

ГЕОМЕТРИЯ СРЕДИННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОБОЛОЧЕК GEOMETRICAL INVESTIGATIONS OF MIDDLE SURFACES OF SHELLS

DOI 10.22363/1815-5235-2021-17-1-42-50
УДК 004.925.83

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Моделирование и визуализация образования плосконого додекаэдра в системе AutoCAD

В.А. Романова*, С.В. Страшнов

Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
*v.a.r-victoryna@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 11 ноября 2020 г.
Доработана: 27 декабря 2020 г.
Принята к публикации: 21 января 2021 г.

Для цитирования

Романова В.А., Страшнов С.В. Моделирование и визуализация образования плосконого додекаэдра в системе AutoCAD // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 1. С. 42–50. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-1-42-50>

Аннотация. Статья посвящена моделированию и визуализации образования плосконого (курносого) додекаэдра на базе додекаэдра Платона. Цели исследования – расчет параметров усечения додекаэдра для определения величины ребра плосконого додекаэдра, моделирование и визуализация процесса его формирования. Образование граней плосконого додекаэдра состоит в усечении ребер и вершин додекаэдра Платона с последующим поворотом новых граней вокруг их центров. Величины усечения ребер додекаэдра, угла поворота граней и длины ребра плосконого додекаэдра – параметры трех уравнений, составленных как расстояния между вершинами треугольников, расположенных между гранями курносого додекаэдра. Решение указанных уравнений выполнялось методом последовательных приближений. Результаты вычислений использовались для создания электронной модели плосконого додекаэдра и визуализации ее образования. Решение поставленной задачи в целом осуществлялось в системе AutoCAD с использованием программы на языке AutoLISP. Создано программное обеспечение для расчета параметров моделирования плосконого додекаэдра и визуализации его формирования.

Ключевые слова: тела Архимеда, тела Платона, плосконосый додекаэдр, курноносый додекаэдр, ромбоикосододекаэдр, полуправильные многогранники, ребро, вершина, AutoCAD, AutoLISP

Modeling and visualizing of the formation of a snub dodecahedron in the AutoCAD system

Victoryna A. Romanova*, Stanislav V. Strashnov

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation
*v.a.r-victoryna@mail.ru

Article history

Received: November 11, 2020
Revised: December 27, 2020
Accepted: January 21, 2021

Abstract. The article is devoted to modeling and visualization of the formation of flat-nosed (snub-nosed) dodecahedron (snub dodecahedron). The purpose of the research is to model the snub dodecahedron (flat-nosed dodecahedron) and visualize the process of its formation. The formation of the faces of the flat-nosed

Романова Виктория Анатольевна, доцент департамента строительства Инженерной академии; eLIBRARY SPIN-код: 3869-5969, Scopus Author ID: 57202194471.
Страшнов Станислав Викторович, доцент кафедры общеобразовательных дисциплин факультета русского языка и общеобразовательных дисциплин, кандидат технических наук; eLIBRARY SPIN-код: 2874-2214, Scopus Author ID: 57208507988, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-6401-2524>.
Victoryna A. Romanova, Associate Professor of the Department of Civil Engineering of the Academy of Engineering; eLIBRARY SPIN-code: 3869-5969, Scopus Author ID: 57202194471.
Stanislav V. Strashnov, Associate Professor of the Department of General Education Courses of the Faculty of Russian Language and General Educational Disciplines, PhD; eLIBRARY SPIN-code: 2874-2214, Scopus Author ID: 57208507988, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-6401-2524>.

© Романова В.А., Страшнов С.В., 2021

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

For citation

Romanova V.A., Strashnov S.V. Modeling and visualizing of the formation of a snub dodecahedron in the AutoCAD system. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(1):42–50. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-1-42-50>

dodecahedron consists in the truncation of the edges and vertices of the Platonic dodecahedron with the subsequent rotation of the new faces around their centers. The values of the truncation of the dodecahedron edges, the angle of rotation of the faces and the length of the edge of the flat-nosed dodecahedron are the parameters of three equations composed as the distances between the vertices of triangles located between the faces of the snub dodecahedron. The solution of these equations was carried out by the method of successive approximations. The results of the calculations were used to create an electronic model of the flat-nosed dodecahedron and visualize its formation. The task was generally achieved in the AutoCAD system using programs in the AutoLISP language. Software has been created for calculating the parameters of modeling a snub dodecahedron and visualizing its formation.

Keywords: Archimedean solids, Platonic solids, flat-nosed dodecahedron, snub dodecahedron, rhomboicosododecahedron, semi-regular polyhedron, edge, vertex, AutoCAD, AutoLISP

Введение

Две тысячи лет до нашей эры человечеству были известны многогранники. В те далекие времена египтяне, вавилоняне, китайцы умели вычислять объем, площадь, углы известных им многогранников. В пятом веке до нашей эры учеными Пифагорейской школы древних греков были изучены пять правильных многогранников, описанных Платоном (427–347 до н. э.) и названных в его честь. Первое определение правильного многогранника дано Евклидом (325–265 до н. э.). Греческим математиком Архимедом (287–212 до н. э.) в работе «О многогранниках» описаны тринадцать полуправильных многогранников и даны их рисунки. Каждая грань такого многогранника – правильный многоугольник, вокруг вершин каждой грани располагаются правильные многоугольники одинаковой, но другой формы, в одинаковой последовательности. Отмечается, что Архимедовы тела могут быть получены из Платоновых тел, причем девять из них – усечением Платоновых тел, еще два – вторым усечением, а курносый куб и курносый додекаэдр (рис. 1) – перемещением граней додекаэдра наружу и поворотом их вокруг своих центров [1]. Кеплер первым опубликовал полный список тринадцати Архимедовых тел и дал им названия, которыми мы пользуемся в настоящее время [1; 2].

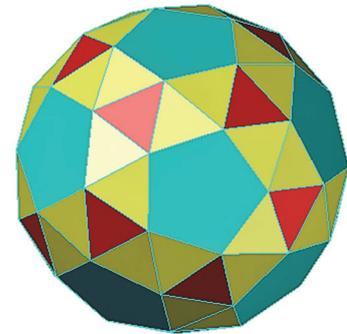


Рис. 1. Плосконосый (курносый) додекаэдр
[Figure 1. Snub dodecahedron]

С тех пор человечество постоянно пополняет свои знания в области науки о многогранниках. Основными мотивами продолжающихся исследований многогранников являются их красота и гармония. В настоящее время они используются в образовании инновационных форм, которые представляют интерес для архитекторов [3; 4].

Совершенствуются методы формирования многогранников. Модели полуправильных многогранников создаются с помощью разверток [5; 6], усечения правильных многогранников [7]. Известен метод формирования плосконосого додекаэдра¹, по которому *пятиугольные грани вытягиваются наружу на величину несколько меньшую, чем применяемую для ромбоикосододекаэдра, с образованием промежутков прямоугольной формы между гранями, а затем выполняется поворот граней плосконосого додекаэдра до образования в указанных промежутках правильных треугольников, стороны которых равны сторонам пятиугольных граней* [8; 9].

Предложен метод формирования плосконосого додекаэдра из совпадающих с гранями додекаэдра 12-ти правильных пятиугольников, между вершинами которых имеются расстояния, равные длинам их сторон. Положение пятиугольных граней выполняется экспериментально [4].

В работе (5) предлагается два варианта образования плосконосого додекаэдра:

- конструирование многогранника из 12 правильных пятиугольных пирамид и 80 правильных треугольных пирамид;
- облицовка твердой сферы диаметром D правильными пятиугольниками и правильными треугольниками со стороной a , определяемой из соотношения:

¹ Snub dodecahedron. URL: https://wiki2.org/en/Snub_dodecahedron (дата обращения: 10.01.2021); Snub dodecahedron. URL: <https://www.wikiwand.com> (дата обращения: 10.01.2021).

$$a = \frac{D}{C},$$

где D – диаметр сферы, описанной вокруг данного многогранника; C – константа, полученная автором, $C = 2,155837375\dots$

Появляются работы по использованию золотого сечения и золотых многоугольников для построения икосаэдра, додекаэдра и тел Архимеда [10; 11], по определению параметров плосконосого додекаэдра посредством компьютерных технологий [12; 13]. Разработаны способы визуализации образования поверхностей многогранников в таких средах, как AutoCAD и MathCAD [14–23].

В настоящем исследовании продолжается тема о моделировании и визуализации образования поверхностей полуправильных многогранников кинематическим методом в среде AutoCAD с использованием программ на языке AutoLISP.

В предыдущих статьях были рассмотрены усеченный тетраэдр, усеченный октаэдр, усеченный икосаэдр, усеченный додекаэдр, икосододекаэдр, усеченный икосододекаэдр и ромбоикосододекаэдр. Приоритет в настоящих исследованиях отдан плосконосому (курносому) додекаэдру.

Плосконосый (курносый) додекаэдр является одним из тринадцати тел Архимеда. У него 92 грани двух видов: 12 правильных пятиугольников и 80 равносторонних треугольников.

В представленной работе исследуется возможность визуализации процесса образования плосконосого (курносого) додекаэдра в системе AutoCAD.

Решение поставленной задачи выполняется посредством программы на языке AutoLISP и включает следующие этапы:

- 1) определение величины ребра плосконосого додекаэдра;
- 2) разработка методики образования плосконосого додекаэдра в системе AutoCAD;
- 3) визуализация формирования плосконосого додекаэдра.

Определение величины ребра плосконосого додекаэдра

Предполагается, что грани плосконосого додекаэдра образуются посредством усечения ребер и вершин додекаэдра с последующим вращением новых правильных пятиугольных граней вокруг их центров. Между пятиугольными гранями образуется пространство, в котором при определенных условиях имеется возможность расположить по два равносторонних треугольника со сторонами, равными сторонам пятиугольных граней. При этом одна из сторон каждого треугольника является также стороной пятиугольника. Под каждой вершиной додекаэдра устанавливается треугольник, стороны которого принадлежат также сторонам установленных ранее треугольников (рис. 2).

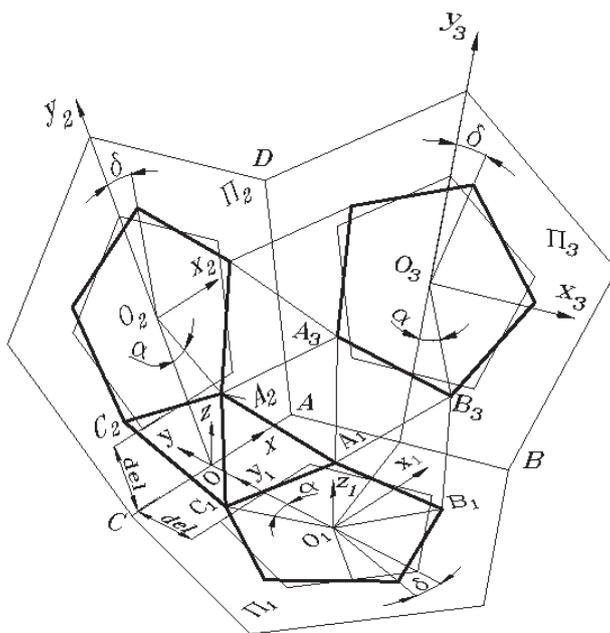


Рис. 2. Образование граней курносого додекаэдра
[Figure 2. Formation of the faces of the snub dodecahedron]

Следовательно, если треугольники между гранями плосконого додекаэдра являются равными и равносторонними, то все треугольники плосконого додекаэдра являются равносторонними и равными между собой.

На рис. 2 изображены три грани P_1, P_2 и P_3 додекаэдра Платона, три грани плосконого додекаэдра, расположенные в плоскостях граней P_1, P_2 и P_3 , два треугольника $A_1A_2C_1, A_2C_2C_1$, расположенные между сторонами A_1C_1 и A_2C_2 плосконого додекаэдра и треугольник $A_1A_2A_3$ под вершиной A додекаэдра.

В чертеже установлены три системы координат: $Oxuz$ в середине ребра AC , $O_1x_1y_1z_1$ и $O_2x_2y_2z_2$ в центрах O_1 и O_2 пятиугольных граней додекаэдра.

Исходным параметром является радиус r окружности, описанной вокруг пятиугольника додекаэдра Платона.

Радиус окружности, описанной вокруг пятиугольника плосконого додекаэдра, является функцией от усежения его ребер $r_1 = f(\text{del})$ и равен

$$r_1 = \frac{r \cdot \cos \beta - \text{del}}{\cos \beta}, \tag{1}$$

где β – угол, равный 36° ; del – величина усежения граней додекаэдра; r – радиус окружности, описанной вокруг пятиугольника додекаэдра.

Рассмотрим треугольник $A_2C_2C_1$ (рис. 2).

Координаты точек A_1, A_2, C_1 и C_2 являются функциями как от параметра del , так и от угла α . Угол α вычисляется из выражения

$$\alpha = \beta - \delta, \tag{2}$$

где δ – угол поворота граней плосконого додекаэдра относительно их центров.

Чтобы определить величину ребра плосконого додекаэдра, необходимо найти такие значения параметров del и α , при которых треугольники $A_2C_2C_1$ и $A_2C_1A_1$ являются равносторонними и равными друг другу.

Геометрически равенство всех сторон треугольника $A_2C_2C_1$ достигается, если графики функций $A_2C_1(\alpha), C_2C_1(\alpha)$ и $A_2C_2(\alpha)$, изображенные в системе координат $O\alpha y$, при некотором усежении del пересекаются в одной точке $P(\alpha, y)$ (рис. 3).

При других значениях параметров del и α графики указанных зависимостей представлены на рис. 4.

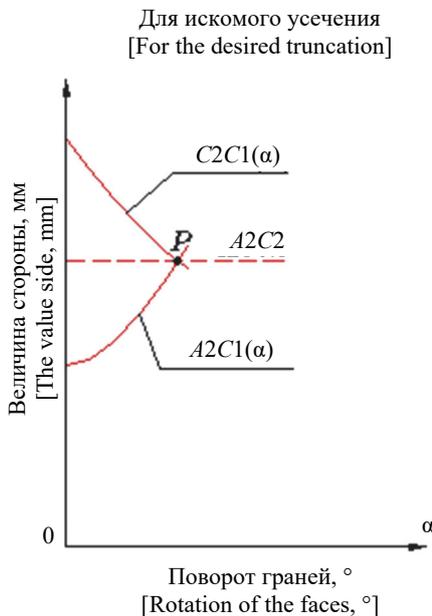


Рис. 3. Условие равенства треугольников $A_2C_2C_1$ и $A_2C_1A_1$ – пересечение графиков в одной точке P [Figure 3. Equality condition of triangles $A_2C_2C_1$ and $A_2C_1A_1$ – intersection of graphs at one point P]

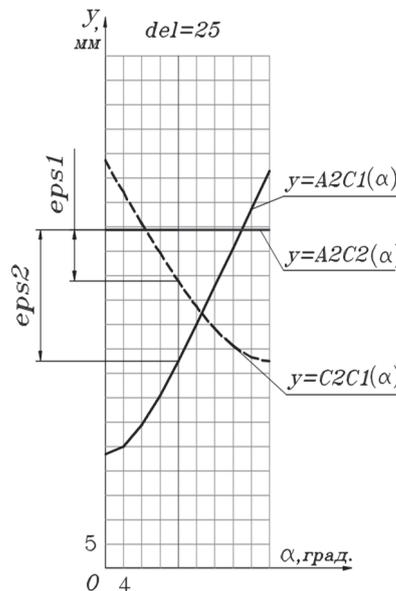


Рис. 4. Графики зависимости сторон треугольника $A_2C_2C_1$ от угла α [Figure 4. Graphs of the dependence of sides of the triangle $A_2C_2C_1$ from an angle α]

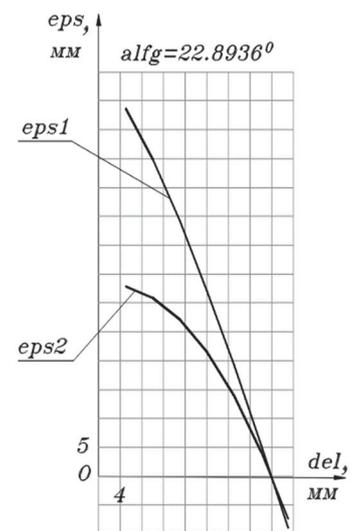


Рис. 5. Графики функций $\text{eps1}(\text{del})$ и $\text{eps2}(\text{del})$ [Figure 5. Function graphs $\text{eps1}(\text{del})$ and $\text{eps2}(\text{del})$]

Для каждой пары параметров del и α имеется отклонение значений выражений $A_2C_1(\alpha)$ и $C_2C_1(\alpha)$ от длины стороны A_2C_2 (рис. 4):

$$\begin{aligned} \text{eps1} &= A_2C_2 - C_2C_1, \\ \text{eps2} &= A_2C_2 - A_2C_1. \end{aligned}$$

Величины eps1 и eps2 – абсолютная погрешность вычислений.

Сторона, являющаяся гранью плосконосого додекаэдра, определяется из выражения

$$A_2C_2 = 2 * r_1(\text{del}) * \sin \beta,$$

что указывает на зависимость ее величины только от параметра del .

Выражения для определения сторон A_2C_1 и C_2C_1 составляются как расстояния между соответствующими точками в системе $Oxuz$ и являются функциями от параметров del и α . Эти выражения трансцендентны, поскольку содержат тригонометрические функции. В связи с этим параметры del и α , а также величина ребра плосконосого додекаэдра могут быть вычислены приближенно, с заданной точностью ε . Условием определения величины ребра плосконосого додекаэдра является

$$|\text{eps1}| \leq \varepsilon \text{ и } |\text{eps2}| \leq \varepsilon. \quad (3)$$

Для выполнения необходимых вычислений использовался метод итераций, реализация которого обеспечивалась программой, созданной на языке AutoLISP. Зависимости eps1 и eps2 от параметра del при заданной величине α приведены на рис. 5. Решение находится на интервале [31, 32], где у функций $\text{eps1}(\text{del})$ и $\text{eps2}(\text{del})$ знаки величин изменяются.

Алгоритм решения включает два цикла вычислений, вложенных друг в друга. Во внешнем цикле задаются значения угла α из интервала [0, β].

Во внутреннем цикле с параметром del вычисляются координаты точек A_2, C_2, C_1 , величины сторон A_2C_2, A_2C_1, C_2C_1 и погрешностей $\text{eps1}, \text{eps2}$.

Величина абсолютной погрешности ε принимается равной

$$\varepsilon = 0,00001 \text{ мм.}$$

При выполнении условия (3) и при $r = 90,0$ мм получены следующие результаты:

$$\text{del} = 31,8826 \text{ мм,}$$

$$\delta = 13,1064^\circ,$$

$$A_2C_2 = A_2C_1 = C_2C_1 = a = 59,4732 \text{ мм,}$$

где a – величина ребра плосконосого додекаэдра.

Рассчитана величина расстояния между пятиугольными гранями, как для плосконосого додекаэдра, так и для ромбоикосододекаэдра из соотношения

$$\text{dist} = 2 * \text{del} * \sin \frac{\gamma}{2},$$

где γ – величина двугранного угла обоих многогранников, $\gamma = 116,565^\circ$.

В таблице приведены сравнительные данные для ромбоикосододекаэдра, описанного в статье [23], и плосконосого додекаэдра, образованных при $r = 90,0$ мм.

Таблица

Сравнительные размеры плосконосого додекаэдра и ромбоикосододекаэдра, мм
[Table. The relative size of snub dodecahedron and rhombicosidodecahedron, mm]

Параметры [Parameters]	Плосконосый додекаэдр [Snub dodecahedron]	Ромбоикосододекаэдр [Rhombicosidodecahedron]
Del	31,8826	33,5408
a	59,4732	57,0637
dist	54,2419	57,0637

Данные таблицы указывают на то, что усечением ребер додекаэдра между сторонами A_2C_2 и A_1C_1 у плосконосого додекаэдра образуется промежуток в виде прямоугольника, а у ромбоикосододекаэдра – квадрата.

Построение плосконого додекаэдра в системе AutoCAD

Формирование плосконого додекаэдра выполнялось в два этапа. На первом этапе производилось формирование граней плосконого додекаэдра усечением ребер додекаэдра Платона. Грани курносого додекаэдра остаются в ячейках каркаса додекаэдра (рис. 6), при этом между ними образуется пространство. Центры пятиугольников новых граней совпадают с центрами пятиугольников исходных граней. Радиус окружности, описанной вокруг пятиугольника курносого додекаэдра, вычисляется по формуле (1). Это дает возможность вычертить пятиугольный контур плосконого додекаэдра внутри пятиугольника ячейки исходного каркаса. Для вычерчивания пятиугольника в ячейке грани Π_2 додекаэдра система координат переносится в ее центр – точку O_2 и выполняется обращение к команде *Polygon*. Полученный пятиугольник e_2 используется в качестве параметра функции *Array*, которая создает массив пятиугольников нижнего ряда. Аналогично формируются пятиугольники верхнего ряда и оснований курносого додекаэдра. В пятиугольных ячейках формируются поверхности граней (рис. 6).

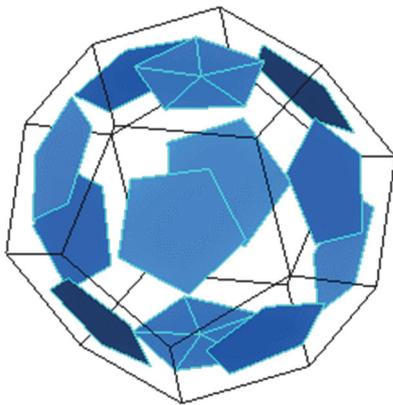


Рис. 6. Грани курносого додекаэдра расположены в ячейках каркаса додекаэдра
[Figure 6. The faces of the snub dodecahedron are located in the cells of the dodecahedron]

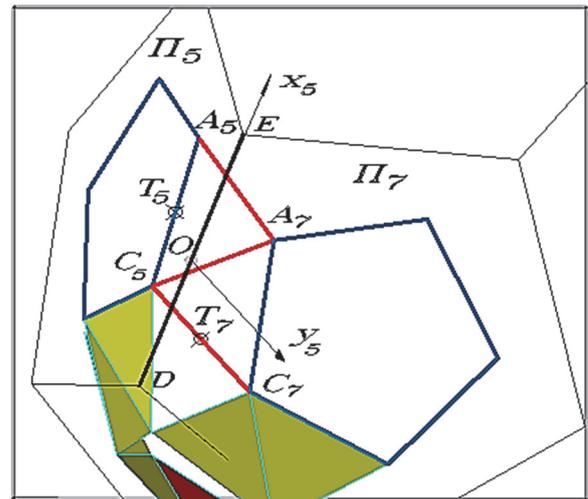


Рис. 7. Построение треугольных ячеек каркаса
[Figure 7. Constructing triangular frame cells]

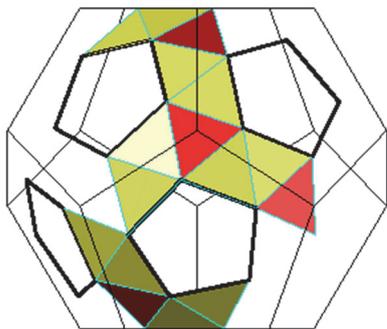


Рис. 8. Набор треугольных элементов поверхности
[Figure 8. Set of triangular surface elements]

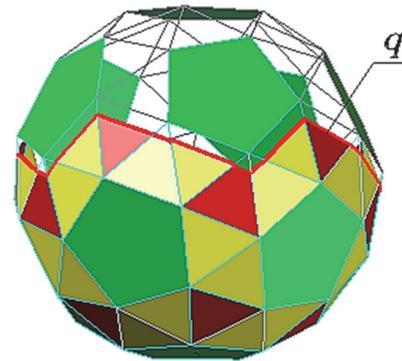


Рис. 9. Образование поверхности курносого додекаэдра
[Figure 9. Formation of snub dodecahedron surfaces]

На втором этапе появившееся между гранями пространство заполняется гранями треугольной формы. Построение ребер додекаэдра показано на рис. 7, где изображены по две пятиугольных ячейки додекаэдра Платона и курносого додекаэдра. Система координат Ox_5y_5 устанавливается в середине ребра DE – точке O . Ось x направляется по указанному ребру, ось y размещается в плоскости Π_5 . При таком положении системы Ox_5y_5 координаты точек A_5, C_5, A_7 и C_7 равны координатам точек A_1, C_1, A_2 и C_2 соответственно (рис. 2), которые заранее вычисляются программой на языке AutoLISP. Соединяя точки A_5 и A_7 ,

C_5 и C_7 , C_5 и A_7 , как показано на рис. 7, получаем два равносторонних треугольника между гранями курносого додекаэдра.

Для формирования поверхностей в полученных треугольных ячейках систему координат переносим сначала в точку T_7 , ось x направляем в точку C_7 , а ось y – в точку A_7 . Формирование поверхности выполняется кинематическим способом.

Направляющими линиями являются стороны A_7C_5 и A_7C_7 треугольника $C_5A_7C_7$.

Для образования поверхности в треугольной ячейке $C_5A_5A_7$ стороны C_5A_7 и A_5A_7 принимаются в качестве направляющих. Система координат переносится в точку T_5 , ось x направляется в точку C_5 , а ось y – в точку A_7 .

Для формирования поверхности курносого додекаэдра необходим набор треугольных поверхностей, который может служить параметром функции *Array* языка AutoLISP. Такой набор представлен на рис. 8. Образование элементов набора идет по описанному выше алгоритму между пятиугольными ячейками.

Каждый элемент набора может быть образован как массив отсеков поверхности треугольника. В этом случае поверхность, сформированная функцией *Array*, представляет собой массив отсеков поверхности треугольных граней. С использованием данного массива осуществляется визуализация процесса образования поверхности плосконосого додекаэдра между пятиугольными гранями методом «замораживания» [16; 22; 23]. Поверхность формируется при последовательном «размораживании» отсеков треугольных граней (рис. 9). Образующей поверхности является ломаная линия q .

Заключение

Моделирование плосконосого додекаэдра может быть выполнено посредством усечения ребер и вершин додекаэдра Платона, если известны параметры: усечение ребер del додекаэдра и угол δ поворота граней плосконосого додекаэдра, при которых все ребра его равны друг другу.

Поскольку выражения для ребер содержат тригонометрические функции, для решения задачи использовался метод последовательных приближений. Величина ребра вычислялась с точностью, достаточной для инженерных задач. Разработан алгоритм и программа на языке AutoLISP для вычисления величины ребра и параметров del , ϵ . Решена конкретная задача, в которой исходным параметром был радиус окружности, описанной вокруг пятиугольника додекаэдра. Параллельно вычислены величины del , a , $dist$ для ромбоикосододекаэдра по программе, описанной в работе [23]. Сравнительные данные, приведенные в таблице, указывают на то, что у плосконосого додекаэдра формируется между гранями промежутки в виде прямоугольника, а у ромбоикосододекаэдра – квадрата.

Для образования электронной модели поверхности курносого додекаэдра и визуализации его формирования кинематическим способом созданы две программы-функции в основной программе на языке AutoLISP.

Список литературы

1. Kiper G. Polyhedra. A historical review. Ankara, 2007. 42 p.
2. Cromwell P.R. Polyhedra. Cambridge University Press, 1999. 451 p.
3. Кривошапко С.Н. Многогранники и квазимногогранники в архитектуре гражданских и промышленных сооружений // Строительство и реконструкция. 2020. № 4. С. 48–64.
4. Мотульский Р.С. Национальная библиотека Беларуси: новое здание – новая концепция развития / Национальная библиотека Беларуси. Минск, 2007. 322 с.
5. Веннинджер М. Модели многогранников. М.: Мир, 1974. 238 с.
6. Ашкингузе В.Г. О числе полуправильных многогранников // Математическое просвещение. Серия 2. 1957. Вып. 1. С. 107–118.
7. Савченко В. Полуправильные многогранники // Квант. 1979. № 1. С. 3.
8. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Правильные, полуправильные и звездчатые многогранники. М.: МЦНМО, 2010. 136 с.
9. Weissbach B., Martini H. On the chiral Archimedean solids // Contrib. Algebra and Geometr. 2002. Vol. 43. Pp. 121–133.
10. Васильева В.Н. Золотое сечение и золотые многоугольники при построении икосаэдра, додекаэдра и тел Архимеда, основанных на них // Геометрия и графика. 2019. Т. 8. С. 47–55. https://doi.org/10.12737/article_5d2c1ceb9f91b1.21353054
11. Vasileva V.N. Application of computer technologies in building design by example of original objects of increased complexity // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2017. Vol. 262. 012106. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/262/1/012106>

12. Rajpoot H.C. Optimum solution of snub dodecahedron (an Archimedean solid) by using HCR's theory of polygon & Newton – Raphson method. Dec. 2014. M.M.M. University of Technology, Gorakhpur-273010 (UP), India. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.23604.60807>
13. Еркина Е.Б., Королькова Н.Н. Геометрическое моделирование в автоматизированном проектировании архитектурных объектов // Геометрия и графика. 2016. Т. 4. № 2. С. 48–54. <https://doi.org/10.12737/19833>
14. Романова В.А. Визуализация правильных многогранников в процессе их образования // Геометрия и графика. 2019. Т. 7. № 1. С. 55–67. https://doi.org/10.12737/article_5c91ffd0916d52.90296375
15. Иванов В.Н., Кривошапко С.Н., Романова В.А. Основы разработки и визуализации объектов аналитических поверхностей и перспективы их использования в архитектуре и строительстве // Геометрия и графика. 2017. Т. 5. № 4. С. 3–14. https://doi.org/10.12737/article_5a17f590be3f51.37534061
16. Иванов В.Н., Романова В.А. Конструкционные формы пространственных конструкций. Визуализация поверхностей в системах MathCad, AutoCad: монография. М.: Издательство АСВ, 2016. 412 с.
17. Schroeder W.J., Martin K., Lorensen B. The visualization toolkit. Kitware, Inc., 2003.
18. Habek R.B. Vizualization techniques for engineering mechanics // Computing Systems in Engineering. 1990, Jan. Vol. 1. No. 1. Pp. 37–50.
19. Dupac M., Popirlan C.-I. Web technologies for modelling and visualization in mechanical engineering. 2010, April 1. <http://dx.doi.org/10.5772/9037>
20. Gallagher R.S., Press S. Computer visualization: graphics techniques for engineering and scientific analysis. CRC Press, 1994.
21. Сага J., Vondrakova A. Fuzzy surface visualization using HSL colour model. *Electronic Journal*. 2017;2(2);26–42.
22. Романова В.А. Визуализация образования поверхностей полуправильных многогранников в среде AutoCAD // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 6. С. 449–457. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-449-457>
23. Романова В.А. Визуализация образования поверхности полуправильных многогранников Архимеда // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 4. С. 279–289. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-279-289>

References

1. Kiper G. *Polyhedra. A historical review*. Ankara; 2007.
2. Cromwell P.R. *Polyhedra*. Cambridge University Press; 1999.
3. Krivoschapko S.N. Polyhedra and quasi-polyhedra in architecture of civil and industrial erections. *Construction and Reconstruction*. 2020;4(90):48–64.
4. Motulsky R.S. *Nacional'naya biblioteka Belarusi: novoe zdanie – novaya koncepciya razvitiya* [National Library of Belarus: new building – new development concept]. Minsk; 2007. (In Russ.)
5. Wenninger M. *Polyhedron models*. Cambridge University Press; 1971.
6. Ashkinuz V.G. O chisel polupravil'nyh mnogogrannikov [On the number of semi-control polyhedra]. *Mathematical Education*. 1957;2(1):107–118. (In Russ.)
7. Savchenko V. Polupravilnye mnogogranniki [Semicontrolled polyhedral]. *Quant*. 1979;(1):3. (In Russ.)
8. Smirnova I.M., Smirnov V.A. *Pravilnye, polupravilnyei zvezdchatye mnogogranniki* [Correct, semi-control and star polyhedra]. Moscow; MCNMO Publ., 2010. (In Russ.)
9. Weissbach B., Martini H. On the chiral Archimedean solids. *Contrib. Algebra and Geometry*. 2002;4:121–133.
10. Vasilieva V.N. Golden section and golden rectangles when building icosahedron, dodecahedron and archimedean solids based on them. *Geometry and Graphics*. 2019;7(2):47–55. (In Russ.) https://doi.org/10.12737/article_5d2c1ceb9f91b1.21353054
11. Vasileva V.N. Application of computer technologies in building design by example of original objects of increased complexity. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng*. 2017;262:012106. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/262/1/012106>
12. Rajpoot H.C. Optimum solution of snub dodecahedron (an Archimedean solid) by using HCR's theory of polygon & Newton – Raphson method. Dec. 2014. M.M.M. University of Technology, Gorakhpur-273010 (UP), India. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.23604.60807>
13. Ertskina E.B., Korolkova N.N. Geometric modeling in automated design of architectural objects. *Geometry and Graphic*. 2016;4(2):48–54. (In Russ.) <https://doi.org/10.12737/19833>
14. Romanova V.A. Visualization of regular polyhedrons in the process of their formation. *Geometry and Graphics*. 2019;7(1):55–67. (In Russ.) https://doi.org/10.12737/article_5c91ffd0916d52.90296375

15. Ivanov V.N., Krivoschapko S.N., Romanova V.A. Bases of development and visualization of objects of analytical surfaces and the prospect of their use in architecture and construction. *Geometry and Graphics*. 2017;5(4):3–14. (In Russ.) https://doi.org/10.12737/article_5a17f590be3f51.37534061
16. Ivanov V.N., Romanova V.A. *Konstruktivnyye formy prostranstvennykh konstruksii. Vizualizatsiya poverkhnostei v sistemakh MathCad, AutoCad* [Constructive forms of space constructions. Visualization of the surfaces at systems MathCad, AutoCad]. Moscow: ASV Publishing House; 2016. (In Russ.)
17. Schroeder W.J., Martin K., Lorensen B. *The visualization toolkit*. Kitware, Inc.; 2003.
18. Haber R.B. Visualization techniques for engineering mechanics. *Computing Systems in Engineering*. 1990;1(1):37–50.
19. Dupac M., Popirlan C.-I. *Web technologies for modelling and visualization in mechanical engineering*. 2010. April 1. <http://dx.doi.org/10.5772/9037>
20. Gallagher R.S., Press S. *Computer visualization: graphics techniques for engineering and scientific analysis*. CRC Press; 1994.
21. Caha J., Vondrakova A. Fuzzy surface visualization using HSL colour model. *Electronic Journal*. 2017;2(2):26–42.
22. Romanova V.A. Visualizing of semi-regular polyhedrons in AutoCAD environment. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(6):449–457. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-449-457>
23. Romanova V.A. Visualizing surface formation of semi-regular polyhedra of Archimedes. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(4):279–289. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-279-289>