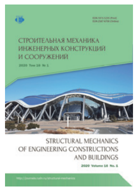
2020. 16(1). 31–37

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

HTTP://JOURNALS.RUDN.RU/STRUCTURAL-MECHANICS



ТЕОРИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК
THEORY OF THIN ELASTIC SHELLS

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-1-31-37
УДК 539.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Учет геометрической нелинейности в конечно-элементных прочностных расчетах тонкостенных конструкций типа оболочек

Ю.В. Клочков[1]*, А.П. Николаев[1], Т.Р. Ищанов[1], А.С. Андреев[1], М.Ю. Клочков[2]

[1]*Волгоградский государственный аграрный университет, Российская Федерация, 400002, Волгоград, Университетский пр., 26*
[2]*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Российская Федерация, 119991, Москва, Ленинские горы, 1*
*klotchkov@bk.ru

История статьи:
Поступила в редакцию: 22 ноября 2019 г.
Доработана: 14 января 2020 г.
Принята к публикации: 25 января 2020 г.

Благодарности
Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Волгоградской области в рамках научного проекта № 19-41-343003 р_мол_а.

Для цитирования
Клочков Ю.В., Николаев А.П., Ищанов Т.Р., Андреев А.С., Клочков М.Ю. Учет геометрической нелинейности в конечно-элементных прочностных расчетах тонкостенных конструкций типа оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 1. С. 31–37. http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-31-37

Аннотация
Актуальность. В настоящее время в связи с все более широким распространением большепролетных тонкостенных конструкций типа оболочек актуальным вопросом является разработка вычислительных алгоритмов по прочностному расчету такого рода объектов в геометрически нелинейной постановке. Несмотря на значительное количество публикаций по данной проблематике достаточно важным аспектом остается необходимость совершенствования конечно-элементных моделей таких оболочек, которые совмещали бы в себе относительную простоту разрешающих уравнений, учет сдвиговых деформаций, компактность формируемой матрицы жесткости, облегченную возможность моделирования и изменения граничных условий и т. д. ***Цели.*** Целью работы была разработка конечно-элементного алгоритма расчета тонкой оболочки с учетом сдвиговых деформаций в геометрически нелинейной постановке при использовании конечного элемента с ограниченным числом узловых варьируемых параметров. ***Методы***. В качестве инструментов исследования выбран численный метод конечных элементов. Основные геометрические соотношения между приращениями деформаций и приращениями компонент вектора перемещения и компонент вектора угла наклона нормали получены в двух вариантах отсчета угла наклона нормали. Матрица жесткости и столбец узловых усилий четырехугольного конечного элемента на шаге нагружения получены минимизацией функционала Лагранжа. ***Результаты.*** На примере расчета жестко защемленной по краям цилиндрической панели, находящейся под действием сосредоточенной силы, показана эффективность разработанного алгоритма в геометрически нелинейной постановке с учетом деформации поперечного сдвига.

Ключевые слова: геометрическая нелинейность; оболочечная конструкция; шаговое нагружение; узловые неизвестные; четырехугольный конечный элемент; сдвиговые деформации; наклон нормали

Введение

Современный анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) тонкостенных конструкций предполагает решение задачи в геометрически нелинейной постановке.

При использовании численных методов расчета [1–6], в частности метода конечных элементов (МКЭ) [7–20], в решении нелинейных задач обычно используют шаговую процедуру нагружения [9; 10; 12; 14]. При этом возникает необходимость получения соотношений между приращениями деформаций, приращениями компонент вектора перемещения и приращениями их производных.

В настоящей работе представлен вывод вышеупомянутых геометрических соотношений, включающих в себя деформации поперечного сдвига. Данные соотношения необходимы для формиро-

Клочков Юрий Васильевич, д. т. н., профессор, заведующий кафедрой высшей математики; eLIBRARY SPIN-код: 9436-3693, Scopus ID: 57170472500.
Николаев Анатолий Петрович, д. т. н., профессор, профессор кафедры прикладной геодезии, природообустройства и водопользования; eLIBRARY SPIN-код: 2653-5484, Scopus ID: 7202396806.
Ищанов Тлек Рахметолович, к. т. н., старший преподаватель кафедры высшей математики; eLIBRARY SPIN-код: 1556-1368.
Андреев Александр Сергеевич, старший преподаватель кафедры высшей математики; eLIBRARY SPIN-код: SPIN: 7568-5011, Scopus ID: 57209523986.
Клочков Михаил Юрьевич, студент 4-го курса физического факультета; eLIBRARY SPIN-код: 2767-3955.

вания матрицы жесткости используемого конечного элемента на $(j+1)$-м шаге нагружения.

1. Геометрические соотношения

При получении соотношений Коши на $(j+1)$-м шаге нагружения последовательно рассматриваются три состояния оболочки: исходное и два деформированных – после j шагов нагружения и на $(j+1)$-м шаге нагружения. Исходное состояние описывается радиус-векторами $\vec{R}^0$ для точки M^0 срединной поверхности и $\vec{R}^{0\zeta}$ для точки $M^{0\zeta}$, находящейся на расстоянии ζ от срединной поверхности, причем

$$\vec{R}^{0\zeta} = \vec{R}^0 + \zeta\vec{e}_n^{\,0}, \quad (1)$$

где $\vec{e}_n^{\,0}$ – орт нормали к срединной поверхности в точке M^0.

В процессе шагового нагружения точка $M^{0\zeta}$ последовательно займет новые положения M^{ζ} и $M^{*\zeta}$, определяемые соответствующими радиус-векторами:

$$\vec{R}^{\zeta} = \vec{R}^{0\zeta} + \vec{V}; \;\; \vec{R}^{*\zeta} = \vec{R}^{\zeta} + \vec{W}, \quad (2)$$

где $\vec{V}$ и $\vec{W}$ – векторы перемещений точки $M^{0\zeta}$ после j и $(j+1)$-го шагов нагружения.

При вычислении входящих в (2) векторов $\vec{V}$ и $\vec{W}$ можно воспользоваться одним из двух вариантов. В первом варианте отсчет угла наклона нормали можно осуществить от ее исходного состояния [21]:

$$\vec{V} = \vec{v} + \zeta\vec{G}; \;\; \vec{W} = \vec{w} + \zeta\vec{\gamma}, \quad (3)$$

где $\vec{v} = v^{\rho}\vec{e}_{\rho}^{\,0} + v\vec{e}_n^{\,0}$; $\vec{w} = w^{\rho}\vec{e}_{\rho}^{\,0} + w\vec{e}_n^{\,0}$ – векторы перемещений точки M^0 после j и $(j+1)$-го шагов нагружений; $\vec{G} = G^{\rho}\vec{e}_{\rho}^{\,0}$; $\vec{\gamma} = \gamma^{\rho}\vec{e}_{\rho}^{\,0}$ – векторы угла наклона нормали после j и $(j+1)$-го шагов нагружений ($\rho = 1,\ 2$).

Во втором варианте отчет угла наклона нормали может осуществляться от ее деформированного состояния. В этом случае формулы (3) примут вид

$$\vec{V} = \vec{v} + \zeta\left(\Delta\vec{e}_n + \vec{G}\right); \;\; \vec{W} = \vec{w} + \zeta\left(\Delta\vec{e}_n^{\,*} + \vec{\gamma}\right), \quad (4)$$

где $\Delta\vec{e}_n = \vec{e}_n - \vec{e}_n^{\,0}$; $\Delta\vec{e}_n^{\,*} = \vec{e}_n^{\,*} - \vec{e}_n$; $\vec{e}_n$ и $\vec{e}_n^{\,*}$ – орты нормали после j и $(j+1)$-го шагов нагружений.

Ковариантные векторы базиса в трех рассматриваемых состояниях оболочки могут быть определены дифференцированием (1) и (2) по используемым глобальным криволинейным координатам. Например, если рассматривать в качестве рассчитываемой оболочки эллиптический цилиндр, то в качестве таких координат можно использовать осевую координату x и угловую координату θ:

$$\vec{g}_{\alpha}^{\,0} = \vec{R}_{,\alpha}^{0\zeta}; \;\; \vec{g}_{\alpha} = \vec{R}_{,\alpha}^{\zeta}; \;\; \vec{g}_{\alpha}^{\,*} = \vec{R}_{,\alpha}^{*\zeta}, \quad (5)$$

где α последовательно принимает значения x и θ.

Ковариантные компоненты тензора деформаций и тензора приращений деформаций после j шагов и на $(j+1)$-м шаге нагружения могут быть получены из соотношений механики сплошной среды [22]:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta} = \left(g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}^0\right)/2; \;\; \Delta\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta} = \left(g_{\alpha\beta}^* - g_{\alpha\beta}\right)/2. \quad (6)$$

Входящие в (6) ковариантные компоненты метрических тензоров в трех рассматриваемых состояниях могут быть определены скалярными произведениями (5):

$$g_{\alpha\beta}^0 = \vec{g}_{\alpha}^{\,0}\cdot\vec{g}_{\beta}^{\,0}; \;\; g_{\alpha\beta} = \vec{g}_{\alpha}\cdot\vec{g}_{\beta}; \;\; g_{\alpha\beta}^* = \vec{g}_{\alpha}^{\,*}\cdot\vec{g}_{\beta}^{\,*}. \quad (7)$$

При использовании второго варианта отсчета угла наклона нормали (4) в соотношениях (6), выражающих приращения деформаций в произвольном слое оболочки через компоненты шагового вектора перемещения и компоненты шагового вектора угла наклона нормали, будут фигурировать как первые, так и вторые производные от компонент шагового вектора перемещения, что повлечет усложнение вычислительного алгоритма. Этим рассматриваемый вариант отличается от первого варианта отсчета угла наклона нормали, при использовании которого в соотношениях приращений деформаций фигурируют только первые производные от компонент вектора шагового перемещения.

2. Матрица жесткости на (*j*+1)-м шаге нагружения

Элементом дискретизации выбирается четырехугольный фрагмент срединной поверхности с узлами в его вершинах. Столбцы шаговых узловых неизвестных в локальной $1 \le \xi, \eta \le 1$ и глобальной x, θ системах координат будут иметь следующий вид:

$$\underset{1\times 44}{\left\{W_y^{\text{Л}}\right\}^{\text{T}}} = \left\{ \underset{1\times 12}{\left\{w_y^{1\text{Л}}\right\}^{\text{T}}} \underset{1\times 12}{\left\{w_y^{2\text{Л}}\right\}^{\text{T}}} \underset{1\times 12}{\left\{w_y^{\text{Л}}\right\}^{\text{T}}} \underset{1\times 4}{\left\{\gamma^1\right\}^{\text{T}}} \underset{1\times 4}{\left\{\gamma^2\right\}^{\text{T}}} \right\};$$

$$\underset{1\times 44}{\left\{W_y^{\Gamma}\right\}^{\text{T}}} = \left\{ \underset{1\times 12}{\left\{w_y^{1\Gamma}\right\}^{\text{T}}} \underset{1\times 12}{\left\{w_y^{2\Gamma}\right\}^{\text{T}}} \underset{1\times 12}{\left\{w_y^{\Gamma}\right\}^{\text{T}}} \underset{1\times 4}{\left\{\gamma^1\right\}^{\text{T}}} \underset{1\times 4}{\left\{\gamma^2\right\}^{\text{T}}} \right\}, \quad (8)$$

где

$$\underset{1\times12}{\left\{q_y^{Л}\right\}^{Т}} = \left\{q^i q^j q^k q^l q^i_{,\xi} q^j_{,\xi} q^k_{,\xi} q^l_{,\xi} q^i_{,\eta} q^j_{,\eta} q^k_{,\eta} q^l_{,\eta}\right\};$$

$$\underset{1\times12}{\left\{q_y^{Г}\right\}^{Т}} = \left\{q^i q^j q^k q^l q^i_{,x} q^j_{,x} q^k_{,x} q^l_{,x} q^i_{,\theta} q^j_{,\theta} q^k_{,\theta} q^l_{,\theta}\right\};$$

$$\underset{1\times4}{\left\{\gamma^{\rho}\right\}^{Т}} = \left\{\gamma^{\rho i}\gamma^{\rho j}\gamma^{\rho k}\gamma^{\rho l}\right\};$$

$q = w^1, w^2, w;\ i, j, k, l$ – узлы четырехугольного элемента дискретизации.

Компонента шагового вектора перемещения и ее первые производные по глобальным координатам точки внутренней области конечного элемента аппроксимируются через узловые значения этой же компоненты с помощью интерполяционных выражений вида

$$q = \underset{1\times12}{\{\varphi\}^{Т}} \underset{12\times1}{\left\{q_y^{Л}\right\}};\quad q_{,\alpha} = \left(\left\{\varphi_{,\xi}\right\}^{Т}\xi_{,\alpha} + \left\{\varphi_{,\eta}\right\}^{Т}\eta_{,\alpha}\right)\left\{q_y^{Л}\right\}, \tag{9}$$

где $\underset{1\times12}{\{\varphi\}^{Т}} = \{\varphi_1\varphi_2...\varphi_{12}\}$ – матрица-строка, элементы которой представляют собой произведение полиномов Эрмита третьей степени.

Для компонент вектора угла наклона нормали γ^{ρ} были использованы интерполяционные зависимости следующего вида:

$$\gamma^{\rho} = \underset{1\times4}{\{\psi\}^{Т}} \underset{4\times1}{\left\{\gamma_y^{\rho}\right\}}, \tag{10}$$

где $\underset{1\times4}{\{\psi\}^{Т}} = \{\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4\}$ – матрица-строка, элементы которой представлены билинейными соотношениями локальных координат $\xi,\ \eta$.

Функционал, выражающий равенство работ внешних и внутренних сил на $(j+1)$-м шаге нагружения, записывается в виде

$$\Pi = \int_V \left\{\Delta\varepsilon^{\zeta}_{\alpha\beta}\right\}^{Т}\left(\left\{\sigma^{\alpha\beta}\right\} + \left\{\Delta\sigma^{\alpha\beta}\right\}\right)dV - \int_F \{w\}^{Т}\left(\{P\} + \{\Delta P\}\right)dF, \tag{11}$$

где $\underset{1\times5}{\left\{\Delta\varepsilon^{\zeta}_{\alpha\beta}\right\}^{Т}} = \left\{\Delta\varepsilon^{\zeta}_{11}2\Delta\varepsilon^{\zeta}_{12}2\Delta\varepsilon^{\zeta}_{13}\Delta\varepsilon^{\zeta}_{22}2\Delta\varepsilon^{\zeta}_{23}\right\}$;

$\underset{1\times5}{\left\{\Delta\sigma^{\alpha\beta}\right\}^{Т}} = \left\{\Delta\sigma^{11}\Delta\sigma^{12}\Delta\sigma^{13}\Delta\sigma^{22}\Delta\sigma^{23}\right\}$ – приращение деформаций и напряжений на $(j+1)$-м шаге нагружения; $\underset{1\times5}{\left\{\sigma^{\alpha\beta}\right\}^{Т}} = \left\{\sigma^{11}\sigma^{12}\sigma^{13}\sigma^{22}\sigma^{23}\right\}$ – напряжения, накопленные за j предыдущих шагов нагружения; $\underset{1\times3}{\{w\}^{Т}} = \left\{w^1w^2w\right\}$ – компоненты шагового вектора перемещения точки срединной поверхности; $\underset{1\times3}{\{P\}^{Т}} = \left\{p^1p^2p^3\right\}$; $\underset{1\times3}{\{\Delta P\}^{Т}} = \left\{\Delta p^1\Delta p^2\Delta p^3\right\}$ – внешняя поверхностная нагрузка за j шагов нагружения и ее приращения на $(j+1)$-м шаге.

Входящий в (11) столбец приращений контравариантных компонент тензора напряжений $\left\{\Delta\sigma^{\alpha\beta}\right\}$ на основании закона Гука [22] может быть выражен через столбец приращений ковариантных компонент тензора деформаций $\left\{\Delta\varepsilon^{\zeta}_{\alpha\beta}\right\}$ матричным способом

$$\underset{1\times5}{\left\{\Delta\sigma^{\alpha\beta}\right\}} = \underset{5\times5}{[C]}\underset{1\times5}{\left\{\Delta\varepsilon^{\zeta}_{\alpha\beta}\right\}}, \tag{12}$$

где $\underset{5\times5}{[C]}$ матрица упругости, при компоновке которой учтена общепринятая в теории оболочек [23] гипотеза о равенстве нулю нормальных напряжений, перпендикулярных срединной поверхности $\sigma^{33} = 0$.

На основании соотношений (6) и аппроксимирующих выражений (9), (10) столбец приращений ковариантных компонент тензора деформаций $\left\{\Delta\varepsilon^{\zeta}_{\alpha\beta}\right\}$ может быть выражен через столбец узловых неизвестных $\left\{W_y^{Л}\right\}$ в виде матричного произведения

$$\underset{5\times1}{\left\{\Delta\varepsilon^{\zeta}_{\alpha\beta}\right\}} = \underset{5\times44}{[B]}\underset{44\times1}{\left\{W_y^{Л}\right\}}. \tag{13}$$

С учетом (12), (13) и аппроксимирующих выражений (9), (10) функционал (11) примет следующий вид:

$$\Pi = \left\{W_y^{Г}\right\}^{Т}[PR]^{Т}\int_V [B]^{Т}[C][B]dV[PR]\left\{W_y^{Г}\right\} + \left\{W_y^{Г}\right\}^{Т}[PR]^{Т}\int_V [B]^{Т}\left\{\sigma^{\alpha\beta}\right\}dV -$$
$$-\left\{W_y^{Г}\right\}^{Т}[PR]^{Т}\int_F [A]^{Т}\{\Delta P\}dF - \left\{W_y^{Г}\right\}^{Т}[PR]^{Т}\int_F [A]^{Т}\{P\}dF, \tag{14}$$

где матрица $[A]$ определяется из равенства $\{w\} = [A]\left\{W_y^{Л}\right\}$.

Выполняя над (14) процедуру минимизации по $\left\{W_y^{Г}\right\}^{Т}$, можно получить следующую систему алгебраических уравнений:

$$[PR]^{Т}\int_V [B]^{Т}[C][B]dV[PR]\left\{W_y^{Г}\right\} = [PR]^{Т}\int_F [A]^{Т}\{\Delta P\}dF -$$
$$-\left([PR]^{Т}\int_V [B]^{Т}\left\{\sigma^{\alpha\beta}\right\}dV - [PR]^{Т}\int_F [A]^{Т}\{P\}dF\right), \tag{15}$$

которую можно записать в более компактном матричном виде:

$$[MG]\left\{W_y^{\Gamma}\right\}=\{f\}-\{NR\}, \qquad (16)$$

где $[MG]=[PR]^{\mathrm{T}}\int\limits_V [B]^{\mathrm{T}}[C][B]dV[PR]$ – матрица жесткости конечного элемента на $(j+1)$-м шаге нагружения; $[f]=[PR]^{\mathrm{T}}\int\limits_F [A]^{\mathrm{T}}\{\Delta P\}dF$ – столбец узловых усилий на $(j+1)$-м шаге нагружения; $\{NR\}$ – поправка Ньютона – Рафсона.

3. Пример расчета

В качестве примера была решена задача по определению НДС цилиндрической панели, жестко защемленной по образующим и загруженной сосредоточенной силой *P* в середине пролета. При формировании матрицы жесткости и столбца узловых усилий конечного элемента использовались соотношения первого варианта отсчета углов наклона нормали как наиболее удобные с точки зрения организации вычислительной процедуры. Вследствие наличия плоскостей симметрии рассчитывалась 1/4 часть оболочки, которая представлялась одной полоской конечных элементов, ориентированных в кольцевом направлении.

Были приняты следующие исходные данные: радиус цилиндра $R=3{,}381$ м; толщина оболочки $t=0{,}00476$ м; модуль упругости $E=7\cdot10^4$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu=0{,}2$; величина сосредоточенной силы $P=12{,}7$ Н; длина образующих – 0,0254 м.

Первоначально решалась задача в линейной постановке с целью установления необходимого числа элементов дискретизации.

Результаты линейного расчета представлены в табл. 1: приведены численные значения нормальных напряжений на внутренней $\sigma^{\text{в}}$ и наружной $\sigma^{\text{н}}$ поверхностях оболочки в жесткой заделке, а также напряжения и прогиб в точке приложения сосредоточенной силы *P* в зависимости от числа элементов дискретизации.

Таблица 1

Значения напряжений и прогиба при решении задачи в линейной постановке
[*Table 1.* Values of stresses and deflection when solving a problem in a linear formulation]

Координата точки, θ, рад [Point coordinate, θ, radian]	Напряжение σ МПа, прогиб v, см [Voltage σ MPa, deflection v, cm]	Количество элементов дискретизации [Number of sample elements]					Известное решение [Known solution]
		20	30	40	50	60	
0,0, точка приложения силы *P* [0.0, point of application of force *P*]	$\sigma_{11}^{\text{в}}$	–1,67	–1,30	–1,06	–0,91	–0,8	–
	$\sigma_{11}^{\text{н}}$	2,68	2,31	2,07	1,92	1,81	–
	$\sigma_{22}^{\text{в}}$	41,17	43,55	44,82	45,63	46,23	–
	$\sigma_{22}^{\text{н}}$	–56,34	–58,74	–60,02	–60,85	–61,45	–
	v	–0,239	–0,240	–0,241	–0,241	–0,234	–0,241
0,128, жесткая заделка [0.128, hard fix]	$\sigma_{11}^{\text{в}}$	9,07	9,94	10,46	10,83	11,11	–
	$\sigma_{11}^{\text{н}}$	–11,78	–12,58	–13,09	–13,45	–13,74	–
	$\sigma_{22}^{\text{в}}$	45,30	49,61	52,21	54,06	55,48	–
	$\sigma_{22}^{\text{н}}$	–58,99	–63,03	–65,55	–67,39	–68,82	–

Таблица 2

Значения напряжений и прогиба при решении задачи в нелинейной постановке
[*Table 2.* Values of stresses and deflection when solving a problem in a nonlinear formulation]

Напряжение σ МПа, прогиб v, см [Voltage σ MPa, deflection v, cm]	Число шагов нагружения [Number of sample elements]						Известное решение [Known solution]
	50	100	150	200	250	300	
$\sigma_{22}^{\text{в}}$	63,71	67,32	67,92	68,13	68,23	68,29	–
$\sigma_{22}^{\text{н}}$	–85,84	–84,96	–85,19	–85,34	–85,42	–85,48	–
v	–0,422	–0,429	–0,431	–0,432	–0,432	–0,432	–0,437

Как видно из табл. 1, при увеличении числа элементов дискретизации наблюдается сходимость вычислительного процесса как по напряжениям, так и по прогибу в точке приложения сосредоточенной нагрузки. В крайней правой колонке представлено известное линейное решение [24].

Из анализа данных табл. 1 можно сделать вывод, что разбиение 1/4 части исследуемой оболочки на 50 конечных элементов вполне достаточно, поэтому для решения задачи в нелинейной постановке было выбрано данное число элементов дискретизации.

Результаты расчетов в геометрически нелинейной постановке представлены в табл. 2: приведены «физические» значения нормальных напряжений σ_{22} и величина прогиба в точке приложения сосредоточенной силы в зависимости от числа шагов нагружения. Как видно из данной таблицы, с увеличением числа шагов нагружения наблюдается устойчивая сходимость вычислительного процесса, как по напряжениям, так и по прогибу. В крайней правой колонке приведено значение прогиба под сосредоточенной силой *P*, взятое из [24]. Вычисленное по разработанному в статье алгоритму значение прогиба оказалось заниженным по сравнению с представленным в [24] всего на 1 %.

Кроме того, следует отметить, что при увеличении количества элементов дискретизации и числа шагов нагружения величина прогиба будет монотонно возрастать.

Заключение

На основании анализа табличных данных можно сделать вывод, что разработанный алгоритм позволяет получать приемлемые по точности значения параметров напряженно-деформированного состояния тонких оболочек с учетом деформаций сдвига при расчете их в геометрически нелинейной постановке.

Список литературы

1. *Krivoshapko S.N., Gbaguidi-Aisse G.L.* Geometry, static, vibration and bucking analysis and applications to thin elliptic paraboloid shells // The Open Construction and Building Technology Journal. 2016. Vol. 10. Pp. 3–28.

2. *Крылова Е.Ю., Папкова И.В., Салтыкова О.А., Синичкина А.О., Крысько В.А.* Математическая модель колебаний размерно-зависимых цилиндрических оболочек сетчатой структуры с учетом гипотез Кирхгофа – Лява // Нелинейный мир. 2018. Т. 16. № 4. С. 17–28.

3. *Пятикрестовский К.П., Травуш В.И.* О программировании нелинейного метода расчета деревянных конструкций // Academia. Архитектура и строительство. 2015. № 2. С. 115–119.

4. *Ким А.Ю., Полников С.В.* Сравнение экспериментального и численного исследования большепролетного пневматического линзообразного сооружения // Научное обозрение. 2016. № 15. С. 36–41.

5. *Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М.* Метод определения напряженно-деформированного состояния трехмерных конструкций сложной формы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 1. С. 36–42.

6. *Козлов В.А.* Напряженно-деформированное состояние многосвязных призматических конструкций, закрепленных по скошенному сечению // Научный журнал строительства и архитектуры. 2015. № 4 (40). С. 11–17.

7. *Каюмов Р.А., Шакирзянов Ф.Р., Гаврюшин С.С.* Моделирование процесса деформирования и оценка несущей способности системы грунт – тонкостенная конструкция // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2014. № 6. С. 20–24.

8. *Игнатьев А.В., Игнатьев В.А., Гамзатова Е.А.* Расчет тонких пластин по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода с исключением перемещений конечных элементов как жесткого целого // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2018. № 3 (711). С. 5–13.

9. *Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф.* Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: Физматлит. 2006. 392 с.

10. *Железнов Л.П., Кабанов В.В., Бойко Д.В.* Нелинейное деформирование и устойчивость дискретно подкрепленных эллиптических цилиндрических композитных оболочек при кручении и внутреннем давлении // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2018. № 2. С. 27–34.

11. *Tyukalov Yu.Ya.* Finite element models in stresses for bending plates // Инженерно-строительный журнал. 2018. № 6 (82). С. 170–190.

12. *Агапов В.П., Айдемиров К.Р.* Расчет ферм методом конечных элементов с учетом геометрической нелинейности // Промышленное и гражданское строительство. 2016. № 11. С. 4–7.

13. *Белостоцкий А.М., Акимов П.А., Аул А.А., Дмитриев Д.С., Дядченко Ю.Н., Нагибович А.И., Островский К.И., Павлов А.С.* Расчетное обоснование механической безопасности стадионов к чемпионату мира по футболу 2018 года // Academia. Архитектура и строительство. 2018. № 3. С. 118–129.

14. *Nguyen N., Waas A.M.* Nonlinear, finite deformation, finite element analysis // Z. Angew. Math. Phys. 2016. No. 9(67). Pp. 351–352. https://doi.org/10.1007/s00033-016-0623-5

15. *Lei Z., Gillot F., Jezequel L.* Developments of the mixed grid isogeometric Reissner – Mindlin shell: serendipity basis and modified reduced quadrature // Int. J. Mech. 2015. Vol. 54. Pp. 105–119.

16. *Hanslo P., Larson M.G., Larson F.* Tangential differential calculus and the finite element modeling of a large deformation elastic membrane problem // Comput. Mech. 2015. Vol. 56. No. 1. Pp. 87–95.

17. *Yamashita Hirok, Valkeapaa Antti I., Jayakumar Paramsothy, Syqiyama Hiroyuki.* Continuum mechanics based

bilinear shear deformable shell element using absolute nodal coordinate formulation // Trans. ASME. J. Comput. and Nonlinear Dyn. 2015. Vol. 10. No. 5. Pp. 051012/1– 051012/9.

18. *Ren Hui.* Fast and robust full-guad-rature triangular elements for thin plates/ shells, with large deformations and large rotations // Trans. ASME. J. Comput. and Nonlinear Dyn. 2015. Vol. 10. No 5. Pp. 051018/1–051018/13.

19. *Sartorato M., Medeiros R., Tita V.* A finite element formulation for smart piezollectric composite shells: Mathematical formulation, computational analysis and experimental evaluation // Compos. Struct. 2015. No. 127(1). Pp. 185–198.

20. *Lalin V., Rybakov V., Sergey A.* The finite elements for design of frame of thin-walled beams // Applied Mechanics and Materials. 2014. Vol. 578–579. Pp. 858–863. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amm.578-579.858

21. *Рикардс Р.Б.* Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига: Зинатне, 1988. 248 с.

22. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1976. 574 с.

23. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. СПб: Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 2010. 378 с.

24. *Papenhausen J.* Eine energiegrechte, incrementelle for mulierung der geometrisch nichtlinearen Theorie elastischer Kontinua und ihre numerische Behandlung mit Hilfe finite Elemente // Techn. – Wiss. Mitt. Jnst. Konstr. Jngenierlau Ruhr. Univ. Bochum. 1975. No. 13 III. 133 p.

RESEARCH PAPER

Accounting for geometric nonlinearity in finite element strength calculations of thin-walled shell-type structures

Yuriy V. Klochkov[1*], Anatoliy P. Nikolaev[1], Tlek R. Ishchanov[1], Alexandr S. Andreev[1], Mikhail Yu. Klochkov[2]

[1]*Volgograd State Agricultural University, 26 Universitetskii Ave., Volgograd, 400002, Russian Federation*
[2]*Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskiye Gory, Moscow, 119899, Russian Federation*
*klotchkov@bk.ru

Article history:
Received: November 22, 2019
Revised: January 14, 2020
Accepted: January 25, 2020

Acknowledgements:
The investigation was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research and the Administration of the Volgograd Region as part of the research project No. 19-41-343003 р_мол_а.

For citation
Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Ishchanov T.R., Andreev A.S., Klochkov M.Yu. Accounting for geometric nonlinearity in finite element strength calculations of thin-walled shell-type structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2020;16(1): 31–37. http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-31-37. (In Russ.)

Abstract
Relevance. Currently, in connection with the wider spread of large-span thin-walled structures such as shells, an urgent issue is the development of computational algorithms for the strength calculation of such objects in a geometrically nonlinear formulation. Despite a significant number of publications on this issue, a rather important aspect remains the need to improve finite element models of such shells that would combine the relative simplicity of the resolving equations, allowance for shear deformations, compactness of the stiffness matrix being formed, the facilitated possibility of modeling and changing boundary conditions and etc. ***The aim of the work*** is to develop a finite element algorithm for calculating a thin shell with allowance for shear deformations in a geometrically nonlinear formulation using a finite element with a limited number of variable nodal parameters. ***Methods.*** As research tools, the numerical finite element method was chosen. The basic geometric relations between the increment of deformations and the increment of the components of the displacement vector and the increment of the components of the normal vector angle are obtained in two versions of the normal angle of the reference. The stiffness matrix and the column of nodal forces of the quadrangular finite element at the loading step were obtained by minimizing the Lagrange functional. ***Results.*** On the example of calculating a cylindrical panel rigidly clamped at the edges under the action of a concentrated force, the efficiency of the developed algorithm was shown in a geometrically nonlinear setting, taking into account the transverse shear strain.

Keywords: geometric nonlinearity; shell structure; step loading; nodal unknowns; quadrangular finite element; shear deformations, normal inclination

References

1. Krivoshapko S.N., Gbaguidi-Aisse G.L. Geometry, static, vibration and bucking analysis and applications to thin elliptic paraboloid shells. *The Open Construction and Building Technology Journal.* 2016;(10):3–28.

2. Krylova Ye.Yu., Papkova I.V., Saltykova O.A., Sinichkina A.O., Krys'ko V.A. Mathematical model of vibrations of the cylindrical shells, which are dimensionally dependent with the net structure, taking into account the Kirchhoff – Love hypotheses. *Nonlinear World.* 2018;16(4): 17–28. (In Russ.)

3. Pyatikrestovskiy K.P., Travush V.I. Nonlinear Method Programming for Calculations of Statically Indeterminate Wooden Structures and Software Systems' Communication to Development of Improved Design Standards. *Academia. Architecture and construction.* 2015;(2): 115–119. (In Russ.)

Yuriy V. Klochkov, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Higher Mathematics; eLIBRARY SPIN-code: 9436-3693, Scopus ID: 57170472500.
Anatoliy P. Nikolaev, Doctor of Technical Sciences, Professor; eLIBRARY SPIN-code: 2653-5484, Scopus ID: 7202396806.
Tlek R. Ishchanov, Candidate of Technical Sciences, senior lecturer of the Department of Higher Mathematics; eLIBRARY SPIN-code: 1556-1368, AuthorID: 864483.
Alexander S. Andreev, senior lecturer of the Department of Higher Mathematics; eLIBRARY SPIN-code: 7568-5011, Scopus ID: 57209523986.
Mikhail Yu. Klochkov, 4th-year student of the Faculty of Physics; eLIBRARY SPIN-code: 2767-3955, AuthorID: 971170.

4. Kim A.Yu., Polnikov S.V. Comparing the experimental and computational investigations of longspan air lentiform structure. *Nauchnoe obozrenie* [*Scientific review*]. 2016;(15):36–41. (In Russ.)

5. Khayrullin F.S., Sakhbiev O.M. A method of determination of stress-strain state of 3D structures of complex form. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2016;(1):36–42. (In Russ.)

6. Kozlov V.A. Stress and strain of multiply connected prismatic structures, mounted on a skewed cross-section. *Russian Journal of Building Construction and Architecture*. 2015;4(40):11–17. (In Russ.)

7. Kayumov R.A., Shakirzyanov F.R., Gavryushin S.S. Modeling of the deformation process and evaluation of the bearing capacity of a thin-walled structure in the ground. *Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*. 2014;(6):20–24. (In Russ.)

8. Ignat'ev A.V., Ignat'ev V.A., Gazmatova E.A. Calculation of thin plates by the method of finite elements in the form of the classical mixed method with the exception of the movement of finite elements as a rigid whole. *News of Higher Educational Institutions. Building.* 2018;3(711):5–13. (In Russ.)

9. Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F. *Metod konechnih elementov v statike i dinamike tonkostennyh konstruktsiy* [*The finite element method in statics and dynamics of thin-walled structures*]. Moscow: Fizmatlit Publ; 2006. (In Russ.)

10. Zheleznov L.P., Kabanov V.V., Boiko D.V. Nelineynoye deformirovaniye i ustoychivost' diskretno podkreplennykh ellipticheskikh tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek pri kruchenii i vnutrennem davlenii [Nonlinear Deformation and Stability of Discrete-Reinforced Elliptical Cylindrical Composite Shells under Torsion and Internal Pressure]. *Izv. VUZov. Aviatsionnaya tekhnika.* 2018;(2):27–34. (In Russ.)

11. Tyukalov Yu.Ya. Finite element models in stresses for bending plates. *Magazine of Civil Engineering*. 2018; 6(82):170–190. doi: 10.18720/MCE.82.16.

12. Agapov V.P., Aydemirov K.R. Calculation of Trusses by Finite-Element Method with Due Regard for Geometric Non-Linearity. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo* [*Industrial and civil engineering*]. 2016;(11):4–7. (In Russ.)

13. Belostotskiy A.M., Akimov P.A., Aul A.A., Dmitriyev D.S., Dyadchenko Yu.N., Nagibovich A.I., Ostrovskiy K.I., Pavlov A.S. Analysis of Mechanical Safetyof Stadiums for the World Cup 2018. *Academia. Architecture and construction*. 2018;(3):118–129. (In Russ.)

14. Nguyen N., Waas A. Nonlinear, finite deformation, finite element analysise. *Z. Angew. Math. Phys.* 2016; 9(67):351–352. https://doi.org/10.1007/s00033-016-0623-5

15. Lei Z., Gillot F., Jezequel L. Developments of the mixed grid isogeometric Reissner – Mindlin shell: serendipity basis and modified reduced quadrature. *Int. J. Mech.* 2015;(54):105–119.

16. Hanslo P., Larson M.G., Larson F. Tangential differential calculus and the finite element modeling of a large deformation elastic membrane problem. *Comput. Mech*. 2015;56(1):87–95.

17. Yamashita H., Valkeapaa A.I., Jayakumar P., Syqiyama H. Continuum mechanics based bilinear shear deformable shell element using absolute nodal coordinate formulation. *Trans. ASME. J. Comput. And Nonlinear Dyn.* 2015;10(5):051012,1–051012,9.

18. Ren H. Fast and robust full-guad-rature triangular elements for thin plates/shells, with large deformations and large rotations. *Trans. ASME. J. Comput. And Nonlinear Dyn*. 2015;10 (5):051018/1–051018/13.

19. Sartorato M., Medeiros R., Tita V. A finite element formulation for smart piezollectric composite shells: Mathematical formulation, computational analysis and experimental evaluation. *Compos. Struct*. 2015;127(1):185–198.

20. Lalin V., Rybakov V., Sergey A. The Finite Elements for Design of Frame of Thin-Walled Beams. *Applied Mechanics and Materials*. 2014;578–579:858–863. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amm.578-579.858

21. Rikards R.B. *Metod konechnykh elementov v teorii obolochek i plastin* [*Finite element method in the theory of shells and plates*]. Riga: Zinatne Publ.; 1988. (In Russ.)

22. Sedov L.I. *Mehanika sploshnoi sredi* [*Continuum mechanics*]. Moscow: Nauka Publ.; 1976. (In Russ.)

23. Novozhilov V.V. *Teoriya tonkikh obolochek* [*Theory of thin shells*]. Saint Petersburg: Publishing House of Saint Petersburg University; 2010. (In Russ.)

24. Papenhausen J. Eine energiegrechte, incrementelle for mulierung der geometrisch nichtlinearen Theorie elastischer Kontinua und ihre numerische Behandlung mit Hilfe finite Elemente. *Techn. – Wiss. Mitt. Jnst. Konstr. Jngenierlau Ruhr. Univ. Bochum*. 1975;13(III):133.