

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ  
ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURESDOI 10.22363/1815-5235-2019-15-6-407-414  
УДК 691.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Эффективные модули двухфазных строительных композитов  
с зернистым наполнителем

В.Т. Ерофеев, А.С. Тюряхин, Т.П. Тюряхина, А.В. Тиньгаев\*

*Национальный исследовательский Мордовский государственный университет имени Н.П. Огарева, Российская Федерация, 430005, Саранск, ул. Большевикская, 68  
\*tingaev.s1@gmail.com**История статьи:**Поступила в редакцию: 19 октября 2019 г.  
Доработана: 02 декабря 2019 г.  
Принята к публикации: 06 декабря 2019 г.**Аннотация*

В книге Р.М. Кристенсена «Введение в механику композитов» (1982) приведена расчетная формула для объемного модуля полидисперсных композитов со сферическими включениями. Эта формула известна русскоязычному читателю почти 40 лет, но, к сожалению, не используется в практике строительного материаловедения. Для выявления прикладных возможностей формула Р.М. Кристенсена видоизменяется и сводится к безразмерной функции  $k = k(w, \eta, \theta)$ , зависящей от трех безразмерных параметров, то есть зависимой от трех величин:  $w$  – объемной доли включения,  $\eta$  – отношения модуля сдвига материала матрицы к величине объемного модуля той же матрицы,  $\theta$  – отношения объемных модулей материалов матрицы и включения. Численные исследования этой функции выявляют, что в двухфазных зернистых композитах существенно сужается область значений эффективных модулей по сравнению с областью, ограничиваемой оценками Фойгта и Рейсса (в смысле верхней и нижней границ реальных значений). При этом нижняя оценка по Кристенсену совпадает с оценкой по Рейссу. Приведены численные и графически оформленные результаты на примерах исследования двух характерных групп композиционных материалов. Кроме того, безразмерная форма эффективного модуля позволяет построить в плоском пространстве  $k - w$  систему наглядных графических зависимостей функций  $k(w)$ . При разных значениях  $\theta$  функцией  $k = k(w, \eta)$  отображаются пучок криволинейных отрезков, которым задается положение плоской фигуры в плоском пространстве. Приведены примеры построения фигур для характерных областей значений функции  $k(\eta, \theta, w)$ .

*Ключевые слова:* двухфазная модель зернистого композита; сферическая форма фаз матрицы и наполнителя; эффективный объемный модуль упругости композита; вилка Фойгта – Рейсса для эффективного модуля

*Для цитирования*

*Ерофеев В.Т., Тюряхин А.С., Тюряхина Т.П., Тиньгаев А.В. Эффективные модули двухфазных строительных композитов с зернистым наполнителем // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 6. С. 407–414. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-407-414>*

**Введение**

Интенсивное развитие строительных композиционных материалов (СКМ) стимулирует их теоретическое исследование. При этом развивается и углубляется теория СКМ, направленная на рост числа прикладных задач механики композитов [2–4; 6–17,]. В данном исследовании решается одна из таких задач.

*Ерофеев Владимир Трофимович*, д. т. н., профессор, заведующий кафедрой строительных материалов и технологий; академик Российской академии архитектуры и строительных наук; Scopus Author ID: 57080123300, eLIBRARY SPIN-код: 4425-5045.

*Тюряхин Алексей Сергеевич*, к. т. н., доцент кафедры прикладной механики.

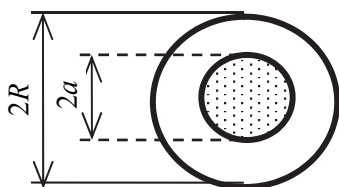
*Тюряхина Татьяна Павловна*, аспирант кафедры строительных материалов и технологий.

*Тиньгаев Александр Васильевич*, магистрант кафедры строительных материалов и технологий.

© Ерофеев В.Т., Тюряхин А.С., Тюряхина Т.П., Тиньгаев А.В., 2019  
This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

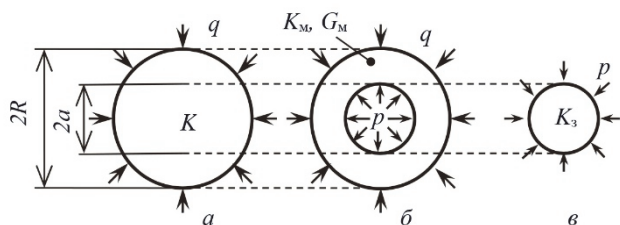


В механике СКМ модель представительного объема (модель ПО) для зернистого композита достаточно часто имеет вид двухфазной модели, в которой в матрицу (толстостенную сферу) включен шарообразный наполнитель (рис. 1). Материал каждой из фаз представлен упругим твердым телом (сплошным однородным и изотропным).



**Рис. 1.** Диаметральное сечение модели ПО зернистого композита  
 [Figure 1. The diametrical section of the model software granular composite]

Под действием равномерного наружного давления  $q$  модель ПО деформируется, в результате чего в точках раздела фаз возникает контактное давление  $p$ . Равновесное состояние такой неоднородной гетерогенной модели ПО (рис. 1) можно описать совокупностью однородных моделей, составленной из трех расчетных схем (рис. 2).



**Рис. 2.** Расчетные схемы модели ПО, представленные:  
 а – эффективной однородной моделью (сплошной шар);  
 б – моделью однородной матрицы (пустотелый шар);  
 в – моделью однородного заполнителя (сплошной шар)  
 [Figure 2. The design schemes of the software model, presented:  
 а – effective homogeneous model (solid ball);  
 б – a model of a homogeneous matrix (hollow ball);  
 в – a model of a homogeneous filler (solid ball)]

Контактное давление  $p$  можно найти из условия равенства радиальных перемещений в смежных точках матрицы и заполнителя (рис. 2, б и в). Такая задача решается в элементарных алгебраических выражениях, если воспользоваться применительно к матрице (рис. 2, б) решением задачи Ламе для толстостенной сферы [1; 18]. Не приводя выкладок, в результате получим следующее выражение:

$$p = q \frac{1 + 2\eta_m}{(1 + 2\eta_m w) + 2\eta_m \theta V}, \quad (1)$$

где  $w$  – объемная доля материала заполнителя,  $w = a^3/R^3$  (рис. 1);  $V$  – объемная доля материала матрицы,  $V = 1 - w$ .

Кроме того, в формуле (1) приняты обозначения, использованные авторами работ [5] и [18]:

$$\eta_m = \frac{g_m}{e_m} = \frac{1 - 2\nu_m}{1 + \nu_m} = \frac{2G_m}{3K_m}, \quad \theta = \frac{e_m}{e_3} = \frac{K_m}{K_3}, \quad (2)$$

$$e_m = \frac{E_m}{1 - 2\nu_m} = 3K_m, \quad g_m = \frac{E_m}{1 + \nu_m} = 2G_m, \quad (3)$$

где  $E_m$  и  $\nu_m$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала матрицы соответственно;  $K_m$  – объемный модуль;  $G_m$  – модуль сдвига матрицы;  $e_m$  – шаровой модуль объемных деформаций;  $g_m$  – девиаторный модуль сдвига матрицы;  $\eta_m$  – отношение модулей матрицы;  $K_3$  и  $e_3$  – объемный и шаровой модули материала заполнителя соответственно;  $\theta$  – отношение объемных модулей материалов матрицы и заполнителя.

Если теперь с учетом (1) приравняем радиальные перемещения в наружных точках эффективной модели (рис. 2, а) и модели матрицы (рис. 2, б), то в результате получим (снова без выкладок) формулу для вычисления величины безразмерного эффективного модуля двухфазного композита:

$$k = \frac{K}{K_m} = \frac{(1 + 2\eta_m w) + 2\eta_m \theta V}{V + \theta(2\eta_m + w)}, \quad (4)$$

где  $k$  – объемный модуль композита ( $K$ ), выраженный в долях от модуля матрицы ( $K_m$ ).

При этом обратная формула для вычисления эффективного объемного модуля  $K$  примет вид

$$K = K_m k = K_m \frac{(1 + 2\eta_m w) + 2\eta_m \theta V}{V + \theta(2\eta_m + w)}. \quad (5)$$

Ранее в работе Р.М. Кристенсена [17] была получена формула, аналогичная формуле (5), которая в наших обозначениях имеет вид

$$\frac{K - K_m}{K_3 - K_m} = \frac{w}{1 + \frac{(1 - w)(K_3 - K_m)}{K_m + \frac{4}{3}G_m}}. \quad (6)$$

В такой форме Кристенсеном с учетом парадигмы Хашина [19] получена формула для вычисления величины объемного модуля упругости ( $K$ ) в полидисперсных композитах со сферическим включением (заполнителем). Простые преобразования формулы (6) с учетом обозначений (1) – (3) приводят нас снова к формулам (4) и (5). Следовательно, формулы (4), (5) и (6) идентичны друг другу. Способ получения формулы (4) посредством использования решения задачи Ламе менее трудоемок, так как требует выполнения только элементарных алгебраических преобразований. Кристенсен же получил формулу (6) более сложным образом, непосредственно используя уравнения линейной теории упругости.

### 1. Расчетные формулы эффективного модуля ( $k$ ) композитов

В формулах (4) – (6) зафиксирован факт того, что материал моделей на расчетных схемах, имеющих форму шара (рис. 2, *a* и *в*), представлен только одной упругой константой (модулем  $K$  или  $K_3$ ), а материал матрицы, имеющей форму толстостенной сферы (рис. 2, *б*) – двумя константами (модулями  $K_M$  и  $G_M$ ). Этот факт с точки зрения упругих свойств служит признаком особенностей определения эффективного модуля  $K$ , присущих только двухфазным композитам, в отличие от эффективного модуля других (многофазных) композитов.

Исследуя формулу (4), заметим, что параметры  $\eta_M$  и  $w$  имеют одинаковый и удобный интервал (0, 1) их значений. Однако значения модуля  $k$  и параметра  $\theta$  изменяются в другом интервале (0,  $\infty$ ) чисел. Поэтому интервал (0,  $\infty$ ) расчленим на 2 интервала: интервал малых (0, 1] и интервал больших [1,  $\infty$ ) чисел. В таком случае получим два рабочих варианта формулы (4):

– вариант 1 – для чисел модуля ( $k_1 \geq 1$ ) при значениях  $\theta = \theta_1 \leq 1$ :

$$k_1 = \frac{K_1}{K_M} = \frac{(1 + 2\eta_M w) + 2\eta_M \theta_1 V}{V + \theta_1 (2\eta_M + w)}; \quad (7)$$

– вариант 2 – для чисел модуля ( $k_2 \leq 1$ ) при значениях  $\theta = \theta_2 \geq 1$ :

$$k_2 = \frac{K_2}{K_M} = \frac{(1 + 2\eta_M w) + 2\eta_M \theta_2 V}{V + \theta_2 (2\eta_M + w)}. \quad (8)$$

Особо отметим, что в формулах (7) и (8) параметры  $\theta_1$  и  $\theta_2$  имеют инверсивную связь (с коэффициентом инверсии, равным единице), так как их произведение  $\theta_1 \cdot \theta_2 = 1$ . Это свойство облегчает анализ расчетных формул. Но предварительно вспомним гипотезы Фойгта [21] и Рейса [20].

### 2. Плоское пространство значений модулей $k$

Применяя правило смеси, сначала определим, согласно [21], эффективный объемный модуль ( $K$ ) композита (рис. 1, 2). В результате получим зависимость по Фойгту:

$$K_\Phi = K_M V + K_3 w. \quad (9)$$

Затем, применив то же правило, определим, согласно [20], эффективную объемную податливость ( $1/K$ ) материала и получим зависимость по Рейссу:

$$\frac{1}{K_P} = \frac{V}{K_M} + \frac{w}{K_3}. \quad (10)$$

В отличие от формул (4) и (6) в зависимостях (9) и (10) влияние модуля сдвига матрицы ( $G_M$ ) не учитывается. Именно в этом и заключается главным образом приближенность оценок по Фойгту и по Рейссу.

Величины модулей  $K_\Phi$  и  $K_P$  соответственно служат, как правило, верхней и нижней границей значений реальных модулей  $K$  композита. Однако, анализ решения Кристенсена (6), представленного формулами (4), (7) и (8), позволяет уточнить данное правило (в смысле верхней и нижней оценки вилки Фойгта – Рейсса) применительно к двухфазной структуре зернистых СКМ. Но сначала выразим модули  $K_\Phi$  и  $K_P$  в долях от модуля  $K_M$  (матрицы) и получим формулы для безразмерных величин тех же модулей:

$$k_\Phi = \frac{K_\Phi}{K_M} = V + \frac{w}{\theta}, \quad k_P = \frac{K_P}{K_M} = \frac{1}{V + \theta w}. \quad (11)$$

Применительно к расчетным формулам (7) и (8) выражения (11) примут соответствующий вид:

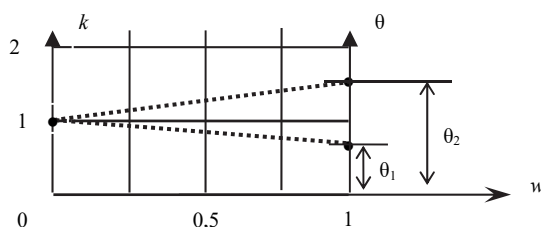
– вариант 1 (при  $\theta \leq 1$ ):

$$k_{\Phi 1} = (1 - w) + \frac{w}{\theta_1}, \quad k_{P 1} = \frac{1}{(1 - w) + \theta_1 w}; \quad (12)$$

– вариант 2 (при  $\theta \geq 1$ ):

$$k_{\Phi 2} = (1 - w) + \frac{w}{\theta_2}, \quad k_{P 2} = \frac{1}{(1 - w) + \theta_2 w}. \quad (13)$$

В случаях, когда величина отношения  $\theta$  неизменна ( $\theta = \text{const}$ ), выражения (12) и (13) становятся функциями одного аргумента:  $k_\Phi = k_\Phi(w)$  и  $k_P = k_P(w)$ . Следовательно, эти функции могут быть представлены графически в плоском пространстве осей  $k$  и  $w$  (рис. 3). О наглядности такого пространства, использованного при анализе формул (4) – (6), свидетельствует содержание работы [6].



**Рис. 3.** Область плоского пространства  $k - w$ , ограниченная осями  $k$ ,  $\theta$  и  $w$ . Пунктиром выделены 2 отрезка функции  $k_\Phi = k_\Phi(\theta, w)$  при значениях  $\theta = \theta_1$  и  $\theta = \theta_2$   
**[Figure 3.]** The region of flat space  $k - w$  bounded by the axes  $k$ ,  $\theta$  and  $w$ . The dashed line marks 2 segments of the function  $k_\Phi = k_\Phi(\theta, w)$  for the values  $\theta = \theta_1$  and  $\theta = \theta_2$

В обозначенной области пространства  $k - w$  функции модулей по Фойгту, например, аналогично формулам (12) и (13), примут вид

$$k_{\Phi 1} = (1 - w) + \frac{w}{\theta_1}, \quad k_{\Phi 2} = (1 - w) + \frac{w}{\theta_2}.$$

Эти функции отображаются двумя семействами прямолинейных отрезков, исходящих из их общей точки с координатами (0, 1). На рис. 3 пунктирными линиями изображены два таких отрезка, по одному из каждого семейства. Правые концы выбранных отрезков имеют координаты (1,  $\theta_2$ ) и (1,  $\theta_1$ ) (на рис. 3 выделены жирными точками).

Функции модулей по Рейсу и по Кристенсену (в той же области пространства  $k - w$ ) имеют криволинейное очертание; их графики расположены ниже отрезков по Фойгту и непосредственно примыкают к этим отрезкам своими концами в точках (0, 1), (1,  $\theta_2$ ) или (1,  $\theta_1$ ) (рис. 3). Для более четкого описания этих функций рассмотрим два численных примера.

### 3. Сравнительный анализ оценок по Фойгту, Рейсу и Кристенсену

Проведем анализ расчетных формул (7), (8) и формул (12) и (13) для сравнения верхней и ниж-

ней оценок величины эффективного модуля упругости в двухфазных композитах. С этой целью выделим две группы композитов. В первой из них отношение объемных модулей компонентов  $\theta$  прием равным 0,25, то есть меньше единицы; во второй – больше единицы ( $\theta = 4$ ).

Задав шаг  $\Delta w = 0,125$ , вычислим модули  $k_{\Phi}$  и  $k_R$  по формулам (12), (13) как для первой, так и для второй группы композитов. Результаты вычислений представлены в табл. 1.

Затем для этих же групп вычислим модули  $k$  по формулам (7) и (8) при значениях отношения  $\eta_m$ , равных 1, 1/2 и 0, которым соответствуют значения коэффициента Пуассона  $\nu_m$ , равные 0, 0,2 и 0,5. Результаты отображены в табл. 2.

Сопоставив таблицы, отметим, что значения строки 3 в табл. 2 совпали со значениями строки 2 в табл. 1. Значения же строки 6 в табл. 2 в свою очередь повторяют значения строки 4 в табл. 1. Таким образом, нижняя граница значений эффективных модулей  $k$ , вычисляемых по Кристенсену (табл. 2) точно совпала с оценкой модулей  $k_R$  по Рейсу (табл. 1). Однако оценки по Фойгту и по Кристенсену различны. Это следует из сопоставления других строк тех же таблиц.

Таблица 1

Значения модулей по Фойгту ( $k_{\Phi}$ ) и по Рейсу ( $k_R$ ) для двух групп композитов  
[Table 1. The values of the modules according to Voigt ( $k_{\Phi}$ ) and Reuss ( $k_R$ ) for two groups of composites]

Группа [Group]	Модуль [Module]	Объемная доля заполнителя ( $w$ ) [Volume fraction of aggregate ( $w$ )]								
		0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
1	по Фойгту [according to Voigt]	1	1,375	1,75	2,125	2,5	2,875	3,25	3,625	4
	по Рейсу [according to Reuss]	1	1,103	1,231	1,391	1,6	1,882	2,286	2,909	4
2	по Фойгту [according to Voigt]	1	0,906	0,813	0,719	0,625	0,531	0,438	0,344	0,25
	по Рейсу [according to Reuss]	1	0,727	0,571	0,471	0,4	0,348	0,308	0,276	0,25

Таблица 2

Значения модулей  $k$  (по Кристенсену) в двух группах композитов ( $\theta = 1/4$  и  $\theta = 4$ ) при трех значениях параметра  $\eta_m$   
[Table 2. The values of the modules  $k$  (according to Christensen) in two groups of composites ( $\theta = 1/4$  and  $\theta = 4$ ) for three values of the parameter  $\eta_m$ ]

Параметры [Options]		Объемная доля заполнителя ( $w$ ) [Volume fraction of aggregate ( $w$ )]								
$\theta$	$\eta_m$	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	$w \rightarrow 1$
0,25	1	1	1,2	1,429	1,692	2	2,364	2,8	3,333	4
0,25	0,5	1	1,162	1,353	1,581	1,857	2,2	2,636	3,211	4
0,25	0	1	1,103	1,231	1,391	1,6	1,882	2,286	2,909	4
4	1	1	0,88	0,769	0,667	0,571	0,483	0,4	0,323	0,25
4	0,5	1	0,86	0,739	0,633	0,538	0,455	0,379	0,311	0,25
4	0	1	0,727	0,571	0,471	0,4	0,348	0,308	0,276	0,25

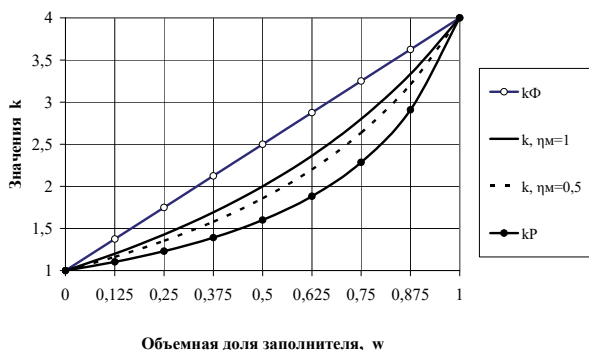
Для большей наглядности рассмотрим два графических примера.

*Пример 1.* Совместим в одном рисунке графические зависимости, построенные по данным табл. 1 и 2 для первой группы выбранных материалов

(рис. 4). При этом все значения эффективных модулей лежат в интервале чисел  $1 < k < 4$ .

Концевые точки всех криволинейных графиков (рис. 4) совмещены с концевыми точками прямолинейного отрезка по Фойгту. Нижний график зна-

чений модулей по Рейсу дает нижнюю оценку значений эффективных модулей реальных композитов. Область плоского пространства, ограниченная верхним и нижним графиками, наглядно демонстрирует так называемую вилку Фойгта – Рейсса.



**Рис. 4.** Зависимости модулей  $k_{Ф1}$ ,  $k_{P1}$  и  $k_1$  от величины объемной доли  $w$ . Значения  $k_1$  соответствуют значениям  $\eta_m$ , равным 1,  $\frac{1}{2}$  и 0 [Figure 4. Dependences of the modules  $k_{Ф1}$ ,  $k_{P1}$  and  $k_1$  on the volume fraction  $w$ . The values of  $k_1$  correspond to the values of  $\eta_m$  equal to 1,  $\frac{1}{2}$ , and 0]

На рис. 4 также отображены зависимости значений модулей  $k_1$  по Кристенсену – три криволинейных графика, соответствующих значениям коэффициента Пуассона  $\nu_m = 0, 0,2$  и  $0,5$ . При этом нижний график (со значением  $\nu_m = 0,5$ ) точно совпал с графиком модулей  $k_{P1}$  (по Рейссу). Следовательно, нижняя оценка по Рейссу, определяемая второй из формул (12), является и частным случаем формулы (7) при значении  $\eta_m = 0$  (или  $\nu_m = 0,5$ , что то же самое).

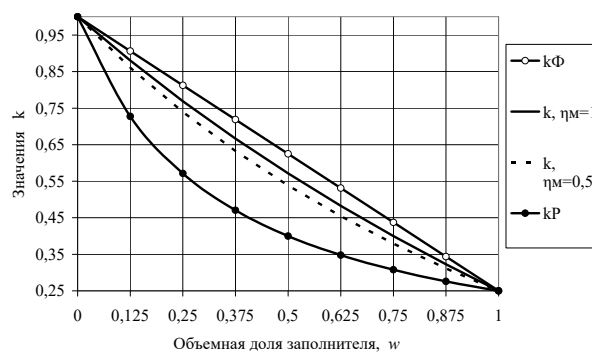
Оценка по Фойгту (верхний график) не совпадает с верхней оценкой по Кристенсену (2-й график сверху) (рис. 4), которая, согласно выражению (7), при значении  $\eta_m = 1$  определяется формулой

$$k_{1\max} = \frac{(1 + 2w) + 2\theta_1 V}{V + \theta_1(2 + w)}. \quad (14)$$

Значениям  $k_{1\max}$  отвечают материалы матрицы, коэффициент Пуассона которых  $\nu_m = 0$ . Такие материалы лучше других материалов (со значениями  $\nu_m > 0$ ) сопротивляются деформациям сдвига. Другими словами, чем меньше величина коэффициента  $\nu_m$ , тем выше жесткость (и прочность) композита.

*Пример 2.* Аналогично поступим и со второй группой выбранных композитов. Совместив в одном рисунке зависимости, построенные по данным табл. 1 и 2, получим графики, подобные графикам первой

группы материалов (рис. 5), но со значениями модулей  $k \leq 1$ .



**Рис. 5.** Зависимости модулей  $k_{Ф2}$ ,  $k_{P2}$  и  $k_2$  от величины объемной доли  $w$ . Значения  $k_2$  соответствуют значениям параметра  $\eta_m$ , равным 1,  $\frac{1}{2}$  и 0 [Figure 5. Dependences of the modules  $k_{Ф2}$ ,  $k_{P2}$  and  $k_2$  on the volume fraction  $w$ . The values of  $k_2$  correspond to the values of the parameter  $\eta_m$  equal to 1,  $\frac{1}{2}$  and 0]

Последовательность в расположении графиков на рис. 5 сохраняется такой же, как и на рис. 4. Основные различия рисунков заключаются в том, что: 1) прямолинейный отрезок на рис. 4 изображен восходящим, а на рис. 5 аналогичный отрезок – нисходящим; 2) рис. 4 характеризует композиты первой группы (при  $\theta < 1$ ), рис. 5 – композиты второй группы (при  $\theta > 1$ ).

Зависимости по Кристенсену (2-й и 4-й графики на рис. 5), определяемые формулой (8), при значениях  $\eta_m = 1$  и  $\eta_m = 0$  принимают вид функций

$$k_{2\max} = \frac{(1 + 2w) + 2\theta_2 V}{V + \theta_2(2 + w)}, \quad (15)$$

$$k_{2\min} = \frac{1}{V + \theta_2 w}. \quad (16)$$

Таким образом, зависимость (16) как частный случай формулы Кристенсена (8) совпадает с формулой Рейса (13).

### Заключение

Расчетная формула (6) Р.М. Кристенсена [17] для величины эффективного объемного модуля полидисперсных композитов существует уже почти 40 лет и имеет достаточно широкую известность. Тем не менее, к сожалению, она фактически не используется в строительном материаловедении. Вышеизложенные численные исследования этой формулы позволили выявить и графически проиллюстрировать ряд несомненных ее достоинств.



Во-первых, относительно верхних и нижних оценок величины объемных модулей реальных композитов формула выявляет суженную вилку оценок по Кристенсену, по сравнению с общеизвестной вилкой Фойгта – Рейсса».

Во-вторых, нижние оценки по Рейссу (13) и по Кристенсену (16) совпадают. Это уточняет положение вилки по Кристенсену в рамках вилки Фойгта – Рейсса.

В-третьих, наши интерпретации формулы Кристенсена имеют вид элементарных алгебраических функций трех безразмерных параметров ( $\eta_m = 2G_m/3K_m$ ,  $\theta = K_m/K_3$  и  $w = a^3/R^3$ ). Это существенно облегчает их численный анализ и практическое пользование ими.

И, наконец, в-четвертых, безразмерная форма представления величины эффективного модуля зернистого композита ( $k = K/K_m$ ) позволяет построить в плоском пространстве  $k - w$  систему бесконечного множества графических зависимостей модуля  $k$  от количественного содержания объемной доли наполнителя. Это дает возможность в каждом конкретном композите вычислить место его эффективного модуля в плоском пространстве модулей, определяемых формулой Кристенсена, и в случае необходимости усилить (или ослабить) те или иные механические свойства композита.

### Список литературы

1. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М.: Высшая школа 1968. 512 с.
2. Бобрышев А.Н., Ерофеев В.Т., Козомазов В.М. Физика и синергетика дисперсно-неупорядоченных конденсированных композитных систем. СПб.: Наука, 2012. 176 с.
3. Васильев В.В., Протасов В.В., Болотин В.В. и др. Композитные материалы: справочник. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
4. Гусев Б.В., Кондрашенко В.И., Маслов Б.П., Файсович А.С. Формирование структуры композиционных материалов и их свойства. М.: Научный мир, 2006. 566 с.
5. Ерофеев В.Т., Тюряхин А.С., Ерофеева И.В. О связях параметров несущей фазы с эффективными параметрами в моделях зернистых композитов // Строительная механика и расчет сооружений. 2018. № 3. С. 7–17.
6. Erofeev V., Tyuryakhin A., Tyuryakhina T. Flat space of values of volume module of grain composite with spherical fill-lem // International Journal of Civil Engineering and Technology (IJCIET). 2019. Issue 8. Pp. 333–342.
7. Берлин А.А., Вольфсон С.А., Оимян В.Г., Ениколопов Н.С. Принципы создания композитных полимерных материалов. М.: Химия, 1990. 240 с.
8. Аскадский А.А., Голенева Л.М., Бычко К.А., Казанцева В.В., Константинов К.В., Алмаева Е.С., Клиских А.Ф., Коврига О.В. Градиентные полимерные материалы // Российский химический журнал. 2001. Т. 45. № 3. С. 123–128.
9. Duan K., Hu Xiao, Wittmann F.H. Boundary effect on concrete fracture and non-constant fracture energy distribution // Engineering Fracture Mechanics. 2003. No. 70. Pp. 2257–2268.
10. Carpinteri A., Chiaia B., Cornetti P. On the mechanics of quasi-brittle materials with a fractal microstructure // Engineering Fracture Mechanics. 2003. No. 70. Pp. 2321–2349.
11. Ayatollahi M.R., Akbaridoost J. Size effects on fracture toughness of quasi-brittle materials-A new approach // Engineering Fracture Mechanics. 2012. No. 92. Pp. 89–100.
12. Hu X., Guan J., Wang Y., Keating A., Yang S. Comparison of boundary and size effect models based on new developments // Engineering Fracture Mechanics. 2017. No. 22. Pp. 146–167.
13. Muralidhara S., Raghu Prasad B.K., Eskandari H., Karihaloo B.L. Fracture process zone size and true fracture energy of concrete using acoustic emission // Construction and Building Materials. 2010. No. 24. Pp. 479–486.
14. Muralidhara S., Raghu Prasad B.K., Karihaloo B.L., Singh R.K. Size-independent fracture energy in plain concrete beams using tri-linear model // Construction and Building Materials. 2011. № 25. Pp. 3051-3058.
15. Shafiqullin L.N., Bobrishev A.A., Erofeev V.T., Treshchev A.A., Shafiqullina A.N. Development of the recommendations on selection of glass-fiber reinforced polyurethanes for vehicle parts // International Journal of Applied Engineering Reserch. 2015. Vol. 10. No. 23. Pp. 43758–43762.
16. Shafiqullin L.N., Treshchev A.A., Hodorovich P.Y., Erofeev V.T. The Stress-Strain State Of Layered Orthotropic Conditional Half-Space Taking Into Account Different Resistance // Revista Publicando. 2017. Vol. 4. No. 13(2). Pp. 109–127.
17. Кристенсен Р.М. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 336 с.
18. Черкасов В.Д., Тюряхин А.С. Теория двухсвязных моделей микромеханики композитов: монография. Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2009. 108 с.
19. Hashin Z. The elastic moduli of heterogeneous materials // J. Appl. Mech. 1962. Vol. 29. No. 1. Pp. 143–150.
20. Reuss A. Berechnung der Fliessgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung // Z. Angew. Math. und Mech. 1929. Vol. 9. No. 1. Pp. 49–58.
21. Voigt W. Lehrbuch der Kristallphysik. Berlin: Teubner, 1928. 962 p.

## Effective modules of two-phase construction composites with grain filler

Vladimir T. Erofeev, Aleksej S. Tyuryahin, Tatyana P. Tyuryahina, Aleksandr V. Tingaev\*

National Research Ogarev Mordovia State University (National Research University), 68 Bolshevistskaya St., Saransk, 430005, Russian Federation  
\*tingaev.sl@gmail.com

### Article history:

Received: October 19, 2019

Revised: December 02, 2019

Accepted: December 06, 2019

### Abstract

In the book of R.M. Christensen, "Introduction to the Mechanics of Composites" (1982), a calculation formula is given for the bulk module of polydisperse composites with spherical inclusions. This formula has been known to the Russian-speaking reader for almost 40 years, but unfortunately, it is not used in the practice of building materials science. To identify applied possibilities, R.M. Christensen's formula is modified and reduced to a dimensionless function  $k = k(w, \eta, \theta)$ , which depends on three dimensionless parameters, i.e., it depends on three quantities:  $w$  is the volume fraction of the inclusion,  $\eta$  – the ratio of the shear modulus of the matrix material to the volume modulus of the same matrix,  $\theta$  is the ratio of the volume moduli of the matrix materials and inclusion. Numerical studies of this function reveal that in two-phase granular composites, the range of effective moduli is significantly narrowed compared to the region limited by Voigt and Reuss estimates (in the sense of the upper and lower bounds of real values). At the same time, the lower Christensen score is the same as the Reuss score. Numerical and graphically presented results are given on the examples of the study of two characteristic groups of composite materials. In addition, the dimensionless form of the effective module allows to construct a system of visual graphic dependencies of the functions  $k(w)$  in a flat space  $k - w$ . For different values of  $\theta$ , the function  $k = k(w, \eta)$  displays a bunch of curved segments, which sets the position of the plane figure in flat space. Examples of constructing figures for characteristic regions of the values of the function  $k(\eta, \theta, w)$  are given.

**Keywords:** two-phase model of granular composite; spherical shape of the phases of the matrix and aggregate; effective bulk modulus of elasticity of the composite; Voigt – Reuss plug for an effective module

### For citation

Erofeev V.T., Tyuryahin A.S., Tyuryahina T.P., Tingaev A.V. (2019). Effective modules of two-phase construction composites with grain filler. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 15(6), 407–414. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-407-414>. (In Russ.)

### References

1. Bezukhov N.I. (1968). *Osnovy teorii uprugosti, plastichnosti i polzuchesti [Fundamentals of the theory of elasticity, plasticity and creep]*. Moscow, Vysshaya shkola Publ. (In Russ.)
2. Bobryshev A.N., Erofeev V.T., Kozomazov V.M. (2012). *Fizika i sinergetika dispersno-neuporyadochennykh kondensirovannykh kompozitnykh sistem [Physics and synergetics of dispersively disordered condensed composite systems]*. Saint Petersburg, Nauka Publ. (In Russ.)
3. Vasil'ev V.V., Protasov V.V., Bolotin V.V. (1990). *Kompozitnye materialy [Composite materials]: reference book*. Moscow, Mashinostroenie Publ. (In Russ.)
4. Gusev B.V., Kondrashenko V.I., Maslov B.P., Faysovich A.S. (2006). *Formirovanie struktury kompozitsionnykh materialov i ih svoystva [Formation of the structure of*

*composite materials and their properties]*. Moscow, Nauchnyj mir Publ. (In Russ.)

5. Erofeev V.T., Tyuryahin A.S., Erofeeva I.V. (2018). On the connections of the carrier parameters with effective parameters in models of grain composites. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*, (3), 7–17. (In Russ.)

6. Erofeev V., Tyuryahin A., Tyuryahina T. (2019). Flat space of values of volume module of grain composite with spherical fill-lem. *International Journal of Civil Engineering and Technology (IJCIET)*, (8), 333–342.

7. Berlin A.A., Vol'fson S.A., Oshmyan V.G., Enikolopov N.S. (1990). *Principy sozdaniya kompozitnykh polimernykh materialov [Principles of creating composite polymer materials]*. Moscow, Himiya Publ. (In Russ.)

8. Askadskij A.A., Goleneva L.M., Bychko K.A., Kazanceva V.V., Konstantinov K.V., Almaeva E.S., Klinskikh A.F., Kovriga O.V. (2001). Gradientnye polimernye materialy [Gradient materials]. *Russian Chemical Journal*, 45(3), 123–128. (In Russ.)

9. Duan K., Hu Xiao, Wittmann F.H. (2003). Boundary effect on concrete fracture and non-constant fracture energy distribution. *Fracture Mechanics*, (70), 2257–2268.

10. Carpinteri A., Chiaia B., Cornetti P. (2003). On the mechanics of quasi-brittle materials with a fractal microstructure. *Engineering Fracture Mechanics*, (70), 2321–2349.

**Vladimir T. Erofeev**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Dean of the Faculty of Architecture and Construction; Academician of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; Scopus Author ID: 57080123300, eLIBRARY SPIN-code: 4425-5045.

**Aleksej S. Tyuryahin**, Doctor of Engineering, Associate Professor of Department of Applied Mechanics.

**Tatyana P. Tyuryahina**, graduate student of Faculty of Architecture and Civil Engineering.

**Aleksandr V. Tingaev**, undergraduate of Faculty of Architecture and Civil Engineering.

11. Ayatollahi M.R., Akbaridoost J. (2012). Size effects on fracture toughness of quasi-brittle materials – a new approach. *Engineering Fracture Mechanics*, (92), 89–100.
12. Hu X., Guan J., Wang Y., Keating A., Yang S. (2017). Comparison of boundary and size effect models based on new developments. *Engineering Fracture Mechanics*, (22), 146–167.
13. Muralidhara S., Raghu Prasad B.K., Eskandari H., Karihaloo B.L. (2010). Fracture process zone size and true fracture energy of concrete using acoustic emission. *Construction and Building Materials*, (24), 479–486.
14. Muralidhara S., Raghu Prasad B.K., Karihaloo B.L., Singh R.K. (2011). Size-independent fracture energy in plain concrete beams using tri-linear model. *Construction and Building Materials*, (25), 3051–3058.
15. Shafigullin L.N., Bobrishev A.A., Erofeev V.T., Treshchev A.A., Shafigullina A.N. (2015). Development of the recommendations on selection of glass-fiber reinforced polyurethanes for vehicle parts. *International Journal of Applied Engineering Research*, 210(23), 43758–43762.
16. Shafigullin L.N., Treshchev A.A., Hodorovich P.Y., Erofeev V.T. (2017). The Stress-Strain State of Layered Orthotropic Conditional Half-Space Taking into Account Different Resistance. *Revista Publicando*, 4 (13–2), 109–127.
17. Christensen R.M. (1982). *Vvedenie v mekhaniku kompozitov [Introduction to the mechanics of composites]*. Moscow, Mir Publ. (In Russ.)
18. Cherkasov V.D., Tyuryakhin A.S. (2009). *Teoriya dvuhsvyaznyh modelej mikromekhaniki kompozitov [The theory of biconnected models of micromechanics of composites]: monograph*. Saransk, Publishing House of Mordovia University. (In Russ.)
19. Hashin Z. (1962). The elastic moduli of heterogeneous materials. *J. Appl. Mech.*, 29(1), 143–150.
20. Reuss A., *Angew. Z.* (1929) Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung. *Math. und Mech.*, 9(1), 49–58.
21. Voigt W. (1928). *Lehrbuch der Kristallphysik*. Berlin, Teubner.