением. Дифференциальные свойства решений// Докл. АН СССР. — 1981. — *257*, № 2. — С. 278–282.
96. *Ляхов Л. Н.* Об одном классе гиперсингулярных интегралов// Докл. АН СССР. — 1990. — *315*, № 2. — С. 291–296
97. *Ляхов Л. Н.* Обращение B-потенциалов// Докл. АН СССР. — 1991. — *321*, № 3. — С. 466–469.
98. *Ляхов Л. Н.* Пространства B-потенциалов Рисса// Докл. АН СССР. — 1994. — *334*, № 3. — С. 278–280.
99. *Ляхов Л. Н.* Описание пространства B-потенциалов Рисса $U^\gamma_\alpha(L^\gamma_p)$ с помощью B-производных порядка $2[\alpha/2]$// Докл. РАН. — 1995. — *341*, № 2. — С. 161–165.
100. *Ляхов Л. Н.* О символе интегрального оператора типа B-потенциала с однократной характеристикой// Докл. РАН. — 1996. — *351*, № 2. — С. 164–168.
101. *Ляхов Л. Н.* Весовые сферические функции и потенциалы Рисса, порожденные обобщенным сдвигом. — Воронеж: ВГТА, 1997.

102. *Ляхов Л. Н.* Мультипликаторы смешанного преобразования Фурье—Бесселя// Тр. МИАН. — 1997. — *214*. — С. 234–249.
103. *Ляхов Л. Н.* B-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с B-потенциальными ядрами. — Липецк: ЛГПУ, 2007.
104. *Ляхов Л. Н., Половинкин И. П., Шишкина Э. Л.* Об одной задаче И. А. Киприянова для сингулярного ультрагиперболического уравнения// Дифф. уравн. — 2014. — *50*, № 4. — С. 516–528.
105. *Ляхов Л. Н., Половинкин И. П., Шишкина Э. Л.* Формулы решения задачи Коши для сингулярного волнового уравнения с оператором Бесселя по времени// Докл. РАН. — 2014. — *459*, № 5. — С. 533–538.
106. *Ляхов Л. Н., Шишкина Э. Л.* Обобщенные B-потенциалы Рисса смешанного типа// Докл. РАН. — 2006. — *406*, № 3. — С. 303–307.
107. *Ляхов Л. Н., Шишкина Э. Л.* Общие B-гиперсингулярные интегралы с однородной характеристикой// Докл. РАН. — 2007. — *412*, № 2. — С. 162–166.
108. *Ляхов Л. Н., Шишкина Э. Л.* Обращение общих B-потенциалов Рисса с однородной характеристикой в весовых пространствах// Докл. РАН. — 2009. — *426*, № 4. — С. 443–447.
109. *Марченко В. А.* Обобщенный сдвиг, операторы преобразования и обратные задачи// В сб.: «Математические события XX века». — М.: Фазис, 2003. — С. 209–226.
110. *Матійчук М. I.* Параболічні сингулярні крайові задачі. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1999.
111. *Матійчук М. I.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. — Чернівці: Прут, 2003.
112. *Мизес Р.* Математическая теория течений сжимаемой жидкости. — М.: ИЛ, 1961.
113. *Муравник А. Б.* Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — *52*. — С. 3–141.
114. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1977.
115. *Никольский С. М., Лизоркин П. И.* О некоторых неравенствах для функций из весовых классов и краевых задачах с сильным вырождением на границе// Докл. АН СССР. — 1964. — *159*, № 3. — С. 512–515.
116. *Ногин В. А., Сухинин Е. В.* Обращение и описание гиперболических потенциалов с L_p-плотностями// Деп. в ВИНИТИ. — Москва, 1992. — № 2512-92.
117. *Ногин В. А., Сухинин Е. В.* Обращение и описание гиперболических потенциалов с L_p-плотностями// Докл. РАН. — 1993. — *329*, № 5. — С. 550–552.
118. *Ногин В. А., Шевченко К. С.* Обращение некоторых потенциалов Рисса с осциллирующими характеристиками в неэллиптическом случае// Изв. вузов. Сер. Мат. — 1999. — № 10. — С. 77–80.
119. *Олевский М. Н.* Решение задачи Дирихле, относящейся к уравнению $\Delta u + \dfrac{p}{x_n}\dfrac{\partial u}{x_n} = \rho$ для полусферической области// Докл. АН СССР. — 1949. — *64*, № 6. — С. 767–770.
120. *Платонов С. С.* Обобщенные сдвиги Бесселя и некоторые задачи теории приближения функций в метрике L_2. 1// Тр. ПетрГУ. Сер. Мат. — 2000. — *7*. — С. 70–82.
121. *Платонов С. С.* Обобщенные сдвиги Бесселя и некоторые задачи теории приближения функций в метрике L_2. 2// Тр. ПетрГУ. Сер. Мат. — 2001. — *8*. — С. 20–36.
122. *Платонов С. С.* Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой// Изв. РАН. Сер. Мат. — 2007. — *71*, № 5. — С. 149–196.
123. *Платонов С. С.* Обобщенные сдвиги Бесселя и некоторые обратные теоремы теории приближения функций на полупрямой// Тр. ПетрГУ. Сер. Мат. — 2007. — *14*. — С. 44–57.
124. *Платонов С. С.* Обобщенные сдвиги Бесселя и некоторые задачи теории приближений функций на полупрямой// Сиб. мат. ж. — 2009. — *50*, № 1. — С. 154–174.
125. *Половинкин И. П.* Теоремы о среднем для волновых уравнений и уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу// Дис. канд. физ.-мат. наук. — Воронеж, 1992.
126. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. — М.: Наука, 1981.
127. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 2. Специальные функции. — М.: Наука, 1983.
128. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 3. Специальные функции. Дополнительные главы. — М.: Наука, 2003.
129. *Пулькин С. П.* Некоторые краевые задачи для уравнения $u_{xx} \pm u_{yy} + \dfrac{p}{x}u_x$// Уч. зап. Куйбышев. пед. ин-та. — 1958. — *21*. — С. 3–54.
130. *Пулькин С. П.* Избранные труды. — Самара: Универс групп, 2007.

131. *Риман Б.* О распространении плоских волн конечной амплитуды// В сб. «Сочинения». — М.—Л.: ОГИЗ, 1948. — С. 376–395.
132. *Сабитов К. Б., Ильясов Р. Р.* Решение задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом спектральным методом// Изв. вузов. Сер. Мат. — 2004. — № 2. — С. 64–71.
133. *Самко С. Г.* Об основных функциях, исчезающих на заданном множестве, и о делении на функции// Мат. заметки. — 1977. — *21*, № 5. — С. 677–689.
134. *Самко С. Г.* О плотности в $L_p(R_n)$ пространств Φ_V типа Лизоркина// Мат. заметки. — 1982. — *31*, № 6. — С. 855–865.
135. *Самко С. Г.* О плотности пространств Φ_V типа Лизоркина в пространствах $L_p(R_n)$ со смешанной нормой// Докл. РАН. — 1991. — *319*, № 3. — С. 567–569.
136. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
137. *Ситник С. М.* Об унитарных операторах преобразования// Деп. в ВИНИТИ. — Воронеж: ВГУ, 1986. — 13.11.1986, № 7770–В86.
138. *Ситник С. М.* О скорости убывания решений некоторых эллиптических и ультраэллиптических уравнений// Деп. в ВИНИТИ. — Воронеж: ВГУ, 1986. — 13.11.1986, № 7771–В86.
139. *Ситник С. М.* Операторы преобразования для дифференциального выражения Бесселя// Деп. в ВИНИТИ. — Воронеж: ВГУ, 1986. — 23.01.1987, № 535–В87.
140. *Ситник С. М.* Об одной паре операторов преобразования// В сб.: «Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики». — Новосибирск, 1987. — С. 168–173.
141. *Ситник С. М.* О скорости убывания решений некоторых эллиптических и ультраэллиптических уравнений// Дифф. уравн. — 1988. — *24*, № 3. — С. 538–539.
142. *Ситник С. М.* Операторы преобразования для сингулярных дифференциальных уравнений с оператором Бесселя// В сб.: «Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики». — Новосибирск, 1989. — С. 179–185.
143. *Ситник С. М.* Унитарность и ограниченность операторов Бушмана—Эрдейи нулевого порядка гладкости// Препринт Ин-та автомат. и проц. управл. ДВО РАН. — Владивосток, 1990.
144. *Ситник С. М.* Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана—Эрдейи// Докл. АН СССР. — 1991. — *320*, № 6. — С. 1326–1330.
145. *Ситник С. М.* Оператор преобразования и представление Йоста для уравнения с сингулярным потенциалом// Препринт Ин-та автом. и проц. управл. ДВО РАН. — Владивосток, 1993.
146. *Ситник С. М.* Неравенства для полных эллиптических интегралов Лежандра// Препринт Ин-та автом. и проц. управл. ДВО РАН. — Владивосток, 1994.
147. *Ситник С. М.* Неравенства для функций Бесселя// Докл. РАН. — 1995. — *340*, № 1. — С. 29–32.
148. *Ситник С. М.* Обобщения неравенств Коши—Буняковского методом средних значений и их приложения// Чернозем. альманах науч. иссл. Сер. Фундам. мат. — 2005. — № 1. — С. 3–42.
149. *Ситник С. М.* Метод факторизации операторов преобразования в теории дифференциальных уравнений// Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2008. — № 8/1 (67). — С. 237–248.
150. *Ситник С. М.* Операторы преобразования и их приложения// В сб.: «Исследования по современному анализу и математическому моделированию». — Владикавказ: Владикавказ. науч. центр РАН и РСО-А, 2008. — С. 226–293.
151. *Ситник С. М.* Уточнения и обобщения классических неравенств// В сб.: «Итоги науки. Южный федеральный округ. Сер. Мат. форум. Т. 3. Исследования по математическому анализу». — Владикавказ: Южн. мат. ин-т ВНЦ РАН и РСО Алания, 2009. — С. 221–266.
152. *Ситник С. М.* О представлении в интегральном виде решений одного дифференциального уравнения с особенностями в коэффициентах// Владикавказ. мат. ж. — 2010. — *12*, № 4. — С. 73–78.
153. *Ситник С. М.* Оператор преобразования специального вида для дифференциального оператора с сингулярным в нуле потенциалом// В сб.: «Неклассические уравнения математической физики». — Новосибирск: Ин-т мат. им. С. Л. Соболева СО РАН, 2010. — С. 264–278.
154. *Ситник С. М.* О явных реализациях дробных степеней дифференциального оператора Бесселя и их приложениях к дифференциальным уравнениям// Докл. Адыгск. (Черкесск.) Межд. акад. наук. — 2010. — *12*, № 2. — С. 69–75.
155. *Ситник С. М.* Обзор основных свойств операторов преобразования Бушмана—Эрдейи// Челябинск. физ.-мат. ж. — 2016. — *1*, № 4. — С. 63–93.
156. *Ситник С. М.* Применение операторов преобразования Бушмана—Эрдейи и их обобщений в теории дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах// Дисс. д.ф.-м.н. — Воронеж, 2016.
157. *Ситник С. М., Карп Д. Б.* Формулы композиций для интегральных преобразований с функциями Бесселя в ядрах// Препринт Ин-та автомат. и проц. управл. ДВО РАН. — Владивосток, 1993.

158. *Ситник С. М., Карп Д. Б.* Дробное преобразование Ханкеля и его приложения в математической физике// Препринт. Ин-та автомат. и проц. управл. ДВО РАН. — Владивосток, 1994.
159. *Ситник С. М., Ляховецкий Г. В.* Формулы композиций для операторов Бушмана—Эрдейи// Препринт. Ин-та автомат. и проц. управл. ДВО РАН. — Владивосток, 1991.
160. *Ситник С. М., Ляховецкий Г. В.* Операторы преобразования Векуа—Эрдейи—Лаундеса// Препринт. Ин-та автомат. и проц. управл. ДВО РАН. — Владивосток, 1994.
161. *Ситник С. М., Шишкина Э. Л.* Об одном тождестве для итерированного весового сферического среднего и его приложениях// Сиб. электрон. мат. изв. — 2016. — *13*. — С. 849–860.
162. *Ситник С. М., Шишкина Э. Л.* Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. — М.: Физматлит, 2018.
163. *Ситник С. М., Шишкина Э. Л.* О дробных степенях оператора Бесселя на полуоси// Сиб. электрон. мат. изв. — 2018. — *15*. — С. 1–10.
164. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. I// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2007. — *26*. — С. 3–132.
165. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. II// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *33*. — С. 3–179.
166. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся гиперболические уравнения. — Минск: Вышэйш. школа, 1977.
167. *Сташевская В. В.* Метод операторов преобразования// Докл. АН СССР. — 1953. — *113*, № 3. — С. 409–412.
168. *Сташевская В. В.* Об обратной задаче спектрального анализа для дифференциального оператора с особенностью в нуле// Уч. зап. Харьков. мат. об-ва. — 1957. — № 5. — С. 49–86.
169. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. — М.: Мир, 1973.
170. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. — М.: Мир, 1974.
171. *Терсенов С. А.* Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. — Новосибирск: НГУ, 1973.
172. *Хайруллин Р. С.* К теории уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу// Изв. вузов. Мат. — 1993. — № 11. — С. 69–76.
173. *Хе Кан Чер* Смешанная задача для обобщенного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу в исключительном случае// Мат. заметки. — 1986. — *40*, № 1. — С. 87–92.
174. *Хе Кан Чер* О явных формулах решения задач Дарбу и Коши—Гурса для вырождающегося гиперболического уравнения// Сиб. мат. ж. — 1999. — *40*, № 3. — С. 710–717.
175. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. 1. Теория распределений. — М.: Мир, 1986.
176. *Чернышев Г. Л.* О задаче Коши с сингулярным гиперболическим оператором// Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. — Воронеж: ВГУ, 1973.
177. *Шишкина Э. Л.* Обобщенная весовая функция r^γ// Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Мат. — 2006. — № 1. — С. 215–221.
178. *Шишкина Э. Л.* Равенство для интерированных весовых сферических средних, порожденных обобщенным сдвигом// Материалы науч. конф. «Герценовские чтения-2013». — СПб: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2013. — *66*. — С. 143–145.
179. *Шишкина Э. Л.* Интегральное представление ядра оператора, аппроксимирующего обратный оператор для гиперболического B-потенциала Рисса// Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. и техн. наук. — 2016. — № 2. — С. 450–458.
180. *Шишкина Э. Л.* О свойствах одного усредняющего ядра в весовом классе Лебега// Науч. ведом. Белгород. гос. ун-та. Сер. Мат. Физ. — 2016. — *42*, № 6. — С. 12–19.
181. *Шишкина Э. Л.* Весовые обобщенные функции, отвечающие квадратичной форме с комплексными коэффициентами// Челябинск. физ.-мат. ж. — 2017. — *2*, № 1. — С. 88–98.
182. *Шишкина Э. Л.* Дробное уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу и случайные блуждания// Тезисы докл. Второй международной конференции по стохастическим методам. — 2017. — *62*, № 4. — С. 837–838.
183. *Шишкина Э. Л.* Метод композиционных интегральных преобразований для сингулярных дифференциальных уравнений с оператором Бесселя и его дробными степенями// Дис. докт. физ.-мат. наук. — Москва, 2019.
184. *Asgeirsson L.* Uber eine Mittelwertseigenschaft von Losungen homogener linearer partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten// Math. Ann. — 1937. — С. 321–346.
185. *Baker B. B., Copson E. T.* The Mathematical Theory of Huygens' Principle. — New York: Oxford University Press, 1939.
186. *Baleanu D., Diethelm K., Scalas E., Trujillo J. J.* Fractional calculus: models and numerical methods. — Jersey–London–Singapore, etc.: World Scientific, 2012.

187. *Bessel F. W.* Untersuchung des Teils der planetarischen St orungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht// Abhandlungen der Berliner Akademie. — 1824. — C. 1–52.
188. *Bresters D. W.* On the equation of Euler–Poisson–Darboux// SIAM J. Math. Anal. — 1973. — *4*, № 1. — C. 31–41.
189. *Bresters D. W.* On a generalized Euler–Poisson–Darboux equation// SIAM J. Math. Anal. — 1978. — *9*, № 5. — C. 924–934.
190. *Campos H., Kravchenko V. V., Torba S. M.* Transmutations, L-bases and complete families of solutions of the stationary Schrödinger equation in the plane// J. Math. Anal. Appl. — 2012. — *389*, № 2. — C. 1222–1238.
191. *Carroll R. W.* Transmutation and operator differential equations. — Amsterdam—New York—Oxford: North Holland, 1979.
192. *Carroll R. W., Showalter R. E.* Singular and degenerate Cauchy problems. — N. Y.: Academic Press, 1976.
193. *Castillo-Pérez R., Kravchenko V. V., Torba S. M.* Spectral parameter power series for perturbed Bessel equations// Appl. Math. Comput. — 2013. — *220*. — C. 676–694.
194. *Copson E. T.* Some applications of Marcel Riesz's integrals of fractional order// Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. — 1943. — *61*. — C. 260–272.
195. *Craig W., Weinstein S.* On determinism and well-posedness in multiple time dimensions// Proc. R. Soc. Lond. Ser. A. Math. Phys. Eng. Sci. — 2009. — *465*, № 2110. — C. 3023–3046.
196. *Darboux G.* Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. Vol. 2. — Paris: Gauthier-Villars, 1915.
197. *Delsarte J.* Sur une extension de la formule de Taylor// J. Math. Pures Appl. — 1938. — *17*. — C. 217–230.
198. *Delsarte J.* Une extension nouvelle de la theorie des fonctions presque-periodiques de Bohr// Acta Math. — 1938. — *69*. — C. 259–317.
199. *Delsarte J.* Hypergroupes et operateurs de permutation et de transmutation// Colloques Internat. Centre Nat. Rech. Sci. — 1956. — *71*. — C. 29–45.
200. *Delsarte J., Lions J.-L.* Transmutations d'operateurs differentiels dans le domaine complexe// C. R. Acad. Sci. Paris. — 1957. — *244*. — C. 832–834.
201. *Dimovski I.* Foundations of operational calculi for the Bessel-type differential operators// Serdica. — 1975. — *1*, № 1. — C. 51–63.
202. *Dimovski I., Kiryakova V.* Transmutations, convolutions and fractional powers of Bessel-type operators via Meijer's G-function// Proc. Int. Conf. Complex Anal. and Appl., Varna, 1983. — Sofia, 1985. — C. 45–66.
203. *Dimovski I., Kiryakova V.* The Obrechkoff integral transform: properties and relation to a generalized fractional calculus// Numer. Funct. Anal. Optim. — 2007. — *21*, № 1-2. — C. 121–144.
204. *Elouadih S., Daher R.* Generalization of Titchmarsh's theorem for the Dunkl transform in the space $L^p(\mathbb{R}^d, \omega_l(x)dx)$// Int. J. Math. Model. Comput. — 2016. — *6*, № 4. — C. 261–267.
205. *Euler L.* Tentamen de sono campanarum// Novi Comm. Acad. Petrop. — 1764. — *X*. — C. 261.
206. *Euler L.* Institutiones calculi integralis// Opera Omnia. — 1914. — *1*, № 13. — C. 212–230.
207. *Exton H.* On the system of partial differential equations associated with Appell's function F_4// J. Phys. A. Math. Gen. — 1995. — *28*. — C. 631–641.
208. *Fitouhi A., Jebabli I., Shishkina E., Sitnik S. M.* Applications of integral transforms composition method to wave-type singular differential equations and index shift transmutations// Electron. J. Differ. Equ. — 2018. — *2018*, № 130. — C. 1–27.
209. *Fourier J.* Théorie analytique de la chaleur. — Paris: Firmin Didot, 1822.
210. *Fox D. N.* The solution and Huygens' principle for a singular Cauchy problem// J. Math. Mech. — 1959. — *8*. — C. 197–219.
211. *Gadjiev A. D., Guliyev V. S., Serbetci A., Guliyev E. V.* The Stein–Weiss type inequalities for the B-Riesz potentials// J. Math. Inequal. — 2011. — *5*, № 1. — C. 87–106.
212. *Guliev V. S.* Sobolev theorems for B-Riesz potentials// Dokl. Math. — 1998. — *57*, № 1. — C. 72–73.
213. *Guliev V. S.* Some properties of the anisotropic Riesz–Bessel potential// Anal. Math. — 2000. — *26*, № 2. — C. 99–118.
214. *Guliev V. S.* On maximal function and fractional integral, associated with the Bessel differential operator// Math. Inequal. Appl. — 2003. — *6*, № 2. — C. 317–330.
215. *Guliev V. S.* Weighted inequality for fractional maximal functions and fractional integrals, associated with the Laplace–Bessel differential operator// Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. — 2006. — *26*, № 1. — C. 71–80.
216. *Guliev V. S., Hasanov J. J.* Sobolev–Morrey type inequality for Riesz potentials, associated with the Laplace–Bessel differential operator// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2006. — *9*, № 1. — C. 17–32.

217. *Guliev V. S., Miloud A.* On maximal function on the Laguerre hypergroup// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2006. — *9*, № 3. — С. 1–12.
218. *Hamma M. E., Daher R.* Estimate of K-functionals and modulus of smoothness constructed by generalized spherical mean operator// Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. — 2014. — *124*, № 2. — С. 235–242.
219. *Helgason S.* Groups and geometric analysis. Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions. — Orlando etc.: Academic Press, 1984.
220. *Hörmander L.* The analysis of linear partial differential operators, I-II. — Berlin: Springer, 1983.
221. *Jager E. M.* Applications of distributions in mathematical physics. — Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1964.
222. *John A.* The Ultrahyperbolic differential equation with four independent variables// Duke Math. J. — 1938. — *4*, № 2. — С. 300–322.
223. *Karimov S. T.* Multidimensional generalized Erdélyi–Kober operator and its application to solving Cauchy problems for differential equations with singular coefficients// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2015. — *18*, № 4. — С. 845–861.
224. *Karimov S. T.* On some generalizations of properties of the Lowndes operator and their applications to partial differential equations of high order// Filomat. — 2018. — *32*, № 3. — С. 873–883.
225. *Karoui I.* On the Bessel–Wright harmonic analysis// PhD Thesis. — Université de Carthage, 2017.
226. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations. — Amsterdam, etc.: Elsevier, 2006.
227. *Kiryakova V.* Applications of the generalized Poisson transformation for solving hyper-Bessel differential equations// Godishnik VUZ. Appl. Math. — 1986. — *22*, № 4. — С. 129–140.
228. *Kiryakova V.* Generalized fractional calculus and applications. — Harlow: Longman, 1994.
229. *Kiryakova V.* Transmutation method for solving hyper-Bessel differential equations based on the Poisson–Dimovski transformation// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2008. — *11*, № 3. — С. 299–316.
230. *Kiryakova V., Al-Saqabi B.* Explicit solutions to hyper-Bessel integral equations of second kind// Comput. Math. Appl. — 1999. — *37*. — С. 75–86.
231. *Kravchenko V. V.* Applied pseudoanalytic function theory. — Basel: Birkhäuser, 2009.
232. *Kravchenko V. V.* Construction of a transmutation for the one-dimensional Schrödinger operator and a representation for solutions// Appl. Math. Comput. — 2018. — *328*. — С. 75–81.
233. *Kravchenko V. V., Navarro L. J., Torba S. M.* Representation of solutions to the one-dimensional Schrödinger equation in terms of Neumann series of Bessel functions// Appl. Math. Comput. — 2017. — *314*, № 1. — С. 173–192.
234. *Kravchenko V. V., Otero J. A., Torba S. M.* Analytic approximation of solutions of parabolic partial differential equations with variable coefficients// Adv. Math. Phys. — 2017. — *2017*. — 2947275.
235. *Kravchenko V. V., Torba S. M.* Transmutations for Darboux transformed operators with applications// J. Phys. A. Math. Theor. — 2012. — *45*, № 7. — 075201.
236. *Kravchenko V. V., Torba S. M.* Analytic approximation of transmutation operators and applications to highly accurate solution of spectral problems// J. Comput. Appl. Math. — 2015. — *275*. — С. 1–26.
237. *Kravchenko V. V., Torba S. M.* Construction of transmutation operators and hyperbolic pseudoanalytic functions// Complex Anal. Oper. Theory. — 2015. — *9*, № 2. — С. 379–429.
238. *Kravchenko V. V., Torba S. M.* Asymptotics with respect to the spectral parameter and Neumann series of Bessel functions for solutions of the one-dimensional Schrödinger equation// J. Math. Phys. — 2017. — *58*, № 12. — 122107.
239. *Kravchenko V. V., Torba S. M., Khmelnytskaya K. V.* Transmutation operators: construction and applications// Proc. 17th Int. Conf. on Comput. and Math. Methods in Sci. and Engin., Cadiz, Andalucia, España, Jul. 4–8, 2017. — С. 1198–1206.
240. *Kravchenko V. V., Torba S. M.* A Neumann series of Bessel functions representation for solutions of Sturm–Liouville equations// Calcolo. — *55*, № 11. — 11.
241. *Kravchenko V. V., Torba S. M., Castillo-Pérez R.* A Neumann series of Bessel functions representation for solutions of perturbed Bessel equations// Appl. Anal. — 2018. — *97*, № 5. — С. 677–704.
242. *Lagrange J. L.* Sur le problème de Képler// Mém. l'Académie R. Sci. Bell.-Lett. Berlin. — 1771. — *XXV*. — С. 113–138.
243. *Lyakhov L. N., Polovinkina M. V., Shishkina E. L.* Accompanying distributions of singular differential operators// J. Math. Sci. — 2016. — *219*, № 2. — С. 184–189.
244. *Lyakhov L. N., Shishkina E. L.* Inversion of general Riesz B-potentials// Proc. Int. Conf. Analytic methods of analysis and differential equations, AMADE 2012. — Cottenham: Cambridge Scientific Publishers, 2013. — С. 115–126.

245. *Lyakhov L. N., Shishkina E. L.* Weighted mixed spherical means and singular ultrahyperbolic equation// Analysis (Munich). — 2016. — *36*, № 2. — С. 65–70.
246. *McGregor J. L.* Generalized translation operators// PhD Thesis. — Pasadena: California Institute of Technology, 1954.
247. *Muravnik A. B.* On weighted norm estimates for the mixed Fourier–Bessel transforms on non-negative functions// В сб.: «Integral methods in science and engineering. Vol. 1. Analytic methods». — Harlow: Longman, 1997. — С. 119–123.
248. *Muravnik A. B.* Fourier–Bessel transformation of measures and singular differential operators// В сб.: «Paul Erdős and his mathematics». — Budapest: János Bolyai Math. Soc., 1999. — С. 182–184.
249. *Nikolayev D. I., Schaeben H.* Characteristics of the ultrahyperbolic differential equation governing pole density functions// Inverse Problems. — 1999. — *15*. — С. 1603–1619.
250. *Obrechkoff N.* On certain integral representation of real functions on the real semi-axis// Izvestia Mat. Inst. Sofia. — 1958. — *3*. — С. 2–28.
251. *Ortigueira M. D.* Fractional calculus for scientists and engineers. — Dordrecht: Springer, 2011.
252. *Owens O. G.* Uniqueness of solutions of ultrahyperbolic partial differential equations// Am. J. Math. — 1947. — *69*, № 1. — С. 184–188.
253. *Owens O. G.* An ultrahyperbolic equation with an integral condition// Am. J. Math. — 1960. — *82*, № 4. — С. 799–811.
254. *Poisson S. D.* Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences partielles// J. Éc. Roy. Polytech. Ser. 1. — 1823. — *19*, № 12. — С. 215–248.
255. *Radzikowski J.* On the uniqueness of the limit problem for the ultrahyperbolic equation// Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys. — 1960. — *8*, № 4. — С. 203–207.
256. *Riesz M.* Intégrale de Riemann-Liouville et solution invariantive du probléme de Cauchy pour l'équation de sondes// Comptes Rendus du Congres International des Mathematiciens. — 1936. — *2*. — С. 44–45.
257. *Riesz M.* L'intégrale de Riemann–Liouville et le probleme de Cauchy// Acta Math. — 1949. — *81*, № 1-2. — С. 1–223.
258. *Rubin B.* Fractional integrals and potentials. — Harlow: Addison Wesley Longman, 1996.
259. *Sajğlam A., Yıldırım H., Sarıkaya M. Z.* On the product of the ultra-hyperbolic Bessel operator related to the elastic waves// Selçuk J. Appl. Math. — 2009. — *10*, № 1. — С. 85–93.
260. *Sarıkaya M. Z., Yıldırım H., Akin Ö.* On generalized Riesz type potential with Lorentz distance// Lobachevskii J. Math. — 2008. — *28*. — С. 24–31.
261. *Schwartz L.* Théorie des distributions. — Paris: Hermann, 1966.
262. *Shishkina E. L.* Inversion of integral of B-potential type with density from Φ_γ// J. Math. Sci. — 2009. — *160*, № 1. — С. 95–102.
263. *Shishkina E. L.* On the boundedness of hyperbolic Riesz B-potential// Lith. Math. J. — 2016. — *56*, № 4. — С. 540–551.
264. *Shishkina E. L.* On weighted generalized functions associated with quadratic forms// Probl. Anal. Issues Anal. — 2016. — *5*, № 2. — - С. 52–68.
265. *Shishkina E. L.* Inversion of the mixed Riesz hyperbolic B-potentials// Int. J. Appl. Math. — 2017. — *30*, № 6. — С. 487–500.
266. *Shishkina E. L.* Generalized Euler–Poisson–Darboux equation and singular Klein–Gordon equation// J. Phys. Conf. Ser. — 2018. — *973*. — С. 1–21.
267. *Shishkina E. L.* Properties of mixed hyperbolic B-potential// Progr. Fract. Differ. Appl. — 2018. — *4*, № 2. — С. 83–98.
268. *Shishkina E. L.* Singular Cauchy problem for the general Euler–Poisson–Darboux equation// Open Math. J. — 2018. — *16*. — С. 23–31.
269. *Shishkina E. L.* Solution of the singular Cauchy problem for a general inhomogeneous Euler–Poisson–Darboux equation// Carpathian J. Math. — 2018. — *34*, № 2. — С. 255–267.
270. *Shishkina E. L., Abbas S.* Method of Riesz potentials applied to solution to nonhomogeneous singular wave equations// Мат. заметки СВФУ. — 2018. — *25*, № 3. — С. 68–91.
271. *Shishkina E. L., Karabacak M.* Singular Cauchy problem for generalized homogeneous Euler–Poisson–Darboux equation// Мат. заметки СВФУ. — 2018. — *25*, № 2. — С. 85–96.
272. *Shishkina E. L., Sitnik S. M.* General form of the Euler–Poisson–Darboux equation and application of the transmutation method// Electron. J. Differ. Equ. — 2017. — *177*. — С. 1–20.
273. *Shishkina E. L., Sitnik S. M.* On fractional powers of Bessel operators// J. Inequal. Spec. Funct. — 2017. — *8*, № 1. — С. 49–67.
274. *Sitnik S. M.* Transmutations and applications: a survey// ArXiv. — 2010. — 1012.3741 [math.CA].

275. *Sitnik S. M.* A short survey of recent results on Buschman–Erdélyi transmutations// J. Inequal. Spec. Funct. — 2017. — *8*, № 1. — С. 140–157.
276. *Sitnik S. M.* Buschman–Erdélyi transmutations and applications// Abstr. 8th Int. Conf. «Transform Methods and Special Functions», Bulgaria, Sofia, Aug. 27–31, 2017. — Inst. Math. Inf. Bulg. Acad. Sci., 2017. — С. 59.
277. *Srivastava H. M., Karlsson P. W.* Multiple Gaussian hypergeometric series. — Chichester: Ellis Horwood, 1985.
278. *Stellmacher K. L.* Eine Klasse Huygenscher Differentialgleichungen und ihre Integration// Math. Ann. — 1955. — *130*. — С. 219–233.
279. *Umarov S. R.* Introduction to fractional and pseudo-differential equations with singular symbols. — Cham: Springer, 2015.
280. *Urinov A. K., Karimov S. T.* Solution of the Cauchy problem for generalized Euler–Poisson–Darboux equation by the method of fractional integrals// В сб.: «Progress in Partial Differential Equations». — Heidelberg: Springer, 2013. — С. 321–337.
281. *Weinstein A.* Discontinuous integrals and generalized theory of potential// Trans. Am. Math. Soc. — 1948. — *63*, № 2. — С. 342–354.
282. *Weinstein A.* Generalized axially symmetric potential theory// Bull. Am. Math. Soc. — 1953. — *59*. — С. 20–38.
283. *Weinstein A.* On the wave equation and the equation of Euler–Poisson// Proc. Symp. Appl. Math. Vol. V. Wave motion and vibration theory. — New York–Toronto–London: McGraw-Hill, 1954. — С. 137–147.
284. *Weinstein A.* The generalized radiation problem and the Euler–Poisson–Darboux equation// Summa Brasil. Math. — 1955. — *3*. — С. 125–147.
285. *Weinstein A.* Spherical means in spaces of constant curvature// Ann. Mat. Pura Appl. (4). — 1962. — *4*, № 60. — С. 87–91.
286. *Weinstein A.* Some applications of generalized axially symmetric potential theory to continuum mechanics// В сб.: «Приложения теории функций в механике сплошных сред. Т. 2. Механика жидкости и газа, математические методы». — М.: Наука, 1965. — С. 440–453.

Элина Леонидовна Шишкина
Воронежский государственный университет, 394006, г. Воронеж, Университетская пл., д. 1
E-mail: `ilina_dico@mail.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-2-157-338 UDC 517.956.45, 517.968.74

General Euler–Poisson–Darboux Equation and Hyperbolic B-Potentials

© 2019 **E. L. Shishkina**

Abstract. In this work, we develop the theory of hyperbolic equations with Bessel operators. We construct and invert hyperbolic potentials generated by multidimensional generalized translation. Chapter 1 contains necessary notation, definitions, auxiliary facts and results. In Chapter 2, we study some generalized weight functions related to a quadratic form. These functions are used below to construct fractional powers of hyperbolic operators and solutions of hyperbolic equations with Bessel operators. Chapter 3 is devoted to hyperbolic potentials generated by multidimensional generalized translation. These potentials express negative real powers of the singular wave operator, i. e. the wave operator where the Bessel operator acts instead of second derivatives. The boundedness of such an operator and its properties are investigated and the inverse operator is constructed. The hyperbolic Riesz B-potential is studied as well in this chapter. In Chapter 4, we consider various methods of solution of the Euler–Poisson–Darboux equation. We obtain solutions of the Cauchy problems for homogeneous and nonhomogeneous equations of this type. In Conclusion, we discuss general methods of solution for problems with arbitrary singular operators.

©PEOPLES' FRIENDSHIP UNIVERSITY OF RUSSIA, 2019

REFERENCES

1. M. Abramowitz and I. Stegun, *Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam* [Handbook Of Mathematical Functions], Nauka, Moscow, 1979 (Russian translation).
2. J. Hadamard, *Zadacha Koshi dlya lineynykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi giperbolicheskogo tipa* [Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations of Hyperbolic Type], Nauka, Moscow, 1978 (Russian translation).
3. O. P. Barabash and E. L. Shishkina, "Reshenie obshchego uravneniya Eylera—Puassona—Darbu, soderzhashchee operator Besselya po vsem peremennym" [Solution of the general Euler–Poisson–Darboux equation containing the Bessel operator with respect to all variables], *Vestn. Tambov. un-ta. Ser. Estestv. Tekhn. nauki* [Bull. Tambov Univ. Ser. Nat. Tech. Sci.], 2016, No. 6, 2146–2151 (in Russian).
4. J. Bergh and J. Lefstrem, *Interpolyatsionnye prostranstva. Vvedenie* [Interpolation Spaces], Mir, Moscow, 1980 (Russian translation).
5. Yu. M. Berezanskiy, "Ob operatore, porozhdennom ul'tragiperbolicheskim differentsial'nym vyrazheniem" [On operator generated by ultrahyperbolic differential expression], *Ukr. mat. zh.* [Ukr. Math. J.], 1959, **11**, No. 3, 315–321 (in Russian).
6. L. Bers, F. John, and M. Schechter, *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi* [Partial Differential Equations], Mir, Moscow, 1966 (in Russian).
7. O. V. Besov, V. P. Il'in, and S. M. Nikol'skiy, *Integral'nye predstavleniya funktsiy i teoremy vlozheniya* [Integral Representations of Functions and Embedding Theorems], Nauka, Moscow, 1975 (in Russian).
8. A. S. Blagoveshchenskiy, "O nekotorykh korrektnykh zadachakh dlya ul'tragiperbolicheskogo i volnovogo uravneniy s dannymi na kharakteristicheskom konuse" [On some correct problems for ultrahyperbolic and wave equation with data on characteristic cone], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1961, **140**, No. 5, 990–993 (in Russian).
9. A. S. Blagoveshchenskiy, "O kharakteristicheskoy zadache dlya ul'tragiperbolicheskogo uravneniya" [On the characteristic problem for an ultrahyperbolic equation], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1964, **63**, No. 1, 137–168 (in Russian).
10. G. N. Watson, *Teoriya besselevykh funktsiy. T. 1* [A Treatise on the Theory of Bessel Functions. V. 1], IL, Moscow, 1949 (Russian translation).
11. V. S. Vladimirov, *Uravneniya matematicheskoy fiziki. Uchebn. dlya fiz. i mekh.-mat. spets. vuzov* [Equations of Mathematical Physics. Textbook], Nauka, Moscow, 1981 (in Russian).
12. V. S. Vladimirov and V. V. Zharinov, *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics], Fizmatlit, Moscow, 2004 (in Russian).
13. V. Ya. Volk, "O formulakh obrashcheniya dlya differentsial'nogo uravneniya s osobennost'yu pri $x = 0$" [On inversion formulas for a differential equation with singularity at $x = 0$], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1953, **111**, No. 4, 141–151 (in Russian).
14. S. A. Vorob'eva and A. V. Glushak, "Abstraktnoe uravnenie Eylera—Puassona—Darbu, soderzhashchee stepeni neogranichennogo operatora" [Abstract Euler–Poisson–Darboux equation containing powers of an unbounded operator], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2001, **37**, No. 5, 706–709 (in Russian).
15. I. M. Gel'fand and G. E. Shilov, *Obobshchennye funktsii i deystviya nad nimi. Ucheb. posobie* [Generalized Functions and Operations over Them. Textbook], Fizmatlit, Moscow, 1958 (in Russian).
16. I. M. Gel'fand and G. E. Shilov, *Nekotorye voprosy teorii differentsial'nykh uravneniy. Obobshchennye funktsii. Vyp. 3* [Some Issues of the Theory of Differential Equations. Generalized Functions. V. 3], Fizmatlit, Moscow, 1958 (in Russian).
17. A. V. Glushak, "Ob odnom abstraktnom uravnenii Eylera—Puassona—Darbu s mladshim chlenom, soderzhashchim osobennost'" [On one abstract Euler–Poisson–Darboux equation with lower-order term containing a singularity], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1995, No. 3, 3–7 (in Russian).
18. A. V. Glushak, "O vozmushchenii abstraktnogo uravneniya Eylera—Puassona—Darbu" [On perturbation of abstract Euler–Poisson–Darboux equation], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1996, **60**, No. 3, 363–369 (in Russian).
19. A. V. Glushak, "Regulyarnoe i singulyarnoe vozmushcheniya abstraktnogo uravneniya Eylera—Puassona—Darbu" [Regular and singular perturbations of abstract Euler–Poisson–Darboux equation], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1999, **66**, No. 3, 364–371 (in Russian).
20. A. V. Glushak, "Nelokal'naya zadacha dlya abstraktnogo uravneniya Eylera—Puassona—Darbu" [Nonlocal problem for abstract Euler–Poisson–Darboux equation], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2016, No. 6, 27–35 (in Russian).

21. A. V. Glushak, “Operatornaya formula sdviga resheniya zadachi Koshi dlya abstraktnogo uravneniya Eylera—Puassona—Darbu” [Operator formula of translation of solution for the Cauchy problem for abstract Euler–Poisson–Darboux equation], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2019, **105**, No. 5, 656–665 (in Russian).
22. A. V. Glushak and O. A. Pokruchin, “Kriteriy razreshimosti zadachi Koshi dlya abstraktnogo uravneniya Eylera—Puassona—Darbu” [Solvability criterion for the Cauchy problem for abstract Euler–Poisson–Darboux equation], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2016, **52**, No. 1, 41–59 (in Russian).
23. A. V. Glushak and V. A. Popova, “Obratnaya zadacha dlya abstraktnogo differentsial’nogo uravneniya Eylera—Puassona—Darbu” [Inverse problem for abstract Euler–Poisson–Darboux equation], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2006, **15**, 126–141 (in Russian).
24. A. V. Glushak and T. G. Romanchenko, “Formuly svyazi mezhdu resheniyami abstraktnykh singulyarnykh differentsial’nykh uravneniy” [Relation formulas between solutions of abstract singular differential equations], *Nauchn. vedom. BelGU. Ser. Mat. Fiz.* [Sci. Bull. Belgorod State Univ. Ser. Math. Phys.], 2016, **42**, No. 6, 36–39 (in Russian).
25. M. L. Gol’dman, “Obobshchennye yadra drobnogo poryadka” [Generalized kernels of fractional order], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1971, **7**, No. 12, 2199–2210 (in Russian).
26. M. L. Gol’dman, “Integral’nye svoystva obobshchennykh besselevykh potentsialov” [Integral properties of generalized Bessel potentials], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2007, **414**, No. 2, 159–164 (in Russian).
27. M. L. Gol’dman, “Perestanovochno-invariantnye obolochki obobshchennykh potentsialov Besselya i Rissa” [Permutably invariant hulls of generalized Bessel and Riesz potentials], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2008, **423**, No. 1, 14–18 (in Russian).
28. M. L. Gol’dman, “Konus perestanovok dlya obobshchennykh besselevykh potentsialov” [Cone of permutations for generalized Bessel potentials], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2008, **260**, 151–163 (in Russian).
29. M. L. Gol’dman, “Optimal’nye vlozheniya potentsialov tipa Besselya i Rissa” [Optimal embeddings of Bessel-type and Riesz-type potentials], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2009, **428**, No. 3, 305–309 (in Russian).
30. M. L. Gol’dman, “Ob optimal’nykh vlozheniyakh obobshchennykh potentsialov Besselya i Rissa” [On optimal embeddings of generalized Bessel and Riesz potentials], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2010, **269**, 91–111 (in Russian).
31. M. L. Gol’dman and O. M. Gusel’nikova, “Optimal’nye vlozheniya potentsialov tipa Besselya i tipa Rissa. Ch. 1” [Optimal embeddings of Bessel-type and Riesz-type potentials. V. 1], *Vestn. RUDN. Ser. Mat. Inform. Fiz.* [Bull. RUND Univ. Ser. Math. Inform. Phys.], 2011, No. 3, 4–16 (in Russian).
32. M. L. Gol’dman and A. V. Malysheva, “Ob otsenke ravnomernogo modulya nepreryvnosti obobshchennogo potentsiala Besselya” [On estimate of uniform continuity module of generalized Bessel potential], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2013, **283**, 80–91 (in Russian).
33. A. M. Gordeev, “Nekotorye kraevye zadachi dlya obobshchennogo uravneniya Eylera—Puassona—Darbu” [Some boundary-value problems for generalized Euler–Poisson–Darboux equation], *Volzhskiy mat. sb.* [Volga Math. Digest], 1968, No. 6, 56–61 (in Russian).
34. D. S. Donchev, S. M. Sitnik, and E. L. Shishkina, “Ob obobshchenii binominal’noy teoremy, voznikayushchem v teorii differentsial’nykh uravneniy” [On generalization of the binomial theorem arising in the theory of differential equations], *Nauchn. vedom. BelGU. Ser. Mat. Fiz.* [Sci. Bull. Belgorod State Univ. Ser. Math. Phys.], 2017, **49**, No. 27, 19–25 (in Russian).
35. D. S. Donchev, S. M. Sitnik, and E. L. Shishkina, “Ob utochneniyakh neoklassicheskogo neravenstva i ego prilozheniyakh v teorii stokhasticheskikh differentsial’nykh uravneniy i brounovskogo dvizheniya” [On refinements of the neoclassical inequality and its applications in the theory of stochastic differential equations and Brownian motion], *Chelyabinsk. fiz.-mat. zh.* [Chelyabinsk Phys. Math. J.], 2017, **2**, No. 3, 257–265 (in Russian).
36. Ya. I. Zhitomirskiy, “Zadacha Koshi dlya sistem lineynykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh s differentsial’nymi operatorami tipa Besselya” [The Cauchy problem for systems of linear partial differential equations with Bessel-type differential operators], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1955, **36**, No. 2, 299–310 (in Russian).
37. G. Ya. Zagorskiy, *Smeshannye zadachi dlya sistem differentsial’nykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi parabolicheskogo tipa* [Mixed Problems for Systems of Partial Differential Equations of Parabolic Type], Izd-vo L’vovskogo un-ta, L’vov, 1961 (in Russian).
38. V. A. Il’in, “Yadra drobnogo poryadka” [Kernels of fractional order], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1957, **41**, No. 4, 459–480 (in Russian).

39. F. John, *Ploskie volny i sfericheskie srednie v primenenii k differentsial'nym uravneniyam s chastnymi proizvodnymi* [Plane Waves and Spherical Means Applied to Partial Differential Equations], IL, Moscow, 1958 (Russian translation).
40. Sh. T. Karimov, "Mnogomernyy operator Erdeyi—Kobera i ego prilozhenie k resheniyu zadachi Koshi dlya trekhmernogo giperbolicheskogo uravneniya s singulyarnymi koeffitsientami" [Multidimensional Erdélyi–Kober operator and its applications to solving of Cauchy problem for three–dimensional hyperbolic equation with singular coefficients], *Uzb. mat. zh.* [Uzb. Math. J.], 2013, No. 1, 70–80 (in Russian).
41. Sh. T. Karimov, "Ob odnom metode resheniya zadachi Koshi dlya obobshchennogo uravneniya Eylera—Puassona—Darbu" [On a method of solution of the Cauchy problem for a generalized Euler–Poisson–Darboux equation], *Uzb. mat. zh.* [Uzb. Math. J.], 2013, No. 3, 57–69 (in Russian).
42. Sh. T. Karimov, "Reshenie zadachi Koshi dlya mnogomernogo giperbolicheskogo uravneniya s singulyarnymi koeffitsientami metodom drobnykh integralov" [Solution of the Cauchy problem for a multidimensional hyperbolic equation with singular coefficients by the method of fractional integrals], *Dokl. AN Resp. Uzbekistan* [Rep. Acad. Sci. Resp. Uzbekistan], 2013, No. 1, 11–13 (in Russian).
43. Sh. T. Karimov, "Reshenie zadachi Koshi dlya trekhmernogo giperbolicheskogo uravneniya s singulyarnymi koeffitsientami i so spektral'nym parametrom" [Solution of the Cauchy problem for three-dimensional hyperbolic equation with singular coefficients and spectral parameter], *Uzb. mat. zh.* [Uzb. Math. J.], 2014, No. 2, 55–65 (in Russian).
44. Sh. T. Karimov, "O nekotorykh obobshcheniyakh svoystv operatora Erdeyi—Kobera i ikh prilozheniya" [On some generalizations of properties of the Erdélyi–Kober operator and their applications], *Vestn. KRAUNTs. Fiz.-mat. nauki* [Bull. KRAUNTz. Phys. Math. Sci.], 2017, No. 2, 20–40 (in Russian).
45. Sh. T. Karimov, "Ob odnom metode resheniya zadachi Koshi dlya odnomernogo polivolnovogo uravneniya s singulyarnym operatorom Besselya" [On a method of solution of the Cauchy problem for one-dimensional polywave equation with singular Bessel operator], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 2017, No. 8, 27–41 (in Russian).
46. Sh. T. Karimov, "Ob odnom metode resheniya analoga zadachi Koshi dlya polikaloricheskogo uravneniya s singulyarnym operatorom Besselya" [On one method of solution for an analog of the Cauchy problem for a polycaloric equation with singular Bessel operator], *Ukr. mat. zh.* [Ukr. Math. J.], 2017, **69**, No. 10, 1372–1384 (in Russian).
47. D. B. Karp and S. M. Sitnik, "Drobnoe preobrazovanie Khankelya i ego prilozheniya" [Fractional Hankel transforms and its applications], *Abstr. of Voronezh. Spring Math. School* (17 – –23 *Apr.* 1996), VGU, Voronezh, 1996, 92 (in Russian).
48. V. V. Katrakhov, "Obshchie kraevye zadachi dlya odnogo klassa singulyarnykh i vyrozhdayushchikhsya ellipticheskikh uravneniy" [General boundary-value problems for a class of singular and degenerated elliptic equations], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1980, **112**, No. 3, 354–379 (in Russian).
49. V. V. Katrakhov and S. M. Sitnik, "Metod faktorizatsii v teorii operatorov preobrazovaniya" [Factorization method in the transmutation theory], In: *Memorial'nyy sbornik pamyati Borisa Alekseevicha Bubnova: neklassicheskie uravneniya i uravneniya smeshannogo tipa* [Memorial Digest to the Memory of Boris A. Bubnov: Nonclassical Equations and Mixed-Type Equations], Novosibirsk, 1990, pp. 104–122 (in Russian).
50. V. V. Katrakhov and S. M. Sitnik, "Kompozitsionnyy metod postroeniya B-ellipticheskikh, B-parabolicheskikh i B-giperbolicheskikh operatorov preobrazovaniya" [Composition method for constructing B-elliptic, B-hyperbolic and B-parabolic transmutations], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1994, **337**, No. 3, 307–311 (in Russian).
51. V. V. Katrakhov and S. M. Sitnik, "Metod operatorov preobrazovaniya i kraevye zadachi dlya singulyarnykh ellipticheskikh uravneniy" [The transmutation method and boundary-value problems for singular elliptic equations], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2018, sl 64, No. 2, 211–426 (in Russian).
52. I. A. Kipriyanov, "O kraevykh zadachakh dlya uravneniy v chastnykh proizvodnykh s differentsial'nym operatorom Besselya" [On boundary-value problems for partial differential equations with Bessel differential operator], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1964, **158**, No. 2, 275–278 (in Russian).
53. I. A. Kipriyanov, "Preobrazovaniya Fur'e—Besselya i teoremy vlozheniya dlya vesovykh klassov" [Fourier–Bessel transforms and embedding theorems for weighted classes], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1967, **89**, 130–213 (in Russian).
54. I. A. Kipriyanov, "Kraevye zadachi dlya singulyarnykh ellipticheskikh operatorov v chastnykh proizvodnykh" [Boundary–value problems for singular elliptic partial differential operators], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1970, **195**, No. 1, 32–35 (in Russian).

55. I. A. Kipriyanov, "Ob odnom klasse singulyarnykh ellipticheskikh operatorov" [On a class of singular elliptic operators], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1971, **7**, No. 11, 2065–2077 (in Russian).
56. I. A. Kipriyanov, "Ob odnom klasse singulyarnykh ellipticheskikh uravneniy" [On a class of singular elliptic equations], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1973, **14**, No. 3, 560–568 (in Russian).
57. I. A. Kipriyanov, *Singulyarnye ellipticheskie kraevye zadachi* [Singular Elliptic Boundary-Value Problems], Fizmatlit, Moscow, 1997 (in Russian).
58. I. A. Kipriyanov and Yu. V. Zasorin, "O fundamental'nom reshenii volnovogo uravneniya s mnogimi osobennostyami i o printsipe Gyuygensa" [On fundamental solution of wave equation with several singularities and on Huygens's principle], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1992, **28**, No. 3, 452–462 (in Russian).
59. I. A. Kipriyanov and L. A. Ivanov, "O lakunakh dlya nekotorykh klassov uravneniy s osobennostyami" [On lacunas for some classes of singular equations], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1979, **110**, No. 2, 235–250 (in Russian).
60. I. A. Kipriyanov and L. A. Ivanov, "Fundamental'nye resheniya dlya odnorodnykh B-giperbolicheskikh uravneniy" [Fundamental solutions of homogeneous B-hyperbolic equations], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1980, **21**, No. 4, 95–102 (in Russian).
61. I. A. Kipriyanov and L. A. Ivanov, "Uravnenie Eylera—Puassona—Darbu v rimanovom prostranstve" [Euler–Poisson–Darboux equation in the Riemann space], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1981, **260**, No. 4, 790–794 (in Russian).
62. I. A. Kipriyanov and L. A. Ivanov, "Poluchenie fundamental'nykh resheniy dlya odnorodnykh uravneniy s osobennostyami po neskol'kim peremennym" [Derivation of fundamental solutions for homogeneous equations with singularities with respect to multiple variables], *Tr. sem. S. L. Soboleva* [Proc. Sobolev Semin.], 1983, No. 1, 55–77 (in Russian).
63. I. A. Kipriyanov and L. A. Ivanov, "Zadacha Koshi dlya uravneniya Eylera—Puassona—Darbu v odnorodnom simmetricheskom rimanovom prostranstve. I" [Cauchy problem for the Euler–Poisson–Darboux equation in homogeneous symmetric Riemann space. I], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1984, **170**, 139–147 (in Russian).
64. I. A. Kipriyanov and L. A. Ivanov, "Zadacha Koshi dlya uravneniya Eylera—Puassona—Darbu v simmetricheskom prostranstve" [Cauchy problem for the Euler–Poisson–Darboux equation in symmetric space], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1984, **124**, No. 1, 45–55 (in Russian).
65. I. A. Kipriyanov and L. A. Ivanov, "Potentsialy Rissa na prostranstvakh Lorentsa" [Reisz potentials in Lorentz spaces], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1986, **130**, No. 4, 465–474 (in Russian).
66. I. A. Kipriyanov and L. A. Ivanov, "K teorii potentsialov Rissa na prostranstvakh Lorentsa" [To the theory of Reisz potentials in Lorentz spaces], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1987, **180**, 134–135 (in Russian).
67. I. A. Kipriyanov and L. A. Ivanov, "Predstavlenie Dalambera i ravnoraspredelenie energii" [The D'Alambert representation and energy equipartition], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1990, **26**, No. 3, 458–464 (in Russian).
68. I. A. Kipriyanov and V. V. Katrakhov, "Ob odnom klasse mnogomernykh singulyarnykh psevdodifferentsial'nykh operatorov" [On a class of multidimensional singular pseudodifferential operators], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1977, **104**, No. 1, 49–68 (in Russian).
69. I. A. Kipriyanov and V. V. Katrakhov, "Kraevaya zadacha dlya ellipticheskikh uravneniy vtorogo poryadka pri nalichii osobennostey v izolirovannykh granichnykh tochkakh" [Boundary–value problem for elliptic equations of the second order with singularities at isolated boundary points], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1984, **276**, No. 2, 274–276 (in Russian).
70. I. A. Kipriyanov and V. V. Katrakhov, "Ob odnoy singulyarnoy ellipticheskoy kraevoy zadache v oblastyakh na sfere" [On a singular elliptic boundary-value problem at the sphere domain], *Preprint IPM DVO RAN*, 1989 (in Russian).
71. I. A. Kipriyanov and V. V. Katrakhov, "Singulyarnye kraevye zadachi dlya nekotorykh ellipticheskikh uravneniy vysshikh poryadkov" [Singular boundary-value problems for some elliptic higher order equations], *Preprint IPM DVO RAN*, 1989 (in Russian).
72. I. A. Kipriyanov and V. V. Katrakhov, "Ob odnoy kraevoy zadache dlya ellipticheskikh uravneniy vtorogo poryadka v oblastyakh na sfere" [On a boundary-value problem for elliptic equations of the second order at the sphere domain], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1990, **313**, No. 3, 545–548 (in Russian).
73. I. A. Kipriyanov and M. I. Klyuchantsev, "O yadrakh Puassona dlya kraevykh zadach s differentsial'nym operatorom Besselya" [On Poisson kernels for boundary-value problems with Bessel differential operator], In: *Differentsial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi* [Partial Differential Equations], Moscow, 1970, pp. 119–134 (in Russian).

74. I. A. Kipriyanov and V. I. Kononenko, "O fundamental'nykh resheniyakh uravneniy v chastnykh proizvodnykh s differentsial'nym operatorom Besselya" [On fundamental solutions for partial differential equations with Bessel differential operator], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1966, **170**, No. 2, 261–264 (in Russian).
75. I. A. Kipriyanov and V. I. Kononenko, "Fundamental'nye resheniya B-ellipticheskikh uravneniy" [Fundamental solutions for B-elliptic equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1967, **3**, No. 1, 114–129 (in Russian).
76. I. A. Kipriyanov and V. I. Kononenko, "O fundamental'nykh resheniyakh nekotorykh singulyarnykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh" [On fundamental solutions for some singular partial differential equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1969, **5**, No. 8, 1470–1483 (in Russian).
77. I. A. Kipriyanov and A. A. Kulikov, "Fundamental'nye resheniya B-gipoellipticheskikh uravneniy" [Fundamental solutions for B-hypoelliptic equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1991, **27**, No. 8, 1387–1395 (in Russian).
78. A. Kolmogorov N and S. V. Fomin, *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of Function Theory and Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1981 (in Russian).
79. D. P. Kostomarov, *Zadachi Koshi dlya ul'tragiperbolicheskikh uravneniy* [Cauchy Problems for Ultrahyperbolic Equations], Nauka, Moscow, 2003 (in Russian).
80. V. V. Kravchenko, E. L. Shishkina, and S. N. Torba, "O predstavlenii v vide ryada integral'nykh yader operatorov preobrazovaniya dlya vozmushchennykh uravneniy Besselya" [On presentation as a series for integral kernels of transmutation operators for perturbed Bessel equations], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2018, **104**, No. 4, 552–570 (in Russian).
81. A. Kratzer and W. Franz, *Transtsendentnye funktsii* [Transcendental Functions], IL, Moscow, 1963 (in Russian).
82. L. D. Kudryavtsev, "Pryamye i obratnye teoremy vlozheniya. Prilozheniya k resheniyu variatsionnym metodom ellipticheskikh uravneniy" [Direct and inverse embedding theorems. Applications to variational method of solution of elliptic equations], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1959, **55**, 3–182 (in Russian).
83. A. G. Kuz'min, *Neklassicheskie uravneniya smeshannogo tipa i ikh primeneniya v gazovoy dinamike* [Nonclassical Equations of Mixed Type and Their Applications in Gas Dynamics], LGU, Leningrad, 1990 (in Russian).
84. R. Courant, *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi* [Partial Differential Equations], Mir, Moscow, 1979 (Russian translation).
85. R. Courant and D. Hilbert, *Uravneniya matematicheskoy fiziki. T. 1* [Methods of mathematical physics. Vol. 1], GITTL, Moscow–Leningrad, 1933 (Russian translation).
86. R. Kurant and D. Gil'bert, *Uravneniya matematicheskoy fiziki. T. 2* [Methods of mathematical physics. Vol. 2], GITTL, Moscow–Leningrad, 1945 (Russian translation).
87. B. M. Levitan, "Nekotorye voprosy teorii pochti periodicheskikh funktsiy. I" [Some questions of the theory of almost periodic functions. I], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1947, **2**, No. 21, 133–192 (in Russian).
88. B. M. Levitan, "Nekotorye voprosy teorii pochti periodicheskikh funktsiy. II" [Some questions of the theory of almost periodic function. II], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1947, **2**, No. 22, 174–214 (in Russian).
89. B. M. Levitan, "Primenenie operatorov obobshchennogo sdviga k lineynym differentsial'nym uravneniyam vtorogo poryadka" [Application of operators of generalized translation to second-order linear differential equations], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1949, **4**, No. 29, 3–112 (in Russian).
90. B. M. Levitan, "Razlozheniya po funktsiyam Besselya v ryady i integraly Fur'e" [Expansions in Bessel functions into series and Fourier integrals], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1951, **6**, No. 2, 102–143 (in Russian).
91. P. I. Lizorkin, "Neizotropnye besselevy potentsialy. Teoremy vlozheniya dlya prostranstva Soboleva $L_p(r_1,\dots,r_n)$ s drobnymi proizvodnymi" [Anisotropic Bessel potentials. Embedding theorems for the Sobolev space $L_p(r_1,\dots,r_n)$ with fractional derivatives], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1966, **170**, No. 3, 508–511 (in Russian).
92. P. I. Lizorkin, "Povedenie funktsiy iz liuvillevskikh klassov na beskonechnosti. O rissovykh potentsialakh proizvol'nogo poryadka" [Behavior of functions from Liouville classes at infinity. On Riesz potentials of arbitrary order], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1979, **150**, 174–197 (in Russian).
93. P. I. Lizorkin and S. M. Nikol'skiy, "Koertsitivnye svoystva ellipticheskogo uravneniya s sil'nym vyrozhdeniem (sluchay obobshchennykh resheniy)" [Coercive properties of an elliptic equation with strong degeneration (the case of generalized solutions)], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1981, **259**, No. 1, 28–30 (in Russian).

94. P. I. Lizorkin and S. M. Nikol'skiy, "Ellipticheskoe uravnenie s vyrozhdeniem. Variatsionnyy metod" [An elliptic equation with degeneration. Variational approach], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1981, **257**, No. 1, 42–45 (in Russian).
95. P. I. Lizorkin and S. M. Nikol'skiy, "Ellipticheskie uravneniya s vyrozhdeniem. Differentsial'nye svoystva resheniy" [An elliptic equation with degeneration. Differential properties of solutions], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1981, **257**, No. 2, 278–282 (in Russian).
96. L. N. Lyakhov, "Ob odnom klasse gipersingulyarnykh integralov" [On one class of hypersingular integrals], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1990, **315**, No. 2, 291–296 (in Russian)
97. L. N. Lyakhov, "Obrashchenie B-potentsialov" [Inversion of B-potentials], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1991, **321**, No. 3, 466–469 (in Russian).
98. L. N. Lyakhov, "Prostranstva B-potentsialov Rissa" [Spaces of Riesz B-potentials], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1994, **334**, No. 3, 278–280 (in Russian).
99. L. N. Lyakhov, "Opisanie prostranstva B-potentsialov Rissa $U_\alpha^\gamma(L_p^\gamma)$ s pomoshch'yu B-proizvodnykh poryadka $2[\alpha/2]$" [Description of the Riesz B-potentials space $U_\alpha^\gamma(L_p^\gamma)$ by means of B-derivatives of order $2[\alpha/2]$], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1995, **341**, No. 2, 161–165 (in Russian).
100. L. N. Lyakhov, "O simvole integral'nogo operatora tipa B-potentsiala s odnokratnoy kharakteristikoy" [On the symbol of an integral operator of B-potential type with single characteristic], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1996, **351**, No. 2, 164–168 (in Russian).
101. L. N. Lyakhov, *Vesovye sfericheskie funktsii i potentsialy Rissa, porozhdennye obobshchennym sdvigom* [Spherical Weight Functions and Riesz Potentials Generated by Generalized Translation], VGTA, Voronezh, 1997 (in Russian).
102. L. N. Lyakhov, "Mul'tiplikatory smeshannogo preobrazovaniya Fur'e—Besselya" [Multipliers of mixed Fourier–Bessel transformation], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1997, **214**, 234–249 (in Russian).
103. L. N. Lyakhov, *B-gipersingulyarnye integraly i ikh prilozheniya k opisaniyu funktsional'nykh klassov Kipriyanova i k integral'nym uravneniyam s B-potentsial'nymi yadrami* [B-Hypersingular Integrals and Their Applications to Description of the Kipriyanov Classes of Functions and to Integral Equations with B-Potential Kernels], LGPU, Lipetsk, 2007 (in Russian).
104. L. N. Lyakhov, I. P. Polovinkin, and E. L. Shishkina, "Ob odnoy zadache I. A. Kipriyanova dlya singulyarnogo ul'tragiperbolicheskogo uravneniya" [On one I. A. Kipriyanov's problem for a singular ultrahyperbolic equation], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2014, **50**, No. 4, 516–528 (in Russian).
105. L. N. Lyakhov, I. P. Polovinkin, and E. L. Shishkina, "Formuly resheniya zadachi Koshi dlya singulyarnogo volnovogo uravneniya s operatorom Besselya po vremeni" [Formulas of solution of the Cauchy problem for a singular wave equation with Bessel operator with respect to time], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2014, **459**, No. 5, 533–538 (in Russian).
106. L. N. Lyakhov and E. L. Shishkina, "Obobshchennye B-potentsialy Rissa smeshannogo tipa" [Generalized Riesz B-potentials of mixed type], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2006, **406**, No. 3, 303–307 (in Russian).
107. L. N. Lyakhov and E. L. Shishkina, "Obshchie B-gipersingulyarnye integraly s odnorodnoy kharakteristikoy" [General B-hypersingular operators with homogeneous characteristic], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2007, **412**, No. 2, 162–166 (in Russian).
108. L. N. Lyakhov and E. L. Shishkina, "Obrashchenie obshchikh B-potentsialov Rissa s odnorodnoy kharakteristikoy v vesovykh prostranstvakh" [Inversion of general Riesz B-potentials with homogeneous characteristic in weighted spaces], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2009, **426**, No. 4, 443–447 (in Russian).
109. V. A. Marchenko, "Obobshchennyy sdvig, operatory preobrazovaniya i obratnye zadachi" [Generalized translation, transmutation operators and inverse problems], In: *Matematicheskie sobytiya KhKh veka* [Mathematical Events of KhKhth Century], Fazis, Moscow, 2003, pp. 209–226 (in Russian).
110. M. I. Matiychuk, *Parabolichni singulyarni krayovi zadachi* [Parabolic Singular Boundary-Value Problems], Univ. Math. Nat. Acad. Sci. of Ukraine, Kiev, 1999 (in Ukrainian).
111. M. I. Matiychuk, *Parabol?chn? ta el?ptichn? krayov? zadach? z osoblivostyami* [Parabolic and Elliptic Boundary-Value Problems with Singularities], Prut, Chern?vts?, 2003 (in Ukrainian).
112. R. von Mises, *Matematicheskaya teoriya techeniy szhimaemoy zhidkosti* [Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow], IL, Moscow, 1961 (Russian translation).
113. A. B. Muravnik, "Funktsional'no-differentsial'nye parabolicheskie uravneniya: integral'nye predstavleniya i kachestvennye svoystva resheniy zadachi Koshi" [Functional Differential Parabolic Equations: Integral Transformations and Qualitative Properties of the Cauchy Problem Solutions], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **52**, 3–141 (in Russian).

114. S. M. Nikol'skiy, *Priblizhenie funktsiy mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya* [Approximation of Multivariate Functions and Embedding Theorems], Nauka, Moscow, 1977 (in Russian).
115. S. M. Nikol'skiy and P. I. Lizorkin, "O nekotorykh neravenstvakh dlya funktsiy iz vesovykh klassov i kraevykh zadachakh s sil'nym vyrozhdeniem na granitse" [On some inequalities for functions from weighted classes and boundary-value problems with strong degeneracy at the boundary], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1964, **159**, No. 3, 512–515 (in Russian).
116. V. A. Nogin and E. V. Sukhinin, "Obrashchenie i opisanie giperbolicheskikh potentsialov s L_p-plotnostyami" [Obrashchenie i opisanie giperbolicheskikh potentsialov s L_p-plotnostyami], *Dep. v VINITI* [Dep. v VINITI], Moskva, 1992, No. 2512-92 (in Russian).
117. V. A. Nogin and E. V. Sukhinin, "Obrashchenie i opisanie giperbolicheskikh potentsialov s L_p-plotnostyami" [Inversion and description of hyperbolic potentials with L_p-densities], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1993, **329**, No. 5, 550–552 (in Russian).
118. V. A. Nogin and K. S. Shevchenko, "Obrashchenie nekotorykh potentsialov Rissa s ostsilliruyushchimi kharakteristikami v neellipticheskom sluchae" [Inversion of some Riesz potentials with oscillating characteristics in the nonelliptic case], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1999, No. 10, 77–80 (in Russian).
119. M. N. Olevskiy, "Reshenie zadachi Dirikhle, otnosyashcheysya k uravneniyu $\Delta u + \frac{p}{x_n}\frac{\partial u}{x_n} = \rho$ dlya polusfericheskoy oblasti" [Solution of the Dirichlet problem related to equation $\Delta u + \frac{p}{x_n}\frac{\partial u}{x_n} = \rho$ in a semishperic domain], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1949, **64**, No. 6, 767–770 (in Russian).
120. S. S. Platonov, "Obobshchennye sdvigi Besselya i nekotorye zadachi teorii priblizheniya funktsiy v metrike L_2. 1" [Generalized Bessel translations and some problems of function approximation theory in the L_2 metric. 1], *Tr. PetrGU. Ser. Mat.* [Proc. Petr. State Univ. Ser. Math.], 2000, **7**, 70–82 (in Russian).
121. S. S. Platonov, "Obobshchennye sdvigi Besselya i nekotorye zadachi teorii priblizheniya funktsiy v metrike L_2. 2" [Generalized Bessel translations and some problems of function approximation theory in the L_2 metric. 2], *Tr. PetrGU. Ser. Mat.* [Proc. Petr. State Univ. Ser. Math.], 2001, **8**, 20–36 (in Russian).
122. S. S. Platonov, "Garmonicheskiy analiz Besselya i priblizhenie funktsiy na polupryamoy" [Bessel harmonic analysis and approximation of functions on a semiaxis], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2007, **71**, No. 5, 149–196 (in Russian).
123. S. S. Platonov, "Obobshchennye sdvigi Besselya i nekotorye obratnye teoremy teorii priblizheniya funktsiy na polupryamoy" [Generalized Bessel translations and some inverse theorems of the function approximations theory on a semiaxis], *Tr. PetrGU. Ser. Mat.* [Proc. Petr. State Univ. Ser. Math.], 2007, **14**, 44–57 (in Russian).
124. S. S. Platonov, "Obobshchennye sdvigi Besselya i nekotorye zadachi teorii priblizheniy funktsiy na polupryamoy" [Generalized Bessel translations and some problems of the function approximations theory on a semiaxis], *Sib. mat. zh.* [Sib. mat. zh.], 2009, **50**, No. 1, 154–174 (in Russian).
125. I. P. Polovinkin, "Teoremy o srednem dlya volnovykh uravneniy i uravneniy Eylera—Puassona—Darbu" [Mean-value theorems for wave equations and Euler–Poisson–Darboux equations], *PhD Thesis*, Voronezh, 1992 (in Russian).
126. A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev, *Integraly i ryady. T. 1. Elementarnye funktsii* [Integrals and Series. Vol. 1. Elementary Functions], Nauka, Moscow, 1981 (in Russian).
127. A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, and O. I. Marichev, *Integraly i ryady. T. 2. Spetsial'nye funktsii* [Integrals and Series. Vol. 2. Special Functions], Nauka, Moscow, 1983 (in Russian).
128. A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, and O. I. Marichev, *Integraly i ryady. T. 3. Spetsial'nye funktsii. Dopolnitel'nye glavy* [Integrals and Series. Vol. 3. Special Functions. Additional Chapters], Nauka, Moscow, 2003 (in Russian).
129. S. P. Pul'kin, "Nekotorye kraevye zadachi dlya uravneniya $u_{xx} \pm u_{yy} + \frac{p}{x}u_x$" [Some boundary-value problems for the equation $u_{xx} \pm u_{yy} + \frac{p}{x}u_x$], *Uch. zap. Kuybyshev. ped. in-ta* [Sci. Notes Kuibyshev Ped. Univ.], 1958, **21**, 3–54 (in Russian).
130. S. P. Pul'kin, *Izbrannye trudy* [Selected Works], Univers Grupp, Samara, 2007 (in Russian).
131. B. Riemann, "O rasprostranenii ploskikh voln konechnoy amplitudy" [The propagation of planar air waves of finite amplitude], In: *Sochineniya* [Works], OGIZ, Moscow–Leningrad, 1948, pp. 376–395 (Russian translation).
132. K. B. Sabitov and R. R. Il'yasov, "Reshenie zadachi Trikomi dlya uravneniya smeshannogo tipa s singulyarnym koeffitsientom spektral'nym metodom" [Solution of the Tricomi problem for a mixed-type equation with a singular coefficient by a spectral method], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2004, No. 2, 64–71 (in Russian).

133. S. G. Samko, “Ob osnovnykh funktsiyakh, ischezayushchikh na zadannom mnozhestve, i o delenii na funktsii” [On main functions vanishing in a given set and on division by functions], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1977, **21**, No. 5, 677–689 (in Russian).
134. S. G. Samko, “O plotnosti v $L_p(R_n)$ prostranstv Φ_V tipa Lizorkina” [On density of Lizorkin-type spaces Φ_V in $L_p(R_n)$], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1982, **31**, No. 6, 855–865 (in Russian).
135. S. G. Samko, “O plotnosti prostranstv Φ_V tipa Lizorkina v prostranstvakh $L_p(R_n)$ so smeshannoy normoy” [On density of Lizorkin-type spaces Φ_V in spaces $L_p(R_n)$ with mixed metric], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1991, **319**, No. 3, 567–569 (in Russian).
136. S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some Their Applications], Nauka i Tekhnika, Minsk, 1987 (in Russian).
137. S. M. Sitnik, “Ob unitarnykh operatorakh preobrazovaniya” [On unitary transmutations], *Dep. v VINITI* [Dep. VINITI], VGU, Voronezh, 1986, No. 7770–V86 (in Russian).
138. S. M. Sitnik, “O skorosti ubyvaniya resheniy nekotorykh ellipticheskikh i ul’traellipticheskikh uravneniy” [On the decay rate of solutions of some elliptic and ultraelliptic equations], *Dep. v VINITI* [Dep. VINITI], VGU, Voronezh, 1986, No. 7771–V86 (in Russian).
139. S. M. Sitnik, “Operatory preobrazovaniya dlya differentsial’nogo vyrazheniya Besselya” [Transmutations for the Bessel differential expression], *Dep. v VINITI* [Dep. VINITI], VGU, Voronezh, 1987, No. 535–V87 (in Russian).
140. S. M. Sitnik, “Ob odnoy pare operatorov preobrazovaniya” [On one pair of transmutations], In: *Kraevye zadachi dlya neklassicheskikh uravneniy matematicheskoy fiziki* [Boundary-Value Problems for Nonclassical Equations of Mathematical Physics], Novosibirsk, 1987, pp. 168–173 (in Russian).
141. S. M. Sitnik, “O skorosti ubyvaniya resheniy nekotorykh ellipticheskikh i ul’traellipticheskikh uravneniy” [On the decay rate of solutions of some elliptic and ultraelliptic equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1988, **24**, No. 3, 538–539 (in Russian).
142. S. M. Sitnik, “Operatory preobrazovaniya dlya singulyarnykh differentsial’nykh uravneniy s operatorom Besselya” [Transmutations for singular differential equations with the Bessel operator], In: *Kraevye zadachi dlya neklassicheskikh uravneniy matematicheskoy fiziki* [Boundary-Value Problems for Nonclassical Equations of Mathematical Physics], Novosibirsk, 1989, pp. 179–185 (in Russian).
143. S. M. Sitnik, “Unitarnost’ i ogranichennost’ operatorov Bushmana—Erdeyi nulevogo poryadka gladkosti” [Unitarity and boundedness of the Buschman—Erdélyi operators of zero order of smoothness], *Preprint In-ta avtomatiki i protsessov upravl. DVO RAN* [Preprint Inst. Automat. Control Proc. RAS], Vladivostok, 1990 (in Russian).
144. S. M. Sitnik, “Faktorizatsiya i otsenki norm v vesovykh lebegovykh prostranstvakh operatorov Bushmana—Erdeyi” [Factorization and estimates of norms of the Buschman—Erdélyi operators in weighted Lebesgue spaces], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1991, **320**, No. 6, 1326–1330 (in Russian).
145. S. M. Sitnik, “Operator preobrazovaniya i predstavlenie Yosta dlya uravneniya s singulyarnym potentsialom” [Transmutation and Jost representation for an equation with singular potential], *Preprint In-ta avtomatiki i protsessov upravl. DVO RAN* [Preprint Inst. Automat. Control Proc. RAS], Vladivostok, 1993 (in Russian).
146. S. M. Sitnik, “Neravenstva dlya polnykh ellipticheskikh integralov Lezhandra” [Inequalities for full elliptic Legendre integrals], *Preprint In-ta avtomatiki i protsessov upravl. DVO RAN* [Preprint Inst. Automat. Control Proc. RAS], Vladivostok, 1994 (in Russian).
147. S. M. Sitnik, “Neravenstva dlya funktsiy Besselya” [Inequalities for Bessel functions], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1995, **340**, No. 1, 29–32 (in Russian).
148. S. M. Sitnik, “Obobshcheniya neravenstv Koshi—Bunyakovskogo metodom srednikh znacheniy i ikh prilozheniya” [Generalization of the Cauchy–Bunyakovskii inequalities by the means method and their applications], *Chernozemnyy al’manakh nauch. issl. Ser. Fundam. mat.* [Chernozem. Digest Sci. Study. Ser. Fundam. Math.], 2005, No. 1, 3–42 (in Russian).
149. S. M. Sitnik, “Metod faktorizatsii operatorov preobrazovaniya v teorii differentsial’nykh uravneniy” [The method of factorization of transmutations in the theory of differential equations], *Vestn. Samar. gos. un-ta. Estestvennonauch. ser.* [Bull. Samar. State Univ. Ser. Nat. Sci.], 2008, No. 8/1 (67), 237–248 (in Russian).
150. S. M. Sitnik, “Operatory preobrazovaniya i ikh prilozheniya” [Transmutations and their applications], In: *Issledovaniya po sovremennomu analizu i matematicheskomu modelirovaniyu* [Studies in Contemporary Analysis and Mathematical Modelling], Vladikavkaz. Nauch. Tsentr RAN i RSO-A, Vladikavkaz, 2008, pp. 226–293 (in Russian).
151. S. M. Sitnik, “Utochneniya i obobshcheniya klassicheskikh neravenstv” [Refinements and generalizations of classic inequalities], In: *Itogi nauki. Yuzhnyy federal’nyy okrug. Ser. Mat. forum. T. 3. Issl. po mat.*

anal. [Totals Sci. Southern Fed. Distr. Ser. Math. Forum. V. 3. Math. Anal.], Yuzhnyy Mat. Inst. VNTS RAN i RSO Alaniya, Vladikavkaz, 2009, pp. 221–266 (in Russian).

152. S. M. Sitnik, "O predstavlenii v integral'nom vide resheniy odnogo differentsial'nogo uravneniya s osobennostyami v koeffitsientakh" [On integral representation of solutions of one differential equation with singularities in coefficietns], *Vladikavkaz. mat. zh.* [Vladikavkaz. Math. J.], 2010, **12**, No. 4, 73–78 (in Russian).
153. S. M. Sitnik, "Operator preobrazovaniya spetsial'nogo vida dlya differentsial'nogo operatora s singulyarnym v nule potentsialom" [Transmutation of special form for a differential operator with singular at zero potential], In: *Neklassicheskie uravneniya matematicheskoy fiziki* [Nonclassical Equations of Mathematical Physics], Inst. Mat. im. S. L. Soboleva SO RAN, Novosibirsk, 2010, pp. 264–278 (in Russian).
154. S. M. Sitnik, "O yavnykh realizatsiyakh drobnykh stepeney differentsial'nogo operatora Besselya i ikh prilozheniyakh k differentsial'nym uravneniyam" [On explicit realizations of fractional powers of the Bessel differential operator and their applications to differential equations], *Dokl. Adygskoy (Cherkesskoy) mezhd. akad. nauk* [Rep. Adyg. (Cherkess.) Int. Acad. Sci.], 2010, **12**, No. 2, 69–75 (in Russian).
155. S. M. Sitnik, "Obzor osnovnykh svoystv operatorov preobrazovaniya Bushmana—Erdeyi" [Survey of basic properties of Buschman–Erdélyi transmutations], *Chelyabinsk. fiz.-mat. zh.* [Chelyabinsk Phys.-Math. J.], 2016, **1**, No. 4, 63–93 (in Russian).
156. S. M. Sitnik, "Primenenie operatorov preobrazovaniya Bushmana—Erdeyi i ikh obobshcheniy v teorii differentsial'nykh uravneniy s osobennostyami v koeffitsientakh" [Application of Buschman—Erdélyi transmutations and their generalizations in the theory of differential equations with singularities in coefficients], *Doctoral Thesis*, Voronezh, 2016 (in Russian).
157. S. M. Sitnik and D. B. Karp, "Formuly kompozitsiy dlya integral'nykh preobrazovaniy s funktsiyami Besselya v yadrakh" [Composition formulas for integral transforms with Bessel functions in kernels], *Preprint In-ta avtomatiki i protsessov upravl. DVO RAN* [Preprint Inst. Automat. Control Proc. RAS], Vladivostok, 1993 (in Russian).
158. S. M. Sitnik and D. B. Karp, "Drobnoe preobrazovanie Khankelya i ego prilozheniya v matematicheskoy fizike" [Fractional Hankel transform and its applications in mathematical physics], *Preprint In-ta avtomatiki i protsessov upravl. DVO RAN* [Preprint Inst. Automat. Control Proc. RAS], Vladivostok, 1994 (in Russian).
159. S. M. Sitnik and G. V. Lyakhovetskiy, "Formuly kompozitsiy dlya operatorov Bushmana—Erdeyi" [Composition formulas for Buschman—Erdélyi transmutations], *Preprint In-ta avtomatiki i protsessov upravl. DVO RAN* [Preprint Inst. Automat. Control Proc. RAS], Vladivostok, 1991 (in Russian).
160. S. M. Sitnik and G. V. Lyakhovetskiy, "Operatory preobrazovaniya Vekua—Erdeyi—Laundesa" [Vekua–Erdélyi–Lowndes transmutations], *Preprint In-ta avtomatiki i protsessov upravl. DVO RAN* [Preprint Inst. Automat. Control Proc. RAS], Vladivostok, 1994 (in Russian).
161. S. M. Sitnik and E. L. Shishkina, "Ob odnom tozhdestve dlya iterirovannogo vesovogo sfericheskogo srednego i ego prilozheniyakh" [On one identity for an iterated weighted spherical mean and its applications], *Sib. elektron. mat. izv.* [Siberian Electron Math. Bull.], 2016, **13**, 849–860 (in Russian).
162. S. M. Sitnik and E. L. Shishkina, *Metod operatorov preobrazovaniya dlya differentsial'nykh uravneniy s operatorami Besselya* [The Transmutation Method for Differential Equations with Bessel Operators], Fizmatlit, Moscow, 2018 (in Russian).
163. S. M. Sitnik and E. L. Shishkina, "O drobnykh stepenyakh operatora Besselya na poluosi" [On fractional powers of the Bessel operator on a semiaxis], *Sib. elektron. mat. izv.* [Siberian Electron Math. Bull.], 2018, **15**, 1–10 (in Russian).
164. A. L. Skubachevskiy, "Neklassicheskie kraevye zadachi. I" [Nonclassical boundary-value problems. I], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2007, **26**, 3–132 (in Russian).
165. A. L. Skubachevskiy, "Neklassicheskie kraevye zadachi. II" [Nonclassical boundary-value problems. II], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2009, **33**, 3–179 (in Russian).
166. M. M. Smirnov, *Vyrozhdayushchiesya giperbolicheskie uravneniya* [Degenerating Hyperbolic Equations], Vysheysh. shkola, Minsk, 1977 (in Russian).
167. V. V. Stashevskaya, "Metod operatorov preobrazovaniya" [The transmutation method], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1953, **113**, No. 3, 409–412 (in Russian).
168. V. V. Stashevskaya, "Ob obratnoy zadache spektral'nogo analiza dlya differentsial'nogo operatora s osobennost'yu v nule" [On an inverse problem of spectral analysis for differential operator with singularity at zero], *Uch. zap. Khar'kov. mat. ob-va* [Sci. Notes Kharkov Math. Soc.], 1957, No. 5, 49–86 (in Russian).

169. E. Stein, *Singulyarnye integraly i differentsial'nye svoystva funktsiy* [Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions], Mir, Moscow, 1973 (in Russian).
170. E. Stein and G. Weiss, *Vvedenie v garmonicheskiy analiz na evklidovykh prostranstvakh* [Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces], Mir, Moscow, 1974 (Russian translation).
171. S. A. Tersenov, *Vvedenie v teoriyu uravneniy, vyrozhdayushchikhsya na granitse* [Introduction to Theory of Equations Degenerating at the Boundary], NGU, Novosibirsk, 1973 (in Russian).
172. R. S. Khayrullin, "K teorii uravneniya Eylera—Puassona—Darbu" [To the theory of the Euler–Poisson–Darboux equation], *Izv. vuzov. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1993, No. 11, 69–76 (in Russian).
173. Khe Kan Cher, "Smeshannaya zadacha dlya obobshchennogo uravneniya Eylera—Puassona—Darbu v isklyuchitel'nom sluchae" [Mixed problem for generalized Euler–Poisson–Darboux equation in exceptional case], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1986, **40**, No. 1, 87–92 (in Russian).
174. Khe Kan Cher, "O yavnykh formulakh resheniya zadach Darbu i Koshi—Gursa dlya vyrozhdayushchegosya giperbolicheskogo uravneniya" [On explicit formulas for solutions of the Darboux and Cauchy–Goursat problems for degenerating hyperbolic equation], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1999, **40**, No. 3, 710–717 (in Russian).
175. L. Hörmander, *Analiz lineynykh differentsial'nykh operatorov s chastnymi proizvodnymi. 1. Teoriya raspredeleniy* [The Analysis of Linear Partial Differential Operators. I: Distribution Theory and Fourier Analysis], Mir, Moscow, 1986 (Russian translation).
176. G. L. Chernyshev, "O zadache Koshi s singulyarnym giperbolicheskim operatorom" [On the Cauchy problem with singular hyperbolic operator], *Avtoref. dis. kand. fiz.-mat. nauk* [Abstract of PhD Thesis], VGU, Voronezh, 1973 (in Russian).
177. E. L. Shishkina, "Obobshchennaya vesovaya funktsiya r^γ" [Generalized weight function r^γ], *Vestn. VGU. Ser. Fiz. Mat.* [Bull. Voronezh State Univ. Ser. Phys. Math.], 2006, No. 1, 215–221 (in Russian).
178. E. L. Shishkina, "Ravenstvo dlya interirovannykh vesovykh sfericheskikh srednikh, porozhdennykh obobshchennym sdvigom" [An identity for iterated weighted spherical means generated by generalized shift], *Materialy nauch. konf. "Gertsenovskie chteniya-2013."* [Proc. Sci. Conf. "Gertsenovskie chteniya-2013,"] RGPU im. A. I. Gertsena, Saint-Petersburg, 2013, **66**, 143–145 (in Russian).
179. E. L. Shishkina, "Integral'noe predstavlenie yadra operatora, approksimiruyushchego obratnyy operator dlya giperbolicheskogo B-potentsiala Rissa" [Integral representation of kernel of the operator approximating the inverse operator to the hyperbolic Riesz B-potential], *Vestn. Tambov. un-ta. Ser. Estestv. i tekhn. nauk* [Bull. Tambov Univ. Ser. Nat. Tech. Sci.], 2016, No. 2, 450–458 (in Russian).
180. E. L. Shishkina, "O svoystvakh odnogo usrednyayushchego yadra v vesovom klasse Lebega" [On properties of one averaging kernel in a weighted Lebesgue class], *Nauch. vedom. Belgorod. gos. un-ta. Ser. Mat. Fiz.* [Sci. Bull. Belgorod Univ. Ser. Math. Phys.], 2016, **42**, No. 6, 12–19 (in Russian).
181. E. L. Shishkina, "Vesovye obobshchennye funktsii, otvechayushchie kvadratichnoy forme s kompleksnymi koeffitsientami" [Weighted generalized functions corresponding to quadratic form with complex coefficients], *Chelyabinsk. fiz.-mat. zh.* [Chelyabinsk Phys.-Math. J.], 2017, **2**, No. 1, 88–98 (in Russian).
182. E. L. Shishkina, "Drobnoe uravnenie Eylera—Puassona—Darbu i sluchaynye bluzhdaniya" [Fractional Euler–Poisson–Darboux equation and stochastic walks], *Tezisy dokl. Vtoroy mezhdunarodnoy konferentsii po stokhasticheskim metodam* [Abstr. Second Int. Conf. on Stoch. Methods], 2017, **62**, No. 4, 837–838 (in Russian).
183. E. L. Shishkina, "Metod kompozitsionnykh integral'nykh preobrazovaniy dlya singulyarnykh differentsial'nykh uravneniy s operatorom Besselya i ego drobnymi stepenyami" [Integral transforms composition method for singular differential equations with Bessel operator and its fractional powers], *Dis. dokt. fiz.-mat. nauk* [Doctoral Thesis], Moscow, 2019 (in Russian).
184. L. Asgeirsson, "Uber eine Mittelwertseigenschaft von Losungen homogener linearer partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten," *Math. Ann.*, 1937, 321–346.
185. B. B. Baker and E. T. Copson, *The Mathematical Theory of Huygens' Principle*, Oxford University Press, New York, 1939.
186. D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, and J. J. Trujillo, *Fractional calculus: models and numerical methods*, World Scientific, Jersey–London–Singapore, etc., 2012.
187. F. W. Bessel, "Untersuchung des Teils der planetarischen St orungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht," *Abhandlungen der Berliner Akademie*, 1824, 1–52.
188. D. W. Bresters, "On the equation of Euler–Poisson–Darboux," *SIAM J. Math. Anal.*, 1973, **4**, No. 1, 31–41.
189. D. W. Bresters, "On a generalized Euler–Poisson–Darboux equation," *SIAM J. Math. Anal.*, 1978, **9**, No. 5, 924–934.

190. H. Campos, V. V. Kravchenko, and S. M. Torba, “Transmutations, L-bases and complete families of solutions of the stationary Schrödinger equation in the plane,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, **389**, No. 2, 1222–1238.
191. R. W. Carroll, *Transmutation and operator differential equations*, North Holland, Amsterdam—New York—Oxford, 1979.
192. R. W. Carroll and R. E. Showalter, *Singular and degenerate Cauchy problems*, Academic Press, N. Y., 1976.
193. R. Castillo-Pérez, V. V. Kravchenko, and S. M. Torba, “Spectral parameter power series for perturbed Bessel equations,” *Appl. Math. Comput.*, 2013, **220**, 676–694.
194. E. T. Copson, “Some applications of Marcel Riesz’s integrals of fractional order,” *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 1943, **61**, 260–272.
195. W. Craig and S. Weinstein, “On determinism and well-posedness in multiple time dimensions,” *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A. Math. Phys. Eng. Sci.*, 2009, **465**, No. 2110, 3023–3046.
196. G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. Vol. 2*, Gauthier-Villars, Paris, 1915.
197. J. Delsarte, “Sur une extension de la formule de Taylor,” *J. Math. Pures Appl.*, 1938, **17**, 217–230.
198. J. Delsarte, “Une extension nouvelle de la theorie des fonctions presque-periodiques de Bohr,” *Acta Math.*, 1938, **69**, 259–317.
199. J. Delsarte, “Hypergroupes et operateurs de permutation et de transmutation,” *Colloques Internat. Centre Nat. Rech. Sci.*, 1956, **71**, 29–45.
200. J. Delsarte and J.-L. Lions, “Transmutations d’operateurs differentiels dans le domaine complexe,” *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1957, **244**, 832–834.
201. I. Dimovski, “Foundations of operational calculi for the Bessel-type differential operators,” *Serdica*, 1975, **1**, No. 1, 51–63.
202. I. Dimovski and V. Kiryakova, “Transmutations, convolutions and fractional powers of Bessel-type operators via Meijer’s G-function,” *Proc. Int. Conf. Complex Anal. and Appl., Varna*, 1983, Sofia, 1985, pp. 45–66.
203. I. Dimovski and V. Kiryakova, “The Obrechkoff integral transform: properties and relation to a generalized fractional calculus,” *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 2007, **21**, No. 1-2, 121–144.
204. S. Elouadih and R. Daher, “Generalization of Titchmarsh’s theorem for the Dunkl transform in the space $L^p(\mathbb{R}^d, \omega_l(x)dx)$,” *Int. J. Math. Model. Comput.*, 2016, **6**, No. 4, 261–267.
205. L. Euler, “Tentamen de sono campanarum,” *Novi Comm. Acad. Petrop.*, 1764, **X**, 261.
206. L. Euler, “Institutiones calculi integralis,” *Opera Omnia*, 1914, **1**, No. 13, 212–230.
207. H. Exton, “On the system of partial differential equations associated with Appell’s function F_4,” *J. Phys. A. Math. Gen.*, 1995, **28**, 631–641.
208. A. Fitouhi, I. Jebabli, E. Shishkina, and S. M. Sitnik, “Applications of integral transforms composition method to wave-type singular differential equations and index shift transmutations,” *Electron. J. Differ. Equ.*, 2018, **2018**, No. 130, 1–27.
209. J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Firmin Didot, Paris, 1822.
210. D. N. Fox, “The solution and Huygens’ principle for a singular Cauchy problem,” *J. Math. Mech.*, 1959, **8**, 197–219.
211. A. D. Gadjiev, V. S. Guliyev, A. Serbetci, and E. V. Guliyev, “The Stein–Weiss type inequalities for the B-Riesz potentials,” *J. Math. Inequal.*, 2011, **5**, No. 1, 87–106.
212. V. S. Guliev, “Sobolev theorems for B-Riesz potentials,” *Dokl. Math.*, 1998, **57**, No. 1, 72–73.
213. V. S. Guliev, “Some properties of the anisotropic Riesz–Bessel potential,” *Anal. Math.*, 2000, **26**, No. 2, 99–118.
214. V. S. Guliev, “On maximal function and fractional integral, associated with the Bessel differential operator,” *Math. Inequal. Appl.*, 2003, **6**, No. 2, 317–330.
215. V. S. Guliev, “Weighted inequality for fractional maximal functions and fractional integrals, associated with the Laplace–Bessel differential operator,” *Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci.*, 2006, **26**, No. 1, 71–80.
216. V. S. Guliev and J. J. Hasanov, “Sobolev–Morrey type inequality for Riesz potentials, associated with the Laplace–Bessel differential operator,” *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2006, **9**, No. 1, 17–32.
217. V. S. Guliev and A. Miloud, “On maximal function on the Laguerre hypergroup,” *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2006, **9**, No. 3, 1–12.
218. M. E. Hamma and R. Daher, “Estimate of K-functionals and modulus of smoothness constructed by generalized spherical mean operator,” *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, 2014, **124**, No. 2, 235–242.
219. S. Helgason, *Groups and geometric analysis. Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions*, Academic Press, Orlando etc., 1984.

220. L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators, I-II*, Springer, Berlin, 1983.
221. E. M. Jager, *Applications of distributions in mathematical physics*, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1964.
222. A. John, "The Ultrahyperbolic differential equation with four independent variables," *Duke Math. J.*, 1938, **4**, No. 2, 300–322.
223. S. T. Karimov, "Multidimensional generalized Erdélyi–Kober operator and its application to solving Cauchy problems for differential equations with singular coefficients," *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2015, **18**, No. 4, 845–861.
224. S. T. Karimov, "On some generalizations of properties of the Lowndes operator and their applications to partial differential equations of high order," *Filomat.*, 2018, **32**, No. 3, 873–883.
225. I. Karoui, "On the Bessel–Wright harmonic analysis," *PhD Thesis*, Université de Carthage, 2017.
226. A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, Elsevier, Amsterdam, etc., 2006.
227. V. Kiryakova, "Applications of the generalized Poisson transformation for solving hyper-Bessel differential equations," *Godishnik VUZ. Appl. Math.*, 1986, **22**, No. 4, 129–140.
228. V. Kiryakova, *Generalized fractional calculus and applications*, Longman, Harlow, 1994.
229. V. Kiryakova, "Transmutation method for solving hyper-Bessel differential equations based on the Poisson–Dimovski transformation," *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2008, **11**, No. 3, 299–316.
230. V. Kiryakova and B. Al-Saqabi, "Explicit solutions to hyper-Bessel integral equations of second kind," *Comput. Math. Appl.*, 1999, **37**, 75–86.
231. V. V. Kravchenko, *Applied pseudoanalytic function theory*, Birkhäuser, Basel, 2009.
232. V. V. Kravchenko, "Construction of a transmutation for the one-dimensional Schrödinger operator and a representation for solutions," *Appl. Math. Comput.*, 2018, **328**, 75–81.
233. V. V. Kravchenko, L. J. Navarro, and S. M. Torba, "Representation of solutions to the one-dimensional Schrödinger equation in terms of Neumann series of Bessel functions," *Appl. Math. Comput.*, 2017, **314**, No. 1, 173–192.
234. V. V. Kravchenko, J. A. Otero, and S. M. Torba, "Analytic approximation of solutions of parabolic partial differential equations with variable coefficients," *Adv. Math. Phys.*, 2017, **2017**, 2947275.
235. V. V. Kravchenko and S. M. Torba, "Transmutations for Darboux transformed operators with applications," *J. Phys. A. Math. Theor.*, 2012, **45**, No. 7, 075201.
236. V. V. Kravchenko and S. M. Torba, "Analytic approximation of transmutation operators and applications to highly accurate solution of spectral problems," *J. Comput. Appl. Math.*, 2015, **275**, 1–26.
237. V. V. Kravchenko and S. M. Torba, "Construction of transmutation operators and hyperbolic pseudoanalytic functions," *Complex Anal. Oper. Theory*, 2015, **9**, No. 2, 379–429.
238. V. V. Kravchenko and S. M. Torba, "Asymptotics with respect to the spectral parameter and Neumann series of Bessel functions for solutions of the one-dimensional Schrödinger equation," *J. Math. Phys.*, 2017, **58**, No. 12, 122107.
239. V. V. Kravchenko, S. M. Torba, and K. V. Khmelnytskaya, "Transmutation operators: construction and applications," *Proc. 17th Int. Conf. on Comput. and Math. Methods in Sci. and Engin., Cadiz, Andalucia, España, Jul.* 4–8, 2017, pp. 1198–1206.
240. V. V. Kravchenko and S. M. Torba, "A Neumann series of Bessel functions representation for solutions of Sturm–Liouville equations," *Calcolo*, 2018, **55**, No. 1, 11.
241. V. V. Kravchenko, S. M. Torba, and R. Castillo-Pérez, "A Neumann series of Bessel functions representation for solutions of perturbed Bessel equations," *Appl. Anal.*, 2018, **97**, No. 5, 677–704.
242. J. L. Lagrange, "Sur le problème de Képler," *Mém. l'Académie R. Sci. Bell.-Lett. Berlin*, 1771, **XXV**, 113–138.
243. L. N. Lyakhov, M. V. Polovinkina, and E. L. Shishkina, "Accompanying distributions of singular differential operators," *J. Math. Sci.*, 2016, **219**, No. 2, 184–189.
244. L. N. Lyakhov and E. L. Shishkina, "Inversion of general Riesz B-potentials," *Proc. Int. Conf. Analytic methods of analysis and differential equations, AMADE* 2012, Cambridge Scientific Publishers, Cottenham, 2013, pp. 115–126.
245. L. N. Lyakhov and E. L. Shishkina, "Weighted mixed spherical means and singular ultrahyperbolic equation," *Analysis (Munich)*, 2016, **36**, No. 2, 65–70.
246. J. L. McGregor, "Generalized translation operators," *PhD Thesis*, California Institute of Technology, Pasadena, 1954.
247. A. B. Muravnik, "On weighted norm estimates for the mixed Fourier–Bessel transforms on non-negative functions," In: *Integral methods in science and engineering. Vol. 1. Analytic methods*, Longman, Harlow, 1997, pp. 119–123.

248. A. B. Muravnik, “Fourier–Bessel transformation of measures and singular differential operators,” In: *Paul Erdős and his mathematics*, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1999, pp. 182–184.
249. D. I. Nikolayev and H. Schaeben, “Characteristics of the ultrahyperbolic differential equation governing pole density functions,” *Inverse Problems*, 1999, **15**, 1603–1619.
250. N. Obrechkoff, “On certain integral representation of real functions on the real semi-axis,” *Izvestia Mat. Inst. Sofia*, 1958, **3**, 2–28.
251. M. D. Ortigueira, *Fractional calculus for scientists and engineers*, Springer, Dordrecht, 2011.
252. O. G. Owens, “Uniqueness of solutions of ultrahyperbolic partial differential equations,” *Am. J. Math.*, 1947, **69**, No. 1, 184–188.
253. O. G. Owens, “An ultrahyperbolic equation with an integral condition,” *Am. J. Math.*, 1960, **82**, No. 4, 799–811.
254. S. D. Poisson, “Mémoire sur l’intégration des équations linéaires aux différences partielles,” *J. Éc. Roy. Polytech. Ser. 1*, 1823, **19**, No. 12, 215–248.
255. J. Radzikowski, “On the uniqueness of the limit problem for the ultrahyperbolic equation,” *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys.*, 1960, **8**, No. 4, 203–207.
256. M. Riesz, “Intégrale de Riemann-Liouville et solution invariantive du probléme de Cauchy pour l’équation de sondes,” *Comptes Rendus du Congres International des Mathematiciens*, 1936, **2**, 44–45.
257. M. Riesz, “L’intégrale de Riemann–Liouville et le probleme de Cauchy,” *Acta Math.*, 1949, **81**, No. 1-2, 1–223.
258. B. Rubin, *Fractional integrals and potentials*, Addison Wesley Longman, Harlow, 1996.
259. A. Sajğlam, H. Yıldırım, and M. Z. Sarıkaya, “On the product of the ultra-hyperbolic Bessel operator related to the elastic waves,” *Selçuk J. Appl. Math.*, 2009, **10**, No. 1, 85–93.
260. M. Z. Sarıkaya, H. Yıldırım, and Ö. Akin, “On generalized Riesz type potential with Lorentz distance,” *Lobachevskii J. Math.*, 2008, **28**, 24–31.
261. L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.
262. E. L. Shishkina, “Inversion of integral of B-potential type with density from Φ_γ,” *J. Math. Sci.*, 2009, **160**, No. 1, 95–102.
263. E. L. Shishkina, “On the boundedness of hyperbolic Riesz B-potential,” *Lith. Math. J.*, 2016, **56**, No. 4, 540–551.
264. E. L. Shishkina, “On weighted generalized functions associated with quadratic forms,” *Probl. Anal. Issues Anal.*, 2016, **5**, No. 2, 52–68.
265. E. L. Shishkina, “Inversion of the mixed Riesz hyperbolic B-potentials,” *Int. J. Appl. Math.*, 2017, **30**, No. 6, 487–500.
266. E. L. Shishkina, “Generalized Euler–Poisson–Darboux equation and singular Klein–Gordon equation,” *J. Phys. Conf. Ser.*, 2018, **973**, 1–21.
267. E. L. Shishkina, “Properties of mixed hyperbolic B-potential,” *Progr. Fract. Differ. Appl.*, 2018, **4**, No. 2, 83–98.
268. E. L. Shishkina, “Singular Cauchy problem for the general Euler–Poisson–Darboux equation,” *Open Math. J.*, 2018, **16**, 23–31.
269. E. L. Shishkina, “Solution of the singular Cauchy problem for a general inhomogeneous Euler–Poisson–Darboux equation,” *Carpathian J. Math.*, 2018, **34**, No. 2, 255–267.
270. E. L. Shishkina and S. Abbas, “Method of Riesz potentials applied to solution to nonhomogeneous singular wave equations,” *Mat. zametki SVFU* [Math. Notes SVFU], 2018, **25**, No. 3, 68–91.
271. E. L. Shishkina and M. Karabacak, “Singular Cauchy problem for generalized homogeneous Euler–Poisson–Darboux equation,” *Mat. zametki SVFU* [Math. Notes SVFU], 2018, **25**, No. 2, 85–96.
272. E. L. Shishkina and S. M. Sitnik, “General form of the Euler–Poisson–Darboux equation and application of the transmutation method,” *Electron. J. Differ. Equ.*, 2017, **177**, 1–20.
273. E. L. Shishkina and S. M. Sitnik, “On fractional powers of Bessel operators,” *J. Inequal. Spec. Funct.*, 2017, **8**, No. 1, 49–67.
274. S. M. Sitnik, “Transmutations and applications: a survey,” *ArXiv*, 2010, 012.3741 [math.CA].
275. S. M. Sitnik, “A short survey of recent results on Buschman–Erdélyi transmutations,” *J. Inequal. Spec. Funct.*, 2017, **8**, No. 1, 140–157.
276. S. M. Sitnik, “Buschman–Erdélyi transmutations and applications,” *Abstr. 8th Int. Conf. Transform Methods and Special Functions, Bulgaria, Sofia, Aug.* 27–31, 2017, Inst. Math. Inf. Bulg. Acad. Sci., 2017, p. 59.
277. H. M. Srivastava and P. W. Karlsson, *Multiple Gaussian hypergeometric series*, Ellis Horwood, Chichester, 1985.

278. K. L. Stellmacher, "Eine Klasse Huygenscher Differentialgleichungen und ihre Integration," *Math. Ann.*, 1955, **130**, 219–233.
279. S. R. Umarov, *Introduction to fractional and pseudo-differential equations with singular symbols*, Springer, Cham, 2015.
280. A. K. Urinov and S. T. Karimov, "Solution of the Cauchy problem for generalized Euler–Poisson–Darboux equation by the method of fractional integrals," In: *Progress in Partial Differential Equations*, Springer, Heidelberg, 2013, pp. 321–337.
281. A. Weinstein, "Discontinuous integrals and generalized theory of potential," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1948, **63**, No. 2, 342–354.
282. A. Weinstein, "Generalized axially symmetric potential theory," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1953, **59**, 20–38.
283. A. Weinstein, "On the wave equation and the equation of Euler–Poisson," *Proc. Symp. Appl. Math. Vol. V. Wave motion and vibration theory*, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1954, pp. 137–147.
284. A. Weinstein, "The generalized radiation problem and the Euler–Poisson–Darboux equation," *Summa Brasil. Math.*, 1955, **3**, 125–147.
285. A. Weinstein, "Spherical means in spaces of constant curvature," *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 1962, **4**, No. 60, 87–91.
286. A. Weinstein, "Some applications of generalized axially symmetric potential theory to continuum mechanics," In: *Приложения теории функций в механике сплошных сред. Т. 2. Механика жидкости и газа, математические методы*, Наука, М., 1965, pp. 440–453.

Elina L. Shishkina
Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: ilina_dico@mail.ru