2019. 15(6). 477–482

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

HTTP://JOURNALS.RUDN.RU/STRUCTURAL-MECHANICS

DOI 10.22363/1815-5235-2019-15-6-477-482
УДК 539.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Математическое моделирование нестационарных упругих волн напряжений в консоли с основанием (полуплоскость) при фундаментальном сейсмическом воздействии

В.К. Мусаев

Российский университет транспорта, Российская Федерация, 127994, Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9
Мингячевирский государственный университет, Азербайджанская Республика, AZ4500, Мингячевир, ул. Диляра Алиева
musayev-vk@yandex.ru

История статьи:
Поступила в редакцию: 01 октября 2019 г.
Доработана: 27 ноября 2019 г.
Принята к публикации: 01 декабря 2019 г.

Аннотация

Целью работы является рассмотрение проблем численного моделирования сейсмической безопасности консоли с основанием в виде упругой полуплоскости при нестационарных волновых воздействиях. Волны напряжений различной природы, распространяясь в деформируемом теле, взаимодействуют друг с другом. После трехкратного или четырехкратного прохождения и отражения волн напряжений в теле процесс распространения возмущений становится установившимся, тело находится в колебательном движении. Проблема моделирования задач переходного периода является актуальной фундаментальной и прикладной научной задачей. ***Методы.*** Для решения двумерной плоской динамической задачи теории упругости с начальными и граничными условиями применяется метод конечных элементов в перемещениях. На основе этого метода разработаны алгоритм и комплекс программ для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют проводить расчеты при нестационарных волновых воздействиях на сложные системы. При разработке комплекса программ использовался алгоритмический язык «Фортран-90». Исследуемая область разбивалась по пространственным переменным на конечные элементы первого порядка. По временной переменной исследуемая область также разбивалась на конечные элементы первого порядка. ***Результаты.*** Рассмотрена задача о воздействии плоской продольной упругой волны в виде функции Хевисайда на консоль с основанием (соотношение ширины к высоте один к десяти). Начальные условия приняты нулевыми. Решена система уравнений из 16 016 084 неизвестных. В характерных областях исследуемой задачи получены контурные напряжения и компоненты тензора напряжений. На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы: консоль (соотношение ширины к высоте один к десяти) моделируется с упругим основанием в виде упругой полуплоскости; упругие контурные напряжения на гранях консоли являются почти зеркальным отражением друг друга, то есть антисимметричными; консоль при сейсмическом воздействии работает как стержень переменного сечения, то есть если на одной грани растягивающие напряжения, то на другой – сжимающие напряжения; на контурах консоли при сейсмическом воздействии в основном преобладают изгибные волны.

Ключевые слова: математическое моделирование; волновая теория сейсмической безопасности; динамическая теория упругости; сейсмическое воздействие; фундаментальное воздействие; консоль; упругая полуплоскость; контурное напряжение, изгибные волны

Для цитирования
Мусаев В.К. Математическое моделирование нестационарных упругих волн напряжений в консоли с основанием (полуплоскость) при фундаментальном сейсмическом воздействии // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 6. С. 477–482. http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-477-482

Мусаев Вячеслав Кадыр оглы, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры техносферной безопасности РУТ (МИИТ); eLIBRARY SPIN-код: 8162-1906, ORCID iD: 0000-0003-4336-6785.

Введение

Импульсное воздействие характеризуется внезапностью приложения и кратковременностью действия. В деформируемом теле при импульсном воздействии возникают возмущения различной природы. Волны напряжений различной природы, распространяясь в деформируемом теле, взаимодействуют друг с другом, что приводит к образованию новых областей возмущений, перераспределению напряжений и деформаций. После трехкратного или четырехкратного прохождения и отражения волн напряжений в теле процесс распространения возмущений становится установившимся, напряжения и деформации усредняются, тело находится в колебательном движении.

Некоторые вопросы в области моделирования нестационарных динамических задач рассмотрены в работах [1–11].

В [6–9; 10] приведена информация о физической достоверности и математической точности моделирования нестационарных волн напряжений в деформируемых телах с помощью рассматриваемых численного метода, алгоритма и комплекса программ.

1. Постановка задачи

Для решения задачи о моделировании нестационарных упругих волн в деформируемых областях сложной формы рассмотрим некоторое тело Γ в прямоугольной декартовой системе координат *XOY*, которому в начальный момент времени $t = 0$ сообщается механическое воздействие. Предположим, что тело Γ изготовлено из однородного изотропного материала, подчиняющегося упругому закону Гука при малых упругих деформациях.

Точные уравнения двумерной (плоское напряженное состояние) динамической теории упругости имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

$$(x,y)\in\Gamma,\quad \sigma_x=\rho C_p^2\varepsilon_x+\rho(C_p^2-2C_s^2)\varepsilon_y,$$

$$\sigma_y=\rho C_p^2\varepsilon_y+\rho(C_p^2-2C_s^2)\varepsilon_x,\quad \tau_{xy}=\rho C_s^2\gamma_{xy},$$

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$(x,y)\in(\Gamma\cup S), \tag{1}$$

где σ_x, σ_y и τ_{xy} – компоненты тензора упругих напряжений; ε_x, ε_y и γ_{xy} – компоненты тензора упругих деформаций; u и v – составляющие вектора упругих перемещений вдоль осей OX и OY соответственно; ρ – плотность материала; $C_p=\sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ – скорость продольной упругой волны; $C_s=\sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$ – скорость поперечной упругой волны; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости; $S\ (S_1\cup S_2)$ – граничный контур тела Γ.

Систему (1) в области, занимаемой телом Γ, следует интегрировать при начальных и граничных условиях.

Для решения двумерной плоской динамической задачи теории упругости с начальными и граничными условиями (1) используем метод конечных элементов в перемещениях.

2. Методика

Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов. Чтобы выполнить динамический расчет методом конечных элементов, нужно иметь матрицу жесткости и матрицу инерции конечного элемента.

Принимая во внимание определение матриц и векторов для тела Γ, записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости:

$$\overline{H}\ddot{\vec{\Phi}}+\overline{K}\vec{\Phi}=\vec{R},$$

$$\vec{\Phi}\Big|_{t=0}=\vec{\Phi}_0,$$

$$\dot{\vec{\Phi}}\Big|_{t=0}=\dot{\vec{\Phi}}_0, \tag{2}$$

где $\overline{H}$ – матрица инерции; $\overline{K}$ – матрица жесткости; $\vec{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений; $\dot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих скоростей перемещений; $\ddot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих ускорений; $\vec{R}$ – вектор узловых упругих внешних сил.

Для интегрирования уравнения (2) конечноэлементным вариантом метода Галеркина приведем его к следующему виду:

$$\overline{H}\frac{d}{dt}\dot{\vec{\Phi}}+\overline{K}\vec{\Phi}=\vec{R},$$

$$\frac{d}{dt}\vec{\Phi}=\dot{\vec{\Phi}}. \tag{3}$$

Интегрируя по временной координате соотношение (3) с помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина, получим двумерную явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек:

$$\vec{\dot{\Phi}}_{i+1} = \vec{\dot{\Phi}}_i + \Delta t \bar{H}^{-1}(-\bar{K}\vec{\Phi}_i + \vec{R}_i),$$

$$\vec{\Phi}_{i+1} = \vec{\Phi}_i + \Delta t \vec{\dot{\Phi}}_{i+1}, \tag{4}$$

где: Δt – шаг по временной координате.

Система уравнений (4) для внутренних и граничных узловых точек, полученная в результате интегрирования уравнения движения теории упругости, должна давать решение, сходящееся к решению исходной системы.

Шаг по временной переменной Δt определяем из соотношения

$$\Delta t = k \frac{\min \Delta l_i}{C_p} \ (i = 1,\ 2,\ 3,\ ...,\ r), \tag{5}$$

где Δl – длина стороны конечного элемента; r – число конечных элементов.

Результаты численного эксперимента показали, что при k = 0,5 обеспечивается устойчивость двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы.

На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны алгоритм и комплекс программ для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют производить расчеты при нестационарных волновых воздействиях на сложные системы. При разработке комплекса программ использовался алгоритмический язык «Фортран-90». Исследуемая область разбивалась по пространственным переменным на конечные элементы первого порядка. По временной переменной исследуемая область также разбивалась на конечные элементы первого порядка.

3. Результаты

Расчеты проводились при следующих единицах измерения: килограмм-сила (кгс); сантиметр (см); секунда (с). Для перехода в другие единицы измерения были приняты следующие допущения: 1 кгс/см^2 ≈ 0,1 МПа; 1 кгс с^2/см^4 ≈ 10^9 кг/м^3.

Рассматривалась задача о воздействии плоской продольной упругой волны в виде функции Хевисайда на консоль с основанием (соотношение ширины к высоте один к десяти) (рис. 1).

Начальные условия приняты нулевыми. От точки F параллельно свободной поверхности $ABEFG$ приложено нормальное напряжение σ_x, которое при $0 \le n \le 11$ ($n = t/\Delta t$) изменяется линейно от 0 до P, а при $n \ge 11$ равно P ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = 0{,}1$ МПа (1 кгс/см^2)).

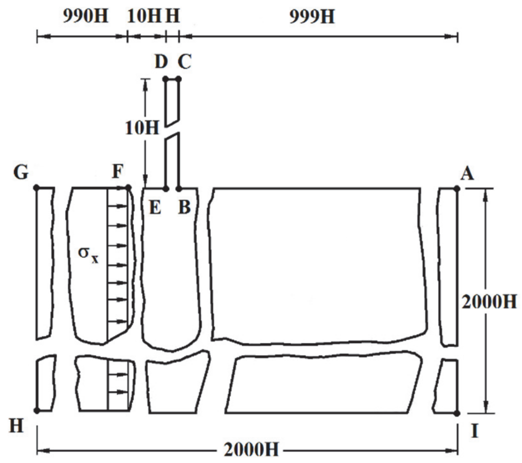

Рис. 1. Постановка задачи для консоли (соотношение ширины к высоте один к десяти) с упругим основанием (полуплоскость)
[**Figure 1.** Problem statement for a console (width-to-height ratio of one to ten) with an elastic base (half-plane)]

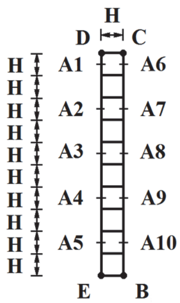

Рис. 2. Точки, в которых получены контурные напряжения в консоли
[**Figure 2**. The points at which the contour voltages in the console are obtained]

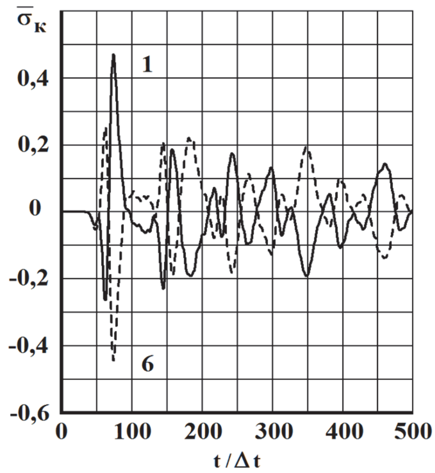

Рис. 3. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точках 1 и 6 на контуре консоли во времени $t/\Delta t$
[**Figure 3.** The change of elastic contour stress $\bar{\sigma}_k$ at points 1 and 6 on the console loop in time $t/\Delta t$]

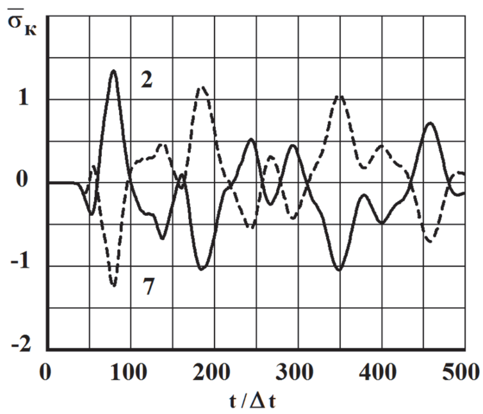

Рис. 4. Изменение упругого контурного напряжения $\overline{\sigma}_k$ в точках 2 и 7 на контуре консоли во времени $t / \Delta t$
[**Figure 4.** The change of elastic contour stress $\overline{\sigma}_k$ at points 2 and 7 on the console loop in time $t / \Delta t$]

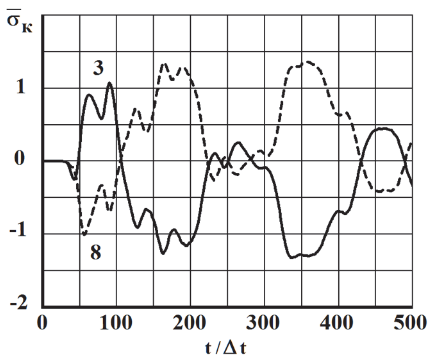

Рис. 5. Изменение упругого контурного напряжения $\overline{\sigma}_k$ в точках 3 и 8 на контуре консоли во времени $t / \Delta t$
[**Figure 5.** The change of elastic contour stress $\overline{\sigma}_k$ at points 3 and 8 on the console loop in time $t / \Delta t$]

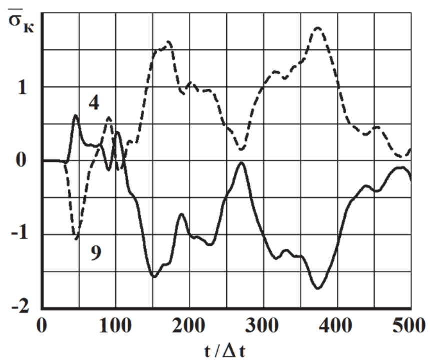

Рис. 6. Изменение упругого контурного напряжения $\overline{\sigma}_k$ в точках 4 и 9 на контуре консоли во времени $t / \Delta t$
[**Figure 6.** The change of elastic contour stress $\overline{\sigma}_k$ at points 4 and 9 on the console loop in time $t / \Delta t$]

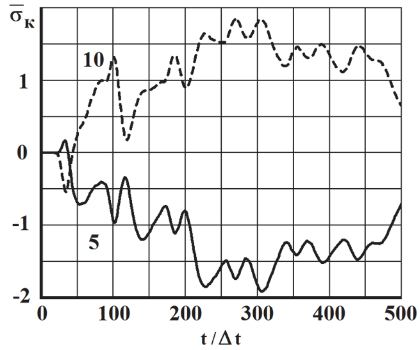

Рис. 7. Изменение упругого контурного напряжения $\overline{\sigma}_k$ в точках 5 и 10 на контуре консоли во времени $t / \Delta t$
[**Figure 7**. The change of elastic contour stress $\overline{\sigma}_k$ at points 5 and 10 on the console loop in time $t / \Delta t$]

Граничные условия для контура $GHIA$ при $t > 0 \quad u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура $GHIA$ не доходят до исследуемых точек при $0 \le n \le 500$. Контур $ABCDEFG$ свободен от нагрузок, кроме точки F. Решается система уравнений из 16 016 084 неизвестных.

На рис. 3–7 показано изменение контурных напряжений $\overline{\sigma}_k$ в консоли (рис. 2) во времени $t / \Delta t$.

Заключение

Консоль (соотношение ширины к высоте один к десяти) моделируется с упругим основанием в виде упругой полуплоскости.

Упругие контурные напряжения на гранях консоли являются почти зеркальным отражением друг друга, то есть антисимметричными.

Консоль при сейсмическом воздействии работает как стержень переменного сечения, то есть если на одной грани – растягивающие напряжения, то на другой – сжимающие напряжения.

На контурах консоли при сейсмическом воздействии в основном преобладают изгибные волны.

Список литературы

1. *Кольский Г.* Волны напряжений в твердых телах. М.: Иностранная литература, 1955. 192 с.

2. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 543 с.

3. *Тимошенко С.П., Гудьер Д.* Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.

4. *Мусаев В.К.* О моделировании сейсмической волны параллельной свободной поверхности упругой полуплоскости // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2009. № 4. С. 61–64.

5. *Спиридонов В.П.* Определение некоторых закономерностей волнового напряженного состояния в

геообъектах с помощью численного метода, алгоритма и комплекса программ Мусаева В.К. // Современные наукоемкие технологии. 2015. № 12–5. С. 832–835.

6. *Дикова Е.В.* Достоверность численного метода, алгоритма и комплекса программ Мусаева В.К. при решении задачи о распространении плоских продольных упругих волн (восходящая часть – линейная, нисходящая часть – четверть круга) в полуплоскости // Международный журнал экспериментального образования. 2016. № 12–3. С. 354–357.

7. *Стародубцев В.В., Акатьев С.В., Мусаев А.В., Шиянов С.М., Куранцов О.В.* Моделирование упругих волн в виде импульсного воздействия (восходящая часть – четверть круга, нисходящая часть – четверть круга) в полуплоскости с помощью численного метода Мусаева В.К. // Проблемы безопасности российского общества. 2017. № 1. С. 36–40.

8. *Стародубцев В.В., Акатьев С.В., Мусаев А.В., Шиянов С.М., Куранцов О.В.* Моделирование с помощью численного метода Мусаева В.К. нестационарных упругих волн в виде импульсного воздействия (восходящая часть – четверть круга, средняя – горизонтальная, нисходящая часть – линейная) в сплошной деформируемой среде // Проблемы безопасности российского общества. 2017. № 1. С. 63–68.

9. *Куранцов В.А., Стародубцев В.В., Мусаев А.В., Самойлов С.Н., Кузнецов М.Е.* Моделирование импульса (первая ветвь: восходящая часть – четверть круга, нисходящая часть – линейная; вторая ветвь: треугольник) в упругой полуплоскости с помощью численного метода Мусаева В.К. // Проблемы безопасности российского общества. 2017. № 2. С. 51–55.

10. *Мусаев В.К.* Применение волновой теории сейсмического воздействия для моделирования упругих напряжений в Курпсайской плотине с грунтовым основанием при незаполненном водохранилище // Геология и геофизика Юга России. 2017. № 2. С. 98–105.

11. *Musayev V.K.* Mathematical modeling of non-stationary elastic waves stresses under a concentrated vertical exposure in the form of delta functions on the surface of the half-plane (Lamb problem) // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2019. Vol. 15. Issue 2. Pp. 111–124.

RESEARCH PAPER

Mathematical modeling of unsteady elastic stress waves in a console with a base (half-plane) under fundamental seismic action

Vyacheslav K. Musayev

Russian University of Transport, 9 Obraztsova St., bldg. 9, Moscow, 127994, Russian Federation
Mingachevir State University, Dilyara Alieva St., Mingachevir, AZ4500, Republic of Azerbaijan
*musayev-vk@yandex.ru

Article history:
Received: October 01, 2019
Revised: November 27, 2019
Accepted: December 01, 2019

Abstract

The aim of the work is to consider the problems of numerical modeling of seismic safety of the console with the base in the form of an elastic half-plane under unsteady wave influences. Stress waves of different nature, propagating in the deformed body interact with each other. After three or four times the passage and reflection of stress waves in the body, the process of propagation of disturbances becomes steady, the body is in oscillatory motion. The problem of modeling problems of the transition period is an actual fundamental and applied scientific problem. ***Methods.*** The finite element method in displacements is used to solve the two-dimensional plane dynamic problem of elasticity theory with initial and boundary conditions. On the basis of the finite element method in displacements, an algorithm and a set of programs for solving linear plane two-dimensional problems have been developed, which allow solving problems with non-stationary wave effects on complex systems. The algorithmic language "Fortran-90" was used in the development of the complex of programs. The study area is divided by spatial variables into finite elements of the first order. According to the time variable, the study area is also divided into finite elements of the first order. ***Results.*** The problem of the influence of a plane longitudinal elastic wave in the form of a Heaviside function on a console with a base (the ratio of width to height is one to ten) is considered. The initial conditions are taken as zero. The system of equations from 16 016 084 unknowns is solved. Contour stresses and stress tensor components are obtained in characteristic areas of the problem. On the basis of the conducted researches it is possible to draw the following conclusions: the console (the ratio of

Musayev Vyacheslav Kadyr ogly, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Technosphere Safety of the RUT (MIIT); eLIBRARY SPIN-code: 8162-1906, ORCID iD: 0000-0003-4336-6785.

For citation
Musayev V.K. (2019). Mathematical modeling of unsteady elastic stress waves in a console with a base (half-plane) under fundamental seismic action. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings, 15*(6), 477–482. http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-477-482. (In Russ.)

width to height one to ten) is modeled with the elastic basis in the form of an elastic half-plane; the elastic contour stresses on the faces of the console are almost a mirror image of one another, that is, antisymmetric; the console under seismic action works as a rod of variable cross-section, that is, if there are tensile stresses on one face, then compressive stresses on the other; on the contours of the console under seismic action, bending waves mainly prevail.

Keywords: mathematical modeling; wave theory of seismic safety; dynamic theory of elasticity; seismic impact; fundamental impact; console; elastic half-plane; contour stress; bending waves

References

1. Kolsky G. (1955). *Volny napryazhenij v tverdyh telah* [*Stress waves in solids*]. Moscow, Inostrannaya literatura Publ. (In Russ.)

2. Zenkevich O. (1975). *Metod konechnyh ehlementov v tekhnike* [*Finite element method in engineering*]. Moscow, Mir Publ. (In Russ.)

3. Timoshenko S.P., Gudyer D. (1975). *Teoriya uprugosti* [*Theory of elasticity*]. Moscow, Nauka Publ. (In Russ.)

4. Musaev V.K. (2009). O modelirovanii sejsmicheskoj volny parallel'noj svobodnoj poverhnosti uprugoj poluploskosti [On modeling of a seismic wave parallel to the free surface of an elastic half plane]. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, (4), 61–64. (In Russ.)

5. Spiridonov V.P. (2105). Opredelenie nekotoryh zakonomernostej volnovogo napryazhennogo sostoyaniya v geoob"ektah s pomoshch'yu chislennogo metoda, algoritma i kompleksa programm Musaeva V.K. [The definition of some patterns of wave stress in geoobject using numerical method, algorithm and program complex of Musayev V.K.]. *Sovremennye naukoemkie tekhnologii*, (12–5), 832–835. (In Russ.)

6. Dikova Ye.V. (2016). Dostovernost' chislennogo metoda, algoritma i kompleksa programm Musaeva V.K. pri reshenii zadachi o rasprostranenii ploskih prodol'nyh uprugih voln (voskhodyashchaya chast' – linejnaya, niskhodyashchaya chast' – chetvert' kruga) v poluploskosti [Reliability of the numerical method, algorithm and software complex of Musayev V.K. in solving the problem of propagation of plane longitudinal elastic waves (the ascending part is linear, the descending part is a quarter of a circle) in a half-plane]. *Mezhdunarodnyj zhurnal ehksperimental'nogo obrazovaniya*, (12–3), 354–357. (In Russ.)

7. Starodubtsev V.V., Akatyev S.V., Musayev A.V., Shiyanov S.M., Kurantsov O.V. (2017). Modelirovanie uprugih voln v vide impul'snogo vozdejstviya (voskhodyashchaya chast' – chetvert' kruga, niskhodyashchaya chast' – chetvert' kruga) v poluploskosti s pomoshch'yu chislennogo metoda Musaeva V.K. [Modeling of elastic waves in the form of impulse action (ascending part – a quarter of a circle, descending part – a quarter of a circle) in a half-plane by means of the numerical method of Musayev V.K.]. *Problemy bezopasnosti rossijskogo obshchestva*, (1), 36–40. (In Russ.)

8. Starodubtsev V.V., Akatyev S.V., Musayev A.V., Shiyanov S.M., Kurantsov O.V. (2017). Modelirovanie s pomoshch'yu chislennogo metoda Musaeva V.K. nestacionarnyh uprugih voln v vide impul'snogo vozdejstviya (voskhodyashchaya chast' – chetvert' kruga, srednyaya – gorizontal'naya, niskhodyashchaya chast' – linejnaya) v sploshnoj deformiruemoj srede [Modeling of unsteady elastic waves in the form of pulse action (ascending part – a quarter of a circle, the middle part – horizontal, the descending part – linear) in a continuous deformable medium using the Musayev V.K. numerical method]. *Problemy bezopasnosti rossijskogo obshchestva*, (1), 63–68. (In Russ.)

9. Kurantsov V.A., Starodubtsev V.V., Musayev A.V., Samoylov S.N., Kuznetsov M.E. (2017). Modelirovanie impul'sa (pervaya vetv': voskhodyashchaya chast' – chetvert' kruga, niskhodyashchaya chast' – linejnaya; vtoraya vetv': treugol'nik) v uprugoj poluploskosti s pomoshch'yu chislennogo metoda Musaeva V.K. [Modeling of momentum (the first branch: the ascending part – a quarter of a circle, the descending part – linear; the second branch: a triangle) in an elastic half-plane using the numerical method of Musayev V.K.]. *Problemy bezopasnosti rossijskogo obshchestva*, (2), 51–55. (In Russ.)

10. Musaev V.K. (2017). Primenenie volnovoj teorii sejsmicheskogo vozdejstviya dlya modelirovaniya uprugih napryazhenij v Kurpsajskoj plotine s gruntovym osnovaniem pri nezapolnennom vodohranilishche [Application of the wave theory of seismic action for modeling elastic stresses in the Kurpsay dam with a soil base in an unfilled reservoir]. *Geologiya i geofizika Yuga Rossii*, (2), 98–105. (In Russ.)

11. Musayev V.K. (2019). Mathematical modeling of non-stationary elastic waves stresses under a concentrated vertical exposure in the form of delta functions on the surface of the half-plane (Lamb problem). *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 15*(2), 111–124.