

Проблемы теории упругости

УДК 539.3

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-5-404-413

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Исследование распространения упругих волн в составном цилиндре с начальным кручением

М.С. Гулиев¹, А.И. Сейфуллаев^{2*}, Дж.Н. Абдуллаева³¹Гянджинский государственный университет
проспект Ш.И. Хатаи, 187, Гянджа, Азербайджанская Республика, AZ2000²Институт математики и механики, Национальная академия наук Азербайджана
ул. Вахабзаде, 9, Баку, Азербайджанская Республика, AZ1143³Азербайджанский государственный педагогический университет
ул. Узеира Гаджибейли, 68, Баку, Азербайджанская Республика, AZ1000

*Автор, ответственный за переписку

(поступила в редакцию: 03 мая 2018 г.; принята к публикации: 15 августа 2018 г.)

Цель. Работа посвящена изучению распространения осесимметричных продольных волн в составном цилиндре с начальными кручениями.

Методы. Начальные напряжения в цилиндре определяются с привлечением классической линейной теории упругости. Предлагаются методы решения соответствующих задач о собственном значении. Приведены численные результаты и проведен их анализ. При этом установлено, что наличие начального кручения в цилиндрах не исключает появление в отдельности осесимметричной продольной и осесимметричных волн в составном цилиндре.

Выводы. Получено, что при отсутствии начального кручения в составном цилиндре между дисперсионными кривыми, соответствующими модам осесимметричных продольных и крутильных волн, имеются точки пересечения. Показано, что в случае, когда хотя бы на одном цилиндре имеет место начальное кручение, осесимметричная продольная и крутильная волны не могут распространяться в отдельности, т.е. имеет место взаимовлияние между этими двумя типами осесимметричных волн в составном цилиндре. Развита методика решения поставленной задачи и получены соответствующие дисперсионные уравнения для составного цилиндра. Приведено решение дисперсионных уравнений и получены дисперсионные кривые, разработан алгоритм для построения этих кривых.

Ключевые слова: упругие волны, кручение, напряжение, функция Бесселя, функция Макдональда

Введение

Задачи, относящиеся к области теории распространения упругих волн, имеют место во всех областях естествознания и современной техники. Этим и объясняется повышенное внимание к такого рода исследованиям со стороны представителей различных научных направлений фундаментального и прикладного характера. Одной из интересных и актуальных проблем, которые относятся к нелинейным динамическим эффектам, является теория распространения упругих волн в телах с начальными напряжениями. Круг прикладных аспектов задач, относящихся к этой пробле-

ме, весьма широк. К числу этих аспектов можно отнести такие научные направления, как механика материалов и элементов конструкций, геофизика, механика композитных материалов, механика горных пород, биомеханика, неразрушающие методы определения напряжений и др. Существует ряд явлений, относящихся к влиянию начальных напряжений на распространение упругих волн, к исследованию которых можно подойти в рамках линеаризованной теории распространения упругих волн в телах с начальными напряжениями. Указанная теория строится в результате последовательной линеаризации нелинейной теории. Применение вышеизложенных линеаризованных урав-

нений проводится в рамках приближенных и точных подходов. Под приближенным подходом понимается использование нелинейных уравнений в рамках различных упрощающих гипотез геометрического и физического характера. Эти гипотезы позволяют упрощать математические решения задач. Вместе с тем приближенные подходы, основывающиеся на этой гипотезе, имеют определенные ограничения. Например, с применением приближенных подходов невозможно исследовать приповерхностные динамические явления, распространение волн в массивных телах с начальными напряжениями и т.п. Изложенное вызывает необходимость применения точного трехмерного линейаризованного подхода, т.е. подхода в рамках так называемой трехмерной линейаризованной теории распространения упругих волн в телах с начальными напряжениями (ТЛТРУВТНН). Исследования в рамках ТЛТРУВТНН приведены в статьях [1–7]. В данной работе исследуется задача о распространении продольных осесимметричных волн в составном цилиндре с начальными кручениями.

Постановка задачи

Рассмотрим составной цилиндр с круговыми поперечными сечениями, схематически показанный на рис. 1.

С цилиндрами свяжем цилиндрическую систему координат $O r \theta z$ и положения точек цилиндров определим лагранжевыми координатами в этой системе. Величины, относящиеся к внутреннему сплошному цилиндру с радиусом R , отметим верхним индексом (2) , а величины, относящиеся к внешнему полому цилиндру с толщиной h , верхним индексом (1) . Примем, что до компоновки цилиндров они отдельно скручены, причем k -ый ци-

линдр имеет постоянную кручения $\vartheta^{(k)}$ ($k = 1, 2$) на единицу длины. Вместе с тем в случае $\vartheta^{(1)} = \vartheta^{(2)}$ исследование, проведенное ниже, правомочно и для тех случаев, когда составной цилиндр скручивается после их соединения. В этих случаях начальное напряженно-деформированное состояние в цилиндрах определяем в рамках классической линейной теории упругости. При этом получаем, что на каждом цилиндре имеется только напряжение $\sigma_{z\theta}^{(k),0} = \mu^{(k)} \vartheta^{(k)} r$, которое отлично от нуля, где $\mu^{(k)}$ – модуль сдвига материала k -го цилиндра, r – радиальная координат. Материалы цилиндров принимаем однородными, изотропными и линейно упругими.

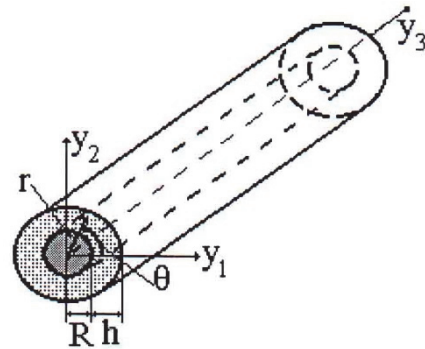


Рис. 1. Геометрия составного цилиндра
[Figure 1. Compound cylinder geometry]

Таким образом, в рамках, изложенных выше, исследуем распространение осесимметричной продольной волны в составном цилиндре с начальными кручениями. При этом линейаризованные уравнения движения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(n)}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zr}^{(n)}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr}^{(n)} - \sigma_{\theta\theta}^{(n)}) - \sigma_{z\theta}^{(n),0} \frac{2}{r} \frac{\partial u_{\theta}^{(n)}}{\partial z} &= \rho^{(n)} \frac{\partial^2 u_r^{(n)}}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(n)}}{\partial r} + \frac{2}{r} \sigma_{\theta\theta}^{(n)} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(n)}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{z\theta}^{(n),0} \frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial z} &= \rho^{(n)} \frac{\partial^2 u_{\theta}^{(n)}}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^{(n)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(n)} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(n)}}{\partial z} \rho^{(n)} &= \rho^{(n)} \frac{\partial^2 u_z^{(n)}}{\partial t^2}, \quad n = 1, 2. \end{aligned} \tag{1}$$

Запишем соотношения упругости:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(n)} &= \lambda^{(n)} (\epsilon_{rr}^{(n)} + \epsilon_{\theta\theta}^{(n)} + \epsilon_{zz}^{(n)}) + 2\mu^{(n)} \epsilon_{rr}^{(n)}, & \sigma_{\theta\theta}^{(n)} &= \lambda^{(n)} (\epsilon_{rr}^{(n)} + \epsilon_{\theta\theta}^{(n)} + \epsilon_{zz}^{(n)}) + 2\mu^{(n)} \epsilon_{\theta\theta}^{(n)}, \\ \sigma_{zz}^{(n)} &= \lambda^{(n)} (\epsilon_{rr}^{(n)} + \epsilon_{\theta\theta}^{(n)} + \epsilon_{zz}^{(n)}) + 2\mu^{(n)} \epsilon_{zz}^{(n)}, & \sigma_{r\theta}^{(n)} &= 2\mu^{(n)} \epsilon_{r\theta}^{(n)}, \\ \sigma_{rz}^{(n)} &= 2\mu^{(n)} \epsilon_{rz}^{(n)}, & \sigma_{r\theta}^{(n)} &= 2\mu^{(n)} \epsilon_{z\theta}^{(n)}, \end{aligned} \tag{2}$$

а также геометрические соотношения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^{(n)} &= \frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^{(n)} = \frac{u_r^{(n)}}{r}, \quad \varepsilon_{zz}^{(n)} = \frac{\partial u_z^{(n)}}{\partial z}, \quad \varepsilon_{r\theta}^{(n)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta^{(n)}}{\partial r} - \frac{u_r^{(n)}}{r} \right), \\ \varepsilon_{rz}^{(n)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^{(n)}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_{z\theta}^{(n)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta^{(n)}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

В уравнениях (1) – (3) использованы общеизвестные обозначения. Будем предполагать, что на поверхности контакта цилиндров, т. е. при $r = R$,

имеет место условие идеального контакта. Это условие в рассматриваемом случае можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(2)} \Big|_{r=R} &= \sigma_{rr}^{(1)} \Big|_{r=R}, \quad \left(\sigma_{r\theta}^{(2)} - \sigma_{z\theta}^{(2),0} \frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial z} \right) \Big|_{r=R} = \left(\sigma_{r\theta}^{(1)} - \sigma_{z\theta}^{(1),0} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial z} \right) \Big|_{r=R}, \\ \left(\sigma_{rz}^{(2)} - \sigma_{z\theta}^{(2),0} \frac{u_\theta^{(2)}}{r} \right) \Big|_{r=R} &= \left(\sigma_{rz}^{(1)} - \sigma_{z\theta}^{(1),0} \frac{u_\theta^{(1)}}{r} \right) \Big|_{r=R}, \\ u_r^{(2)} \Big|_{r=R} &= u_r^{(1)} \Big|_{r=R}, \quad u_\theta^{(2)} \Big|_{r=R} = u_\theta^{(1)} \Big|_{r=R}, \quad u_z^{(2)} \Big|_{r=R} = u_z^{(1)} \Big|_{r=R}. \end{aligned} \quad (4)$$

Кроме того, на свободной поверхности внешнего цилиндра, т. е. при $r = R + h$, выполняются следующие условия:

$$\sigma_{rr}^{(1)} \Big|_{r=R+h} = 0, \quad \left(\sigma_{r\theta}^{(1)} - \sigma_{z\theta}^{(1),0} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} \right) \Big|_{r=R+h} = 0, \quad \left(\sigma_{rz}^{(1)} - \sigma_{z\theta}^{(1),0} \frac{u_\theta^{(1)}}{r} \right) \Big|_{r=R+h} = 0. \quad (5)$$

Таким образом, исследование дисперсии осесимметричной продольной волны в составном цилиндре с начальными кручениями сводится к решению задач о собственном значении, заключающем в себе уравнения движения (1), механические (2) и геометрические (3) соотношения с контактными (4) и граничными (5) условиями. Отметим, что указанные уравнения и соотношения также являются уравнениями и соотношениями ТЛТУВТНН. Однако эти уравнения и соотношение получаются в случае, когда начальные деформации являются малыми. Причем напряженно-деформированные состояния, относящиеся к начальному состоянию, определяются в рамках классической линейной теории упругости.

Отметим, что в случае, когда начальные кручения в цилиндрах отсутствуют, т.е. при $\mathfrak{G}^{(1)} = \mathfrak{G}^{(2)} = 0$, изложенная выше постановка задачи переходит к постановке соответствующих задач в рамках классической линейной теории эластодинамики. Как известно, в классическом случае осесимметричная продольная и осесимметричная крутильная волны распространяются в составном цилиндре отдельно, т.е. без взаимосвязи. Однако, как будет показано ниже, в случае, когда

$\left\{ \mathfrak{G}^{(1)} \neq 0; \quad \mathfrak{G}^{(2)} = 0 \right\}$ или $\left\{ \mathfrak{G}^{(1)} \neq 0; \quad \mathfrak{G}^{(2)} \neq 0 \right\}$, осесимметричные продольная и крутильная волны не могут распространяться в отдельности, т. е. имеет место взаимовлияние между этими двумя типами осесимметричных волн в составном цилиндре.

Метод решения

Начнем с представления перемещений. Согласно предположению о том, что волны двигаются вдоль цилиндров, т. е. вдоль оси OZ , эти представления можем записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_r^{(n)} &= U^{(n)}(r) \cos(kz - \omega t), \\ u_\theta^{(n)} &= V^{(n)}(r) \cos(kz - \omega t), \\ u_z^{(n)} &= W^{(n)}(r) \sin(kz - \omega t). \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя (6) в соотношения (3), из (2), (1) получаем следующее уравнение для неизвестных функций $U^{(n)}(r)$, $V^{(n)}(r)$ и $W^{(n)}(r)$:

$$\begin{aligned}
 (2 + \alpha^{(n)}) \left[\frac{d^2 U^{(n)}}{dr_1^2} + \frac{d}{dr_1} \left(\frac{U^{(n)}}{r_1} \right) \right] + (1 + \alpha^{(n)}) \frac{dW^{(n)}}{dr_1} - U^{(n)} - \nu^{(n)} 2V^{(n)} &= -\frac{c^2}{(c_2^{(n)})^2} U^{(n)}, \\
 \frac{d}{dr_1} \left[\frac{dV^{(n)}}{dr_1} - \frac{V^{(n)}}{r_1} \right] + \frac{2}{r_1} \left[\frac{dV^{(n)}}{dr_1} - \frac{V^{(n)}}{r_1} \right] - V^{(n)} - \nu^{(n)} U^{(n)} &= -\frac{c^2}{(c_2^{(n)})^2} V^{(n)}, \\
 \frac{d}{dr_1} \left[\frac{dW^{(n)}}{dr_1} - U^{(n)} \right] + \frac{1}{r_1} \left[\frac{dW^{(n)}}{dr_1} - U^{(n)} \right], \\
 \alpha^{(n)} \left[\frac{dU^{(n)}}{dr_1} - \frac{U^{(n)}}{r_1} + W^{(n)} \right] - 2W^{(n)} &= -\frac{c^2}{(c_2^{(n)})^2} W^{(n)}, \tag{7}
 \end{aligned}$$

где $r_1 = kr, \quad \alpha^{(n)} = \frac{\lambda^{(n)}}{\mu^{(n)}}.$ (8)

В (8) k – волновое число, $\lambda^{(n)}$ и $\mu^{(n)}$ – постоянные Ламе частного решения уравнения (7) примем в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 U^{(n)}(r) &= A^{(n)} J_1(X^{(n)} r_1), \\
 V^{(n)} &= B^{(n)} J_1(X^{(n)} r_1), \\
 W^{(n)}(r) &= C^{(n)} J_0(X^{(n)} r_1), \tag{9}
 \end{aligned}$$

где $J_0(\chi^{(n)} r_1)$ и $J_1(\chi^{(n)} r_1)$ – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка соответственно. Подставляя частные решения (9) в уравнение (7), получаем следующие уравнения относительно неизвестных постоянных $A^{(n)}, B^{(n)}$ и $C^{(n)}$:

$$\begin{aligned}
 A^{(n)} \left[(2 + \alpha^{(n)}) (-\chi^{(n)})^2 + ((s^{(n)})^2 - 1) \right] + C^{(n)} (1 + \alpha^{(n)}) (-\chi^{(n)}) - B^{(n)} \nu^{(n)} 2 &= 0, \\
 -A^{(n)} \nu^{(n)} + B^{(n)} \left[-(\chi^{(n)})^2 + (s^{(n)})^2 - 1 \right] &= 0, \tag{10} \\
 -A^{(n)} (1 + \alpha^{(n)}) \chi^{(n)} + C^{(n)} \left[-(\chi^{(n)})^2 - \alpha^{(n)} + (s^{(n)})^2 - 2 \right] &= 0.
 \end{aligned}$$

Из условия существования нетривиального решения получаем следующее уравнение для определения значения параметра $\chi^{(n)}$:

$$(\chi_1^{(n)})^3 + (\chi_1^{(n)})^2 a_4^{(n)} + \chi_1^{(n)} a_2^{(n)} + a_0^{(n)} = 0, \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}
 \chi_1^{(n)} &= (\chi^{(n)})^2, \quad a_4^{(n)} = \frac{e_4^{(n)} + f_4^{(n)}}{e_6^{(n)}}, \quad a_2^{(n)} = \frac{e_2^{(n)} + f_2^{(n)}}{e_6^{(n)}}, \\
 a_0^{(n)} &= \frac{e_0^{(n)} + f_0^{(n)}}{e_6^{(n)}}, \quad e_6^{(n)} = -(2 + \alpha^{(n)}),
 \end{aligned}$$

$$e_4^{(n)} = (3 + \alpha^{(n)}) \left((s^{(n)})^2 - 1 \right) + (2 + \alpha^{(n)}) \left(-\alpha^{(n)} + (s^{(n)})^2 - 2 \right),$$

$$\begin{aligned}
 e_2^{(n)} &= -\left((s^{(n)})^2 - 1 \right) \left[(s^{(n)})^2 - 1 + (3 + \alpha^{(n)}) \left(-\alpha^{(n)} + (s^{(n)})^2 - 2 \right) \right], \\
 e_0^{(n)} &= \left((s^{(n)})^2 - 1 \right) \left(-\alpha^{(n)} + (s^{(n)})^2 - 2 \right), \quad f_4^{(n)} = (1 + \alpha^{(n)})^2, \\
 f_2^{(n)} &= -(1 + \alpha^{(n)})^2 \left((s^{(n)})^2 - 1 \right) + 2(v_1^{(n)})^2, \\
 f_0^{(n)} &= -2(v_1^{(n)})^2 \left(-\alpha^{(n)} + (s^{(n)})^2 - 2 \right), \quad s^{(n)} = c / c_2^{(n)}, \quad v_1^{(n)} = v^{(n)} R.
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Из (11), применяя известные формулы Кардана для решения кубического алгебраического уравнения, получаем:

$$\begin{aligned}
 \chi_{11}^{(n)} &= \frac{\varphi^{(n)}}{|\varphi^{(n)}|^2} \sqrt{-P^{(n)} / 3} \cos(\varphi^{(n)} / 3) - a_4^{(n)} / 3, \quad \varphi^{(n)} = \arctan\left(2\sqrt{-D^{(n)}} / (-Q^{(n)}) \right), \\
 \chi_{12}^{(n)} &= \frac{\varphi^{(n)}}{|\varphi^{(n)}|} \sqrt{-P^{(n)} / 3} \left(-\cos(\varphi^{(n)} / 3) - \sqrt{3} \sin(\varphi^{(n)} / 3) \right) - a_4^{(n)} / 3, \\
 \chi_{13}^{(n)} &= \frac{\varphi^{(n)}}{|\varphi^{(n)}|} \sqrt{-P^{(n)} / 3} \left(-\cos(\varphi^{(n)} / 3) + \sqrt{3} \sin(\varphi^{(n)} / 3) \right) - a_4^{(n)} / 3, \\
 P^{(n)} &= -(a_4^{(n)})^2 / 3 + a_2^{(n)}, \quad Q^{(n)} = 2(a_4^{(n)})^3 / 27 - a_4^{(n)} / 3 + a_0^{(n)}, \\
 D^{(n)} &= (Q^{(n)})^2 / 4 + (P^{(n)})^3 / 27.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Будем рассматривать случаи, когда

$$(\chi_{li}^{(n)})^2 > 0 \quad \text{или} \quad (\chi_{li}^{(n)})^2 < 0. \tag{14}$$

Отметим, что случаи, когда $\chi_{li}^{(n)}$ является комплексным числом, реальная часть которого отлична от нуля, не будут рассмотрены в настоящей работе. Кроме того, поскольку случаи

$\chi_{li}^{(n)} = 0$ соответствуют недисперсионному моду, для простоты изложения решения, соответствующие этому случаю, также не будут рассмотрены. Таким образом, частные решения уравнения (7) (обозначим их через $U_i^{(2)}, V_i^{(2)}, W_i^{(2)}$ для внутреннего цилиндра и через $U_{i1}^{(1)}, U_{i2}^{(1)}, V_{i1}^{(1)}, V_{i2}^{(1)}, W_{i1}^{(1)}, W_{i2}^{(1)}$ для внешнего цилиндра) получаем в следующем виде.

Случай, когда $(\chi_{li}^{(n)})^2 > 0$.

$$\left. \begin{aligned}
 U_i^{(2)} &= J_1\left(\sqrt{\chi_{li}^{(2)}} r_1\right), & V_i^{(2)} &= J_1\left(\sqrt{\chi_{li}^{(2)}} r_1\right), & W_i^{(2)} &= J_0\left(\sqrt{\chi_{li}^{(2)}} r_1\right) \\
 U_{i1}^{(1)} &= J_1\left(\sqrt{\chi_{li}^{(1)}} r_1\right), & V_{i1}^{(1)} &= J_1\left(\sqrt{\chi_{li}^{(1)}} r_1\right), & W_{i1}^{(1)} &= J_0\left(\sqrt{\chi_{li}^{(1)}} r_1\right) \\
 U_{i2}^{(1)} &= Y_1\left(\sqrt{\chi_{li}^{(1)}} r_1\right), & V_{i2}^{(1)} &= Y_1\left(\sqrt{\chi_{li}^{(1)}} r_1\right), & W_{i2}^{(1)} &= Y_0\left(\sqrt{\chi_{li}^{(1)}} r_1\right)
 \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

Случай, когда $(\chi_{li}^{(n)})^2 < 0$.

$$\left. \begin{aligned} U_i^{(2)} &= I_1\left(\sqrt{|\chi_{li}^{(2)}|} r_1\right), & V_i^{(2)} &= I_1\left(\sqrt{|\chi_{li}^{(2)}|} r_1\right), & W_i^{(2)} &= I_0\left(\sqrt{|\chi_{li}^{(2)}|} r_1\right) \\ U_{i1}^{(1)} &= I_1\left(\sqrt{|\chi_{li}^{(1)}|} r_1\right), & V_{i1}^{(1)} &= I_1\left(\sqrt{|\chi_{li}^{(1)}|} r_1\right), & W_{i1}^{(1)} &= I_0\left(\sqrt{|\chi_{li}^{(1)}|} r_1\right) \\ U_{i2}^{(1)} &= K_1\left(\sqrt{|\chi_{li}^{(1)}|} r_1\right), & V_{i2}^{(1)} &= K_1\left(\sqrt{|\chi_{li}^{(1)}|} r_1\right), & W_{i2}^{(1)} &= K_0\left(\sqrt{|\chi_{li}^{(1)}|} r_1\right) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где $Y_0\left(\sqrt{|\chi_{li}^{(n)}|} r_1\right)$ и $Y_1\left(\sqrt{|\chi_{li}^{(n)}|} r_1\right)$ – функции Бесселя второго рода нулевого и первого порядка соответственно; $I_0\left(\sqrt{|\chi_{li}^{(n)}|} r_1\right)$ и $I_1\left(\sqrt{|\chi_{li}^{(n)}|} r_1\right)$ – функции Бесселя чисто мнимого аргумента нулевого и первого порядка соответственно;

$K_0\left(\sqrt{|\chi_{li}^{(n)}|} r_1\right)$ и $K_1\left(\sqrt{|\chi_{li}^{(n)}|} r_1\right)$ – функции Макдональда нулевого и первого порядка соответственно. Отметим, что при математических преобразованиях, проведенных выше, использованы известные рекуррентные соотношения типа

$$\begin{aligned} J'_0(x) &= -J_1(x), & J'_p(x) + \frac{p}{x} J_p(x) &= J_{p-1}(x); \\ I'_0(x) &= I_1(x), & I'_p(x) + \frac{p}{x} I_p(x) &= -I_{p-1}(x); \\ K'_0(x) &= -K_1(x), & K'_p(x) + \frac{p}{x} K_p(x) &= K_{p-1}(x); \\ Y'_0(x) &= -Y_1(x), & Y'_p(x) + \frac{p}{x} Y_p(x) &= Y_{p-1}(x). \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, общее решение уравнения (7) можем записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} U^{(2)} &= \sum_{i=1}^3 A_i^{(2)} U_i^{(2)}, & V^{(2)} &= \sum_{i=1}^3 B_i^{(2)} V_i^{(2)}, & W^{(2)} &= \sum_{i=1}^3 C_i^{(2)} W_i^{(2)}, \\ U^{(1)} &= \sum_{i=1}^3 \left(A_{i1}^{(1)} U_{i1}^{(1)} + A_{i2}^{(1)} U_{i2}^{(1)} \right), & V^{(1)} &= \sum_{i=1}^3 \left(B_{i1}^{(1)} V_{i1}^{(1)} + B_{i2}^{(1)} V_{i2}^{(1)} \right), \\ W^{(1)} &= \sum_{i=1}^3 \left(C_{i1}^{(1)} W_{i1}^{(1)} + C_{i2}^{(1)} W_{i2}^{(1)} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя (18) в уравнение (7) получаем следующие соотношения между неизвестными постоянными $A_i^{(2)}, B_i^{(2)}, C_i^{(2)}, A_{i1}^{(1)}, A_{i2}^{(1)}, B_{i1}^{(1)}, B_{i2}^{(1)}, C_{i1}^{(1)}$ и $C_{i2}^{(1)}$.

Для случая, когда $(\chi_{li}^{(n)})^2 > 0, \quad n = 1, 2$:

$$\begin{aligned} C_i^{(2)} &= \frac{\sqrt{\chi_{li}^{(2)}} (1 + \alpha^{(2)})}{-\chi_{li}^{(2)} - \alpha^{(2)} + (s^{(2)})^2 - 2} A_i^{(2)}; & B_i^{(2)} &= \frac{\nu_1^{(2)}}{-\chi_{li}^{(2)} + (s^{(2)})^2 - 1} A_i^{(2)}; \\ C_{ik}^{(1)} &= \frac{\sqrt{\chi_{li}^{(1)}} (1 + \alpha^{(1)})}{-\chi_{li}^{(1)} - \alpha^{(1)} + (s^{(1)})^2 - 2} A_{ik}^{(1)}; & B_{ik}^{(1)} &= \frac{\nu_1^{(1)}}{-\chi_{li}^{(1)} + (s^{(1)})^2 - 1} A_{ik}^{(1)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Для случая, когда $(\chi_{li}^{(n)})^2 < 0$, $n = 1, 2$:

$$C_i^{(2)} = \frac{\sqrt{\chi_{li}^{(2)}} (1 + \alpha^{(2)})}{|\chi_{li}^{(2)}| - \alpha^{(2)} + (s^{(2)})^2 - 2} A_i^{(2)}; \quad B_i^{(2)} = \frac{v_1^{(2)}}{|\chi_{li}^{(2)}| + (s^{(2)})^2 - 1} A_i^{(2)}; \tag{20}$$

$$C_{ik}^{(1)} = \frac{\sqrt{\chi_{li}^{(1)}} (1 + \alpha^{(1)})}{|\chi_{li}^{(1)}| - \alpha^{(1)} + (s^{(1)})^2 - 2} A_i^{(1)}; \quad B_{ik}^{(1)} = \frac{v_1^{(1)}}{|\chi_{li}^{(1)}| + (s^{(1)})^2 - 1} A_{ik}^{(1)} .$$

Таким образом, полностью определяем решения поставленной задачи о распространении волн с начальными кручениями в составном цилиндре.

Подставляя решение (18) в соотношение (6), проведя соответствующие математические выкладки, из (3), (2) и (6) получаем выражение для напряжений и перемещений через неизвестные постоянные, входящие в общее решение (18). Далее, удовлетворяя контактные (4) и граничные (5) условия, получаем систему однородных алгебраических уравнений для этих неизвестных постоянных. Из условия существования нетривиально-

го решения системы приравниваем к нулю детерминант этой системы. Получаем дисперсионное уравнение в следующем виде:

$$\det \left\| \alpha_{ij} (S^{(1)}, S^{(2)}, kR, \vartheta^{(1)}, \vartheta^{(2)}) \right\| = 0 \tag{21}$$

$i, j = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 9.$

Следует отметить, что при $\vartheta^{(2)} = \vartheta^{(1)} = 0$ дисперсионные уравнения (21) можно представить в следующем виде:

$$\left(\det \left\| \alpha_{1ij} (s^{(n)}, kR) \right\| \right) \left(\det \left\| \alpha_{2ln} (s^{(n)}, kR) \right\| \right) = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad l, n = 1, 2, 3, \tag{22}$$

где $\det \left\| \alpha_{1ij} (s^{(1)}, s^{(2)}, kR) \right\| = 0 \tag{23}$

и $\det \left\| \alpha_{2ln} (s^{(1)}, s^{(2)}, kR) \right\| = 0 \tag{24}$

являются дисперсионными уравнениями для продольной и крутильной осесимметричных волн в составном цилиндре соответственно.

Численные результаты и их анализ

Численные результаты получаются для составного цилиндра из решения дисперсионного уравнения (20) (для случая, когда $\vartheta = 0$). При обсуждении численных результатов верхние индексы (2) и (1) будем менять с верхними индексами (f) и (m) соответственно. Кроме того, будем предполагать, что $v^{(f)} = v^{(m)} = 0,3$, $\rho^{(f)} = \rho^{(m)}$, $E^{(f)} / E^{(m)} = 5,0$, $h / R = 0,5$. При этом в основном будем рассматривать случай, когда $\vartheta^{(f)} = \vartheta^{(m)} = 0,05$. Введем обозначения $\vartheta = \vartheta^{(m)} = \vartheta^{(f)}$.

Дисперсионные кривые, полученные при $\vartheta_1 = 0,0$, приведены на рис. 2 для случая, когда $E^{(f)} / E^{(m)} = 5,0$. На рисунке приведены дисперсионные кривые, соответствующие первой дисперсионной моде крутильной волны (кривая обозначена через *TW*), первой дисперсионной моде продольной волны (кривая обозначена через *LW*) и первой недисперсионной моде, относящейся одновременно к обоим типам волн. Кроме того, на рисунке отмечена точка пересечения кривых, соответствующих первой дисперсионной моде крутильных волн и первой дисперсионной моде продольных волн.

Как видно из рис. 2, для мод продольных и крутильных волн скорость распространения волн получает конечно-предельное значение при $kR \rightarrow 0$.

Для нахождения этих предельных значений в работах [3; 4] заданы аналитические формулы.

Кроме того, при $kR \rightarrow \infty$ скорость распространения волн по поверхности внешнего цилиндра, соответствующая скорости волны Рэлея ($C_R^{(m)}$), и скорость распространения крутильной волны приближаются к скорости распространения поперечной волны ($C_2^{(m)}$).

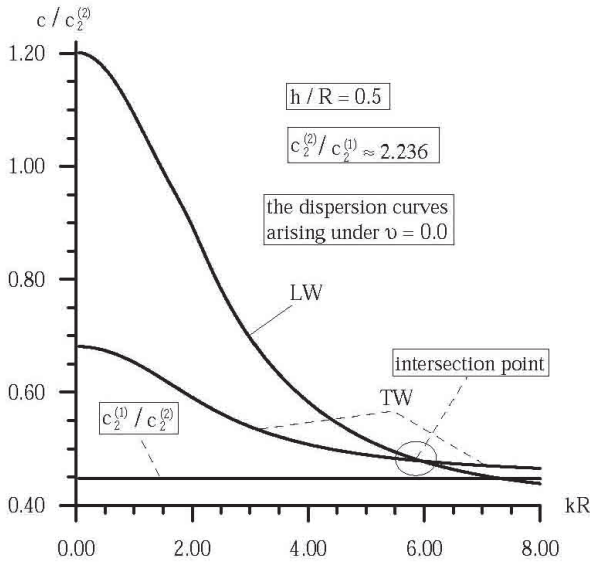


Рис. 2. Дисперсионные кривые для составного цилиндра при $C_2^{(f)}/C_2^{(m)} \approx 2,236$ и при отсутствии начального кручения: intersection point – точка пересечения [Figure 2. Dispersion curves for a compound cylinder for with and without initial torsion]

Теперь рассмотрим дисперсионные кривые, полученные из решения уравнения (21) при $\nu = 0,05$.

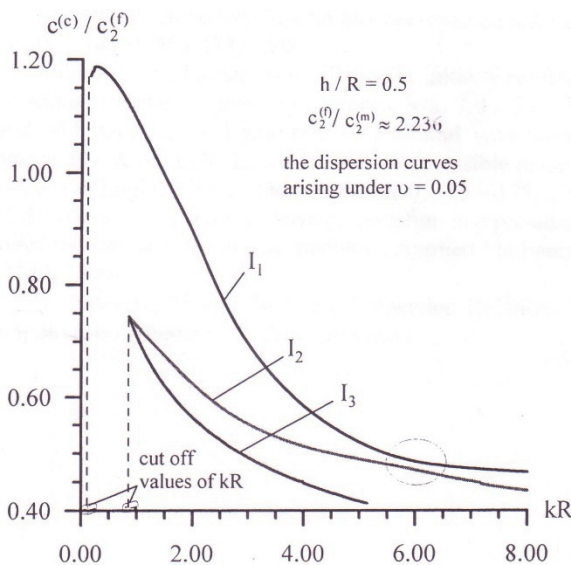


Рис. 3. Дисперсионные кривые [Figure 3. Dispersion curves]

Эти кривые обозначены на рис. 3. Кривые J_2 и J_3 показывают крутильные волны первой моды, а кривая J_1 показывает продольные волны первой моды. Как видно из рис. 3, кривые в отличие от состояния $\nu \neq 0$. Для kR существуют разрывные значения и при условии $kR \rightarrow 0$ отсутствует конечное предельное значение скорости распространения волны. Кроме того, дисперсионные кривые J_1 и J_2 нигде не пересекаются.

Заключение

Как видно из полученных математических результатов, действие начального кручения в цилиндре на величину распространения волны в цилиндре носит не только количественный, но и качественный характер.

© Гулиев М.С., Сейфуллаев А.И., Абдуллаева Дж.Н., 2018



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Список литературы

1. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. Киев: А.С.К., 2004. 672 с.
2. Akbarov S.D. Recent investigations on the dynamical problems of the elastic body with initial (residual) stresses (review) // Int. Appl. Mechanic. 2007. Vol. 43. No. 12. Pp. 3–27.
3. Akbarov S.D., Guliev M.S. Axisymmetric longitudinal wave propagation in a finite pre-strained compound circular made from compressible materials // CMES – Computer Modeling in Engineering and Sciences. 2009. Vol. 39. No. 2. Pp. 155–177. doi.org/10.1007/s10778-010-0255-y.
4. Akbarov S.D., Guliev M.S. Propagation of axisymmetric longitudinal waves in a finitely pre-strained circular cylinder embedded in a finitely pre-strained infinite elastic body // Mechanics of Composite Materials. 2008. Vol. 44. No. 5. Pp. 465–478. doi.org/10.1007/s11029-008-9045-6.
5. Demiray H., Suhubi E.S. Small torsional oscillation in initially twisted circular rubber cylinder // International Journal of Engineering Sciences. 1970. Vol. 8. Pp. 19–30.
6. Ozturk A., Akbarov S.D. Torsional wave propagation in a pre-stressed circular cylinder embedded in a pre-stressed elastic medium // Applied Mathematical Modelling. 2009. Vol. 33. Pp. 3636–3649.
7. Seyfullayev A.I., Guliyev M.S. On the axisymmetric wave propagation in a finite restrained compound circular cylinder made from compressible materials // In-

ternational Journal of Nanosystems. 2010. Vol. 2. No. 2. P. 33–42.

Об авторах

Гулиев Муган Салман оглу – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики, Гянджинский государственный университет (Гянджа, Азербайджан). *Область научных интересов:* динамические задачи теории упругости. *Контактная информация:* e-mail – a.seyfullayev@yahoo.com.

Сейфуллаев Ализаде Имамали – кандидат физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник отдела волновой динамики, Институт математики и механики, Национальная академия наук Азербайджана (Баку, Азербайджан). *Область научных интересов:* механика разрушения и динамические задачи нелинейной теории упругости. *Контактная информация:*

e-mail – a.seyfullayev@yahoo.com. eLIBRARY SPIN-код: 7412-8270.

Абдуллаева Джамиля Новруз – доцент, преподаватель кафедры методики математики, Азербайджанский государственный педагогический университет (Баку, Азербайджан). *Область научных интересов:* механика разрушения и динамические задачи нелинейной теории упругости. *Контактная информация:* e-mail – a.seyfullayev@yahoo.com.

Для цитирования

Гулиев М.С., Сейфуллаев А.И., Абдуллаева Дж.Н. Исследование распространения упругих волн в составном цилиндре с начальным кручением // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 5. С. 404–413. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-5-404-413.

RESEARCH PAPER

Investigation of the distribution of elastic waves in the composite cylinder with the initial torch

Mugan S. Guliyev¹, Alizade I. Seyfullayev^{2*}, Jamile N. Abdullayeva³

¹Ganja State University

187 Sh.I. Xatai Avenue, Ganja, AZ2000, Republic of Azerbaijan

²Institute of Mathematics and Mechanics of the Azerbaijan National Academy of Sciences

9 B. Vahabzade, Baku, AZ1143, Republic of Azerbaijan

³Azerbaijan State Pedagogical University

68 Uzeyir Hacibeyli, Baku, AZ1000, Republic of Azerbaijan

*Corresponding author

(received: May 03, 2018; accepted: August 15, 2018)

Abstract. The aim of work. The work is devoted to the study of the propagation of axisymmetric longitudinal waves in a compound cylinder with initial torsion.

Solution technique. The initial stresses in the cylinder are determined using the classical linear theory of elasticity. Methods for solving corresponding problems of intrinsic significance are proposed. Numerical results are given and their analysis is carried out.

Results. It was found that the presence of initial torsion in cylinders does not exclude the appearance of an axisymmetric longitudinal and axisymmetric waves in a compound cylinder separately. It is found that, in the absence of initial torsion in the compound cylinder, there are intersection points between the dispersion curves corresponding to the modes of axially symmetric longitudinal and torsional waves.

It is shown that in the case when initial torsion takes place on at least one cylinder, the axisymmetric longitudinal and torsional waves can not propagate separately, i.e. there is an interference between these two types of axisymmetric waves in a composite cylinder. Methods for solving the problem are developed and corresponding dispersion equations for a compound cylinder are obtained. Dispersion equations are solved and dispersion curves are obtained, an algorithm is developed for constructing these curves.

Keywords: elastic waves, torsion, stress, Bessel function, MacDonald function

References

1. Guz A.N. (2004). *Uprugiye volni v telakh s nachalnymi (ostatochnimi) napryajeniyami [Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses]*. Kiev, A.S.K. Publ., 672. (In Russ.)
2. Akbarov S.D. (2007). Recent investigations on the dynamical problems of the elastic body with initial (residual) stresses (review). *Int. Appl. Mechanics*, 43(12), 3–27.
3. Akbarov S.D., Guliev M.S. (2009). Axisymmetric longitudinal wave propagation in a finite pre-strained compound circular made from compressible materials. *CMES – Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 39(2), 155–177, doi.org/10.1007/s10778-010-0255-y.
4. Akbarov S.D., Guliev M.S. (2008). Propagation of axisymmetric longitudinal waves in a finitely pre-strained circular cylinder embedded in a finitely pre-strained infinite elastic body. *Mechanics of Composite Materials*, 44(5), 465–478, doi.org/10.1007/s11029-008-9045-6.
5. Demiray H., Suhubi E.S. (1970). Small torsional oscillation in initially twisted circular rubber cylinder. *International Journal of Engineering Sciences*, 8, 19–30.
6. Ozturk A., Akbarov S.D. (2009). Torsional wave propagation in a pre-stressed circular cylinder embedded in a pre-stressed elastic medium. *Applied Mathematical Modelling*, 33, 3636–3649.
7. Seyfullayev A.I., Guliyev M.S. (2010). On the axisymmetric wave propagation in a finite restrained compound circular cylinder made from compressible materials. *International Journal of Nanosystems*, 2(2), 33–42.

About the authors

Guliyev Mugan Salman oglu – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Faculty of General Technical Disciplines, Department of Physics, Genje State University (Genje, Azerbaijan). *Research interests*: dynamic problems of the elasticity theory. *Contact*: e-mail – a.seyfullayev@yahoo.com.

Seyfullayev Alizade Imamali oglu – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Fellow, Professor Assistant, Department of Wave Dynamics, Institute of Mathematics and Mechanics, Azerbaijan National Academy of Sciences (Baku, Azerbaijan). *Research interests*: fracture mechanics and dynamic problems of non-linear elasticity theory. *Contact*: e-mail – a.seyfullayev@yahoo.com. eLIBRARY SPIN-code: 7412-8270.

Abdullayeva Jamile Novruz gyzi – Lecturer, Department of Methodology for Mathematics, Azerbaijan State Pedagogical University (Baku, Azerbaijan). *Research interests*: dynamic problems of non-linear elasticity theory. *Contact*: e-mail – a.seyfullayev@yahoo.com.

For citation

Guliyev M.S., Seyfullayev A.I., Abdullayeva J.N. (2018). Investigation of the distribution of elastic waves in the composite cylinder with the initial torch. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 14(5), 404–413. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-5-404-413. (In Russ.)