

ДИНАМИКА КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ DYNAMICS OF STRUCTURES AND BUILDINGS

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-1-62-75
УДК 624.04:534.11

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Новые операционные соотношения и их применение к решению нестационарных задач для стержней на основе теории С.П. Тимошенко

А.Л. Зоненберг

АО «ЦНИИЭП жилища – Институт комплексного проектирования жилых и общественных зданий», Российская Федерация, 127434, Москва, Дмитровское шоссе, д. 9, стр. 3
*zonenberg@list.ru

История статьи:

Поступила в редакцию: 16 ноября 2019 г.

Доработана: 24 января 2020 г.

Принята к публикации: 28 января 2020 г.

Аннотация

Актуальность. Для исследования переходных волновых процессов деформации в стержнях на основе теории С.П. Тимошенко необходимо иметь точные аналитические решения нестационарных задач в общем виде. Каждое точное решение в рамках данной аналитической модели является точным описанием реального процесса и служит критерием при оценке точности приближенных решений. При использовании операционного исчисления для анализа бегущих волн наибольшие трудности представляет именно этап перехода от изображения к начальной функции (оригиналу). Из опубликованных работ следует, что имеющиеся решения некоторых частных задач либо имеют структуру, которая не позволяет судить об основных чертах исследуемого процесса, либо их эффективность при вычислениях достигается только в некоторых довольно ограниченных областях значений координаты и времени. Эта проблема, требующая решения, определила цель настоящей статьи. **Цель.** Статья посвящена разработке новых операционных соотношений и их применению к построению точных аналитических решений нестационарных задач теории С.П. Тимошенко для стержней в общем виде в физически наглядной и удобной для практических расчетов форме. **Методы.** В работе использованы методы теории функций комплексного переменного, операционное исчисление на основе интегрального преобразования Лапласа – Карсона, методы динамики сооружений. **Результаты.** В общем виде сформулированы три типа нестационарных задач для полубесконечного стержня на основе теории Тимошенко. Получены новые операционные соотношения. На основе этих соотношений разработан способ нахождения оригиналов без использования общей формулы обращения. Решения задач записываются в виде интегралов от бесселевых функций и в отличие от решений, имеющихся в литературе, ясно показывают волновой характер изучаемых процессов, имеют наглядный и компактный вид. В статье рассмотрен пример расчета.

Ключевые слова: переходные волновые процессы; теория С.П. Тимошенко; стержни; бегущие волны; операционное соотношение; интегральное преобразование Лапласа – Карсона; бесселевы функции

Для цитирования

Зоненберг А.Л. Новые операционные соотношения и их применение к решению нестационарных задач для стержней на основе теории С.П. Тимошенко // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 1. С. 62–75. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-62-75>

Введение

Одной из задач динамики сооружений является разработка принципов и методов расчета сооруже-

ний при действии на конструкцию сил, приложенных лишь на короткий промежуток времени или быстро изменяющихся. Это явление надо рассматривать с точки зрения распространения волн напряжения [1]. Проблема распространения волн приводит к отысканию решения нестационарной задачи теории волн.

В случае поперечных колебаний стержней при указанных воздействиях классическая теория Бер-

Зоненберг Александр Леонидович, главный специалист-инженер, отдел конструкций жилых и общественных зданий; ORCID iD: 0000-0003-2773-3047.

© Зоненберг А.Л., 2019



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

нулли – Эйлера во многих отношениях становится непригодной. Классическое уравнение относится к параболическому типу, что физически означает бесконечную скорость распространения возмущения.

Теория С.П. Тимошенко [2], учитывающая в отличие от классической теории также инерцию вращения поперечных сечений стержня и деформацию сдвига, дает результаты, очень близкие к точным результатам, вытекающим из теории упругости. Уравнение Тимошенко является вполне гиперболическим и описывает распространение двух слабых разрывов (изгибного и сдвигового) с конечными скоростями.

Для исследования переходных волновых процессов деформации в стержнях на основе теории Тимошенко необходимо иметь точные аналитические решения нестационарных задач в общем виде.

Каждое точное аналитическое решение имеет большую значимость, так как в рамках данной аналитической модели является точным описанием реального процесса, служит критерием при оценке точности приближенных решений, позволяет отлаживать и верифицировать программы, в которых реализованы численные методы, является фундаментальным теоретическим фактом.

Наиболее ясное представление о физической сущности нестационарных задач обычно дают решения в бегущих волнах. В общем виде такие решения отсутствуют.

При использовании интегрального преобразования Лапласа по времени для построения решения в виде бегущих волн наибольшие трудности представляет именно этап перехода от изображения к начальной функции (оригиналу).

Анализ работ по теории Тимошенко, в том числе упомянутых в обзоре [3] и современных [4–8], показал, что имеющиеся решения в бегущих волнах некоторых частных задач либо очень громоздки и имеют структуру, которая неясно выражает наиболее существенные черты описываемого процесса, либо их эффективность при вычислениях достигается только в некоторых довольно ограниченных областях значений координаты и времени. Формы представления этих решений не удовлетворяют, например, общим условиям, упомянутым в работе [9], для форм, в которых желательнее всего представить решение.

Исключениями являются исследования [10–12], в которых рассмотрены лишь частные задачи.

Таким образом, построение в общем виде точных аналитических решений нестационарных задач теории С.П. Тимошенко для стержней в физически наглядной и удобной для практических расчетов форме является актуальной проблемой.

В данной работе в общем виде сформулированы три типа нестационарных задач для полубесконечного стержня и описан метод получения указанных решений. Рассматриваются однородные призматические стержни. Решения строятся в виде бегущих волн методами операционного исчисления на основе интегрального преобразования Лапласа – Карсона по времени. Выводятся новые операционные соотношения, на основе которых показан способ нахождения оригиналов в наглядном и компактном виде, без использования общей формулы обращения.

1. Постановка задач и изображение их решений

Для постановки исследуемых задач принимаем следующие условные обозначения: Ox, Oy, Oz – оси прямоугольной системы координат (x – координата вдоль оси стержня); t – время; A_b – площадь поперечного сечения стержня; J_b – момент инерции поперечного сечения относительно оси, проходящей через центр тяжести и параллельной оси Oy ; k' – коэффициент сдвига; ρ – объемная плотность; E – модуль Юнга; G – модуль сдвига; q – интенсивность внешней поперечной нагрузки; w – поперечное перемещение центра тяжести сечения стержня от положения его статического равновесия; ψ – угол поворота поперечного сечения, обусловленный изгибом, относительно нейтральной оси; M – изгибающий момент; Q – поперечная сила.

Уравнения Тимошенко имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} EJ_b \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k'A_b G \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) - \rho J_b \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= 0 \\ -k'A_b G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \rho A_b \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= q \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

В качестве основы для определения и исследования изображений решений нестационарных задач теории Тимошенко могут служить соотношения, полученные при решении в пространстве изображений нестационарной задачи для бесконечного стержня ($-\infty < x < \infty$) при нулевых начальных условиях, находящегося под действием поперечной сосредоточенной импульсной нагрузки, приложенной в момент времени $t = 0$ ($q(x,t) = R\delta_1(x)\delta_1(t)$, где $R = \text{const}$, δ_1 – единичная импульсивная функция). Точку приложения силы примем за начало координат. Вследствие симметрии рассмотрим только часть стержня, расположенную правой точки приложения нагрузки.

Таким образом, математическая формулировка этой задачи следующая: найти решение системы

уравнений (1) ($q(x, t) = 0$) при $0 < x < \infty, t > 0$, удовлетворяющее граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} \psi(0, t) = 0 \\ Q(0, t) = -\frac{R}{2} \delta_1(t) \end{aligned} \right\} (t > 0) \quad (2)$$

и начальным условиям

$$\left. \begin{aligned} w(x, 0) = 0, \psi(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = 0, \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{aligned} \right\} (0 < x < \infty). \quad (3)$$

Ищем решение, обращающееся вместе со своими производными по x в нуль при $x \rightarrow \infty$.

Аналогично рассматриваются три типа нестационарных задач для полубесконечного стержня ($0 \leq x < \infty$) при нулевых начальных условиях и следующих условиях закрепления конца $x = 0$ и внешних нестационарных воздействиях, приложенных к концу $x = 0$:

– задача I_0 – конец $x = 0$ свободно оперт, опора смещается по закону $w_0(t)$, на конце $x = 0$ приложен изгибающий момент $M_0(t)$;

– задача II_0 – конец $x = 0$ защемлен, опора смещается по закону $w_0(t)$ и поворачивается по закону $\psi_0(t)$;

– задача III_0 – на свободном конце $x = 0$ приложены изгибающий момент $M_0(t)$ и поперечная сила $Q_0(t)$.

Здесь $w_0(t), \psi_0(t), M_0(t), Q_0(t)$ – заданные функции времени t , причем исходя из физического смысла будем считать функции $w_0(t)$ и $\psi_0(t)$ непрерывными при $t \geq 0$ и равными нулю при $t = 0$.

Математическая формулировка этих задач аналогична формулировке задачи, приведенной выше.

Пусть $F(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt \Rightarrow f(t)$ представляет

изображение начальной функции (оригинала) $f(t)$, где $p = s + i\omega$ – комплексная переменная (параметр интегрального преобразования Лапласа – Карсона).

К сожалению, объем статьи не позволяет привести здесь все изображения решений сформулированных задач. Но, чтобы получить представление о структуре изображений в этих задачах, рассмотрим, например, изображение функции $\psi(x, t)$ в задаче II_0 при $\psi_0(t) = 0$. Оно записано так, чтобы выделить указанные ниже представители изображений двух типов:

$$\Psi(x, p) = C \frac{1}{p} W_0(p) p \times \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{p}{c_2^2 + r_1 r_2} \left[\frac{p}{r_2^2 - r_1^2} \left(\left(\frac{p^2}{c_2^2} - r_1^2 \right) \frac{e^{-r_1 x}}{r_1} - \left(\frac{p^2}{c_2^2} - r_2^2 \right) \frac{e^{-r_2 x}}{r_2} \right) \right] \right] - \\ & \left[\frac{p^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(\frac{e^{-r_1 x}}{r_1} - \frac{e^{-r_2 x}}{r_2} \right) \right] \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

Здесь $r_{1,2}(p)$ – непрерывные однозначные ветви многозначной функции

$$r(p) = A_1 \sqrt{p^2 + A_2} \sqrt{p^2 - A_3^2}, \quad (5)$$

выделенные на плоскости p с разрезами $-A_3 \leq \text{Re } p \leq A_3, -\lambda \leq \text{Im } p \leq \lambda$ и на плоскости p с разрезом $-A_3 \leq \text{Re } p \leq A_3$ соответственно (рис. 1).

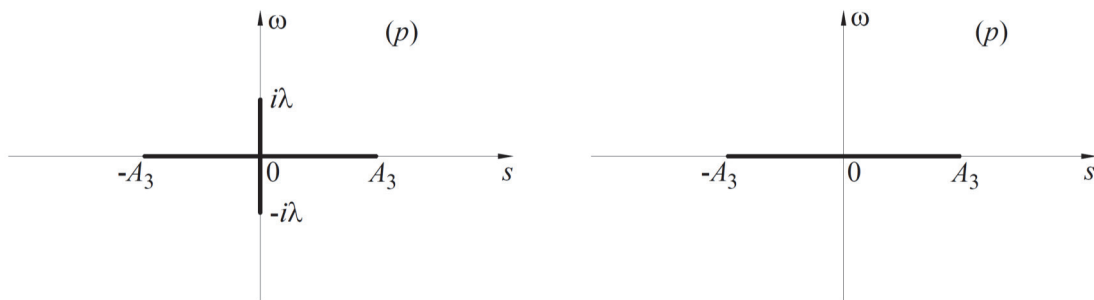


Рис. 1. Области, в которых выделены однозначные ветви $r_1(p), r_2(p)$
 [Figure 1. Define of single-valued functions $r_1(p), r_2(p)$ on the complex plane]

Приведем выражения для постоянных, используемых здесь и далее:

$$c_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{k'G}{\rho}}, \quad C = \frac{\rho A_b}{E J_b}, \quad \nu = \frac{c_1}{c_2},$$

$$A_1 = \frac{1}{c_1 c_2} \sqrt{\frac{c_1^2 + c_2^2}{2}}, \quad A_2 = \frac{c_1^2 - c_2^2}{c_1^2 + c_2^2}, \quad A_3 = \frac{2\sqrt{C}}{\frac{1}{c_2^2} - \frac{1}{c_1^2}},$$

$$A_4 = \frac{1}{2} A_3 (\nu - 1), \quad \lambda = c_1 c_2 \sqrt{C}. \quad (6)$$

Ветви r_1 и r_2 удовлетворяют на действительной оси следующим асимптотическим формулам:

$$r_1(p) \sim A_1 \sqrt{1 - A_2 p} = \frac{p}{c_1},$$

$$r_2(p) \sim A_1 \sqrt{1 + A_2 p} = \frac{p}{c_2} \quad (\operatorname{Re} p \rightarrow \infty, \operatorname{Im} p = 0).$$

В этом случае $\operatorname{Re}(r_1(p)) > 0$ и $\operatorname{Re}(r_2(p)) > 0$ при $\operatorname{Re} p > A_3$.

Изображения искоемых функций содержат два типа функций. В настоящей статье будут рассмотрены основные представители этих типов:

– изображения 1-го типа:

$$\frac{p^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(\frac{p}{c_2^2} - \frac{r_1^2}{p} \right)^n \frac{e^{-r_1 x}}{r_1} \Rightarrow \Phi_n^{(1)}(x, t),$$

$$\frac{p^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(\frac{p}{c_2^2} - \frac{r_2^2}{p} \right)^n \frac{e^{-r_2 x}}{r_2} \Rightarrow \Phi_n^{(2)}(x, t),$$

где $n = 0, 1$;

2) изображение 2-го типа:

$$\frac{p}{\frac{p^2}{c_2^2} + r_1 r_2} \Rightarrow \kappa(t).$$

Изображения 1-го типа не содержат произведения $r_1 r_2$, то есть не содержат радикал $\sqrt{p^2 + \lambda^2}$, и характеризуются наличием радикала $\sqrt{p^2 - A_3^2}$. Изображения 2-го типа содержат произведения $r_1 r_2$, то есть радикал $\sqrt{p^2 + \lambda^2}$, и не содержат радикал $\sqrt{p^2 - A_3^2}$. Отметим, что из рассмотренных задач изображения 2-го типа имеют место только в задачах Π_0 и Π_0 .

2. Проблема определения начальных функций. Вывод новых операционных соотношений

В практической реализации метода интегральных преобразований наиболее трудным этапом обычно является построение начальной функции (оригинала) по полученному изображению. Для этой цели можно было бы воспользоваться сразу формулой обращения Римана – Меллина [13]:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{pt} \frac{F(p)}{p} dp,$$

где $F(p)$ – изображение начальной функции $f(t)$, L – контур Римана – Меллина в плоскости p , лежащий справа от всех особых точек функции $F(p)/p$.

Однако очевидно, что такого способа определения оригинала следует по возможности избегать и вместо этого пытаться применить теоремы операционного исчисления [13], с помощью которых полученные изображения сводятся к имеющимся в справочниках по операционному исчислению (например, [14]).

Перечислим следующие основные способы определения оригиналов, рассматриваемые в литературе [9; 15; 16]:

1) использование операционных теорем и табличных соотношений;

2) непосредственное использование формулы обращения;

3) представление изображения в виде ряда, допускающего достаточно простой почленный переход от изображения к оригиналу;

4) асимптотические разложения;

5) численное обращение.

Каждый из перечисленных методов обладает достоинствами и недостатками. При этом, как было отмечено во введении, важно, чтобы формы представления оригиналов удовлетворяли некоторым условиям [9]. Это – обозримость результата, позволяющая судить об основных чертах исследуемого процесса, и возможность вычисления значений оригинала с заданной точностью.

Итак, возвратимся к рассматриваемым задачам. В данной статье применяется первый способ.

Следует отметить, что полученные изображения имеют весьма сложную структуру из-за сложности выражения (5). Видимо, поэтому в известных нам работах, в которых уравнения Тимошенко решались с помощью преобразования Лапласа по t (см. введение), не был использован первый способ. Исключениями являются работы [10–12], в которых рассмотрены лишь частные задачи.

Однако нам удалось в общем случае пойти по этому пути – пути построения оригиналов с помощью операционных теорем и соотношений. Но для этого выводятся новые, не имеющиеся в литературе по операционному исчислению, операционные соотношения.

Одно из этих соотношений (назовем его основным) дает выражение начальной функции для изображения следующего вида:

$$\frac{p}{\sqrt{p^2 - \alpha^2}} \frac{F(a_1 p + a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2})}{(p + \sqrt{p^2 - \alpha^2})^m (a_1 p + a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2})}, \quad (7)$$

где $F(p) \Rightarrow f(t)$ – некоторое известное (табличное) соотношение; $a_1 + a_2 \geq 0$ (a_1 и a_2 не равны нулю одновременно); α, m – комплексные числа, $\operatorname{Re} m > -1$.

Таким образом, таблица операционных соотношений [14] будет дополнена новыми соотношениями.

Оригиналы для всех изображений, полученных при решении рассматриваемых задач, можно найти с помощью этой расширенной таблицы и некоторых теорем операционного исчисления. Как будет показано далее, при таком способе нахождения оригиналов решения поставленных задач, полученные в явной аналитической форме, представляются в виде интегралов, но имеют ясно выраженный волновой характер и компактный вид.

Очень важно также, что и для стержней конечной длины с помощью перечисленных средств можно получить в явной аналитической форме оригиналы для изображений прямых и отраженных волн.

Отметим, что при построении оригиналов рассматриваемым способом ограничиться чисто операционными методами не удастся. Связано это с тем, что, хотя операционное решение более коротко, более просто, в нем явно не выражается наличие условий, достаточных для законности той или иной операции. Поэтому в сложных случаях (например, при наличии многозначных функций, как в нашем случае) для того, чтобы аналитический смысл каждой операции был совершенно ясен, подробно исследовано поведение изображений в комплексной плоскости.

Основное операционное соотношение найдем, применяя преобразование А.М. Эфроса (обобщенную теорему Бореля) [17]. Укажем здесь два варианта вывода этого соотношения.

1. Непосредственно используем преобразование Эфроса при

$$\begin{cases} a_1 + a_2 \geq 0, \\ a_2 > 0. \end{cases}$$

Приводим окончательные результаты.
При

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0, \\ a_2 > 0 \end{cases}$$

получим

$$\begin{aligned} & -\frac{\alpha^{m-2} p}{\sqrt{p^2 - \alpha^2}} \frac{1}{\left(p + \sqrt{p^2 - \alpha^2}\right)^{m-1}} F\left[a_2 \left(\sqrt{p^2 - \alpha^2} - p\right)\right] \Rightarrow \\ & \Rightarrow t^{\frac{m}{2}} \int_0^{\infty} (t + 2\tau)^{-\frac{m}{2}} I_m\left[\alpha \sqrt{t(t + 2\tau)}\right] f\left(\frac{\tau}{a_2}\right) d\tau, \\ & a_2 > 0, \quad \operatorname{Re} m > -1. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь I_m – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка m [18].

При $a_2 = 1$ мы получаем имеющийся в литературе по операционному исчислению (например, в [14]) частный случай преобразования Эфроса.

При

$$\begin{cases} a_1 + a_2 > 0, \\ a_2 > 0, \end{cases}$$

обозначив

$$a = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}, \quad (9)$$

получим

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_2) \frac{\alpha^m p}{\sqrt{p^2 - \alpha^2}} \frac{1}{\left(p + \sqrt{p^2 - \alpha^2}\right)^m} \frac{F\left(a_1 p + a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2}\right)}{a_1 p + a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2}} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \int_0^t \left(\frac{t - \tau}{t - a\tau}\right)^{\frac{m}{2}} I_m\left[\alpha \sqrt{(t - \tau)(t - a\tau)}\right] f\left(\frac{\tau}{a_1 + a_2}\right) d\tau, \\ & \operatorname{Re} m > -1, \end{aligned} \quad (10)$$

где a_1 и a_2 удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a_1 + a_2 > 0, \\ a_2 > 0. \end{cases}$$

2. Другой вариант вывода искомого операционного соотношения основан на использовании известных из литературы частных случаев преобразования Эфроса. При этом принимаем, что $-a_1 \leq a_2 < a_1$.

Тем самым будет рассмотрен также случай $-a_1 \leq a_2 \leq 0$ (a_1 и a_2 не равны нулю одновременно), не охваченный в первом варианте вывода.

Данный вариант вывода искомого операционного соотношения рассмотрим подробно.

Допустим сначала, что $-a_1 < a_2 < a_1$. Изображение в левой части соотношения (10) можно представить как результат следующей цепочки преобразований:

$$\begin{aligned} F(p) & \rightarrow F\left(\frac{a_1 - a_2}{2} p\right) \rightarrow \frac{F\left[\frac{a_1 - a_2}{2} \left(p + \frac{\alpha^2}{a} \frac{1}{p}\right)\right]}{p + \frac{\alpha^2}{a} \frac{1}{p}} \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{2\alpha}{a} \frac{\alpha^{m-1} p}{\sqrt{p^2 - \alpha^2}} \frac{1}{\left(p + \sqrt{p^2 - \alpha^2}\right)^m} \times \\ & \times \frac{F\left\{\frac{a_1 - a_2}{2} \left[\left(p - \sqrt{p^2 - \alpha^2}\right) + \frac{\frac{\alpha^2}{a}}{p - \sqrt{p^2 - \alpha^2}}\right]\right\}}{\left(p - \sqrt{p^2 - \alpha^2}\right) + \frac{\frac{\alpha^2}{a}}{p - \sqrt{p^2 - \alpha^2}}} = \end{aligned}$$

$$= (a_1 + a_2) \frac{\alpha^m p}{\sqrt{p^2 - \alpha^2}} \frac{1}{\left(p + \sqrt{p^2 - \alpha^2}\right)^m} \frac{F\left(a_1 p + a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2}\right)}{a_1 p + a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2}}.$$

Для получения соответствующей каждому этапу преобразования начальной функции используем известные из литературы следующие частные случаи преобразования Эфроса [14]:

если

$$F(p) \Rightarrow f(t),$$

то

$$F_1(p) \rightarrow F\left(\frac{a_1 - a_2}{2} p\right) \rightarrow f\left(\frac{2}{a_1 - a_2} t\right) = f_1(t), \quad (11)$$

$$F_2(p) = \frac{F_1\left(p + \frac{\alpha^2}{a} \frac{1}{p}\right)}{p + \frac{\alpha^2}{a} \frac{1}{p}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_2(t) = \int_0^t J_0\left[2\alpha\sqrt{\frac{1}{a}\tau_1(t - \tau_1)}\right] f_1(\tau_1) d\tau_1, \quad (12)$$

где J_0 – бесселева функция первого рода нулевого порядка,

$$F_3(p) = \alpha^{m-1} \frac{p}{\sqrt{p^2 - \alpha^2}} \frac{1}{\left(p + \sqrt{p^2 - \alpha^2}\right)^m} F_2\left(p - \sqrt{p^2 - \alpha^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_3(t) = t^{-\frac{m+1}{2}} \int_0^{t-2\tau} (t-2\tau)^{-\frac{m+1}{2}} I_{m+1}\left[\alpha\sqrt{t(t-2\tau)}\right] f_2(\tau) d\tau,$$

$$\operatorname{Re} m > -2. \quad (13)$$

Следовательно, для получения искомого оригинала надо найти функцию $\frac{2\alpha}{a} f_3(t)$.

При $-a_1 = a_2 < a_1$ получим соотношение

$$\frac{\alpha^{m-2} p}{\sqrt{p^2 - \alpha^2}} \frac{1}{\left(p + \sqrt{p^2 - \alpha^2}\right)^{m-1}} F\left[a_1\left(p - \sqrt{p^2 - \alpha^2}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^{\frac{m}{2}} \int_0^\infty (t-2\tau)^{-\frac{m}{2}} I_m\left[\alpha\sqrt{t(t-2\tau)}\right] f\left(\frac{\tau}{a_1}\right) d\tau,$$

$$a_1 > 0, \operatorname{Re} m > -1, \quad (14)$$

которое следует из соотношения (13) при

$$F_2(p) = F(a_1 p) \Rightarrow f\left(\frac{t}{a_1}\right), \text{ где вместо } m \text{ взято } m - 1.$$

Соотношение (13) является, таким образом, частным случаем соотношения (14).

Обратимся снова к случаю $-a_1 < a_2 < a_1$. Подставим в (13) выражение для функции $f_2(\tau)$ из (12)

и переменим порядок интегрирования, используя формулу Дирихле для двойных интегралов [19]. Следовательно,

$$f_3(t) = t^{-\frac{m+1}{2}} \int_0^\infty f_1(\tau_1) d\tau_1 \int_{\tau_1}^\infty (t-2\tau)^{-\frac{m+1}{2}} I_{m+1}\left[\alpha\sqrt{t(t-2\tau)}\right] J_0\left[2\alpha\sqrt{\frac{1}{a}\tau_1(\tau-\tau_1)}\right] d\tau,$$

$$\operatorname{Re} m > -2.$$

Преобразуем внутренний интеграл, введя новую переменную $\tau_2 = \sqrt{\tau - \tau_1}$. Получим

$$2 \int_0^\infty (t-2\tau_2^2-2\tau_1)^{-\frac{m+1}{2}} I_{m+1}\left[\alpha\sqrt{t(t-2\tau_2^2-2\tau_1)}\right] J_0\left[2\alpha\sqrt{\frac{1}{a}\tau_1\tau_2}\right] \tau_2 d\tau_2. \quad (15)$$

Перейдем в (15) от модифицированной бесселевой функции первого рода I_{m+1} к бесселевой функции первого рода J_{m+1} . При этом удобней рассматривать не функцию вида $I_m(z)$ (z – комплексная переменная), а функцию $\frac{I_m(z)}{z^m}$. Используя [18], приходим к следующим соотношениям:

$$\frac{I_m(z)}{z^m} = \frac{J_m(iz)}{(iz)^m}, \quad (16)$$

$$\frac{J_m(z)}{z^m} = \frac{I_m(iz)}{(iz)^m}. \quad (17)$$

Отметим, что функции $\frac{I_m(z)}{z^m}$ и $\frac{J_m(z)}{z^m}$ являются четными.

Тогда выражение (15) согласно (16) преобразуется к виду, содержащему разрывный интеграл Сонина [18]:

$$2^{-\frac{m-1}{2}} \int_0^\infty \frac{J_{m+1}\left\{\alpha\sqrt{2t}\sqrt{\tau_2^2 + \left(\tau_1 - \frac{t}{2}\right)}\right\}}{\left\{\tau_2^2 + \left(\tau_1 - \frac{t}{2}\right)\right\}^{\frac{m+1}{2}}} J_0\left[2\alpha\sqrt{\frac{1}{a}\tau_1\tau_2}\right] \tau_2 d\tau_2 =$$

$$= \begin{cases} 0, & t < 2\frac{1}{a}\tau_1, \\ \frac{1}{\alpha \cdot t^{\frac{m+1}{2}}} \left\{\frac{\sqrt{t-2\frac{1}{a}\tau_1}}{\sqrt{2\tau_1-t}}\right\}^m J_m\left\{\alpha\sqrt{(2\tau_1-t)\left(t-2\frac{1}{a}\tau_1\right)}\right\}, & t > 2\frac{1}{a}\tau_1. \end{cases}$$

Для обеспечения сходимости этого интеграла под величинами $\alpha\sqrt{2t}$ и $\alpha\sqrt{\frac{1}{a}\tau_1}$ подразумеваются положительные величины, то есть $\alpha > 0$, а $\operatorname{Re}(m+1) > 0$ [18].

Ограничение $\alpha > 0$ вызвано только способом вывода, а не существом дела: как сказано выше, основное операционное соотношение, которое будет получено далее, справедливо и для комплексных α .

Далее получим

$$f_3(t) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\frac{at}{t-2\tau_1}} \left(\frac{t-2\frac{1}{a}\tau_1}{t-2\tau_1} \right)^{\frac{m}{2}} I_m \left\{ \alpha \sqrt{(t-2\tau_1) \left(t-2\frac{1}{a}\tau_1 \right)} \right\} f \left(\frac{2}{a_1-a_2} \tau_1 \right) d\tau_1.$$

Переходя к новой переменной интегрирования $\tau = 2\frac{1}{a}\tau_1$, получим соотношение (10), но при поставленном условии $-a_1 < a_2 < a_1$.

Отметим, что второй вариант вывода основного операционного соотношения послужил нам методической основой при первоначальных попытках нахождения оригиналов для частных видов изображения (7).

Объединяя условия для a_1 и a_2 , поставленные при обоих вариантах вывода, получаем искомое операционное соотношение (основное)

$$S_m^{(2)}(a_1, a_2, \alpha, F(p), p) = (a_1 + a_2) \alpha^m \times \\ \times \frac{p}{\sqrt{p^2 - \alpha^2}} \frac{1}{\left(p + \sqrt{p^2 - \alpha^2} \right)^m} \frac{F \left(a_1 p + a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2} \right)}{a_1 p + a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_0^t \left(\frac{t-\tau}{t-\alpha\tau} \right)^{\frac{m}{2}} I_m \left[\alpha \sqrt{(t-\alpha\tau)(t-\tau)} \right] f \left(\frac{\tau}{a_1 + a_2} \right) d\tau, \quad (18)$$

где, в соответствии с обобщенной теоремой Бореля, $F(p)$ удовлетворяет условиям обратной теоремы относительно формул Римана – Меллина [17] (в дальнейшем об этих условиях для $F(p)$ упоминать не будем; они будут всегда выполнены),

$$a = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}, \quad a_1 + a_2 > 0, \quad \text{Re } m > -1,$$

а также соотношения (8) и (14) при $a_1 = -a_2 \neq 0$, $\text{Re } m > -1$.

Смысл верхнего индекса в обозначении $S_m^{(2)}$ станет понятен далее.

Из соотношения (18) при $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, а также при $a_1 > 0$, $a_2 = 0$ следуют имеющиеся в литературе частные случаи преобразования Эфроса [14].

Далее нам потребуются некоторые дополнительные соотношения.

1) Заменяем в соотношении (18) a_2 на $-a_2$ и переходим к новой переменной интегрирования $\tau_1 = \frac{\tau}{a}$ (ниже обозначим ее опять через τ), получим

$$S_m^{(1)}(a_1, a_2, \alpha, F(p), p) = S_m^{(2)}(a_1, -a_2, \alpha, F(p), p) = \\ = (a_1 + a_2) \alpha^m \frac{p}{\sqrt{p^2 - \alpha^2}} \frac{1}{\left(p + \sqrt{p^2 - \alpha^2} \right)^m} \frac{F \left(a_1 p - a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2} \right)}{a_1 p - a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{t}{a}} \left(\frac{t-\alpha\tau}{t-\tau} \right)^{\frac{m}{2}} I_m \left[\alpha \sqrt{(t-\tau)(t-\alpha\tau)} \right] f \left(\frac{\tau}{a_1 + a_2} \right) d\tau, \quad (19) \\ a = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}, \quad a_1 - a_2 > 0, \quad \text{Re } m > -1.$$

2) Получим оригинал для случая, когда $m = -1$ ($S_{-1}^{(2)}(p)$ является изображением):

$$S_{-1}^{(2)}(p) = \frac{1}{\alpha} \left(p + \sqrt{p^2 - \alpha^2} \right) S_0^{(2)}(p) = \\ = \frac{1}{\alpha} \left[2p S_0^{(2)}(p) - \left(p - \sqrt{p^2 - \alpha^2} \right) S_0^{(2)}(p) \right].$$

Здесь не перечислены для сокращения записи все параметры, от которых зависит функция $S_m^{(2)}$.

Оригинал найдем из (18): для первого изображения в квадратных скобках – по теореме дифференцирования оригинала [13] (оригинал в правой части соотношения (18) при $t = 0$ равен нулю); для второго изображения – из соотношения

$$\left(p - \sqrt{p^2 - \alpha^2} \right) S_0^{(2)}(p) = \alpha S_1^{(2)}(p).$$

В результате имеем

$$S_{-1}^{(2)}(a_1, a_2, \alpha, F(p), p) = \\ = (a_1 + a_2) \frac{1}{\alpha} \frac{p}{\sqrt{p^2 - \alpha^2}} \left(p + \sqrt{p^2 - \alpha^2} \right) \frac{F \left(a_1 p + a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2} \right)}{a_1 p + a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_0^t f \left(\frac{\tau}{a_1 + a_2} \right) \left(\frac{t-\alpha\tau}{t-\tau} \right)^{\frac{1}{2}} I_1 \left[\alpha \sqrt{(t-\alpha\tau)(t-\tau)} \right] d\tau + \frac{2}{\alpha} f \left(\frac{t}{a_1 + a_2} \right), \\ a = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}, \quad a_1 + a_2 > 0. \quad (20)$$

Заменяя здесь a_2 на $-a_2$ и переходя к новой переменной интегрирования, получим

$$S_{-1}^{(1)}(a_1, a_2, \alpha, F(p), p) = \\ = (a_1 + a_2) \frac{1}{\alpha} \frac{p}{\sqrt{p^2 - \alpha^2}} \left(p + \sqrt{p^2 - \alpha^2} \right) \frac{F \left(a_1 p - a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2} \right)}{a_1 p - a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_0^{\frac{t}{a}} f \left(\frac{\tau}{a_1 + a_2} \right) \left(\frac{t-\tau}{t-\alpha\tau} \right)^{\frac{1}{2}} I_1 \left[\alpha \sqrt{(t-\alpha\tau)(t-\tau)} \right] d\tau + \frac{2}{\alpha a} f \left(\frac{t}{a_1 - a_2} \right), \\ a = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}, \quad a_1 - a_2 > 0. \quad (21)$$

3) Сравнивая (18) и (19) при $m = 0$, а также (18) при $m = 1$ и (21), отметим, что соответствующие интегралы отличаются только верхним пределом интегрирования. Тогда напишем в обобщенном виде очень полезное соотношение:

$$\begin{aligned}
 S_n(a_1, a_2, \alpha, F(p), p) &= S_{-n}^{(1)}(a_1, a_2, \alpha, F(p), p) - \\
 -S_n^{(2)}(a_1, a_2, \alpha, F(p), p) &= (a_1 + a_2) \frac{p}{\sqrt{p^2 - \alpha^2}} \times \\
 \times \left[\frac{1}{\alpha^n} \left(p + \sqrt{p^2 - \alpha^2} \right)^n \frac{F(a_1 p - a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2})}{a_1 p - a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2}} - \right. \\
 \left. - \alpha^n \frac{1}{\left(p + \sqrt{p^2 - \alpha^2} \right)^n} \frac{F(a_1 p + a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2})}{a_1 p + a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2}} \right] \Rightarrow \\
 \Rightarrow (-1)^n \int_t^{\frac{t}{\alpha}} \left(\frac{\tau - t}{t - \alpha \tau} \right)^n J_n \left[\alpha \sqrt{(t - \alpha \tau)(\tau - t)} \right] \times \\
 \times f \left(\frac{\tau}{a_1 + a_2} \right) d\tau + n \frac{2}{\alpha \alpha} f \left(\frac{t}{a_1 - a_2} \right). \quad (22)
 \end{aligned}$$

Здесь должно быть $a_1 - a_2 > 0$ и $a_1 + a_2 > 0$, то есть $a_1 > |a_2|$; $n = 0, 1$.

Используя (19) при $m = 1$ и (20), получим

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}_1(a_1, a_2, \alpha, F(p), p) &= S_1^{(1)}(a_1, a_2, \alpha, F(p), p) - \\
 -S_{-1}^{(2)}(a_1, a_2, \alpha, F(p), p) &= (a_1 + a_2) \frac{p}{\sqrt{p^2 - \alpha^2}} \times \\
 \times \left[\alpha \frac{1}{p + \sqrt{p^2 - \alpha^2}} \frac{F(a_1 p - a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2})}{a_1 p - a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2}} - \right. \\
 \left. - \frac{1}{\alpha} \left(p + \sqrt{p^2 - \alpha^2} \right) \frac{F(a_1 p + a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2})}{a_1 p + a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2}} \right] \Rightarrow \\
 \Rightarrow \int_t^{\frac{t}{\alpha}} \left(\frac{t - \alpha \tau}{\tau - t} \right)^{\frac{1}{2}} J_1 \left[\alpha \sqrt{(\tau - t)(t - \alpha \tau)} \right] f \left(\frac{\tau}{a_1 + a_2} \right) d\tau - \\
 - \frac{2}{\alpha} f \left(\frac{t}{a_1 + a_2} \right), \quad a_1 > |a_2|. \quad (23)
 \end{aligned}$$

Легко заметить, что $\tilde{S}_1(a_1, a_2, \alpha, F(p), p) = -\frac{1}{\alpha} S_1(a_1, -a_2, \alpha, F(p), p)$.

4) Заменяя в соотношении (18) α на $i\alpha$ и используя (17), получим

$$\begin{aligned}
 (a_1 + a_2) \alpha^m \frac{p}{\sqrt{p^2 + \alpha^2}} \frac{1}{\left(p + \sqrt{p^2 + \alpha^2} \right)^m} \times \\
 \times \frac{F(a_1 p + a_2 \sqrt{p^2 + \alpha^2})}{a_1 p + a_2 \sqrt{p^2 + \alpha^2}} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^t \left(\frac{t - \tau}{t - \alpha \tau} \right)^{\frac{m}{2}} J_m \left[\alpha \sqrt{(t - \alpha \tau)(t - \tau)} \right] f \left(\frac{\tau}{a_1 + a_2} \right) d\tau,$$

$$a_1 + a_2 > 0, \quad \operatorname{Re} m > -1. \quad (24)$$

При $a_1 = 0, a_2 = 1$ из (24) следует имеющийся, например, в [14], частный случай преобразования Эфроса.

Заменяя α на $i\alpha$ в соотношениях (8) и (14), получим новые операционные соотношения, которые при $a_2 = 1$ и $a_1 = 1$ соответственно сводятся к имеющимся в [14].

Таким образом, найден ряд новых операционных соотношений, с помощью которых будут определены начальные функции в рассматриваемых задачах теории Тимошенко.

3. Определение начальных функций с помощью новых операционных соотношений

Возвратимся к нестационарным задачам теории Тимошенко для бесконечного и полубесконечного стержней. Изображения решений этих задач необходимо представить в таком виде, чтобы применить новые операционные соотношения и некоторые известные теоремы операционного исчисления к отдельным составляющим изображений (см., например, формулу (4)). Если эти составляющие относятся к разным типам (1-му или 2-му), то применяются разные новые операционные соотношения.

Покажем, как определить начальные функции с помощью новых операционных соотношений.

1) *Начальные функции для изображений 1-го типа.* Легко доказать, что r_1 и r_2 получаются из выражения

$$\frac{1}{2c_2} \sqrt{p^2 + A_3^2 \left(1 - \frac{1}{v} \right)^2}$$

при замене p на

$$\left(1 + \frac{1}{v} \right) p - \left(1 - \frac{1}{v} \right) \sqrt{p^2 - A_3^2}$$

$$\text{и} \quad \left(1 + \frac{1}{v} \right) p + \left(1 - \frac{1}{v} \right) \sqrt{p^2 - A_3^2}$$

соответственно.

Отсюда следует, что при использовании соотношений (19), (21) и (18), (20) соответственно надо принять

$$a_1 = 1 + \frac{1}{v}, \quad a_2 = 1 - \frac{1}{v}, \quad \alpha = A_3.$$

Тогда, согласно (9),

$$a = \frac{1}{v}.$$

При этом за исходное соотношение $F(p) \Rightarrow f(t)$ будем принимать следующее табличное соотношение [14]:

$$F(p) = 2c_2 \frac{pe^{-\frac{x}{2c_2} \sqrt{p^2 + A_3^2 \left(1 - \frac{1}{v}\right)^2}}}{\sqrt{p^2 + A_3^2 \left(1 - \frac{1}{v}\right)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t) = \begin{cases} 0, & t < \frac{x}{2c_2}, \\ 2c_2 J_0 \left[A_3 \left(1 - \frac{1}{v}\right) \sqrt{t^2 - \left(\frac{x}{2c_2}\right)^2} \right], & t > \frac{x}{2c_2}. \end{cases} \quad (25)$$

Допустим, требуется найти оригинал для изображения $\frac{p^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{e^{-r_1 x}}{r_1}$. Используя соотношение (19), получим

$$\frac{p^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{e^{-r_1 x}}{r_1} = \frac{1}{2A_1^2 A_2} \frac{p}{\sqrt{p^2 - A_3^2}} \frac{e^{-r_1 x}}{r_1} =$$

$$= \frac{1}{4A_1^2 A_2} S_0^{(1)} \left(1 + \frac{1}{v}, 1 - \frac{1}{v}, A_3, F(p), p \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_0^{(1)}(x, t) = \frac{1}{4A_1^2 A_2} \int_0^t I_0 \left[A_3 \sqrt{(t - \tau) \left(t - \frac{\tau}{v}\right)} \right] f\left(\frac{\tau}{2}\right) d\tau,$$

где $f\left(\frac{\tau}{2}\right)$ принимается согласно (25).

В результате получим

$$\frac{p^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{e^{-r_1 x}}{r_1} \Rightarrow \varphi_0^{(1)}(x, t) =$$

$$= \begin{cases} 0, & t < \frac{x}{c_1}, \\ \frac{A_3 c_1}{2\sqrt{C}} \int_0^t J_0 \left[A_4 \sqrt{\tau^2 - \left(\frac{x}{c_1}\right)^2} \right] I_0 \left[A_3 \sqrt{(t - \nu\tau)(t - \tau)} \right] d\tau, & t > \frac{x}{c_1}. \end{cases} \quad (26)$$

При $t > \frac{x}{c_1}$ имеем $\frac{x}{c_1} < \tau < t$, таким образом, выражение $t - \nu\tau$ может быть больше, меньше или равно нулю. В зависимости от знака этого выражения имеем или функцию $I_0 \left[A_3 \sqrt{(t - \tau)(t - \nu\tau)} \right]$, или функцию $J_0 \left[A_3 \sqrt{(\nu\tau - t)(t - \tau)} \right]$ (от действительного аргу-

мента). Следовательно, рассмотрим два случая, определяемые соотношением $\frac{x}{c_1}$ и $\frac{t}{v}$:

а) $\frac{t}{v} < \frac{x}{c_1} < t$, или $\frac{x}{c_1} < t < \frac{x}{c_2}$; тогда на всем интервале интегрирования $\tau > \frac{t}{v}$;

б) $\frac{x}{c_1} < \frac{t}{v} < t$, или $t > \frac{x}{c_2} > \frac{x}{c_1}$; тогда интервал интегрирования следует разбить на две части: $\frac{x}{c_1} < \tau < \frac{t}{v}$ и $\frac{t}{v} < \tau < t$.

Оригинал для изображения $\frac{p^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{e^{-r_2 x}}{r_2}$ можно получить, применяя соотношение (18), так как

$$\frac{p^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{e^{-r_2 x}}{r_2} = \frac{1}{2A_1^2 A_2} \frac{p}{\sqrt{p^2 - A_3^2}} \frac{e^{-r_2 x}}{r_2} =$$

$$= \frac{1}{4A_1^2 A_2} S_0^{(2)} \left(1 + \frac{1}{v}, 1 - \frac{1}{v}, A_3, F(p), p \right).$$

Тогда

$$\frac{p^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{e^{-r_2 x}}{r_2} \Rightarrow \varphi_0^{(2)}(x, t) =$$

$$= \begin{cases} 0, & t < \frac{x}{c_2}, \\ \frac{A_3 c_2}{2\sqrt{C}} \int_0^t J_0 \left[\frac{A_4}{v} \sqrt{\tau^2 - \left(\frac{x}{c_2}\right)^2} \right] I_0 \left[A_3 \sqrt{\left(t - \frac{\tau}{v}\right)(t - \tau)} \right] d\tau, & t > \frac{x}{c_2}. \end{cases} \quad (27)$$

Теперь становится понятен смысл верхнего индекса в обозначениях $S_m^{(1)}$ и $S_m^{(2)}$: изображения рассматриваемого типа, содержащие множитель $\frac{e^{-r_1 x}}{r_1}$, приводятся к изображению $S_m^{(1)}$, а изображения, содержащие множитель $\frac{e^{-r_2 x}}{r_2}$, приводятся к изображению $S_m^{(2)}$, где по-прежнему $F(p)$ принимается согласно (25).

Для сравнения приведем теперь в наших обозначениях оригинал, например, для изображения $\frac{p^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{e^{-r_1 x}}{r_1}$, найденный в работе [20] с использованием общей формулы обращения для преобразования Лапласа:

$$\frac{p^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{e^{-r_1 x}}{r_1} \Rightarrow \begin{cases} 0, & t < \frac{x}{c_1}, \\ \frac{1}{\pi A_1 \sqrt{C}} \int_0^1 \left\{ \sqrt{\frac{\sqrt{(1-A_2^2)\rho_1^2 + A_2^2} + \rho_1}{2}} \cos \left\{ A_1 A_3 x \sqrt{\frac{\rho_1}{2} \left[\sqrt{(1-A_2^2)\rho_1^2 + A_2^2} - \rho_1 \right]} \right\} \times \right. \\ \times sh \left\{ A_3 \rho_1 t - A_1 A_3 x \sqrt{\frac{\rho_1}{2} \left[\sqrt{(1-A_2^2)\rho_1^2 + A_2^2} + \rho_1 \right]} \right\} - \\ \left. - \sqrt{\frac{\sqrt{(1-A_2^2)\rho_1^2 + A_2^2} - \rho_1}{2}} \sin \left\{ A_1 A_3 x \sqrt{\frac{\rho_1}{2} \left[\sqrt{(1-A_2^2)\rho_1^2 + A_2^2} - \rho_1 \right]} \right\} \times \right. \\ \left. \times ch \left\{ A_3 \rho_1 t - A_1 A_3 x \sqrt{\frac{\rho_1}{2} \left[\sqrt{(1-A_2^2)\rho_1^2 + A_2^2} + \rho_1 \right]} \right\} \right\} \frac{d\rho_1}{\sqrt{(1-A_2^2)\rho_1^2 + A_2^2} \sqrt{\rho_1(1-\rho_1^2)}} + \\ + \frac{1}{\pi A_1 \sqrt{C}} \int_0^{\frac{A_2}{\sqrt{1-A_2^2}}} \frac{\sin A_3 \rho_1 t \cdot ch \left(A_1 A_3 x \sqrt{A_2 \rho_1 \sqrt{\rho_1^2 + 1} - \rho_1^2} \right)}{\sqrt{A_2 \rho_1 \sqrt{\rho_1^2 + 1} - \rho_1^2} \sqrt{\rho_1^2 + 1}} d\rho_1, & t > \frac{x}{c_1}. \end{cases} \quad (28)$$

Сравнение при $t > x/c_1$ (26) с (28) показывает, что оригинал в соотношении (26), в отличие от оригинала в соотношении (28), имеет компактный, наглядный вид, что способствует более простому анализу оригинала. Мы не имеем еще полного решения конкретной задачи, однако вид оригиналов в соотношениях (26) и (27) подтверждает известный факт: теория Тимошенко описывает распространение двух волн со скоростями фронтов c_1 и c_2 ; структура указанных оригиналов (нижний и верхний пределы интегралов, вид аргумента функции типа $J_0 \left[A_4 \sqrt{\tau^2 - \left(\frac{x}{c_1}\right)^2} \right]$) имеет ясно выраженный

волновой характер, что нельзя сказать об оригинале в соотношении (28).

Характерным обстоятельством является то, что в изображениях, полученных при решении задач для бесконечного и полубесконечного стержней, одна половина слагаемых (при $e^{-r_2 x}$) получается из другой (при $e^{-r_1 x}$) заменой r_1 на r_2 , и наоборот. В формуле (4) это изображения в квадратных скобках. Например, следующие два изображения всегда находятся вместе в такой комбинации:

$$\frac{p^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{e^{-r_1 x}}{r_1} - \frac{p^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{e^{-r_2 x}}{r_2}. \quad (29)$$

Если при $t > \frac{x}{c_2}$ в первом слагаемом оригинала $\varphi_0^{(1)}(x, t)$ перейти к новой переменной интегрирования $\tau_1 = v\tau$, то видно, что это слагаемое взаимно уничтожается при $t > \frac{x}{c_2}$ с оригиналом $\varphi_0^{(2)}(x, t)$.

В связи с этим лучше сразу использовать совместные соотношения (22) и (23) при нахождении оригиналов для изображений типа (29). Например, из (22) в обобщенном виде получим

$$\frac{p^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(\frac{p}{c_2^2} - \frac{r_1^2}{p} \right) \frac{e^{-r_1 x}}{r_1} - \frac{p^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(\frac{p}{c_2^2} - \frac{r_2^2}{p} \right) \frac{e^{-r_2 x}}{r_2} \Rightarrow \varphi_n(x, t) = \begin{cases} 0, & t < \frac{x}{c_1}, \\ -\frac{c_1 A_3 (-\sqrt{C})^{n-1}}{2} \int_0^t \frac{(v\tau - t)^{\frac{n}{2}}}{(t - \tau)^{\frac{n}{2}}} J_0 \left[A_4 \sqrt{\tau^2 - \left(\frac{x}{c_1}\right)^2} \right] J_n \left[A_3 \sqrt{(t - \tau)(v\tau - t)} \right] d\tau + \\ + n c_1 v J_0 \left[A_4 \sqrt{t^2 - \left(\frac{x}{c_1}\right)^2} \right], & t > \frac{x}{c_1}, \end{cases} \quad (30)$$

где

$$t^* = \begin{cases} \frac{x}{c_1}, & \frac{x}{c_1} < t < \frac{x}{c_2}, \\ \frac{t}{v}, & t > \frac{x}{c_2}, \end{cases}$$

$n = 0, 1$.

2) Начальные функции для изображений 2-го типа. Допустим, требуется найти оригинал для

изображения $\frac{p}{\frac{p^2}{c_2^2} + r_1 r_2}$. Так как

$$\frac{p}{\frac{p^2}{c_2^2} + r_1 r_2} = -c_1^2 \frac{p}{\sqrt{p^2 + \lambda^2}} \frac{1}{vp + \sqrt{p^2 + \lambda^2}} + \frac{c_1 c_2}{\sqrt{p^2 + \lambda^2}},$$

то оригинал для первого слагаемого найдем, применяя соотношение (24) для

$$F(p) = -\frac{c_1^2 c_2}{c_1 + c_2} \Rightarrow f(t) = -\frac{c_1^2 c_2}{c_1 + c_2}$$

при

$$a_1 = v, a_2 = 1, \alpha = \lambda, m = 0;$$

оригинал для второго слагаемого находим по [14]; тогда получим:

$$\begin{aligned} \frac{p}{\frac{p^2}{c_2^2} + \eta_1 \eta_2} &\Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{c_1^2 c_2}{c_1 + c_2} \int_0^t J_0 \left[\lambda \sqrt{\left(t - \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} \tau \right) (t - \tau)} \right] dt + c_1 c_2 \int_0^t J_0(\lambda \tau) dt &= \\ = \kappa(t). \end{aligned} \quad (31)$$

Итак, оригиналы для изображений рассмотренных типов представляются в виде интегралов от бесселевых функций и определяются практически с помощью двух операционных соотношений (18) и (25).

Аналогично определяются все оригиналы в рассматриваемых задачах.

Точные аналитические выражения для перемещений и усилий в бесконечном и полубесконечном стержнях сведены в таблицы. Ограничение объема статьи позволяет привести здесь только выражения для угла поворота и изгибающего момента в рассмотренной далее тестовой задаче.

4. Решение тестовой задачи для полубесконечного стержня

Рассмотрим на основе теории Тимошенко частную нестационарную задачу о действии на защемленный полубесконечный стержень ($x \geq 0$) равномерно распределенной поперечной импульсной нагрузки, приложенной в момент времени $t = 0$; начальные условия – нулевые. Решение этой задачи, найденное с использованием общей формулы обращения для преобразования Лапласа, имеется в работе [21] (решение дано без вывода).

Поставим перед собой целью сравнить числовые результаты, полученные по формулам данной работы и в работе [21]. При решении этой задачи была отработана методика вычисления значений искомых функций на ЭВМ.

Математическая формулировка этой задачи следующая: найти решение системы уравнений (1) при $q(x, t) = R \delta_0(x) \delta_1(t)$

($R = \text{const}$; $\delta_0(x), \delta_1(t)$ – единичная функция Хевисайда и единичная импульсивная функция), $0 < x < \infty, t > 0$, удовлетворяющее граничным условиям

$$w(0, t) = 0, \psi(0, t) = 0 \quad (t > 0)$$

и начальным условиям (3). Ищем решение, ограниченное при $x \rightarrow \infty$.

Будем искать функцию $w(x, t)$ в виде

$$w(x, t) = w_1(x, t) + \frac{R}{\rho A_b} t. \quad (32)$$

В результате приходим к задаче Π_0 относительно функций $w_1(x, t)$ и $\psi(x, t)$ при

$$w_0(t) = -\frac{R}{\rho A_b} t, \psi_0(t) = 0.$$

В работе [21] дано выражение для безразмерного изгибающего момента $\frac{\sqrt{C}}{R} M(x, t)$. Чтобы получить выражение для этой функции, используя новые операционные соотношения, удобнее найти сначала оригинал для изображения $\Psi(x, p)$ (4), а затем – изгибающий момент из соотношения $M = -EJ_b \frac{\partial \Psi}{\partial x}$.

Используя (30), (31) и теорему свертывания [13], получим

$$\begin{aligned} -\frac{EJ_b}{R} \Psi(x, p) &\Rightarrow -\frac{EJ_b}{R} \psi(x, t) = \\ = \int_0^t \varphi_1(x, \tau) \kappa(t - \tau) dt - \int_0^t \varphi_0(x, \tau) dt. \end{aligned} \quad (33)$$

В зависимости от соотношения $t, \frac{x}{c_1}, \frac{x}{c_2}$ интервалы

интегрирования в (33) можно разбить на интервалы, в которых подынтегральная функция имеет конкретное аналитическое выражение. Доказав, что эти интегралы имеют частную производную по x в соответствующих областях, получим

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{C} M(x, t)}{R} &= -\frac{EJ_b \sqrt{C}}{R} \psi'(x, t) = \\ &= \begin{cases} 0, & t < \frac{x}{c_1}, \\ \sqrt{C} \left[\int_{\frac{x}{c_1}}^t \tilde{f}'(x, t, \tau) dt - \kappa(t - \frac{x}{c_1}) \right], & \frac{x}{c_1} < t < \frac{x}{c_2}, \\ \sqrt{C} \left[\int_{\frac{x}{c_1}}^{\frac{x}{c_2}} \tilde{f}'(x, t, \tau) dt + \int_{\frac{x}{c_2}}^t \tilde{f}'(x, t, \tau) dt - \kappa(t - \frac{x}{c_1}) \right], & t > \frac{x}{c_2}, \end{cases} \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$\tilde{f}'(x, t, \tau) = \varphi_1'(x, \tau)\kappa(t - \tau) - \varphi_0'(x, \tau).$$

На защемленной опоре:

$$\sqrt{C} \frac{M(0, t)}{R} = -\sqrt{C}\kappa(t).$$

В сравниваемой работе [21] безразмерные изгибающие моменты $\frac{\sqrt{CM}}{R}$ вычислялись для стержня с прямоугольным поперечным сечением высотой h .

Введем, как и в [21], безразмерную координату точки оси стержня и безразмерное время:

$$\eta = \frac{x}{h}, \quad T = \frac{ct}{h}.$$

Анализ работы [21] показал, что значение ν было принято равным 1,9.

Построенный по результатам вычислений график функции $\frac{\sqrt{CM}}{R}$ (рис. 2) при $\eta = 2$ совпадает с графиком, приведенным в работе [21].

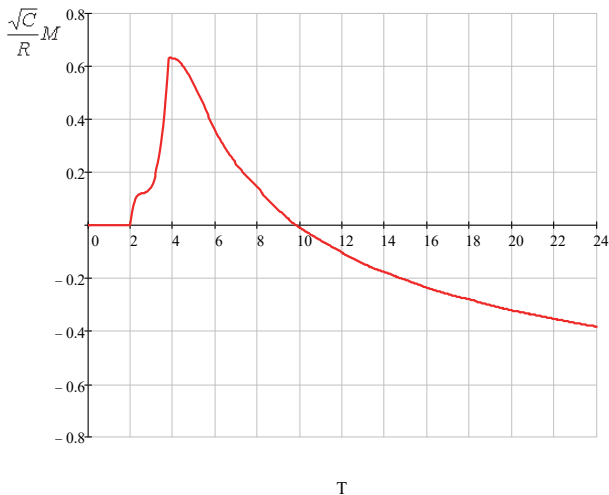


Рис. 2. Действие на защемленный полубесконечный стержень ($x \geq 0$) равномерно распределенной поперечной импульсной нагрузки $q(x, t) = R\delta_0(x)\delta_1(t)$.

Изгибающий момент в сечении $\eta = 2$ при $\nu = 1,9$

[Figure 2. A clamped semi-infinite beam ($x \geq 0$) which is subjected to a uniform lateral impulse $q(x, t) = R\delta_0(x)\delta_1(t)$. Bending moment at $\eta = 2, \nu = 1,9$]

Выводы

Итак, в ходе исследования показан метод получения точных аналитических решений задач о распространении упругих волн в однородных призматических стержнях при поперечных кратковременных и быстроизменяющихся воздействиях на основе теории Тимошенко.

В общем виде сформулированы три типа нестационарных задач для полубесконечного стержня. Рассмотрены бегущие волны. Использовано операционное исчисление. Отмечено, что полученные изображения имеют очень сложную структуру. Изучена проблема определения начальных функций (оригиналов) при решении нестационарных задач теории Тимошенко.

Выводятся новые, не имеющиеся в литературе по операционному исчислению, операционные соотношения, на основе которых показан способ нахождения оригиналов без использования общей формулы обращения. Решения задач записываются в виде интегралов от бесселевых функций и, в отличие от решений, имеющих в литературе, ясно показывают волновой характер изучаемых процессов, имеют компактный вид и удобны для практических вычислений.

Ограничение объема статьи позволило привести здесь только некоторые точные аналитические выражения для различных функций. В общем виде такие выражения для различных типов стержней получены и сведены в таблицы, которые могут быть представлены автором статьи.

Полученные новые операционные соотношения позволяют дополнить таблицы формул операционного исчисления и могут быть использованы в дальнейшем при решении различных проблем.

Список литературы

1. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. М.: Изд-во иностранной литературы, 1955. 192 с.
2. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. Киев: Наукова думка, 1972. 508 с.
3. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Серия: Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.
4. Селезов И.Т. О развитии теории Тимошенко поперечных колебаний упругих стержней // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 1. С. 16–23.
5. Su Yu-Chi, Ma Chien-Ching. Theoretical analysis of transient waves in a simply-supported Timoshenko beam by ray and normal mode methods // International Journal of Solids and Structures. 2011. Vol. 48. No. 3–4. Pp. 535–552.
6. Su Yu-Chi, Ma Chien-Ching. Transient wave analysis of a cantilever Timoshenko beam subjected to impact loading by Laplace transform and normal mode methods // International Journal of Solids and Structures. 2012. Vol. 49. No. 9. Pp. 1158–1176.
7. Wang X.Q., So R.M.C. Timoshenko beam theory: a perspective based on the wave-mechanics approach // Wave Motion. 2015. Vol. 57. Pp. 64–87.

8. Абрамян А.К., Индейцев Д.А., Постнов В.А. Бегущие и стоячие волны балки Тимошенко // Известия РАН. Механика твердого тела. 2018. № 2. С. 101–109.
9. Слепян Л.И., Яковлев Ю.С. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. Л.: Судостроение, 1980. 344 с.
10. Leonard R.W., Budiansky B. On traveling waves in beams // NASA Repts. 1954. No. 1173. Pp. 389–415.
11. Dengler M.A. Transversale Wellen in Stäben und Platten unter stoßförmiger Belastung // Österr. Ing.-Arch. 1956. Vol. 10. No. 1. Pp. 39–66.
12. Flügge W., Zajac E.E. Bending impact waves in beams // Ingenieur-Archiv. 1959. Vol. 28. Issue 1. Pp. 59–70.
13. Лурье А.И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. М. – Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1950. 432 с.
14. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965. 468 с.
15. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. М.: Высшая школа, 1966. 408 с.
16. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М.: Наука, 1965. 288 с.
17. Эфрос А.М., Данилевский А.М. Операционное исчисление и контурные интегралы. Харьков: Гос. науч.-техн. изд-во, 1937. 383 с.
18. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Ч. I. М.: Изд-во иностранной литературы, 1949. 799 с.
19. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. II. М.: Наука, 1964. 464 с.
20. Уфлянд Я.С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин // Прикладная математика и механика. 1948. Т. 12. № 3. С. 287–300.
21. Sagartz M.J., Forrestal M.J. Bending stresses propagating from the clamped support of an impulsively loaded beam // AIAA Journal. 1972. Vol 10. No 10. Pp. 1373–1374. (Publ. online 17 May 2012). <https://doi.org/10.2514/3.6628>

RESEARCH PAPER

New operational ratios and their application to non-stationary tasks for rods based on S.P. Timoshenko theory

Alexander L. Zonenberg

Joint Stock Company “TSNIEP zhilishcha – Institute for Complex Design of Residential and Public Buildings”, 9 Dmitrovskoe highway, bldg. 3, Moscow, 127434, Russian Federation
zonenberg@list.ru

Article history:

Received: November 16, 2019

Revised: January 24, 2020

Accepted: January 28, 2020

Abstract

Relevance. In order to study transient wave processes of deformation in rods on the basis of S.P. Timoshenko theory, it is necessary to have accurate analytical solutions to non-stationary problems in general form. Each accurate solution within this analytical model is an accurate description of the real process, serves as a criterion in assessing the accuracy of approximate solutions. When using operational calculus to analyze traveling waves, it is the inverse Laplace – Carson transformation that poses the greatest difficulty. It follows from the published works that the available solutions to some private problems either have a structure that does not allow to judge the main features of the investigated process, or their efficiency in calculations is achieved only in some rather limited areas of coordinate and time. This problem, which requires resolution, determined the purpose of this article. **The aim of the work.** The article is devoted to the development of new operational ratios and their application to the construction of accurate analytical solutions to the non-stationary problems of S.P. Timoshenko's theory for rods in a general form, in a physically visible and convenient form for practical calculations. **Methods.** The work uses methods of function theory of complex variable, operational calculus based on the integral Laplace – Carson transformation, methods of structure dynamics. **Results.** In general form three types of non-stationary tasks for semi-infinite rod based on Timoshenko theory are formulated. New operational ratios have been obtained. Based on these ratios, a method of inverse transformation without using a general conversion formula has been developed. Solutions of problems are recorded in the form of integrals from Bessel functions and, unlike solutions available in the literature, clearly show the wave nature of the studied processes, have a visual and compact appearance. An example of calculation is reviewed.

Keywords: transient wave process; S.P. Timoshenko theory; rods; traveling waves; operational ratio; Laplace – Carson integral transformation; Bessel functions

For citation

Zonenberg A.L. New operational ratios and their application to non-stationary tasks for rods based on S.P. Timoshenko theory. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(1): 62–75. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-62-75>. (In Russ.)

Alexander L. Zonenberg, chief specialist engineer, Residential and Public Buildings Construction Department; ORCID iD: 0000-0003-2773-3047.

References

1. Kolsky H. *Volny napryazheniya v tverdyh telah* [*Stress waves in solids*]. Moscow: Izd-vo inostrannoi literatury Publ.; 1955. (In Russ.)
2. Timoshenko S.P. *Kurs teorii uprugosti* [*Course in the Theory of Elasticity*]. Kiev: Naukova dumka Publ.; 1972. (In Russ.)
3. Grigolyuk E.I., Selezov I.T. Neklassicheskie teorii kolebanij sterzhnej, plastin i obolochek [Nonclassical Theories of Vibrations of Bars, Plates and Shells]. *Advances in Sciences and Engineering. Mechanics of Deforming Solids*. Moscow: VINITI Publ.; 1973. (In Russ.)
4. Selezov I.T. O razvitii teorii Timoshenko poperechnykh kolebanij uprugih sterzhnej [On the development of the Timoshenko theory of transversal oscillations of elastic rods]. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2016;45(1):13–20.
5. Su Yu-Chi, Ma Chien-Ching. Theoretical analysis of transient waves in a simply-supported Timoshenko beam by ray and normal mode methods. *International Journal of Solids and Structures*. 2001;48(3–4):535–552.
6. Su Yu-Chi, Ma Chien-Ching. Transient wave analysis of a cantilever Timoshenko beam subjected to impact loading by Laplace transform and normal mode methods. *International Journal of Solids and Structures*. 2012;49(9):1158–1176.
7. Wang X.Q., So R.M.C. Timoshenko beam theory: A perspective based on the wave-mechanics approach. *Wave Motion*. 2015;57:64–87.
8. Abramyan A.K., Indeitsev D.A., Postnov V.A. Running and Standing Waves of Timoshenko Beam. *Mechanics of Solids*. 2018;53(2):203–210.
9. Slepyan L.I., Yakovlev Yu.S. *Integral'nye preobrazovaniya v nestacionarnykh zadachakh mekhaniki* [*Integral Transformations in Non-Stationary Problems of Mechanics*]. Leningrad: Sudostroenie Publ.; 1980. (In Russ.)
10. Leonard R.W., Budiansky B. On traveling waves in beams. *NACA Repts*. 1954;(1173):389–415.
11. Dengler M.A. Transversale Wellen in Stäben und Platten unter stoßförmiger Belastung. *Österr. Ing.-Arch*. 1956;10(1):39–66.
12. Flügge W., Zajac E.E. Bending impact waves in beams. *Ingenieur-Archiv*. 1959;28(1):59–70.
13. Lurie A.I. *Operacionnoe ischislenie i ego prilozheniya k zadacham mekhaniki* [*Operational Calculus and its Application to the Problems in Mechanics*]. Moscow, Leningrad: Gostekhizdat Publ.; 1950. (In Russ.)
14. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Spravochnik po operacionnomu ischisleniyu* [*Handbook of operational calculations*]. Moscow: Vysshaya shkola Publ.; 1965. (In Russ.)
15. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Operacionnoe ischislenie* [*Operational calculus*]. Moscow: Vysshaya shkola Publ.; 1966. (In Russ.)
16. Doetsch G. *Rukovodstvo k prakticheskomu primeniyu preobrazovaniya Laplasa* [*Guide to the Applications of Laplace Transforms*]. Moscow: Nauka Publ.; 1965. (In Russ.)
17. Efros A.M., Danilevsky A.M. *Operacionnoe ischislenie i konturnye integraly* [*Operational Calculus and Contour Integrals*]. Kharkiv: Gos. nauch.-tekhn. izd-vo Publ.; 1937. (In Russ.)
18. Watson G.N. *Teoriya besselevykh funkcij* [*A treatise on the theory of Bessel functions*]. Part 1. Moscow: Izd-vo inostrannoi literatury; 1949. (In Russ.)
19. Fikhtengol'ts G.M. *Osnovy matematicheskogo analiza* [*Foundations of mathematical analysis*]. Vol. 2. Moscow: Nauka Publ.; 1964. (In Russ.)
20. Uflyand Ya.S. Rasprostranenie voln pri poperechnykh kolebaniyakh sterzhnej i plastin [Wave propagation in rods and plates undergoing transverse vibrations]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [*J. Appl. Math. Mech.*]. 1948; 12(3):287–300. (In Russ.)
21. Sagartz M.J., Forrestal M.J. Bending stresses propagating from the clamped support of an impulsively loaded beam. *AIAA Journal*. 1972;10(10):1373–1374. (Publ. online 17 May 2012). <https://doi.org/10.2514/3.6628>