

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ
THEORY OF ELASTICITYDOI 10.22363/1815-5235-2020-16-2-122-130
УДК 539.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Влияние трения при взаимодействии анизотропной полосы и жесткого основания

С.Г. Кудрявцев*, Ю.М. Булдакова

Поволжский государственный технологический университет, Российская Федерация, 424000, Республика Марий Эл, Йошкар-Ола, пл. Ленина, 3

*KudryavcevSG@volgatech.net

История статьи:

Поступила в редакцию: 16 января 2020 г.

Доработана: 28 февраля 2020 г.

Принята к публикации: 12 марта 2020 г.

Аннотация

Актуальность. При определении напряженного и деформированного состояния в полосе, лежащей на основании, применяют различные модели контакта между телами. Необходимо оценить качественный и количественный характер изменения напряжений в полосе в зависимости от вариантов сцепления полосы и основания. **Цель** – провести анализ влияния коэффициента трения на величину напряжений в анизотропной полосе при взаимодействии с жестким основанием. **Методы.** Решение проводится на основе уравнений плоской задачи теории упругости анизотропного тела при условиях, что полоса плотно прилегает к основанию и касательное усилие на контактной плоскости пропорционально нормальному давлению. Перемещения и напряжения в произвольной точке полосы записываются в форме метода начальных функций через функции перемещений и усилий на нижней плоскости, которые зависят от характера нагрузки, приложенной на верхней плоскости, и условий контакта полосы с основанием. После преобразований расчетные формулы для перемещений и напряжений выражаются, используя интегральное преобразование Фурье, через нормальную поверхностную нагрузку в виде несобственных интегралов. **Результаты.** Для варианта нагружения полосы сосредоточенной силой получены формулы для определения перемещений и напряжений, на основе которых построены функции влияния для задачи о равновесии анизотропной полосы, лежащей на жестком основании с учетом трения. Приведены графики влияния коэффициента трения, направления осей анизотропии материала на напряженное состояние полосы. Проводится сопоставление результатов вычисления напряжений по анизотропной и изотропной моделям.

Ключевые слова: перемещение, напряжение, упругость, анизотропия, полоса, трение

Для цитирования

Кудрявцев С.Г., Булдакова Ю.М. Влияние трения при взаимодействии анизотропной полосы и жесткого основания // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 2. С. 122–130. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-2-122-130>

Введение

Задача об определении перемещений и напряжений в упругом слое, контактирующем под дей-

ствием поверхностной нагрузки с основанием, имеет широкое применение на практике: при расчете конструкций на упругом основании, в механике грунтов, для исследования работы асфальтобетонных покрытий. Контактное взаимодействие слоя из изотропного материала с основанием рассматривалось в работах [1–9]. Для варианта, когда материал слоя имеет выраженную анизотропию, аналогичный класс задач рассмотрен, например, в [10–16]. В перечисленных работах решение проводилось или при отсутствии трения, или при отсутствии скольжения на контактной плоскости между телами.

Кудрявцев Сергей Геннадьевич, кандидат технических наук, доцент кафедры сопротивления материалов и прикладной механики; eLIBRARY SPIN-код: 9756-6211.

Булдакова Юлия Михайловна, старший преподаватель кафедры сопротивления материалов и прикладной механики; eLIBRARY SPIN-код: 5677-6126.

© Кудрявцев С.Г., Булдакова Ю.М., 2020



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Трение при контакте полосы и полуплоскости, когда материал слоев изотропный, на напряженное и деформированное состояние двухслойной области учитывалось в [17].

Исследуем влияние трения на распределение напряжений в анизотропной полосе при взаимодействии с жестким основанием.

1. Постановка задачи

Полоса из анизотропного материала постоянной высоты h и бесконечной длины лежит на жестком основании (рис. 1). Ось x направим вдоль нижней плоскости полосы, ось y – перпендикулярно основанию. На верхней плоскости действует нормальная симметричная относительно оси y поверхностная нагрузка $q(x)$. Направления осей анизотропии определяются углом φ . Положительные направления нормальных σ_x , σ_y и касательного τ_{xy} напряжений, перемещений u и v совпадают с обозначениями [18].

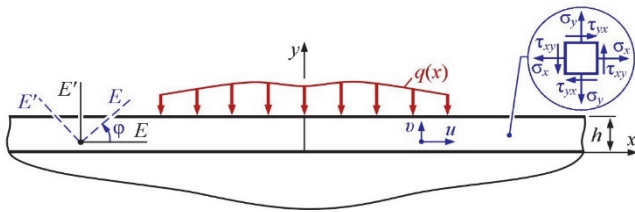


Рис. 1. Расчетная схема
[Figure 1. Design model]

2. Метод расчета

При решении воспользуемся приведенными в [14] уравнениями для определения в произвольной точке полосы перемещений

$$\begin{aligned} \mu u = & -(\mu_1 \cos s_1 y \partial - \mu_2 \cos s_2 y \partial) \cdot u_0 + \\ & + \left(\frac{\mu_1}{s_1} \sin s_1 y \partial - \frac{\mu_2}{s_2} \sin s_2 y \partial \right) \cdot v_0 + \\ & + \mu_1 \mu_2 (\cos s_1 y \partial - \cos s_2 y \partial) \cdot \frac{1}{\partial} q_0 + \\ & + \left(\frac{\mu_1^2}{s_1} \sin s_1 y \partial - \frac{\mu_2^2}{s_2} \sin s_2 y \partial \right) \cdot \frac{1}{\partial} \tau_0, \\ \mu v = & (s_1 \mu_2 \sin s_1 y \partial - s_2 \mu_1 \sin s_2 y \partial) \cdot u_0 + \\ & + (\mu_2 \cos s_1 y \partial - \mu_1 \cos s_2 y \partial) \cdot v_0 - \\ & - (s_1 \mu_2^2 \sin s_1 y \partial - s_2 \mu_1^2 \sin s_2 y \partial) \cdot \frac{1}{\partial} q_0 + \end{aligned}$$

$$+ \mu_1 \mu_2 (\cos s_1 y \partial - \cos s_2 y \partial) \cdot \frac{1}{\partial} \tau_0, \quad (1)$$

и напряжений

$$\begin{aligned} \mu \sigma_x = & (s_1^2 \cos s_1 y \partial - s_2^2 \cos s_2 y \partial) \cdot \partial u_0 - \\ & - (s_1 \sin s_1 y \partial - s_2 \sin s_2 y \partial) \cdot \partial v_0 - \\ & - (s_1^2 \mu_2 \cos s_1 y \partial - s_2^2 \mu_1 \cos s_2 y \partial) \cdot q_0 - \\ & - (s_1 \mu_1 \sin s_1 y \partial - s_2 \mu_2 \sin s_2 y \partial) \cdot \tau_0, \\ \mu \sigma_y = & -(\cos s_1 y \partial - \cos s_2 y \partial) \cdot \partial u_0 + \\ & + \left(\frac{1}{s_1} \sin s_1 y \partial - \frac{1}{s_2} \sin s_2 y \partial \right) \cdot \partial v_0 + \\ & + (\mu_2 \cos s_1 y \partial - \mu_1 \cos s_2 y \partial) \cdot q_0 + \\ & + \left(\frac{\mu_1}{s_1} \sin s_1 y \partial - \frac{\mu_2}{s_2} \sin s_2 y \partial \right) \cdot \tau_0, \\ \mu \tau_{xy} = & -(s_1 \sin s_1 y \partial - s_2 \sin s_2 y \partial) \cdot \partial u_0 - \\ & - (\cos s_1 y \partial - \cos s_2 y \partial) \cdot \partial v_0 + \\ & + (s_1 \mu_2 \sin s_1 y \partial - s_2 \mu_1 \sin s_2 y \partial) \cdot q_0 - \\ & - (\mu_1 \cos s_1 y \partial - \mu_2 \cos s_2 y \partial) \cdot \tau_0, \quad (2) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} s_{1,2}^2 = & \frac{2\beta_{12} + \beta_{66}}{2\beta_{11}} \pm \sqrt{\left(\frac{2\beta_{12} + \beta_{66}}{2\beta_{11}} \right)^2 - \frac{\beta_{22}}{\beta_{11}}}, \\ \mu_1 = & \beta_{12} - \beta_{11} \cdot s_1^2, \quad \mu_2 = \beta_{12} - \beta_{11} \cdot s_2^2, \\ \mu = & \mu_2 - \mu_1 = \beta_{11} \cdot (s_1^2 - s_2^2). \end{aligned}$$

Формулы (1)–(2) записаны для варианта $s_1 \neq s_2$. Для плоского напряженного состояния коэффициенты β_{ij} связаны с коэффициентами деформации a_{ij} [18] соотношениями $\beta_{ij} = a_{ij}$, в случае плоского деформированного состояния $\beta_{ij} = a_{ij} - a_{i3} \cdot a_{j3} / a_{33}$. Производная по x обозначена через $\partial (\partial = \partial / \partial x)$. Функции перемещений на нижней плоскости обозначены через $u_0 = u_0(x) = u(x, y=0)$, $v_0 = v_0(x) = v(x, y=0)$, функции усилий $q_0 = q_0(x) = \sigma_y(x, y=0)$, $\tau_0 = \tau_0(x) = \tau_{xy}(x, y=0)$. Точки, далее их показывать не будем, отделяют дифференциальные операторы от функций, на которые они воздействуют.

Полагаем, что полоса плотно прилегает к основанию и на границе контакта значение касательного усилия пропорционально нормальному давлению:

$$\tau_o(x) = f \cdot |q_o(x)|, \quad (3)$$

где $f = \text{const}$ – коэффициент трения.

Подставим в функции напряжений σ_y и τ_{xy} (2) значение $y = h$. Учитывая направления $q(x)$, $q_o(x)$ и условия $v_o(x) = 0$, $\tau(x, y = h) = 0$, получим систему двух уравнений относительно неизвестных функций $u_o(x)$ и $q_o(x)$:

$$\begin{cases} (\cos s_1 h \partial - \cos s_2 h \partial) \partial u_o = \mu q(x) - \\ - (\mu_2 \cos s_1 h \partial - \mu_1 \cos s_2 h \partial) q_o + \\ + \left(\frac{\mu_1}{s_1} \sin s_1 h \partial - \frac{\mu_2}{s_2} \sin s_2 h \partial \right) \tau_o, \\ (s_1 \sin s_1 h \partial - s_2 \sin s_2 h \partial) \partial u_o = \\ = - (s_1 \mu_2 \sin s_1 h \partial - s_2 \mu_1 \sin s_2 h \partial) q_o - \\ - (\mu_1 \cos s_1 h \partial - \mu_2 \cos s_2 h \partial) \tau_o, \end{cases} \quad (4)$$

где $\tau_o(x)$ определяется выражением (3).

Из системы (4) найдем зависимость между $q(x)$, $q_o(x)$ и $\tau_o(x)$, при которой полоса плотно прилегает к основанию:

$$\begin{aligned} & \left[2s_1 s_2 (\mu_1 + \mu_2) + \right. \\ & \left. + (s_1 - s_2)(s_1 \mu_2 - s_2 \mu_1) \cos(s_1 + s_2) h \partial - \right. \\ & \left. - (s_1 + s_2)(s_1 \mu_2 + s_2 \mu_1) \cos(s_1 - s_2) h \partial \right] \tau_o - \\ & - s_1 s_2 \mu \left[(s_1 - s_2) \sin(s_1 + s_2) h \partial + \right. \\ & \left. + (s_1 + s_2) \sin(s_1 - s_2) h \partial \right] q_o + \\ & + 2s_1 s_2 \mu (s_1 \sin s_1 h \partial - s_2 \sin s_2 h \partial) q = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Принимая в (5) $\tau_o(x) = 0$, имеем соотношение между нагрузкой $q(x)$ и контактным усилием $q_o(x)$ для варианта, когда полоса лежит на жестком основании без трения [12].

Запишем, исходя из системы (4), выражение для определения функции ∂u_o :

– через поверхностную нагрузку $q(x)$ и усилие $q_o(x)$:

$$\begin{aligned} & \left[2s_1 s_2 (\mu_1 + \mu_2) + \right. \\ & \left. + (s_1 - s_2)(s_1 \mu_2 - s_2 \mu_1) \cos(s_1 + s_2) h \partial - \right. \\ & \left. - (s_1 + s_2)(s_1 \mu_2 + s_2 \mu_1) \cos(s_1 - s_2) h \partial \right] \partial u_o = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = - \left[4s_1 s_2 \mu_1 \mu_2 - \right. \\ & \left. - (s_1 + s_2)(s_1 \mu_2^2 + s_2 \mu_1^2) \cos(s_1 - s_2) h \partial + \right. \\ & \left. + (s_1 - s_2)(s_1 \mu_2^2 - s_2 \mu_1^2) \cos(s_1 + s_2) h \partial \right] q_o + \\ & + 2s_1 s_2 \mu (\mu_1 \cos s_1 h \partial - \mu_2 \cos s_2 h \partial) q(x); \end{aligned} \quad (6)$$

– через поверхностную нагрузку $q(x)$ и касательное усилие $\tau_o(x)$:

$$\begin{aligned} & s_1 s_2 \mu \left[(s_1 - s_2) \sin(s_1 + s_2) h \partial + \right. \\ & \left. + (s_1 + s_2) \sin(s_1 - s_2) h \partial \right] \partial u_o = \\ & = - \left[4s_1 s_2 \mu_1 \mu_2 - \right. \\ & \left. - (s_1 + s_2)(s_1 \mu_2^2 + s_2 \mu_1^2) \cos(s_1 - s_2) h \partial + \right. \\ & \left. + (s_1 - s_2)(s_1 \mu_2^2 - s_2 \mu_1^2) \cos(s_1 + s_2) h \partial \right] \tau_o - \\ & - 2s_1 s_2 \mu (s_1 \mu_2 \sin s_1 h \partial - s_2 \mu_1 \sin s_2 h \partial) q(x). \end{aligned} \quad (7)$$

Из условия $u_o(x) = 0$ (отсутствие скольжения между полосой и основанием) и уравнений (6), (7) найдем зависимости между $q_o(x)$ и $q(x)$, $\tau_o(x)$ и $q(x)$. Подставляя выражения $q_o(x)$ и $\tau_o(x)$ в (1)–(2), получим формулы для определения перемещений и напряжений в произвольной точке полосы, жестко скрепленной с основанием [14].

Предполагаем, что существует интегральное преобразование Фурье от функций $q(x)$, $q_o(x)$ и $\tau_o(x)$, которые разделим на симметричные $q_s(x)$, $q_{os}(x)$, $\tau_{os}(x)$ и кососимметричные $q_a(x)$, $q_{oa}(x)$, $\tau_{oa}(x)$ составляющие [19]:

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{q}_s(\tilde{\lambda}) + i\tilde{q}_a(\tilde{\lambda})] \cdot e^{-i\tilde{\lambda}x} d\tilde{\lambda}, \\ q_o(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{q}_{os}(\tilde{\lambda}) + i\tilde{q}_{oa}(\tilde{\lambda})] \cdot e^{-i\tilde{\lambda}x} d\tilde{\lambda}, \\ \tau_o(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{\tau}_{os}(\tilde{\lambda}) + i\tilde{\tau}_{oa}(\tilde{\lambda})] \cdot e^{-i\tilde{\lambda}x} d\tilde{\lambda}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{q}_s(\tilde{\lambda}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q_s(x) \cos(\tilde{\lambda}x) dx, \\ \tilde{q}_a(\tilde{\lambda}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q_a(x) \sin(\tilde{\lambda}x) dx, \\ \tilde{q}_{os}(\tilde{\lambda}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q_{os}(x) \cos(\tilde{\lambda}x) dx, \end{aligned}$$

$$\tilde{q}_{oa}(\tilde{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q_{oa}(x) \sin(\tilde{\lambda}x) dx,$$

$$\tilde{\tau}_{os}(\tilde{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{os}(x) \cos(\tilde{\lambda}x) dx,$$

$$\tilde{\tau}_{oa}(\tilde{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{oa}(x) \sin(\tilde{\lambda}x) dx,$$

где $\tilde{\lambda}$ – любое положительное вещественное число.

Трансформанту Фурье $\tilde{q}_{os}(\tilde{\lambda})$, учитывая уравнения (3), (5), (8), а также то, что при симметричной нагрузке $q(x)$ нормальное усилие $q_o(x)$ будет симметричным, касательное $\tau_o(x)$ – кососимметричным, выразим через трансформанту от симметричной нагрузки $\tilde{q}_s(\tilde{\lambda})$

$$\tilde{q}_{os}(\tilde{\lambda}) = \frac{2s_1s_2\mu}{D} (s_1 \operatorname{sh} s_1\lambda - s_2 \operatorname{sh} s_2\lambda) \tilde{q}_s(\tilde{\lambda}), \quad (9)$$

где

$$D = s_1s_2\mu[(s_1 - s_2)\operatorname{sh}(s_1 + s_2)\lambda + (s_1 + s_2)\operatorname{sh}(s_1 - s_2)\lambda] + f \begin{bmatrix} 2s_1s_2(\mu_1 + \mu_2) + \\ + (s_1 - s_2)(s_1\mu_2 - s_2\mu_1) \operatorname{ch}(s_1 + s_2)\lambda - \\ - (s_1 + s_2)(s_1\mu_2 + s_2\mu_1) \operatorname{ch}(s_1 - s_2)\lambda \end{bmatrix}.$$

Используя формулу обращения Фурье, запишем

$$q_o(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{s_1s_2\mu}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{D} \begin{bmatrix} s_1 \operatorname{sh} s_1\lambda - \\ - s_2 \operatorname{sh} s_2\lambda \end{bmatrix} \tilde{q}_s(\tilde{\lambda}) \cos \lambda \tilde{x} d\lambda, \quad (10)$$

В формулах (9) и (10) введены обозначения $\lambda = \tilde{\lambda}h$, $\tilde{x} = x/h$.

Подставим (10), учитывая (3), в любое из уравнений системы (4) и, воздействуя дифференциальными операторами на функции $q_o(x)$ и $\tau_o(x)$, найдем

$$\begin{aligned} \partial u_o(x) = & -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{s_1s_2\mu}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{D} \times \\ & \times \begin{bmatrix} (s_1\mu_2 \operatorname{sh} s_1\lambda - s_2\mu_1 \operatorname{sh} s_2\lambda) - \\ - f(\mu_1 \operatorname{ch} s_1\lambda - \mu_2 \operatorname{ch} s_2\lambda) \end{bmatrix} \times \\ & \times \tilde{q}_s(\tilde{\lambda}) \cos \lambda \tilde{x} d\lambda. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнения (10), (11) внесем в (1)–(2). После преобразований получим формулы для определения в полосе перемещений

$$u = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} s_1s_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{D} \left\{ A_1 \begin{bmatrix} \mu_1\mu_2 (\operatorname{ch} s_1\lambda\tilde{y} - \operatorname{ch} s_2\lambda\tilde{y}) - \\ - f \begin{bmatrix} s_2\mu_1^2 \operatorname{sh} s_1\lambda\tilde{y} - \\ - s_1\mu_2^2 \operatorname{sh} s_2\lambda\tilde{y} \end{bmatrix} \end{bmatrix} - \right. \\ \left. - (A_2 - fA_3)(\mu_1 \operatorname{ch} s_1\lambda\tilde{y} - \mu_2 \operatorname{ch} s_2\lambda\tilde{y}) \right\} \tilde{q}_s(\tilde{\lambda}) \frac{\sin \lambda \tilde{x}}{\lambda} d\lambda,$$

$$v = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} s_1s_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{D} \left\{ A_1 \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1\mu_2^2 \operatorname{sh} s_1\lambda\tilde{y} - \\ - s_2\mu_1^2 \operatorname{sh} s_2\lambda\tilde{y} \end{bmatrix} - \\ - f\mu_1\mu_2 \begin{bmatrix} \operatorname{ch} s_1\lambda\tilde{y} - \\ - \operatorname{ch} s_2\lambda\tilde{y} \end{bmatrix} \end{bmatrix} - \right. \\ \left. - [A_2 - fA_3] \begin{bmatrix} s_1\mu_2 \operatorname{sh} s_1\lambda\tilde{y} - \\ - s_2\mu_1 \operatorname{sh} s_2\lambda\tilde{y} \end{bmatrix} \right\} \tilde{q}_s(\tilde{\lambda}) \frac{\cos \lambda \tilde{x}}{\lambda} d\lambda, \quad (12)$$

и напряжений

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{s_1s_2}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_1(s) \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1^2\mu_2 \operatorname{ch} s_1\lambda\tilde{y} - \\ - s_2^2\mu_1 \operatorname{ch} s_2\lambda\tilde{y} \end{bmatrix} - \\ - f \begin{bmatrix} s_1\mu_1 \operatorname{sh} s_1\lambda\tilde{y} - \\ - s_2\mu_2 \operatorname{sh} s_2\lambda\tilde{y} \end{bmatrix} \end{bmatrix} - \right. \\ \left. - [A_2(s) - fA_3(s)] \begin{bmatrix} s_1^2 \operatorname{ch} s_1\lambda\tilde{y} - \\ - s_2^2 \operatorname{ch} s_2\lambda\tilde{y} \end{bmatrix} \right\} \tilde{q}_s(\tilde{\lambda}) \frac{\cos \lambda \tilde{x}}{D} d\lambda,$$

$$\sigma_y = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{s_1s_2}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_1(s) \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_2 \operatorname{ch} s_1\lambda\tilde{y} - \\ - \mu_1 \operatorname{ch} s_2\lambda\tilde{y} \end{bmatrix} - \\ - f \begin{bmatrix} s_2\mu_1 \operatorname{sh} s_1\lambda\tilde{y} - \\ - s_1\mu_2 \operatorname{sh} s_2\lambda\tilde{y} \end{bmatrix} \end{bmatrix} - \right. \\ \left. - [A_2(s) - fA_3(s)] \begin{bmatrix} \operatorname{ch} s_1\lambda\tilde{y} - \\ - \operatorname{ch} s_2\lambda\tilde{y} \end{bmatrix} \right\} \tilde{q}_s(\tilde{\lambda}) \frac{\cos \lambda \tilde{x}}{D} d\lambda,$$

$$\tau_{xy} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{s_1s_2}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_1(s) \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1\mu_2 \operatorname{sh} s_1\lambda\tilde{y} - \\ - s_2\mu_1 \operatorname{sh} s_2\lambda\tilde{y} \end{bmatrix} - \\ - f \begin{bmatrix} \mu_1 \operatorname{ch} s_1\lambda\tilde{y} - \\ - \mu_2 \operatorname{ch} s_2\lambda\tilde{y} \end{bmatrix} \end{bmatrix} - \right.$$

$$-\left[A_2(s) - fA_3(s)\right] \begin{pmatrix} s_1 \operatorname{sh} s_1 \lambda \tilde{y} - \\ -s_2 \operatorname{sh} s_2 \lambda \tilde{y} \end{pmatrix} \left\{ \tilde{q}_s(\tilde{\lambda}) \frac{\sin \lambda \tilde{x}}{D} \right\} d\lambda, \quad (13)$$

где

$$A_1(s) = s_1 \operatorname{sh} s_1 \lambda - s_2 \operatorname{sh} s_2 \lambda,$$

$$A_2(s) = s_1 \mu_2 \operatorname{sh} s_1 \lambda - s_2 \mu_1 \operatorname{sh} s_2 \lambda,$$

$$A_3(s) = \mu_1 \operatorname{ch} s_1 \lambda - \mu_2 \operatorname{ch} s_2 \lambda, \quad \tilde{y} = y/h.$$

При переходе от анизотропного материала полосы к изотропному в уравнениях (12) и (13) слагаемые, входящие под знак интеграла, раскладываем в ряды. Числитель и знаменатель сократим на множитель $(s_1^2 - s_2^2)^2$ и выполним переход к техническим постоянным. Например, для плоского напряженного состояния $\beta_{11} = 1/E$, $\beta_{12} = -\nu/E$. Подставим технические постоянные в ряды и, учитывая, что для изотропного материала $s_1 = s_2 = 1$, ряды свернем. После преобразований формулы для определения напряжений имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_x = & -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ B_1(\lambda) \begin{pmatrix} (2\nu \operatorname{ch} \lambda \tilde{y} + \\ +(1+\nu)\lambda \tilde{y} \operatorname{sh} \lambda \tilde{y}) - \\ -f \begin{pmatrix} (3+\nu) \operatorname{sh} \lambda \tilde{y} + \\ +(1+\nu)\lambda \tilde{y} \operatorname{ch} \lambda \tilde{y} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right\} + \\ & + [B_2(\lambda) + fB_3(\lambda)] (2 \operatorname{ch} \lambda \tilde{y} + \lambda \tilde{y} \operatorname{sh} \lambda \tilde{y}) \left\{ \tilde{q}_s(\tilde{\lambda}) \frac{\cos \lambda \tilde{x}}{D^*} \right\} d\lambda, \\ \sigma_y = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ B_1(\lambda) \begin{pmatrix} (1+\nu)\lambda \tilde{y} \operatorname{sh} \lambda \tilde{y} - \\ -2 \operatorname{ch} \lambda \tilde{y} \\ -f \begin{pmatrix} (1-\nu) \operatorname{sh} \lambda \tilde{y} + \\ +(1+\nu)\lambda \tilde{y} \operatorname{ch} \lambda \tilde{y} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right\} + \\ & + [B_2(\lambda) + fB_3(\lambda)] \lambda \tilde{y} \operatorname{sh} \lambda \tilde{y} \left\{ \tilde{q}_s(\tilde{\lambda}) \frac{\cos \lambda \tilde{x}}{D^*} \right\} d\lambda, \\ \tau_{xy} = & -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ B_1(\lambda) \begin{pmatrix} (1+\nu)\lambda \tilde{y} \operatorname{ch} \lambda \tilde{y} - \\ -(1-\nu) \operatorname{sh} \lambda \tilde{y} \\ -f \begin{pmatrix} 2 \operatorname{ch} \lambda \tilde{y} + \\ +(1+\nu)\lambda \tilde{y} \operatorname{sh} \lambda \tilde{y} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right\} + \\ & + [B_2(\lambda) + fB_3(\lambda)] \begin{pmatrix} \operatorname{sh} \lambda \tilde{y} + \\ +\lambda \tilde{y} \operatorname{ch} \lambda \tilde{y} \end{pmatrix} \left\{ \tilde{q}_s(\tilde{\lambda}) \frac{\sin \lambda \tilde{x}}{D^*} \right\} d\lambda, \quad (14) \end{aligned}$$

где

$$B_1(\lambda) = \operatorname{sh} \lambda + \lambda \operatorname{ch} \lambda,$$

$$B_2(\lambda) = (1-\nu) \operatorname{sh} \lambda - (1+\nu) \lambda \operatorname{ch} \lambda,$$

$$B_3(\lambda) = 2 \operatorname{ch} \lambda + (1+\nu) \lambda \operatorname{sh} \lambda,$$

$$D^* = 2(2\lambda + \operatorname{sh} 2\lambda) + f[2(1+\nu)\lambda^2 - (1-\nu)(1 - \operatorname{ch} 2\lambda)].$$

Значение напряжения σ_y при $y=0$ и $f=0$, как следует из формулы, не зависит от коэффициента Пуассона ν .

Рассмотрим вариант, когда к верхней плоскости полосы в сечении $x=0$ приложена сила F , равномерно распределенная вдоль оси перпендикулярной плоскости рисунка.

Трансформанта Фурье от сосредоточенной силы

$$\tilde{q}_s(\tilde{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) F \cos \tilde{\lambda} x dx = \frac{F}{\sqrt{2\pi}}, \quad (15)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Используя (13), (15) и симметрию внешней нагрузки, запишем формулы для определения в произвольной точке полосы напряжений:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_x = & 2s_1 s_2 \int_0^{\infty} \left\{ A_1(s) \begin{pmatrix} s_1^2 \mu_2 \operatorname{ch} s_1 \lambda \tilde{y} - \\ -s_2^2 \mu_1 \operatorname{ch} s_2 \lambda \tilde{y} \\ -f \begin{pmatrix} s_1 \mu_1 \operatorname{sh} s_1 \lambda \tilde{y} - \\ -s_2 \mu_2 \operatorname{sh} s_2 \lambda \tilde{y} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right\} - \\ & - [A_2(s) - fA_3(s)] \left\{ s_1^2 \operatorname{ch} s_1 \lambda \tilde{y} - s_2^2 \operatorname{ch} s_2 \lambda \tilde{y} \right\} \frac{\cos \lambda \tilde{x}}{D} d\lambda, \\ \tilde{\sigma}_y = & -2s_1 s_2 \int_0^{\infty} \left\{ A_1(s) \begin{pmatrix} \mu_2 \operatorname{ch} s_1 \lambda \tilde{y} - \\ -\mu_1 \operatorname{ch} s_2 \lambda \tilde{y} \\ -f \begin{pmatrix} s_2 \mu_1 \operatorname{sh} s_1 \lambda \tilde{y} - \\ -s_1 \mu_2 \operatorname{sh} s_2 \lambda \tilde{y} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right\} - \\ & - [A_2(s) - fA_3(s)] \left\{ \operatorname{ch} s_1 \lambda \tilde{y} - \right\} \frac{\cos \lambda \tilde{x}}{D} d\lambda, \\ \tilde{\tau}_{xy} = & 2s_1 s_2 \int_0^{\infty} \left\{ A_1(s) \begin{pmatrix} s_1 \mu_2 \operatorname{sh} s_1 \lambda \tilde{y} - \\ -s_2 \mu_1 \operatorname{sh} s_2 \lambda \tilde{y} \\ -f \begin{pmatrix} \mu_1 \operatorname{ch} s_1 \lambda \tilde{y} - \\ -\mu_2 \operatorname{ch} s_2 \lambda \tilde{y} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right\} - \\ & - [A_2(s) - fA_3(s)] \left\{ s_1 \operatorname{sh} s_1 \lambda \tilde{y} - s_2 \operatorname{sh} s_2 \lambda \tilde{y} \right\} \frac{\sin \lambda \tilde{x}}{D} d\lambda, \quad (16) \end{aligned}$$

где

$$\tilde{\sigma}_x = \frac{\sigma_x \pi h}{F}, \quad \tilde{\sigma}_y = \frac{\sigma_y \pi h}{F}, \quad \tilde{\tau}_{xy} = \frac{\tau_{xy} \pi h}{F}.$$

Компоненты напряжений для полосы из изотропного материала можно аналогично записать на основе формул (16). Принимая в (16) $f = 0$, получим формулы для определения напряжений в анизотропной полосе, лежащей на жестком основании без трения.

При нагружении полосы силой F , приложенной на расстоянии ξ от начала координат, в формулах (16) необходимо заменить параметр \tilde{x} на $\tilde{x} - \tilde{\xi}$, где $\tilde{\xi} = \xi/h$. Полагая $F = 1$, имеем выражения для определения напряжений от единичной нагрузки, которые можно рассматривать как функции влияния для задачи о равновесии полосы, лежащей на жестком основании, с учетом трения. Используя данные функции, несложно записать формулы для определения напряжений при нагружении верхней плоскости полосы на отрезке определенной длины нормальной симметричной нагрузкой $q(\xi)$. Например, при определении напряжения σ_x от нагрузки, расположенной симметрично относительно оси y и действующей на участке длиной $2a$, имеем

$$\sigma_x = \frac{2s_1 s_2}{\pi h} \int_{-a}^a q(\xi) d\xi \int_0^\infty A_1(s) \left[\begin{array}{c} s_1^2 \mu_2 \operatorname{ch} s_1 \lambda \tilde{y} - \\ -s_2^2 \mu_1 \operatorname{ch} s_2 \lambda \tilde{y} \\ -f \left(s_1 \mu_1 \operatorname{sh} s_1 \lambda \tilde{y} - \right. \\ \left. -s_2 \mu_2 \operatorname{sh} s_2 \lambda \tilde{y} \right) \end{array} \right] - \left[A_2(s) - f A_3(s) \right] \left[\begin{array}{c} s_1^2 \operatorname{ch} s_1 \lambda \tilde{y} - \\ -s_2^2 \operatorname{ch} s_2 \lambda \tilde{y} \end{array} \right] \frac{\cos \lambda (\tilde{x} - \tilde{\xi})}{D} d\lambda. \quad (17)$$

3. Результаты

Для оценки влияния трения и свойств анизотропии материала на характер напряженного состояния рассмотрим пример, когда полоса выполнена из стеклопластика при значениях упругих постоянных $E_1 = 3,59 \cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 2,93 \cdot 10^4$ МПа, $G_{12} = 7,6 \cdot 10^3$ МПа, $\nu_1 = 0,177$, приведенных в [18]. На рис. 2 показаны графики изменения параметра напряжения $\tilde{\sigma}_y$ на границе контакта полосы и основания от силы, приложенной в сечении $\tilde{x} = 0$ к верхней плоскости. Наибольшее значение модуля упругости материала направлено по оси x . Количественное и качественное сопоставление резуль-

татов расчета показано для полосы в условиях плоского напряженного состояния (ширина полосы $b=1$). Сплошной линией обозначена кривая, когда полоса лежит на основании без трения, штрихпунктирной соответствует вариант жесткого сцепления. Штриховой линией показан характер распределения $\tilde{\sigma}_y$ при взаимодействии с трением полосы и основания ($f = 0,5$). Видно, что наибольшее значение $\tilde{\sigma}_y^{\max}$ возникает при отсутствии трения между полосой и основанием.

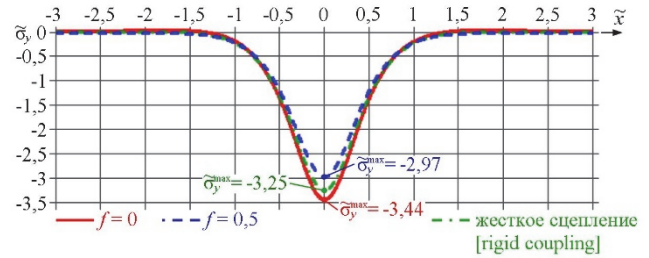


Рис. 2. Изменение параметра $\tilde{\sigma}_y$ при $\tilde{y} = 0$

[Figure 2. The change of the parameter $\tilde{\sigma}_y$ when $\tilde{y} = 0$]

Зависимость параметра $\tilde{\sigma}_y^{\max}$ от значений коэффициента трения при $\tilde{y} = 0$ приведена на рис. 3, а, при $\tilde{y} = 0,5$ на рис. 3, б. Сплошная линия соответствует варианту, когда наибольший модуль упругости анизотропного материала направлен по оси x , штриховая – по оси y . Штрихпунктирная линия иллюстрирует зависимость $\tilde{\sigma}_y^{\max}$ от коэффициента трения для изотропного материала ($\nu = 0,25$). Из анализа кривых на рис. 3, а следует, что с увеличением коэффициента трения значения параметра $\tilde{\sigma}_y^{\max}$ уменьшаются. Рис. 3, б показывает, что при $\tilde{y} = 0,5$ влияние коэффициента трения на величину параметра $\tilde{\sigma}_y^{\max}$ незначительно.

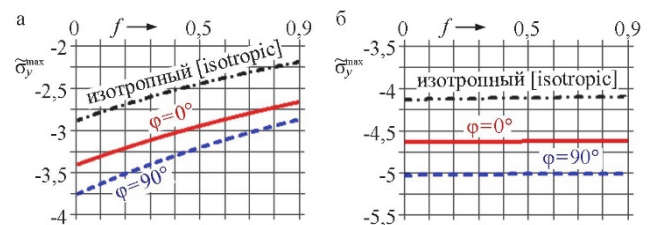


Рис. 3. Зависимость параметра $\tilde{\sigma}_y^{\max}$ от коэффициента трения f : а – при $\tilde{y} = 0$; б – при $\tilde{y} = 0,5$

[Figure 3. Dependence of the parameter $\tilde{\sigma}_y^{\max}$ on the coefficient of friction f :

а – when $\tilde{y} = 0$; б – when $\tilde{y} = 0,5$]

На рис. 4 представлены графики зависимости параметра $\tilde{\sigma}_y^{\max}$ от коэффициента трения и направления осей анизотропии. При проведении расчетов коэффициенты деформации, используя формулы преобразования упругих постоянных при повороте осей анизотропии на некоторый угол φ_k [18], выражены через технические постоянные E_1, E_2, G_{12}, ν_1 . На рис. 4, а показаны графики изменения $\tilde{\sigma}_y^{\max}$ при $\tilde{y} = 0$, на рис. 4, б при $\tilde{y} = 0,5$. Обозначения кривых соответствуют рис. 2. Из анализа графиков следует, что наименьшие значения $\tilde{\sigma}_y^{\max}$ возникают при расположении осей анизотропии под углом 45° к координатным осям.

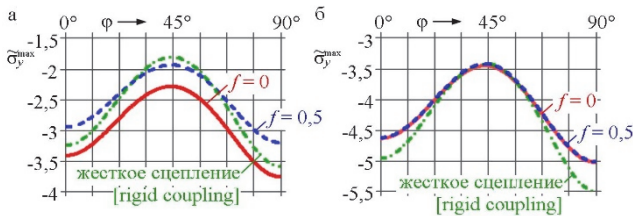


Рис. 4. Зависимость параметра $\tilde{\sigma}_y^{\max}$ от направления осей анизотропии: а – при $\tilde{y} = 0$; б – при $\tilde{y} = 0,5$

[Figure 4. Dependence of the parameter $\tilde{\sigma}_y^{\max}$ from the direction of the anisotropy axes: а – when $\tilde{y} = 0$; б – when $\tilde{y} = 0,5$]

Графики изменения параметра касательного напряжения $\tilde{\tau}_{xy}$, когда наибольшее значение модуля упругости материала направлено по оси x , построены на рис. 5 и 6. Кривые соответствуют обозначениям на рис. 2. Распределение параметра $\tilde{\tau}_{xy}$ по высоте полосы в зависимости от коэффициента трения и параметра \tilde{x} представлено на рис. 5. Из сопоставления кривых видно, что отличие в значениях и характере распределения $\tilde{\tau}_{xy}$ наблюдается в области, примыкающей к зоне контакта полосы и основания. На линии контакта наибольшее значение $\tilde{\tau}_{xy}$ возникает при учете трения между полосой и основанием.

Распределение параметра $\tilde{\tau}_{xy}$ по длине полосы при $\tilde{y} = 0,1$ показано на рис. 6. Сравнение кривых показывает, что при учете трения максимальное значение $\tilde{\tau}_{xy}$ смещается от линии действия силы на большее расстояние, чем без учета трения или при жестком сцеплении контактирующих тел.

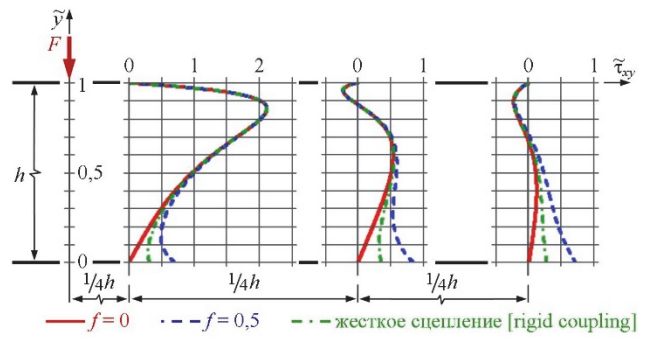


Рис. 5. Изменение параметра $\tilde{\tau}_{xy}$ по высоте полосы
[Figure 5. The change of the parameter $\tilde{\tau}_{xy}$ for the height of the strip]

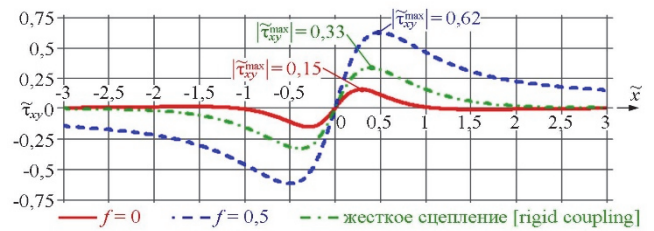


Рис. 6. Изменение параметра $\tilde{\tau}_{xy}$ при $\tilde{y} = 0,1$
[Figure 6. The change of the parameter $\tilde{\tau}_{xy}$ when $\tilde{y} = 0,1$]

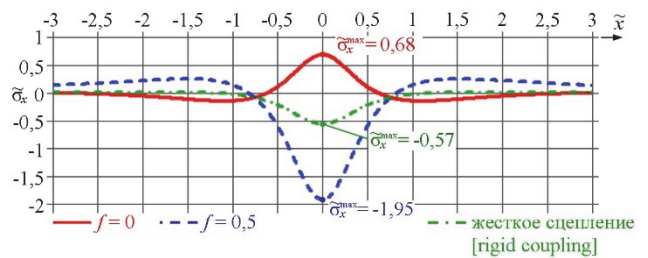


Рис. 7. Изменение параметра $\tilde{\sigma}_x$ при $\tilde{y} = 0$
[Figure 7. The change of the parameter $\tilde{\sigma}_x$ when $\tilde{y} = 0$]

Характер распределения параметра напряжения $\tilde{\sigma}_x$ по длине полосы при $\tilde{y} = 0$ представлен на рис. 7. Интеграл для вычисления параметра $\tilde{\sigma}_x$ – расходящийся. При проведении расчетов использован прием, предложенный в работах [4] и [19]. Анализ кривых, обозначения соответствуют рис. 2, показывает, что качественная картина изменения параметра $\tilde{\sigma}_x$ и количественные значения зависят от условий сцепления между полосой и жестким основанием.

Заключение

Получены расчетные формулы для оценки напряженного и деформированного состояния в анизотропной полосе при взаимодействии с жестким основанием и разных вариантах сцепления между

контактирующими телами. Из приведенных формул, как частный случай, следуют решения задач о взаимодействии полосы из изотропного материала с жестким основанием с учетом и без учета трения. Численные расчеты проведены для варианта нагружения верхней плоскости полосы сосредоточенной силой. Показано, что максимальные нормальные напряжения, действующие в направлении перпендикулярном границе основания, при данных физических характеристиках материала с увеличением значения коэффициента трения уменьшаются. При учете трения наибольшее отличие в характере изменения и значениях напряжений наблюдается в области, примыкающей к зоне контакта полосы и основания.

Список литературы

1. Шехтер О.Я. Расчет бесконечной фундаментальной плиты, лежащей на упругом основании конечной и бесконечной мощности и нагруженной сосредоточенной силой // Сборник трудов научно-исследовательского сектора треста глубинных работ. 1939. С. 133–139.
2. Раннопорт Р.М. Задача Буссинеска для слоистого упругого полупространства // Труды Ленинградского политехнического института. 1948. № 5. С. 3–18.
3. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит-ры, 1960. 492 с.
4. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М. – Л.: Изд-во АН СССР, 1963. 368 с.
5. Харр М.Е. Основы теоретической механики грунтов. М.: Стройиздат, 1971. 320 с.
6. Смирнов А.В., Малышев А.А., Агалаков Ю.А. Механика устойчивости и разрушений дорожных конструкций. Омск: СибАДИ, 1997. 91 с.
7. Потележко В.П. Задача Фламана для двухслойной полуплоскости // Механика и физика процессов на поверхности и в контакте твердых тел, деталей технологического и энергетического оборудования. 2005. № 1. С. 29–33.
8. Торская Е.В., Лушников Н.А., Лушников П.А. Анализ напряженно-деформированного состояния многослойных дорожных одежд // Трение и износ. 2008. Т. 29. № 2. С. 204–210.
9. Tarntira K., Senjuntichai T., Keawsawasvong S. Multilayered Elastic Medium under Axisymmetric Loading and Surface Energy // Advanced Materials and Engineering Materials VIII. 2019. Vol. 814. Pp. 320–326.
10. Лехницкий С.Г. К задаче об упругом равновесии анизотропной полосы // Прикладная механика и математика. 1963. Вып. 1. С. 142–149.
11. Pan E. Static response of transversely isotropic and layered half-space to general surface loads // Phys. Earth Planet Inter. 1989. Vol. 54. Pp. 353–363.
12. Кудрявцев С.Г., Булдакова Ю.М. Решение плоской задачи теории упругости для ортотропной полосы // Инновации в образовательном процессе: сборник трудов научно-практической конференции. 2010. Вып. 8. С. 118–123.
13. Крутодерев А.В. Фундаментальные решения для многослойных transversально изотропных оснований // Известия ТулГУ. Науки о Земле. 2011. № 1. С. 137–146.
14. Кудрявцев С.Г., Булдакова Ю.М. Взаимодействие анизотропной полосы и жесткого основания // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 4. С. 29–35.
15. Fabrikant V.I. Tangential contact problems for several transversely isotropic elastic layers bonded to an elastic foundation // Journal of Engineering Mathematics. 2013. Vol. 81. Issue 1. Pp. 93–126.
16. Liu J., Zhang P., Lin G., Li C., Lu S. Elastostatic solutions of a multilayered transversely isotropic piezoelectric system under axisymmetric loading // Acta Mechanica. 2017. Vol. 228. Issue 1. Pp. 107–128.
17. Кулагина М.Ф., Иванова В.И. Первая основная задача теории упругости для области, состоящей из полосы и полуплоскости // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2003. № 19. С. 89–96.
18. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
19. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

RESEARCH PAPER

Effect of friction in the interaction of an anisotropic strip with a rigid base

Sergey G. Kudryavtsev*, Julia M. Buldakova

Volga State University of Technology, 3 Lenina Sq, Yoshkar-Ola, 424000, Mari El Republic, Russian Federation

*KudryavtsevSG@volgatech.net

Article history:

Received: January 16, 2020

Revised: February 28, 2020

Accepted: March 12, 2020

Abstract

Relevance. Different models of contact between bodies are used in determining the stressed and deformed state in the strip lying on the base. It is necessary to evaluate the qualitative and quantitative nature of the change in stress in the strip depen-

Sergey G. Kudryavtsev, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Resistance of Materials and Applied Mechanics; eLIBRARY SPIN-code: 9756-6211.

Julia M. Buldakova, senior lecturer of the Department of Resistance of Materials and Applied Mechanics; eLIBRARY SPIN-code: 5677-6126.

For citation

Kudryavtsev S.G., Buldakova J.M. Effect of friction in the interaction of an anisotropic strip with a rigid base. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(2):122–130. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-2-122-130>. (In Russ.)

ding on the coupling of the strip and base. **The aim of the work** – to analyze the effect of the coefficient of friction on the value of stresses in an anisotropic band when interacting with a rigid base. **Methods.** The solution is based on the equations of the plane problem of the theory of elasticity of an anisotropic body under the conditions that the band is closely adjacent to the base and the tangent force on the contact plane is proportional to the normal pressure. Displacements and stresses at any point of the strip are written in the form of the method of initial functions through the functions of displacements and forces on the lower plane, which depend on the nature of the load applied on the upper plane and the conditions of contact between the strip and the base. After the transformations, the calculation formulas for displacements and stresses are expressed using the Fourier integral transform through the normal surface load in the form of improper integrals. **Results.** Formulas for determining displacements and stresses are obtained for the variant of loading a strip with a concentrated force. These formulas are used to construct influence functions for the problem of equilibrium of an anisotropic strip lying on a rigid base, taking into account friction. Graphs of the effect of the coefficient of friction and the direction of the anisotropy axes of the material on the stress state of the strip are presented. The results of stress calculation are compared using anisotropic and isotropic models.

Keywords: displacement, stress, elasticity, anisotropy, strip, friction

References

1. Shehter O.Y. Raschet beskonechnoi fundamentalnoi pliti, lejaschei na uprugom osnovanii konechnoi i beskonechnoi moschnosti i nagrujennoi sosredotochennoi siloi [Calculation of an infinite fundamental plate lying on an elastic base of finite and infinite power and loaded with a concentrated force]. *Sbornik trudov nauchno-issledovatel'skogo sektora tresta glubinnih rabot*. 1939:133–139. (In Russ.)
2. Rappoport R.M. Zadacha Bussineska dlya sloistogo uprugogo poluprostranstva [The Boussinesq problem for a layered elastic half-space]. *Trudi Leningradskogo politehnicheskogo instituta*. 1948;(5):3–18. (In Russ.)
3. Vlasov V.Z., Leontev N.N. *Balki, pliti i obolochki na uprugom osnovanii [Beams, plates and shells on elastic base]*. Moscow, Gos. izd. fiz.-mat. lit-ry Publ.; 1960. (In Russ.)
4. Uflyand Ya.S. *Integralnie preobrazovaniya v zadachah teorii uprugosti [Integrated transformations in tasks of the theory of elasticity]*. Moscow, Leningrad, Izd-vo AN SSSR Publ.; 1963. (In Russ.)
5. Harr M.E. *Osnovy teoreticheskoi mekhaniki gruntov [Foundations of theoretical soil mechanics]*. Moscow, Stroizdat Publ.; 1971. (In Russ.)
6. Smirnov A.V., Malyshev A.A., Agalakov Yu.A. *Mekhanika ustoychivosti i razrusheniya dorozhnykh konstruktsii [Mechanics of stability and destruction of road structures]*. Omsk, SibADI Publ.; 1997. (In Russ.)
7. Potelezhko V.P. Zadacha Flamana dlya dvusloinnoi poluploskosti [The Flaman problem for a two-layer half-plane]. *Mechanics and Physics of Processes on the Surface and in the Contact of Solids, Parts of Technological and Power Equipment*. 2005;(1):29–33. (In Russ.)
8. Torskaya E.V., Lushnikov N.A., Lushnikov P.A. Analysis of stress-strain state of multi-layer pavements. *Journal of Friction and Wear*. 2008;29(2):204–210. (In Russ.)
9. Tarntira K., Senjuntichai T., Keawsawasvong S. Multilayered Elastic Medium under Axisymmetric Loading and Surface Energy. *Advanced Materials and Engineering Materials VIII*. 2019;(814):320–326.
10. Lehnickii S.G. K zadache ob uprugom ravnovesii anizotropnoi polosi [On the problem of elastic equilibrium of an anisotropic band]. *Prikladnaya mehanika i matematika*. 1963;(1):142–149. (In Russ.)
11. Pan E. Static response of transversely isotropic and layered half-space to general surface loads. *Phys. Earth Planet Inter*. 1989;(54):353–363.
12. Kudryavtsev S.G., Buldakova J.M. Solution of the plane problem of elasticity theory for an orthotropic stripe. *The scientific and practical conference: Innovations in the educational process*. 2010;(8):118–123. (In Russ.)
13. Krupoderov A.V. Fundamental solutions for transversely isotropic multilayered. *News of the Tula State University. Sciences of Earth*. 2011;(1):137–146. (In Russ.)
14. Kudryavtsev S.G., Buldakova J.M. Interaction of anisotropic band and rigid base. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2012;(4):29–35. (In Russ.)
15. Fabrikant V.I. Tangential contact problems for several transversely isotropic elastic layers bonded to an elastic foundation. *Journal of Engineering Mathematics*. 2013; 81(1):93–126.
16. Liu J., Zhang P., Lin G., Li C., Lu S. Elastostatic solutions of a multilayered transversely isotropic piezoelectric system under axisymmetric loading. *Acta Mechanica*. 2017;228(1):107–128.
17. Kulagina M.F., Ivanova V.I. Pervaya osnovnaya zadacha teorii uprugosti dlya oblasti sostoyaschei iz polosi i poluploskosti [The first major problem of elasticity theory for a region consisting of band and half-plane]. *Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2003;(19):89–96. (In Russ.)
18. Lehnickii S.G. *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela [Theory of elasticity of an anisotropic body]*. Moscow, Nauka Publ.; 1977. (In Russ.)
19. Nowacki W. *Teoriya uprugosti [Theory of elasticity]*. Moscow, Mir Publ.; 1975. (In Russ.)