УДК 539.3
DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-459-466

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Сравнительный анализ эффективности использования конечных элементов различной мерности при анализе НДС тонких оболочек

Ю.В. Клочков[1]*, А.П. Николаев[1], Т.А. Соболевская[1], М.Ю. Клочков[2]

[1]Волгоградский государственный аграрный университет
Российская Федерация, 400002, Волгоград, Университетский пр., 26

[2]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Российская Федерация, 119991, Москва, Ленинские горы, 1

*Автор, ответственный за переписку

(*поступила в редакцию:* 12 августа 2018 г.; *доработана:* 15 октября 2018 г.; *принята к публикации*: 28 октября 2018 г.)

Актуальность. Для определения напряженно-деформированного состояния (НДС) тонкостенных оболочек, учитывая сложность получения численных результатов, была разработана теория тонких оболочек с введением гипотезы прямой нормали для сведения трехмерного НДС к двумерному. При современном развитии цифровой техники и численных методов расчета, в частности метода конечных элементов (МКЭ), появилась возможность получения численных результатов без использования гипотезы прямой нормали, а именно на основе теории упругости в трехмерной постановке даже для тонких оболочек.

Цели. Целью настоящей работы является сравнение эффективности алгоритмов использования матриц жесткости конечных элементов, полученных на основе теории тонких оболочек с гипотезой прямой нормали и на основе соотношений трехмерной теории упругости.

Методы. Представлены результаты сравнительного анализа конечно-элементных расчетов тонких оболочек при использовании двумерного элемента дискретизации в форме четырехугольного фрагмента срединной поверхности и трехмерного элемента в виде восьмиузлового шестигранника. В качестве узловых варьируемых параметров выбирались компоненты вектора перемещения и их первые производные. Функции формы для обоих типов элементов дискретизации были представлены произведениями полиномов Эрмита третьей степени.

Результаты. На примере расчета защемленной по торцам цилиндрической оболочки показано, что двумерная постановка в расчетах тонких оболочек является адекватной и позволяет получать приемлемые результаты при оптимальных затратах машинного времени.

Ключевые слова: двумерный элемент, трехмерный элемент, узловые неизвестные, сетка дискретизации

Введение

Тонкостенные конструкции из пластин и оболочек являются неотъемлемой частью современных зданий, сооружений и архитектурных форм [1–3]. В настоящее время при анализе НДС конструкций из оболочек на первый план выдвинулись преимущественно численные методы расчета [4–10], в частности МКЭ [11–18].

В наши дни матрицы жесткости конечных элементов формируются на основе двух теорий: теории тонких оболочек с использованием теории прямой нормали для сведения трехмерного НДС к двумерному состоянию, а также соотношений теории упругости без дополнительных гипотез о деформировании нормального элемента.

В последнее время многими исследователями, занимающимися данной проблематикой, высказывается мнение о том, что при построении конечно-элементных моделей оболочечных конструкций предпочтение следует отдавать трехмерным конечным элементам как наиболее универсальным. При этом в качестве основных геометрических соотношений рекомендуется использовать соотношения теории упругости. Данный подход является вполне обоснованным при исследовании НДС оболочечных конструкций средней толщины и толстостенных сосудов. Однако, использование трехмерных конечных элементов при анализе НДС тонких оболочек является не вполне оправданным и требует детального обоснования. В связи с этим достаточно актуальной остается задача сравнительного анализа эффективности использования дву- и трехмерных конечных элементов при определении НДС тонких оболочек.

В настоящей работе на примере расчета жесткозащемленной по торцам цилиндрической оболочки выполнен сравнительный анализ точности конечноэлементных решений, полученных при использовании дву- и трехмерных элементов дискретизации.

Геометрия оболочки

Радиус-вектор, задающий срединную поверхность эллиптического цилиндра, может быть представлен выражением

$$\vec{R}^0 = x\vec{i} + r(\theta)\sin\theta\vec{j} + r(\theta)\cos\theta\vec{k}, \tag{1}$$

где x – осевая координата, θ – угол, отсчитываемый от оси Oz против хода часовой стрелки в плоскости, перпендикулярной оси Ox.

Входящие в (1) функция $r(\theta)$ определяется формулой

$$r(x,\theta) = \frac{bc}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta}}, \tag{2}$$

где b и c – параметры эллипса.

Ковариантные векторы локального базиса точки срединной поверхности определяются дифференцированием (1) по x и θ

$$\vec{a}_1^0 = \vec{R}_{,x}^0 = \vec{i};$$

$$\vec{a}_2^0 = \vec{R}_{,\theta}^0 = \left(r_{,\theta}(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta\right)\vec{j} +$$

$$+\left(r_{,\theta}(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta\right)\vec{k}. \tag{3}$$

Орт нормали к срединной поверхности определяется векторным произведением

$$\vec{a}^{\,0} = \vec{a}_1^{\,0} \times \vec{a}_2^{\,0} / \left|\vec{a}_1^{\,0} \times \vec{a}_2^{\,0}\right|. \tag{4}$$

Произведение векторов локального базиса (3), (4) по x, θ могут быть представлены в матричном виде следующим образом

$$\underset{3\times1}{\left\{\vec{a}_{,x}^{\,0}\right\}} = \underset{3\times3}{\left[m^0\right]}\underset{3\times1}{\left\{\vec{a}^{\,0}\right\}};\ \underset{3\times1}{\left\{\vec{a}_{,\theta}^{\,0}\right\}} = \underset{3\times3}{\left[n^0\right]}\underset{3\times1}{\left\{\vec{a}^{\,0}\right\}}, \tag{5}$$

где

$$\underset{1\times3}{\left\{\vec{a}^{\,0}\right\}^T} = \left\{\vec{a}_1^{\,0}\ \vec{a}_2^{\,0}\ \vec{a}^{\,0}\right\};\ \underset{1\times3}{\left\{\vec{a}_{,x}^{\,0}\right\}^T} =$$

$$= \left\{\vec{a}_{1,x}^{\,0}\ \vec{a}_{2,x}^{\,0}\ \vec{a}_{,x}^{\,0}\right\};\ \underset{1\times3}{\left\{\vec{a}_{,\theta}^{\,0}\right\}^T} = \left\{\vec{a}_{1,\theta}^{\,0}\ \vec{a}_{2,\theta}^{\,0}\ \vec{a}_{,\theta}^{\,0}\right\};$$

матрица $[m^0]$ – нулевая, а в матрице $[n^0]$ ненулевыми элементами являются n_{22}, n_{23} и n_{32}.

Положение точки оболочки, отстоящей от срединной поверхности на расстоянии t в исходном M^{0t} и деформированном M^t состояниях, определяется соответствующими радиус-векторами

$$\vec{R}^{0t} = \vec{R}^0 + t\vec{a}^0;\ \vec{R}^t = \vec{R}^{0t} + \vec{V}, \tag{6}$$

где $\vec{V}$ – вектор перемещения точки из положения M^{0t} в положение M^t.

Дифференцированием (6) по x, θ и t могут быть получены ковариантные векторы базиса исходного и деформированного состояний

$$\vec{g}_1^{\,0} = \vec{R}_{,x}^{0t} = \vec{a}_1^{\,0};\ \vec{g}_2^{\,0} = \vec{R}_{,\theta}^{0t} = \vec{a}_2^{\,0}\left(1 + tn_{32}\right);$$

$$\vec{g}_3^{\,0} = \vec{R}_{,t}^{0t} = \vec{a}^{\,0};$$

$$\vec{g}_1 = \vec{R}_{,x}^t = \vec{g}_1^{\,0} + \vec{V}_{,x};\ \vec{g}_2 = \vec{R}_{,\theta}^t = \vec{g}_2^{\,0} + \vec{V}_{,\theta};$$

$$\vec{g}_3 = \vec{R}_{,t}^t = \vec{g}_3^{\,0} + \vec{V}_{,t}. \tag{7}$$

Входящие в (7) производные вектора перемещения точки M^{0t} могут быть представлены компонентами, отнесенными к базису отсчетной поверхности

$$\vec{V}_{,x} = t_1^1\vec{a}_1^{\,0} + t_1^2\vec{a}_2^{\,0} + t_1\vec{a}^{\,0};$$

$$\vec{V}_{,\theta} = t_2^1\vec{a}_1^{\,0} + t_2^2\vec{a}_2^{\,0} + t_2\vec{a}^{\,0};$$

$$\vec{V}_{,t} = t_3^1\vec{a}_1^{\,0} + t_3^2\vec{a}_2^{\,0} + t_3\vec{a}^{\,0}. \tag{8}$$

Ковариантные компоненты тензора деформаций могут быть получены из известного соотношения механики сплошной среды

$$\varepsilon_{mn}^t = \left(g_{mn} - g_{mn}^0\right)/2. \tag{9}$$

Входящие в (9) ковариантные компоненты метрического тензора определяются скалярными произведениями (7)

$$g_{mn}^0 = \vec{g}_m^{\,0} \cdot \vec{g}_n^{\,0};\ g_{mn} = \vec{g}_m \cdot \vec{g}_n. \tag{10}$$

Соотношения (8) в развернутом виде для трехмерной формулировки будут иметь следующую структуру

$$\varepsilon_{11}^t = t_1^1;\ 2\varepsilon_{12}^t = t_2^1 + a_{22}^0 t_1^2 + a_{22}^0 n_{32} t \cdot t_1^2;$$

$$2\varepsilon_{13}^t = t_3^1 + t_1;$$

$$\varepsilon_{22}^t = a_{22}^0 t_2^2 + a_{22}^0 n_{32} t \cdot t_2^2;$$

$$2\varepsilon_{23}^t = a_{22}^0 t_3^2 + a_{22}^0 n_{32} t \cdot t_3^2 + t_2;\ \varepsilon_{33}^t = t_3, \quad (11)$$

где $a_{22}^0 = \vec{a}_2^0 \cdot \vec{a}_2^0$.

Элементы дискретизации

Элементом дискретизации в двумерной постановке выбирается четырехугольный фрагмент срединной поверхности с узлами i, j, k, l, расположенными в его вершинах. Столбцы узловых неизвестных в локальной ξ, η и глобальной x, θ системах координат имеют следующий вид [19]:

$$\underset{1\times36}{\left\{U_y^L\right\}^T} = \left\{\underset{1\times12}{\left\{v_y^{1L}\right\}^T}\ \underset{1\times12}{\left\{v_y^{2L}\right\}^T}\ \underset{1\times12}{\left\{v_y^{L}\right\}^T}\right\}; \quad (12)$$

$$\underset{1\times36}{\left\{U_y^G\right\}^T} = \left\{\underset{1\times12}{\left\{v_y^{1G}\right\}^T}\ \underset{1\times12}{\left\{v_y^{2G}\right\}^T}\ \underset{1\times12}{\left\{v_y^{G}\right\}^T}\right\}, \quad (13)$$

где $\underset{1\times12}{\left\{q_y^L\right\}^T} = \left\{q^i q^j q^k q^l q^i_{,\xi} \ldots q^l_{,\xi} q^i_{,\eta} \ldots q^l_{,\eta}\right\};$

$$\underset{1\times12}{\left\{q_y^G\right\}^T} = \left\{q^i q^j q^k q^l q^i_{,x} \ldots q^l_{,x} q^i_{,\theta} \ldots q^l_{,\theta}\right\};$$

q – компонента вектора перемещения точки срединной поверхности.

Элементы матрицы-строки функций формы $\{\varphi\}^T$ для двумерного элемента дискретизации представлены диадными произведениями полиномов Эрмита третьей степени

$$q = \underset{1\times12}{\{\varphi\}^T}\ \underset{12\times1}{\left\{q_y^L\right\}^T}. \quad (14)$$

В качестве объемного элемента дискретизации выбирается восьмиузловой шестигранник с узлами i, j, k, l, m, n, p, h, расположенными в его вершинах [20].

Столбцы узловых неизвестных трехмерного элемента дискретизации в локальной ξ, η, ς и глобальной x, θ, t системах координат имеют следующую структуру:

$$\underset{1\times96}{\left\{U_y^L\right\}^T} = \left\{\underset{1\times32}{\left\{v_y^{1L}\right\}^T}\ \underset{1\times32}{\left\{v_y^{2L}\right\}^T}\ \underset{1\times32}{\left\{v_y^{L}\right\}^T}\right\}; \quad (15)$$

$$\underset{1\times96}{\left\{U_y^G\right\}^T} = \left\{\underset{1\times32}{\left\{v_y^{1G}\right\}^T}\ \underset{1\times32}{\left\{v_y^{2G}\right\}^T}\ \underset{1\times32}{\left\{v_y^{G}\right\}^T}\right\}, \quad (16)$$

где $\underset{1\times32}{\left\{q_y^L\right\}^T} = \left\{q^i q^j q^k q^l q^m q^n q^p q^h q^i_{,\xi} \ldots q^h_{,\xi} q^i_{,\eta} \ldots q^h_{,\eta} q^i_{,\varsigma} \ldots q^h_{,\varsigma}\right\};$

$$\underset{1\times32}{\left\{q_y^G\right\}^T} = \left\{q^i q^j q^k q^l q^m q^n q^p q^h q^i_{,x} \ldots q^h_{,x} q^i_{,\theta} \ldots q^h_{,\theta} q^i_{,t} \ldots q^h_{,t}\right\};$$

q – компонента вектора перемещения $\vec{V}$ точки M^{0t}, отстоящей от отсчетной поверхности на расстояние t.

В трехмерном элементе дискретизации функции формы представляют собой триадные произведения полиномов Эрмита третьей степени:

$$q = \underset{1\times32}{\{\psi\}^T}\ \underset{32\times1}{\left\{q_y^L\right\}^T}. \quad (17)$$

Матрицы жесткости и столбцы узловых дву- и трехмерного элементов дискретизации формировались стандартным образом путем минимизации функционала Лагранжа [12; 17; 21].

Пример расчета

Было исследовано НДС жестко защемленного по торцам цилиндра, нагруженного внутренним давлением интенсивности q. Приняты следующие исходные данные: радиус срединной поверхности R = 1,0 м; длина образующей L = 1,0 м; толщина стенки h = 0,02 м; q = 5 МПа; $E = 2\cdot10^5$ МПа; v = 0,3.

Расчеты выполнялись по двум вариантам: в первом в качестве элемента дискретизации использовался двумерный конечный элемент 36×36 с девятью неизвестными в узле (12), (13); во втором применялся объемный конечный элемент 96×96 с двенадцатью узловыми варьируемыми параметрами. В первом варианте при интерполировании по площади элемента использовалась квадратура Гаусса с 6×6 точками интегрирования, а по толщине – формула Симпсона с семью точками интегрирования. Во втором варианте при интегрировании по объему элемента также использовалась квадратура Гаусса с 6×6×6 точками интегрирования. В силу наличия плоскостей симметрии рассчитывалась 1/8 часть цилиндра.

Результаты повариантных расчетов представлены в табл. 1, в которой приведены значения меридиональных напряжений на внутренней $\sigma^в$ и наружной $\sigma^н$ поверхностях цилиндра в опорном и пролетном сечениях в зависимости от густоты сетки дискретизации, причем во втором варианте толщина сетки цилиндра моделировалась только одним рядом объемных конечных элементов. Анализ данных, представленных в таб. 1, показывает, что и в первом, и во втором вариантах расчета наблюдается устойчивая сходимость вычислительного процесса. Однако значения напряжений в опорном сечении во втором варианте оказались существенно меньше (примерно на 100 МПа) по сравнению с первым вариантом расчета.

Таблица 1

Численные значения напряжений при использовании дву- и трехмерного конечных элементов
[*Table 1.* Numerical stress values using two- and three-dimensional finite elements]

Вариант расчета [Variant of calculation]	Сетка дискретизации [Sampling grid]	Сечение [Section]				Общее число неизвестных [Total number of unknowns]
		Опорное [Reference]		Пролетное [Span]		
		Напряжения, МПа [Stress, MPa]				
		$\sigma^{в}$	$\sigma^{н}$	$\sigma^{в}$	$\sigma^{н}$	
I	2×9	460,1	–339,9	68,45	50,93	78
	2×17	475,5	–356,0	68,01	51,38	158
	2×33	479,6	–360,2	67,90	51,48	318
	2×65	480,7	–361,3	67,88	51,51	638
	2×97	480,9	–361,5	67,87	51,51	958
II	2×9×2	341,6	–230,5	63,85	53,60	216
	2×17×2	375,6	–263,6	64,45	53,52	440
	2×33×2	381,0	–267,5	64,57	53,55	888
	2×65×2	381,8	–266,7	64,61	53,57	1784
	2×97×2	382,4	–266,5	64,62	53,58	2680
	2×129×2	383,0	–266,7	64,62	53,58	3576

Таблица 2

Численные значения напряжений при использовании трехмерного конечного элемента
с дополнительной дискретизацией цилиндра по толщине
[*Table 2.* Numerical stress values using a three-dimensional finite element with additional thickness discretization of the cylinder]

Число рядов элементов по толщине цилиндра [The number of rows of elements through the thickness of the cylinder]	Сетка дискретизации [Sampling grid]	Сечение [Section]				Общее число неизвестных [Total number of unknowns]
		Опорное [Reference]		Пролетное [Span]		
		Напряжения, МПа [Stress, MPa]				
		$\sigma^{в}$	$\sigma^{н}$	$\sigma^{в}$	$\sigma^{н}$	
2	2×9×3	370,3	–254,2	65,27	52,76	324
	2×17×3	423,4	–299,5	65,27	52,76	660
	2×33×3	439,4	–305,8	65,53	52,62	1332
	2×65×3	445,8	–308,2	65,61	52,59	2676
	2×97×3	448,0	–310,4	65,63	52,58	4020
	2×129×3	449,2	–311,9	65,64	52,58	5364
3	2×9×4	378,0	–260,7	64,57	53,11	432
	2×17×4	442,0	–314,3	65,43	52,63	880
	2×33×4	471,8	–330,4	65,69	52,47	1776
	2×65×4	487,9	–340,1	65,78	52,43	3568
	2×97×4	491,7	–343,6	65,80	52,43	5360
	2×129×4	492,8	–345,0	65,81	52,43	7152

В табл. 2 приведены результаты второго варианта расчета при дополнительном разбиении стенки цилиндра по толщине на 2 и 3 элемента. Анализ значений напряжений, представленных в табл. 2, показывает, что и при разбиении сетки цилиндра по толщине на 2 ряда объемных конечных элементов значения напряжений в опорном сечении оказались заниженными примерно на 10 % по сравнению с первым вариантом расчета. И только при разбиении стенки цилиндра по толщине на 3 ряда объемных элементов значения напряжений в опорном сечении достигли уровня значений напряжений первого варианта расчета (при сетке дискретизации по площади 2×65). Значения напряжений в пролетном сечении оказались примерно одинаковыми в обоих вариантах расчета при любой сетке дискретизации.

Заключение

Учитывая, что общее число искомых неизвестных при сетке 2×65 в первом варианте расчета в 5,6 раза меньше, чем во втором варианте при аналогичной сетке дискретизации (при разбиении стенки цилиндра по толщине на 3 ряда элементов), можно сделать вывод о том, что использование двумерных элементов дискретизации при анализе НДС тонких оболочек вполне обосновано и является более целесообразным с точки зрения затрат машинного времени и ресурсов применяемой компьютерной техники.

Благодарности
Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Волгоградской области в рамках научного проекта № 18-41-343003 р_мол_а.

Список литературы

1. *Кривошапко С.Н., Галишникова В.В.* Архитектурно-строительные конструкции: учебник для академического бакалавриата. М.: Юрайт, 2015. 476 с.

2. *Krivoshapko S.N., Gil-oulbé M.* Geometry and strength of a shell of velaroidal type on annulus plan with two families of sinusoids// International Journal of Soft Computing and Engineering (IJSCE). 2013. Vol. 3. Issue 3. Pp. 71–73.

3. *Krivoshapko S.N., Gbaguidi-Aisse G.L.* Geometry, static, vibration and bucking analysis and applications to thin elliptic paraboloid shells // The Open Construction and Building Technology Journal. 2016. Vol. 10. Pp. 3–28.

4. *Storozhuk E.A., Yatsura A.V.* Exact solutions of boundary-value problems for noncircular cylindrical shells // International Applied Mechanics. 2016. Vol. 54. No. 4. Pp. 386–397.

5. *Storozhuk E.A., Yatsura A.V.* Analytical-numerical solution of static problems for noncircular cylindrical shells of variable thickness // International Applied Mechanics. 2017. Vol. 53. No. 3. Pp. 313–325.

6. *Bespalova E.I., Urusova G.P.* Stress state of branched shells of revolution subject to transverse shear and reduction // International Applied Mechanics. 2015. Vol. 51. No. 4. Pp. 410–419.

7. *Пятикрестовский К.П., Травуш В.И.* О программировании нелинейного метода расчета деревянных конструкций // Academia. Архитектура и строительство. 2015. № 2. С. 115–119.

8. *Solodovnikov A.S., Sheshenin S.V.* Numerical study of strength properties for a composite material with short reinforcing fibers // Moscow University Mechanics Bulletin. 2017. Vol. 72. No. 4. Pp. 94–100.

9. *Ким А.Ю.* Итерационный метод приращений параметров для расчета нелинейных мембранно-пневматических систем с учетом упругой работы воздуха // Вестник Саратовского госагроуниверситета им. Н.И. Вавилова. 2005. № 1. С. 39–42.

10. *Paimushin V.N.* On the forms of loss of stability of a cylindrical shell under an external side pressure // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2016. Vol. 80. No. 1. Pp. 65–72.

11. *Игнатьев А.В., Игнатьев В.А., Гамзатова Е.А.* Расчет тонких пластин по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода с исключением перемещений конечных элементов как жесткого целого // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2018. № 3 (711). С. 5–13.

12. *Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф.* Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: Физматлит, 2006. 392 с.

13. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А.* Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи. М.: Либроком, 2013. 336 с.

14. *Zheleznov L.P., Kabanov V.V., Boiko D.V.* Nonlinear deformation and stability of discretely reinforced elliptical cylindrical shells under transverse bending and internal pressure // Russian Aeronautics. 2014. Vol. 57. No. 2. Pp. 118–126.

15. *Агапов В.П., Айдемиров К.Р.* Расчет ферм методом конечных элементов с учетом геометрической нелинейности // Промышленное и гражданское строительство. 2016. № 11. С. 4–7.

16. *Каюмов Р.А., Шакирзянов Ф.Р., Гаврюшин С.С.* Моделирование процесса деформирования и оценка несущей способности системы грунт – тонкостенная конструкция // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2014. № 6. С. 20–24.

17. *Бате К.-Ю.* Методы конечных элементов. М.: Физматлит, 2010. 1022 с.

18. *Косицын С.Б., Акулич В.Ю.* Об одном численном способе определения осадки поверхности грунтового массива, вызванной сооружением оболочки обделки тоннеля // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Т. 14. № 1. С. 78–91.

19. *Klochkov Y.V., Nikolaev A.P., Kiseleva T.A.* A comparative evaluation of the scalar and vector approximations of sought quantities in the finite-element method of arbitrary shells // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2015. Т. 44. № 2. С. 166–172.

20. *Николаев А.П., Бандурин Н.Г., Киселев А.П., Сизых А.А.* Определение напряжений в стенках изотермического резервуара для транспортировки сжиженно-

го газа в местах действия опор // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки. 2005. № 2. С. 54а–57.

21. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The finite element method for solid and structural mechanics. Elsevier, 2005. 631 p.

Об авторах

Клочков Юрий Васильевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Волгоградский государственный аграрный университет (Волгоград, Россия). Опубликовал 156 научных статей, 3 монографии, 4 наименования учебно-методической литературы. eLIBRARY SPIN-код: 9436-3693. Author ID: 161677. *Область научных интересов:* механика оболочек, механика деформируемого твердого тела, численные методы расчета, геометрия поверхностей, вычислительные алгоритмы, программирование. *Контактная информация:* e-mail – klotchkov@bk.ru

Николаев Анатолий Петрович **–** доктор технических наук, профессор, профессор кафедры прикладной геодезии, природообустройства и водопользования, Волгоградский государственный аграрный университет (Волгоград, Россия). Опубликовал 149 научных статей, 6 монографий, 5 наименований учебно-методической литературы. eLIBRARY SPIN-код: 2653-5484. AuthorID: 161676. *Область научных интересов:* механика оболочек, механика деформируемого твердого тела, численные методы расчета, геометрия поверхностей, вычислительные алгоритмы, программирование. *Контактная информация:* e-mail – anpetr40@yandex.ru

Соболевская Татьяна Алексеевна **–** кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики, Волгоградский государственный аграрный университет (Волгоград, Россия). Опубликовала 46 научных статей. eLIBRARY SPIN-код: 6665-9906. AuthorID: 664693. *Область научных интересов:* расчет напряженно-деформированного состояния произвольных тонкостенных оболочек и их сочленений на основе метода конечных элементов при использовании скалярной и векторной интерполяционных процедур. *Контактная информация:* e-mail – moonway13@rambler.ru

Клочков Михаил Юрьевич **–** студент третьего курса физического факультета, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Москва, Россия). Опубликовал 5 научных статей. eLIBRARY SPIN-код: 2767-3955. AuthorID: 971170. *Область научных интересов*: механика оболочек, механика деформируемого твердого тела, численные методы расчета, физика, квантовая механика, программирование. *Контактная информация:* e-mail – m.klo4koff@yandex.ru

Для цитирования

Клочков Ю.В., Николаев А.П., Соболевская Т.А., Клочков М.Ю. Сравнительный анализ эффективности использования конечных элементов различной мерности при анализе НДС тонких оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 6. С. 459–466. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-459-466

RESEARCH PAPER

Comparative analysis of efficiency of use of finite elements of different dimensionality in the analysis of the stress-strain state of thin shells

Yuriy V. Klochkov[1]*, Anatoliy P. Nikolaev[1], Tatyana A. Sobolevskaya[1], Mikhail Yu. Klochkov[2]

[1]Volgograd State Agricultural University
26 University Ave., Volgograd, 400002, Russian Federation

[2]Lomonosov Moscow state University
1 Leninskiye Gory, Moscow, 119899, Russian Federation

*Corresponding author

(*received:* August12, 2018; *revised:* October 15, 2018; *accepted:* October 28, 2018)

Abstract. ***Relevance.*** To determine the stress-strain state (SSS) of thin-walled shells due to the complexity of obtaining numerical results, the theory of thin shells was developed with the introduction of the direct normal hypothesis to reduce the three-dimensional SSS to the two-dimensional one. With the modern development of digital technology and numerical methods of calculation, in particular the finite element method (FEM), it became possible to obtain numerical results without the use of the direct normal hypothesis, namely on the basis of the theory of elasticity in three-dimensional formulation even for thin shells.

Aims. The aim of this work is to compare the efficiency of algorithms for the use of finite element stiffness matrices obtained on the basis of the theory of thin shells with the hypothesis of a straight normal and on the basis of the relations of the three-dimensional theory of elasticity.

Methods. The results of comparative analysis of finite element calculations of thin shells using a two-dimensional sampling element in the form of a quadrangular fragment of the middle surface and a three-dimensional element in the form of an eight-node six-face are presented. The components of the displacement vector and their first derivatives were chosen as the nodal variable parameters. The functions of the form for both types of discretization elements were represented by products of Hermite polynomials of the third degree.

Results. On the example of calculation of the cylindrical shell clamped at the ends it is shown that the two-dimensional statement in calculations of thin shells is adequate and allows to receive acceptable results at optimum costs of machine time.

Keywords: two-dimensional element, three-dimensional element, the nodal unknowns, the mesh discretization

Acknowledgements

The investigation was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research and the Administration of the Volgograd Region as part of the research project No. 18-41-343003 p_mol_a.

References

1. Krivoshapko S.N., Galishnikova V.V. (2015). *Arhitekturno-stroitel'nye konstrukcii: uchebnik dlya akademicheskogo bakalavriata [Architectural and building structures: a textbook for academic undergraduate]*. Moscow, Urait Publ., 476. (In Russ.)

2. Krivoshapko S.N., Gil-Oulbe M. (2013). Geometry and strength of a shell of velaroidal type on annulus plan with two families of sinusoids. *International Journal of Soft Computing and Engineering (IJSCE), 3*(3), 71–73.

3. Krivoshapko S.N., Gbaguidi-Aisse G.L. (2016). Geometry, static, vibration and bucking analysis and applications to thin elliptic paraboloid shells. *The Open Construction and Building Technology Journal, 10*, 3–28.

4. Storozhuk E.A., Yatsura A.V. (2016). Exact solutions of boundary-value problems for noncircular cylindrical shells. *International Applied Mechanics, 54*(4), 386–397.

5. Storozhuk E.A., Yatsura A.V. (2017). Analytical-numerical solution of static problems for noncircular cylindrical shells of variable thickness. *International Applied Mechanics, 53*(3), 313–325.

6. Bespalova E.I., Urusova G.P. (2015). Stress state of branched shells of revolution subject to transverse shear and reduction. *International Applied Mechanics, 51*(4), 410–419.

7. Pyatikrestovskiy K.P., Travush V.I. (2015). O programmirovanii nelineynogo metoda rascheta derevyannyh konstruktsiy [On programming non-linear method for calculating wooden structures]. *Academia. Arhitektura i stroitel'stvo,* (2), 115–119. (In Russ.)

8. Solodovnikov A.S., Sheshenin S.V. (2017). Numerical study of strength properties for a composite material with short reinforcing fibers. *Moscow University Mechanics Bulletin, 72*(4), 94–100.

9. Kim A.Yu. (2005). Iteratsionniy metod prirascheniy parametrov dlya rascheta nelineynih membranno-pnevmaticheskih system s uchetom uprugoy raboty vozduha [Iterative method of increments of parameters for the calculation of nonlinear membrane-pneumatic systems, taking into account the elastic operation of the air]. *Vestnik Saratovskogo gosagrouniverciteta im. N.I. Vavilova,* (1), 39–42. (In Russ.)

10. Paimushin V.N. (2016). On the forms of loss of stability of a cylindrical shell under an external side pressure. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 80*(1), 65–72.

11. Ignat'ev A.V., Ignat'ev V.A., Gazmatova E.A. (2018). Raschet tonkih plastin po metodu konechnih elementov v forme klassicheskogo smeshannogo metoda s isklyucheniem peremesheniy konechnih elementov kak zhestkogo tselogo [Calculation of thin plates according to the finite element method in the form of the classical mixed method with the exception of the displacements of finite elements as a rigid whole]. *Izvestiya visshih uchebnih zavedeniy. Stroitel'stvo, 3*(711), 5–13. (In Russ.)

12. Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F. (2006). Metod konechnih elementov v statike i dinamike tonkostennyh konstruktsiy [The finite element method in statics and dynamics of thin-walled structures]. Moscow, Fizmatlit Publ., 392. (In Russ.)

13. Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovey N.A. (2013). Nelineynoe deformirovanie i ustoychivost' uprugih obolochek neodnorodnoy strukturi: modeli, metody, algoritmy, maloizuhennye i novye zadachi [Nonlinear deformation and stability of elastic shells of an inhomogeneous structure: models, methods, algorithms, little-studied and new problems]. Moscow, Librikom publ., 336. (In Russ.)

14. Zheleznov L.P., Kabanov V.V., Boiko D.V. (2014). Nonlinear deformation and stability of discretely reinforced elliptical cylindrical shells under transverse bending and internal pressure. *Russian Aeronautics, 57*(2), 118–126.

15. Agapov V.P., Aydemirov K.R. (2016). Raschet ferm metodom konechnyh elementov s uchetom geoetricheskoy nelineynosti [Calculation of farms by the method of finite elements with regard to geometric nonlinearity]. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo [Industrial and civil engineering],* (11), 4–7. (In Russ.)

16. Kayumov P.A., Shakirzyanov F.R., Gavryushin S.S. (2014). Modelirovanie protsessa deformirovaniya i otsenka nesuschey sposobnosti sistemy grunt – tonkostennaya konstruktsiya [Simulation of the deformation process and assessment of the bearing capacity of the soil system – thin-walled structure]. *Izvestiya visshih uchebnih zavedeniy. Mashinostroenie*, (6), 20–24. (In Russ.)

17. Bate K.-Yu. (2010). *Methody konechnyh elementov.* Moscow, Fizmatlit Publ., 1022. (In Russ.)

18. Kositsyn S.B., Akulich V.Yu. (2018). Ob odnom chislennom sposobe opredeleniya osadki poverhnosti gruntovogo massiva, vizvannoy sooruzheniem obolochki obdelki tonnelya [On one numerical method for determining the precipitation of the surface of the soil massif, caused by the construction of the shell of the tunnel lining]. *Inter-*

national Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 14(1), 78–91. (In Russ.)

19. Klochkov Y.V., Nikolaev A.P., Kiseleva T.A. (2015). A comparative evaluation of the scalar and vector approximations of sought quantities in the finite-element method of arbitrary shells. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 44*(2), 166–172.

20. Nikolaev A.P., Bandurin N.G., Kiselev A.P., Sizyh A.A. (2005). Opredelenie napryazheniy v stenkah izotermicheskogo rezervuara dlya tramsportirovki szhizhennogo gaza v mestah deystviya opor [Determination of stresses in the walls of an isothermal tank for transporting liquefied gas in places of action of supports]. *Izvestiya visshih uchebnih zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Thehnicheskie nauki,* (2), 54a–57. (In Russ.)

21. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. (2005). *The finite element method for solid and structural mechanics.* Elsevier, 631.

About the authors

Yuriy V. Klochkov – Dr Sci. (Eng.), Professor, Head of the Department of Higher Mathematics, Volgograd State Agrarian University (Volgograd, Russia). He published 156 scientific articles, 3 monographs, 4 titles of educational literature. eLIBRARY SPIN-code: 9436-3693. AuthorID: 161677. *Scientific interests:* shell mechanics, solid mechanics, numerical methods of calculation, surface geometry, computational algorithms, programming. *Contacts:* e-mail – klotchkov@bk.ru

Anatoliy P. Nikolaev – Dr Sci. (Eng.), Professor, Professor of the Department of Applied Geodesy, Environmental Engineering and Water Use, Volgograd State Agrarian University (Volgograd, Russia). He published 149 scientific articles, 6 monographs, 5 titles of educational literature. eLIBRARY SPIN-code: 2653-5484. AuthorID: 161676. *Scientific interests:* shell mechanics, solid mechanics, numerical methods of calculation, surface geometry, computational algorithms, programming. *Contacts:* e-mail – anpetr40@yandex.ru

Tatyana A. Sobolevskaya – Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor of Higher Mathematics Department, Volgograd State Agrarian University (Volgograd, Russia). Published 46 scientific articles. eLIBRARY SPIN-code: 6665-9906. AuthorID: 664693. *Scientific interests:* calculation of stress-strain state of arbitrary thin-walled shells and their joints based on the finite element method using scalar and vector interpolation procedures. *Contacts:* e-mail – moonway13@rambler.ru

Mikhail Yu. Klochkov – a third-year student of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russia). He published 5 scientific articles. eLIBRARY SPIN-code: 2767-3955. AuthorID: 971170. *Scientific interests:* shell mechanics, solid mechanics, numerical methods of calculation, physics, quantum mechanics, programming. *Contacts:* e-mail – m.klo4koff@yandex.ru

For citation

Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Sobolevskaya T.A., Klochkov M.Yu. (2018). Comparative analysis of efficiency of use of finite elements of different dimensionality in the analysis of the stress-strain state of thin shells. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings, 14*(6), 459–466. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-459-466 (In Russ.)