

## РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

DOI 10.22363/1815-5235-2021-17-1-3-18  
УДК 539.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

### Геометрически нелинейный расчет на устойчивость подкрепленной пластины с учетом взаимодействия собственных форм выпучивания

Г.А. Мануйлов, С.Б. Косицын, И.Е. Грудцына\*

Российский университет транспорта, Российская Федерация, 127994, Москва, ул. Образцова, д. 9  
\*grudtsyna\_ira90@mail.ru

#### История статьи

Поступила в редакцию: 21 ноября 2020 г.

Доработана: 22 января 2021 г.

Принята к публикации: 30 января 2021 г.

#### Для цитирования

Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Грудцына И.Е. Геометрически нелинейный расчет на устойчивость подкрепленной пластины с учетом взаимодействия собственных форм выпучивания // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 1. С. 3–18. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-1-3-18>

**Аннотация.** Цели работы – подробное рассмотрение в геометрически нелинейной постановке этапов равновесного поведения сжатой подкрепленной пластины с учетом взаимодействия общей формы выпучивания и местных форм волнообразования в пластине или в подкрепляющих ребрах, сравнение результатов полуаналитического решения системы нелинейных уравнений с результатами численного решения на МКЭ-комплексе Patran-Nastran задачи о докритическом и послекритическом равновесии сжатой подкрепленной пластины. Методы. Использовались геометрически нелинейный анализ полей перемещений, деформаций и напряжений, вычисление собственных форм выпучивания и построение бифуркационных решений и решений для кривых равновесия с предельными точками в зависимости от начальных несовершенств. Предложен оригинальный метод для определения критических состояний и получения двусторонних оценок критических нагрузок в предельных точках. Результаты. Подробно описан и проиллюстрирован примерами алгоритм исследования равновесных состояний подкрепленной пластины вблизи критических точек с использованием первых нелинейных (кубических членов) членов разложения потенциальной энергии, получены координаты точек бифуркации и предельных точек, а также соответствующие значения критических нагрузок. Построены кривые чувствительности критической нагрузки в зависимости от величины начальных несовершенств общего прогиба. При помощи численного решения построены кривые равновесия с характерными точками бифуркации местного волнообразования. Для случая действия двух начальных несовершенств предложен алгоритм получения двусторонних оценок критических нагрузок в предельных точках.

**Ключевые слова:** геометрически нелинейные уравнения равновесия, точки бифуркации, предельные точки, взаимодействие форм, подкрепленная пластина, критические напряжения

Мануйлов Гайк Александрович, доцент кафедры строительной механики, кандидат технических наук; eLIBRARY AuthorID: 527188, Scopus Author ID: 57196422162.

Косицын Сергей Борисович, заведующий кафедрой теоретической механики, советник РААЧН, доктор технических наук, профессор; eLIBRARY SPIN-код: 9390-7610, Scopus Author ID: 57196414749, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-3241-0683>.

Грудцына Ирина Евгеньевна, аспирант кафедры теоретической механики; eLIBRARY SPIN-код: 5021-8536, Scopus Author ID: 57214088911.

© Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Грудцына И.Е., 2021

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

## Geometrically nonlinear analysis of the stability of the stiffened plate taking into account the interaction of eigenforms of buckling

Gaik A. Manuylov, Sergey B. Kositsyn, Irina E. Grudtsyna\*

Russian University of Transport, 15 Obratsova St, Moscow, 127994, Russian Federation  
\*grudtsyna\_ira90@mail.ru

### Article history

Received: November 21, 2020

Revised: January 22, 2021

Accepted: January 30, 2021

### For citation

Manuylov G.A., Kositsyn S.B., Grudtsyna I.E. Geometrically nonlinear analysis of the stability of the stiffened plate taking into account the interaction of eigenforms of buckling. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(1): 3–18. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-1-3-18>

**Abstract.** *The aims of this work* are a detailed consideration in a geometrically nonlinear formulation of the stages of the equilibrium behavior of a compressed stiffened plate, taking into account the interaction of the general form of buckling and local forms of wave formation in the plate or in the reinforcing ribs, comparison of the results of the semi-analytical solution of the system of nonlinear equations with the results of the numerical solution on the Patran-Nastran complex of the problem of subcritical and postcritical equilibrium of a compressed stiffened plate. *Methods.* Geometrically-nonlinear analysis of displacement fields, deformations and stresses, calculation of eigenforms of buckling and construction of bifurcation solutions and solutions for equilibrium curves with limit points depending on the initial imperfections. An original method is proposed for determining critical states and obtaining bilateral estimates of critical loads at limiting points. *Results.* An algorithm for studying the equilibrium states of a stiffened plate near critical points is described in detail and illustrated by examples, using the first nonlinear (cubic terms) terms of the potential energy expansion, the coordinates of bifurcation points and limit points, as well as the corresponding values of critical loads. The curves of the critical load sensitivity are plotted depending on the value of the initial imperfections of the total deflection. Equilibrium curves with characteristic bifurcation points of local wave formation are constructed using a numerical solution. For the case of action of two initial imperfections, an algorithm is proposed for obtaining two-sided estimates of critical loads at limiting points.

**Keywords:** geometrically nonlinear equilibrium equations, bifurcation points, limit points, interaction of forms, reinforced plate, critical stresses

### Введение

Интерес к работе сжатых подкрепленных пластин появился давно, однако только начиная с работ В.Т. Койтера [1; 2], А. Ван дер Нейта [3], В. Твергарда [4], Дж. Ханта [5] и позже А.И. Маневича [6–8] были получены системы уравнений равновесия с учетом геометрической нелинейности, которые дают возможность анализировать несущую способность упомянутой пластины либо с учетом общего прогиба, либо с учетом взаимодействия этого прогиба с местными формами волнообразования в ребрах или в пластине.

Впервые геометрически нелинейные уравнения для описания потери устойчивости рассматриваемых пластин с учетом взаимодействия форм были представлены В.Т. Койтером [2]. В. Твергард сосредоточил свое внимание на исследовании пластин с двукратными критическими нагрузками для общего прогиба и для волнообразования в пластине [4]. В его работе получены важные и общие результаты для расчета подкрепленных пластин достаточно большой ширины и регулярным расположением ребер. Для этого он выделил регулярный  $T$ -образный фрагмент, который исследовался более детально. Некоторые из полученных результатов В. Твергарда были использованы Дж. Хантом [5] для построения бифуркационной поверхности гомеоклининой точки бифуркации, соответствующей катастрофе гиперболической омбилики.

Исследования В. Твергарда были продолжены авторами настоящей работы [9–11], которые численно с помощью МКЭ изучили влияние начальных несовершенств на несущую способность подкрепленной пластины в случае кратных и некротных критических нагрузок. Было установлено, что при одновременном выпучивании по общему прогибу и волнообразованию в пластине, в случае совпадения крити-

*Gaik A. Manuylov*, Associate Professor of the Department of Structural Mechanics, Ph.D.; eLIBRARY AuthorID: 527188, Scopus Author ID: 57196422162.  
*Sergey B. Kositsyn*, Head of the Department of Theoretical Mechanics, adviser of the RAACS, D.Sc. in Engineering, Professor; eLIBRARY SPIN-code: 9390-7610, Scopus Author ID: 57196414749, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-3241-0683>.  
*Irina E. Grudtsyna*, postgraduate student of the Department of Theoretical Mechanics; eLIBRARY SPIN-code: 5021-8536, Scopus Author ID: 57214088911.

ческих нагрузок реализуется двукратная бифуркация по типу гомеоклининой точки гиперболической омбилики. Если же одновременно происходит выпучивание по общему прогибу и волнообразованию в ребрах, то двукратная полусимметричная точка есть антиклинная бифуркация, соответствующая катастрофе эллиптической омбилики [12].

Важные результаты с использованием уравнений первого и второго геометрически нелинейных приближений (учет кубических и квартичных членов в разложении потенциальной энергии) были получены в 1980-х годах А.И. Маневичем [7; 8]. Ему удалось установить, что, ограничиваясь первым приближением (учитываются только кубические члены), можно получать приемлемые оценки несущей способности сжатой подкрепленной пластины, если критические нагрузки волнообразования в ее элементах близки или превышают критическую нагрузку выпучивания по схеме общего прогиба. Если же нагрузки волнообразования значительно меньше критической нагрузки общего прогиба, то учет дополнительных членов четвертой степени в разложении потенциальной энергии позволяет повысить максимальную нагрузку потери несущей способности подкрепленной пластины в среднем на 30–40 %. Однако учет квартичных членов существенно увеличивает трудоемкость вычислений из-за необходимости определения поправок второго приближения к собственным формам.

В настоящей статье авторы ограничились учетом лишь кубических членов в разложении полей перемещений, деформаций и напряжений, поскольку в проектной практике используются такие соотношения геометрических параметров подкрепленной пластины, при которых критические нагрузки волнообразования в пластине или в ребрах оказываются значительно выше критической нагрузки общего прогиба.

### Постановка задачи

Рассматривается шарнирно-опертая по торцам пластина, подкрепленная с одной стороны регулярным набором тонких прямоугольных ребер. Продольные края свободные. Пластина сжата центрально приложенными силами. Материал пластины – неограниченно упругий. Это позволяет исследовать устойчивость подкрепленной пластины при помощи анализа равновесия одного регулярного  $T$ -образного фрагмента (по аналогии с В. Твергардом и А.И. Маневичем), равноустойчивого с остальными  $T$ -образными фрагментами. Деформации и закон Гука выражаются следующим образом:

$$\varepsilon = L_1(U) + \frac{1}{2}L_2(U); \quad (1)$$

$$\sigma = H(\varepsilon), \quad (2)$$

где  $L_1, H$  – линейный оператор;  $L_2$  – квадратичный оператор.

$L_2(U + V) = L_2(U) + 2L_{11}(U, V) + L_2(V)$ , в этом выражении  $L_{11}$  – билинейный оператор.

Полная потенциальная энергия подкрепленной пластины при удержании членов не выше четвертой степени имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi_{\varepsilon} = & a_0 + \frac{1}{2} \sum_s a_s \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_s}\right) \xi_s^2 + \frac{1}{3} \sum_i \sum_j \sum_k a_{ijk} \xi_i \xi_j \xi_k + \\ & + \frac{1}{4} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l a_{ijkl} \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l - \sum_s a_s \xi_s \bar{\xi}_s \frac{\lambda}{\lambda_s}, \quad (s = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\xi$  – нормированные собственные формы (амплитуда отклонения собственной формы, отнесенная к толщине пластины);  $\bar{\xi}_s$  – несовершенства по  $s$ -ой форме выпучивания ( $s = 1, 2, \dots, n$ ).

Уравнения равновесия есть

$$\left(\frac{\partial \Pi_{\varepsilon}}{\partial \xi_1}\right) = 0; \quad \left(\frac{\partial \Pi_{\varepsilon}}{\partial \xi_2}\right) = 0; \quad \dots \left(\frac{\partial \Pi_{\varepsilon}}{\partial \xi_s}\right) = 0. \quad (4)$$

$$a_s \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_s}\right) \xi_s + \sum_i \sum_j \sum_k a_{ijk} \xi_i \xi_j + \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l a_{ijkl} \xi_i \xi_j \xi_k = \sum_s a_s \xi_s \bar{\xi}_s \frac{\lambda}{\lambda_s}. \quad (5)$$

Если  $s = 2$  (учитывается общий прогиб ( $i = 1$ ) и местная форма волнообразования ( $i = 2$ )), то потенциальная энергия с учетом взаимодействия этих форм запишется так:

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{э}} = & a_0 + \frac{1}{2} a_1 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \xi_1^2 + \frac{1}{2} a_2 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right) \xi_2^2 + \frac{1}{3} a_{111} \xi_1^3 + a_{122} \xi_1 \xi_2^2 + \frac{1}{4} a_{1111} \xi_1^4 + \\ & + \frac{1}{4} a_{2222} \xi_2^4 + \frac{1}{2} a_{1122} \xi_1^2 \xi_2^2 - \frac{\lambda}{\lambda_1} a_1 \bar{\xi}_1 \xi_1 - \frac{\lambda}{\lambda_2} a_2 \bar{\xi}_2 \xi_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Соответственно, имеем упрощенный вариант уравнений равновесия:

$$a_1 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \xi_1 + a_{111} \xi_1^2 + a_{122} \xi_2^2 + a_{1111} \xi_1^3 + a_{1122} \xi_1 \xi_2^2 = \frac{\lambda}{\lambda_1} a_1 \bar{\xi}_1. \quad (7)$$

$$a_2 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right) \xi_2 + 2a_{122} \xi_1 \xi_2 + a_{122} \xi_1^2 \xi_2 + a_{2222} \xi_2^3 = \frac{\lambda}{\lambda_2} a_2 \bar{\xi}_2. \quad (8)$$

Для уравнений первого нелинейного приближения оставляем только кубические члены.

$$a_1 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \xi_1 + a_{111} \xi_1^2 + a_{122} \xi_2^2 = \frac{\lambda}{\lambda_1} a_1 \bar{\xi}_1. \quad (9)$$

$$a_2 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right) \xi_2 + 2a_{122} \xi_1 \xi_2 = \frac{\lambda}{\lambda_2} a_2 \bar{\xi}_2. \quad (10)$$

Если разделить каждое уравнение на коэффициенты  $a_1$  и  $a_2$ , то получим уравнения в форме, приведенной В. Твергардом [4] ( $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_c$ ).

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \xi_1 + d_1 \xi_1^2 + d_2 \xi_2^2 = \frac{\lambda}{\lambda_1} \bar{\xi}_1. \quad (11)$$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right) \xi_2 + d_3 \xi_1 \xi_2 = \frac{\lambda}{\lambda_2} \bar{\xi}_2, \quad (12)$$

$$\text{где } d_1 = \frac{a_{111}}{a_1}; \quad d_2 = \frac{a_{122}}{a_1}; \quad d_3 = \frac{2a_{122}}{a_2}.$$

Коэффициенты  $a_1, a_2, a_{111}, a_{122}$  есть

$$a_1 = -\lambda_1 \{\sigma^0 L_2 (U^{(1)})\}; \quad a_2 = -\lambda_2 \{\sigma^0 L_2 (U^{(2)})\}; \quad a_{111} = \frac{3}{2} \{\sigma^1 L_2 (U^{(1)})\};$$

$$a_{122} = \frac{1}{2} \{\sigma^1 L_2 (U^{(2)})\} + \{\sigma^2 L_{11} (U^{(1)}, U^{(2)})\},$$

где  $\sigma^0$  – тензор напряжений из решения линейной задачи равновесия пластины;  $\sigma^1$  – добавка при переходе в смежное равновесное состояние в случае бифуркационной потери устойчивости.

Для определения коэффициентов  $a_{ijk}$  и  $d_1$ ,  $d_2$  и  $d_3$  необходимо вычислять некоторые определенные интегралы по прямоугольным областям упомянутого таврового элемента подкрепленной пластины. Выражения для этих интегралов:  $-\lambda_1\{\sigma^0 L_2(U^{(1)})\}$ ,  $-\lambda_2\{\sigma^0 L_2(U^{(2)})\}$ ,  $\{\sigma^1 L_2(U^{(1)})\}$  и  $\{\sigma^1 L_2(U^{(2)})\} + \{\sigma^2 L_{11}(U^{(1)}, U^{(2)})\}$  приведены в работе В. Твергарда [4] и в несколько модифицированном виде в работе А.И. Маневича [8].

В уравнения (9) и (10) входят значения критических параметров  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , соответствующих общей форме изгиба и местному волнообразованию в пластине или ребрах. Эти величины находятся из решения линейной задачи на собственные значения. В. Твергард решал однородную краевую задачу для системы бигармонических уравнений и восьми граничных условий сопряжений вдоль линии контакта ребра с пластиной:

$$D \Delta \Delta w_c = \lambda_c N_X^0 w_{,xx}. \quad (13)$$

$$\frac{1}{Eh} \Delta \Delta F_c = 0. \quad (14)$$

Эти условия выражают соотношения между усилиями и перемещениями на краях левой и правой частей пластины по отношению к ребру [8]. При этом предполагается, что общий прогиб развивается по кривой, близкой к синусоиде, соответствующей выпучиванию эйлера стержня. Неизвестные восемь произвольных постоянных находятся из системы однородных уравнений, матрица коэффициентов которых приведена в приложении к работе В. Твергарда [4]. А.И. Маневич решал эту же задачу вариационно, с помощью отношения Релея. Задавая различное число полуволн, он находил наименьшее значение критических нагрузок волнообразования в пластине или в ребрах.

В уравнениях (11) и (12) в правых частях имеются величины начальных несовершенств  $\bar{\xi}_1$  и  $\bar{\xi}_2$ . Они соответствуют формам выпучивания по общему прогибу и по форме местного волнообразования. Если оба эти несовершенства ненулевые, то критическая точка есть предельная точка. При однородной бифуркационной задаче ( $\bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_2 = 0$ ) наиболее простые решения соответствуют случаю кратных нагрузок ( $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_c$ ). Бифуркационные решения при простых нагрузках ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ) оказываются более сложными. Если в правой части уравнения (12) стоит ноль, а в правой части уравнения (11) имеется несовершенство ( $\bar{\xi}_1 \neq 0$ ), пропорциональное параметру нагрузки, то бифуркационная задача реализуется как поиск критического значения нагрузки, при которой пластина с развивающимся начальным общим прогибом теряет устойчивость в виде волнообразования в пластине или в ребрах.

### Полуаналитические решения задач устойчивости подкреплённых пластин

Рассмотрим решения простейшей задачи для двукратной полусимметричной точки бифуркации, соответствующей решениям однородных уравнений типа В. Твергарда. Для общего прогиба и для решения, описывающего волнообразование в пластине, упомянутые решения запишутся так:

$$\xi_1 = -\frac{1}{d_3} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_c}\right). \quad (15)$$

$$\xi_2 = \mp \sqrt{\left(\frac{d_3 - d_1}{d_2 d_3^2}\right)} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_c}\right) = \mp \xi_1 \sqrt{\frac{d_3 - d_1}{d_2}}. \quad (16)$$

Из последних соотношений видно, что общий прогиб относительной амплитуды  $\xi_1$  является несвязанной деформацией. Он зависит только от одной координаты, тогда как волнообразование с амплитудой  $\xi_2$  линейно связано с амплитудой общего прогиба. Если эта амплитуда  $\xi_1$  равна нулю, то и амплитуда  $\xi_2$  также равна нулю. При вычисленных В. Твергардом значениях коэффициентов уравнений  $d_1 = -0,0193$ ,  $d_2 = -0,6731$  и  $d_3 = -0,1138$  соотношение между  $\xi_2$  и  $\xi_1$  равно  $\sqrt{\frac{d_3 - d_1}{d_2}} = 0,374$ . Заметим, что все три коэффициента  $d_1$ ,  $d_2$  и  $d_3$  отрицательны, а это возможно только при гомеоклининой точке бифуркации (вариант катастрофы гиперболической омбилики). Такая ситуация возникает при волнообразовании в пластине.

В случае простых собственных значений ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ) бифуркационные решения системы нелинейных уравнений при нулевых правых частях  $\xi_1 = \xi_2 = 0$  оказываются более сложными:

$$\xi_1 = -\frac{1}{d_3} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right). \quad (17)$$

$$\xi_2 = \mp \frac{1}{d_3} \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right) \left(\frac{d_3}{d_2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) - \frac{d_1}{d_2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right)\right)} = \mp \xi_1 \sqrt{\frac{d_3 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)}{d_2 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right)} - \frac{d_1}{d_2}}. \quad (18)$$

На кривых равновесия подкрепленной пластины сингулярные точки (точки бифуркации или предельные точки) появляются тогда, когда в критическом равновесии матрица Гессе вырождается ( $\det H_{\Pi}(\xi_1, \xi_2, \lambda) = 0$ ). Для уравнений (11), (12) эта матрица имеет вид

$$H_{\Pi} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) + 2d_1\xi_1 & 2d_2\xi_2 \\ d_3\xi_2 & \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right) + d_3\xi_1 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Если рассматривается задача, в которой задано начальное несовершенство по общему прогибу ( $\bar{\xi}_1 \neq 0$ ), а начальное волнообразование отсутствует ( $\bar{\xi}_2 = 0$ ), то в этом случае решение зависит только от координаты  $\xi_1$  ( $\xi_2 = 0$ ), а условие равенства нулю определителя  $\det H_{\Pi}(\xi_1, \xi_2, \lambda) = 0$  сводится к выполнению одного из двух соотношений:

$$h_{11} = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) + 2d_1\xi_1 = 0 \quad (20)$$

$$\text{или } h_{22} = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right) + d_3\xi_1 = 0. \quad (21)$$

Наиболее важным является условие (21) ( $h_{22}(\lambda, d_3, \xi_1) = 0$ ). В этом случае уравнение равновесия (12)  $\left(\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right) + d_3\xi_1\right)\xi_2 = 0$  выполняется в трех вариантах:

а)  $\xi_2 = 0$ , но  $\left(\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right) + d_3\xi_1\right) \neq 0$ . Следовательно, ( $h_{22}(\lambda, d_3, \xi_1) \neq 0$ ), ( $\det H_{\Pi}(\xi_1, \xi_2, \lambda) \neq 0$ ), что соответствует регулярным точкам на кривой равновесий  $\mu_1(\xi_1, \bar{\xi}_1)$ , ( $\mu_1 = \frac{\lambda}{\lambda_1}$ );

б)  $\xi_2 = 0$  и  $\left(\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right) + d_3\xi_1\right) = 0$ . Следовательно,  $h_{22}(\lambda, d_3, \xi_1) = 0$ , ( $\det H_{\Pi}(\xi_1, \xi_2, \lambda) = 0$ ), а соответствующая точка кривой  $\mu_1(\xi_1, \bar{\xi}_1)$  есть точка сингулярного равновесия. Будет ли эта точка предельной точкой или точкой бифуркации зависит от того, будет ли значение  $\mu_1(\xi_1^{\text{кр}})$  локальным экстремумом или нет. Если значение  $\mu_1(\xi_1^{\text{кр}})$  не является локальным экстремумом, то сингулярная точка есть точка бифуркации (в данной задаче симметричной и неустойчивой);

в)  $\xi_2 \neq 0$ ,  $\left(\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right) + d_3\xi_1\right) = 0$ , при этом  $h_{22}(\lambda, d_3, \xi_1) = 0$ . Однако  $\det H_{\Pi}(\xi_1, \xi_2, \lambda) = -2d_2d_3\xi_2^2 \neq 0$ , и соответствующее равновесие является регулярным. Здесь достигается наибольшая нагрузка сжатия, поскольку послебифуркационное равновесие оказывается неустойчивым.

Значения бифуркационной нагрузки  $\mu_1^{\text{кр}}$  ( $\mu_1 = \frac{\lambda}{\lambda_1}$ ) определяется из квадратного уравнения, составленного с учетом соотношений

$$h_{22}(\lambda, d_3, \xi_1) = 0, \xi_1 = -\frac{1 - k\mu_1}{d_3} = \frac{k\mu_1 - 1}{d_3}, k = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}; \quad (22)$$

$$\mu_1^2 (k^2 d_1 - d_3 k) + \mu_1 (d_3 + d_3 k - 2kd_1 - d_3^2 \bar{\xi}_1) + d_1 - d_3 = 0. \quad (23)$$

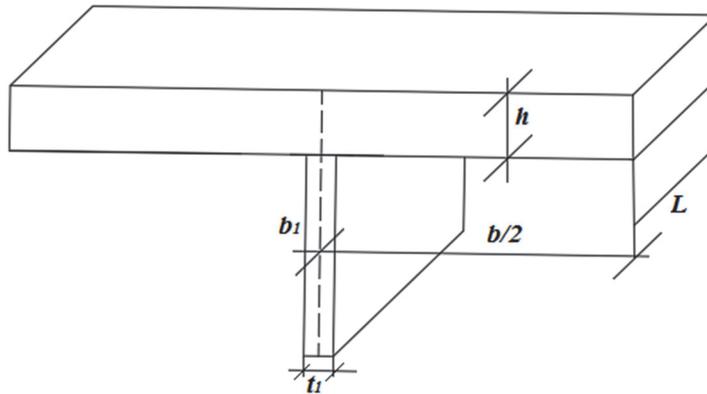
В задаче, решенной В. Твергардом [4], критическая нагрузка двукратная (одновременно происходит общее выпучивание и волнообразование в пластине). Задавая ненулевое начальное несовершенство по общему прогибу ( $\bar{\xi}_1 \neq 0$ ), получим возможность построить кривую чувствительности критических нагрузок в предельных точках в зависимости от величины начального прогиба  $\bar{\xi}_1$ . Вычисления согласно уравнению (23) дают при  $k = 1$ :

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_1 = 0,2, \quad \mu_1^*(0,2) &= 0,8476; \\ \bar{\xi}_1 = 0,5, \quad \mu_1^*(0,5) &= 0,7703; \\ \bar{\xi}_1 = 1,0, \quad \mu_1^*(1,0) &= 0,692. \end{aligned} \quad (24)$$

Эти результаты совпадают со значениями предельных нагрузок при несовершенствах общего прогиба на кривых, построенных В. Твергардом [4].

Рассмотрим бифуркационную задачу при наличии начального несовершенства в виде общего прогиба ( $\bar{\xi}_1 \neq 0$ ). Ее решение дает критическую нагрузку волнообразования в сравнительно слабых ребрах подкрепленной пластины (рис. 1). В графической форме результаты для этой задачи с различными начальными несовершенствами приведены в работе А.И. Маневича ([8], гл. III, рис. 3.3). Исследуемая пластина имела следующие безразмерные параметры:

$$\frac{b}{h} = 25, \quad \frac{b_1}{t_1} = 20, \quad \frac{t_1 b_1}{bh} = \frac{1}{5}, \quad \frac{L}{b} = 5, \quad k = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1,4852.$$



**Рис. 1.** Поперечное сечение T-образного фрагмента:

$b$  – расстояние между ребрами в осях;  $h$  – толщина пластины;  $b_1$  – высота ребра;  $t_1$  – толщина ребра;  $L$  – длина подкрепленной пластины  
**[Figure 1.** Cross-section of a T-shaped fragment:

$b$  – distance between ribs in axes;  $h$  – plate thickness;  $b_1$  – rib height;  $t_1$  – rib thickness;  $L$  – length of reinforced plate]

Граничные условия: шарнирное опирание вдоль коротких сторон, вдоль продольных краев закрепление типа подвижной заделки.

Для этой пластины значения коэффициентов уравнений (11) и (12):  $d_1 = -0,009$ ,  $d_2 = 1,024$  и  $d_3 = 0,975$  взяты из работы [8]. Отметим, что в этой пластине ребра есть относительно слабые удлиненные консольные пластины. Потерю устойчивости путем волнообразования следует ожидать именно в сжатых ребрах, а не в пластине. На это указывают знаки коэффициентов  $d_1 < 0$  (это всегда),  $d_2 > 0$  и

$d_3 > 0$ . Если же все коэффициенты  $d_i < 0$ , то волнообразование следует ожидать в пластине. Будем считать, что относительная амплитуда начального общего прогиба есть  $\bar{\xi}_1 = -0,5$ . Подставляя все приведенные данные в уравнение (23), получим

$$\mu^2 - 1,9927\mu + 0,67033 = 0. \quad (25)$$

Наименьший корень  $\mu_1^{\text{кр}} = 0,428$  определяет нагрузку бифуркации волнообразования в сжатых ребрах пластины при дополнительном общем прогибе:

$$\xi_1 = -\frac{1 - k\mu_1}{d_3} = -0,3728. \quad (26)$$

Эта бифуркация симметричная и неустойчивая, так как при наличии начального дополнительного волнообразования в ребрах ( $\bar{\xi}_2 \neq 0$ ) возникает потеря устойчивости в предельных точках. Заметим, что в этом случае кривая равновесий пространственная, поскольку нагрузка  $\mu_1$  зависит от двух координат  $\xi_1$  и  $\xi_2$ .

Вычисленное значение нагрузки волнообразования  $\mu_1^{\text{биф}} = 0,428$  совпадает с критической точкой в табл. 3.5 из [8].

Выполнив аналогичные расчеты при других начальных прогибах, получим кривую зависимости критической нагрузки бифуркации волнообразования в ребрах (рис. 2) от величины начального несовершенства в виде общего прогиба.

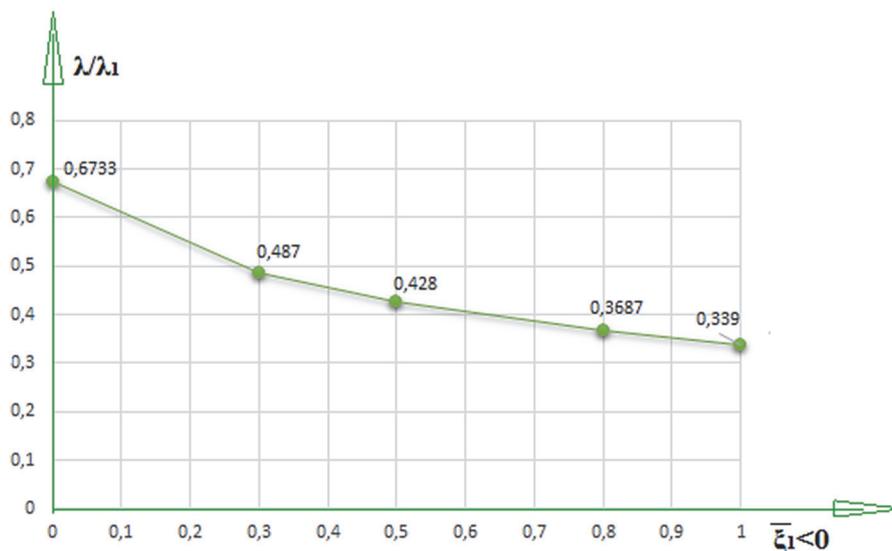


Рис. 2. Кривая чувствительности  
[Figure 2. Sensitivity curve]

Из приведенного графика видно, что величина критической нагрузки волнообразования в ребрах сильно падает вместе с увеличением начального несовершенства  $\bar{\xi}_1$ ; когда  $\bar{\xi}_1 = 1$ , то нагрузка волнообразования примерно в два раза меньше собственного значения из решения линейной однородной задачи (при  $\bar{\xi}_1 = 0, \lambda_2 = 0,6733 \lambda_1, k = \frac{1}{0,6733} = 1,4852$ ).

Если в уравнениях (11) и (12) правые части не равны нулю, то возникает задача об определении координат предельной точки ( $\xi_1^*, \xi_2^*$ ) и величины максимальной нагрузки  $\mu_1^*$ .

$$(1 - \mu_1)\xi_1 + d_1\xi_1^2 + d_2\xi_2^2 = \mu_1\bar{\xi}_1. \quad (27)$$

$$(1 - \mu_2)\xi_2 + d_3\xi_1\xi_2 = \mu_2\bar{\xi}_2. \quad (28)$$

Из уравнения (27) выразим  $\xi_2 \neq 0$ :

$$\xi_2 = \frac{k\mu_1 \bar{\xi}_2}{1 - k\mu_1 + d_3 \bar{\xi}_1} \quad (29)$$

Подставим полученное выражение в уравнение (28):

$$(1 - \mu_1) \bar{\xi}_1 + d_1 \bar{\xi}_1^2 + \frac{(k\mu_1 \bar{\xi}_2)^2 d_2}{((1 - k\mu_1) + d_3 \bar{\xi}_1)^2} = \mu_1 \bar{\xi}_1 \quad (30)$$

В итоге, освободившись от знаменателя, для определения координаты точки равновесия  $\xi_1$  (при фиксированном значении нагрузки  $\mu_1$ ) имеем уравнение четвертой степени относительно  $\xi_1$ . После некоторых преобразований его можно записать в виде

$$d_1 d_3 \bar{\xi}_1^4 + [2d_1 d_3 (1 - k\mu_1) + d_3^2 (1 - \mu_1)] \bar{\xi}_1^3 + \\ + [2d_3 (1 - \mu_1) (1 - k\mu_1) + d_1 (1 - k\mu_1)^2 - d_3^2 \mu_1 \bar{\xi}_1] \bar{\xi}_1^2 + \quad (31)$$

$$+ [(1 - \mu_1) (1 - k\mu_1)^2 - 2d_3 (1 - k\mu_1) \mu_1 \bar{\xi}_1] \bar{\xi}_1 + (k\mu_1)^2 d_2 \bar{\xi}_2^2 - (1 - k\mu_1)^2 \mu_1 \bar{\xi}_1 = 0.$$

К этому уравнению добавим условие равенства нулю определителя матрицы Гессе.

$$\det H_{\pi}(\mu_1, \xi_1, \xi_2) = [(1 - \mu_1) + 2d_1 \bar{\xi}_1][(1 - k\mu_1) + d_3 \bar{\xi}_1] - 2d_2 d_3 \bar{\xi}_2^2 = 0. \quad (32)$$

После исключения из соответствующего выражения координаты  $\xi_2$  будем иметь

$$\det H_{\pi}(\mu_1, \xi_1, \lambda) = (1 - \mu_1) + 2d_1 \bar{\xi}_1 (1 - k\mu_1) + d_3 \bar{\xi}_1 - \frac{d_1 d_3 (k\mu_1)^2 \bar{\xi}_2^2}{(1 - k\mu_1 + d_3 \bar{\xi}_1)^2} = 0. \quad (33)$$

В итоге получили два уравнения относительно переменных  $\mu_1$  и  $\xi_1$ . Однако совместное их решение достаточно сложно. В. Твергард искал предельные точки путем непосредственного построения кривой равновесий, А.И. Маневич использовал алгоритмы поиска экстремумов функции двух переменных. В данной работе воспользуемся способом пошагового увеличения нагрузки с последующим решением уравнения равновесия для приближенного получения координат предельной точки и соответствующего максимума нагрузки. В качестве примера определим координаты предельной точки и соответствующую нагрузку для рассмотренной выше задачи устойчивости подкрепленной пластины с волнообразованием в ребрах. Примем, что начальные несовершенства  $\bar{\xi}_1 = -0,5$ ,  $\bar{\xi}_2 = 0,1$ , а начальный параметр нагрузки  $\mu_1 = 0,28$ ,  $\mu_2 = 1,4852\mu_1$ . Подстановка числовых значений в уравнения (31) приводит после некоторых упрощений к следующему уравнению четвертой степени:

$$f(\xi_1) = -0,008773 \xi_1^4 + 0,67376 \xi_1^3 + 0,94993 \xi_1^2 + 0,405 \xi_1 + 0,0495 = 0. \quad (34)$$

При фиксированном значении силового параметра  $\mu_1 = 0,28$  найдем минимальный по модулю отрицательный корень данного уравнения. Для этого воспользуемся методом неособенных продолжений, предложенным Г.А. Мануйловым в 1971 году [13].

$$\xi_1^{m+1} = \xi_1^m \pm \frac{|f(\xi_1^{(m)})|}{\sqrt{[f'^2(\xi_1^{(m)}) - f(\xi_1^{(m)}) f''(\xi_1^{(m)})]}}, \quad m = 0, 1, \dots \quad (35)$$

Итерационный процесс одностороннего приближения к ближайшему корню степенного уравнения основан на локальной аппроксимации этого уравнения гиперболой или эллипсом в зависимости от знака

кривизны в точке касания. Достаточное условие односторонней сходимости – вещественность всех корней полинома. Сходимость итераций к ближайшему простому корню степенного уравнения – асимптотически кубическая.

Если двигаться вдоль кривой равновесий достаточно малыми шагами по нагрузке, то перескок через предельную точку порождает «висячий» экстремум (рис. 3). На это укажет отрицательный знак подкоренного выражения в знаменателе (35).

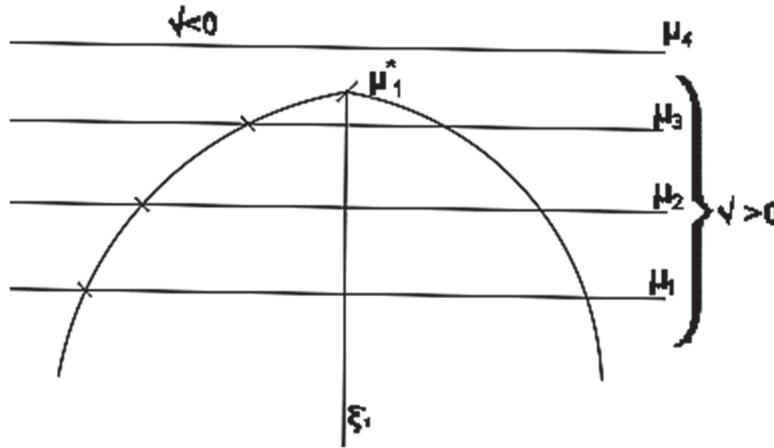


Рис. 3. «Висячий» экстремум  
[Figure 3. “Hanging” extremum]

Решение приведенного уравнения четвертой степени дает искомый отрицательный корень (ближайший к нулю при  $\mu_1 = 0,28$ ), равный  $\xi_1 = -0,21896$ . Вторая координата точки равновесия  $\xi_2 = 0,10986$ , согласно формуле (29). Однако полученная точка равновесия не предельная. Увеличим значение  $\mu_1$  до величины 0,3. Аналогичное решение с помощью формулы (35) дает координаты равновесия  $\xi_1 = -0,2422$ ,  $\xi_2 = 0,1399$ . При следующем значении, равным  $\mu_1 = 0,325$ , получим отрицательное подкоренное выражение в знаменателе (35), равное  $-1,129 \cdot 10^{-5}$ . При несколько меньших значениях  $\mu_1$  получим двустороннюю оценку.

$$0,32 < \mu_1^* < 0,325.$$

Соответствующие приближенные координаты предельной точки:

$$\xi_1^* \approx -0,3135, \xi_2^* \approx 0,1998.$$

Для практических целей этого вполне достаточно, хотя данный результат можно уточнить последующими вычислениями. Вычисленные координаты предельной точки близки к показанным на рис. 3.3 в работе А.И. Маневича [8].

Рассмотрим связь между коэффициентами уравнений (11), (12) и типами волнообразования (в пластине или ребрах). Дж. Хант [5], исследуя задачу В. Твергарда с двукратной критической нагрузкой общего прогиба и волнообразования в пластине, установил соотношения между производными потенциальной энергии

$$P_3(\xi_1, \xi_2, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) = \frac{1}{6} V_{111} \xi_1^3 + \frac{1}{2} V_{122} \xi_2^2 \xi_1 + \frac{1}{2} \mu_1 (V_{11\mu} \xi_1^2 + V_{22\mu} \xi_2^2) + V_{1\bar{\xi}_1} \bar{\xi}_1 \xi_1 + V_{2\bar{\xi}_2} \bar{\xi}_2 \xi_2 \quad (36)$$

и коэффициентами упомянутых уравнений  $d_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$\frac{1}{6}V_{111} = -\frac{2}{3}d_1d_3; \quad \frac{1}{2}V_{11\mu} = -d_3; \quad V_{1\bar{\xi}1} = 2d_3\mu_1;$$

$$\frac{1}{2}V_{122} = -2d_2d_3; \quad \frac{1}{2}V_{22\mu} = -2d_2; \quad V_{2\bar{\xi}2} = 4d_2k\mu_1.$$

Для того чтобы двукратная полусимметричная бифуркация не была моноклиной, в работе [8] было установлено условие положительности подкоренного выражения  $T$ :

$$T = \frac{2V_{11\mu}}{V_{22\mu}} - \frac{V_{111}}{V_{122}} > 0 \quad (37)$$

$$\text{или } T = \frac{-d_3}{-d_2} - \frac{d_1d_3}{d_2d_3} = \frac{d_3}{d_2} - \frac{d_1}{d_2} > 0. \quad (38)$$

Выполнение этого условия показывает, что через двукратную точку бифуркации проходит не одна, а три новых ветви равновесий в виде прямых линий.

Волнообразование в пластине следует ожидать в случае одинаковых знаков отношений  $\frac{d_1}{d_2}$  и  $\frac{d_3}{d_2}$ . Оно произойдет в гомеоклиной точке бифуркации (гиперболическая омбилика). Если же знаки отношений  $\frac{d_1}{d_2}$  и  $\frac{d_3}{d_2}$  разные, то волнообразование произойдет в результате местной потери устойчивости ребер (антиклинная точка бифуркации эллиптической омбилики). По этой причине выше было указано, что если все  $d_i$  отрицательные, то местная потеря устойчивости соответствует волнообразованию в пластине. Если же  $d_1 < 0$  (всегда), а  $d_2, d_3 > 0$ , то волнообразование возникнет в ребрах подкрепленной пластины. Согласно исследованиям А.И. Маневича [8], данная особенность справедлива и при некратных критических нагрузках. Отметим, что знаки коэффициентов уравнений (11) и (12) существенно влияет на взаимодействие общего прогиба с локальным волнообразованием. Если этот прогиб положительный (все  $d_i < 0$ ), то его развитие провоцирует волнообразование в пластине, поскольку она получит дополнительное сжатие. Ребра в этом случае, наоборот, будут несколько разгружаться растягивающими напряжениями.

Если же общий прогиб отрицателен ( $d_1 < 0, d_2 > 0, d_3 > 0$ ), то, наоборот, пластина будет разгружаться, а ребра догружаться дополнительным сжатием. Это вызовет волнообразование в ребрах. Описанное взаимодействие общего прогиба и эффектов местного волнообразования является главной особенностью в поведении сжатой подкрепленной пластины.

При проектировании подкрепленных пластин следует выбирать соответствующие геометрические параметры так, чтобы исключить нелинейные взаимодействия форм выпучивания. Для этого необходимо, чтобы критические нагрузки волнообразования были существенно выше критических нагрузок общего выпучивания. Это проблема требует отдельного тщательного исследования.

### Численный анализ $T$ -образного фрагмента подкрепленной пластины

Ранее были рассмотрены алгоритмы вычисления критических нагрузок для подкрепленной пластины, получения сингулярных точек на кривых равновесия, а также указана связь знаков коэффициентов нелинейных уравнений с типом возможного волнообразования. Ограничиваясь рассмотрением одного регулярного  $T$ -образного фрагмента, можно сделать выводы о нелинейном поведении всей конструкции, содержащей в себе их совокупность. Глубинное понимание задачи устойчивости, в которой существует вопрос о взаимодействии форм, в полном объеме раскрывается при использовании конечно-элементного моделирования и численного решения с учетом геометрической нелинейности. В данной части работы приведен анализ численного решения с использованием программного комплекса MSC Software Patran-Nastran. Выбраны конечные элементы типа shell (3131 элемент). Материал считался абсолютно упругим ( $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ ,  $\mu = 0,3$ ). Граничные условия: шарнирное опирание вдоль коротких сторон, вдоль длинных сторон – плавающие заделки. Нагрузка приложена центрально. Геометрические параметры получены из соотношений А.И. Маневича [8, гл. III] для решения такого класса задач:  $h = 1 \text{ см}$ ,

$b = 25$  см,  $t_1 = 0,5$  см,  $b_1 = 10$  см,  $L = 125$  см. Результаты сравниваются с полученными ранее результатами полуаналитического решения.

Взаимодействие форм можно представить в двух вариантах. Первый вариант – это взаимодействие общей и местной формы потери устойчивости пластины. Проявляется он тогда, когда прогиб имеет положительное значение. Данный вариант не предполагает возможность волнообразования в ребрах, только в пластине. Второй вариант – это взаимодействие общего прогиба с местной формой волнообразования ребер. Данная деформация возможна только при условии развития прогиба отрицательного знака. Исследование подобного поведения конструкции сводится к решению бифуркационной задачи устойчивости сжатого  $T$ -образного фрагмента. Для того чтобы учесть местную форму, при моделировании были использованы элементы типа shell; это позволило рассматривать данную модель как совокупность пластинок-полосок и учитывать не только мембранные деформации пластины, но и поперечные деформации ребра.

При решении линейной задачи устойчивости был получен расчет критических нагрузок для первых десяти собственных форм. Важно отметить, что восемь первых форм соответствуют местным формам волнообразования и лишь девятая – форме выпучивания пластины, наподобие эйлерова стержня ( $P_{кр}^9 = 173\,322$  кг). Первая форма имеет семь полуволн, что совпадает с результатом, полученным в работе [8]. На рис. 4 показана первая собственная форма из линейного решения.

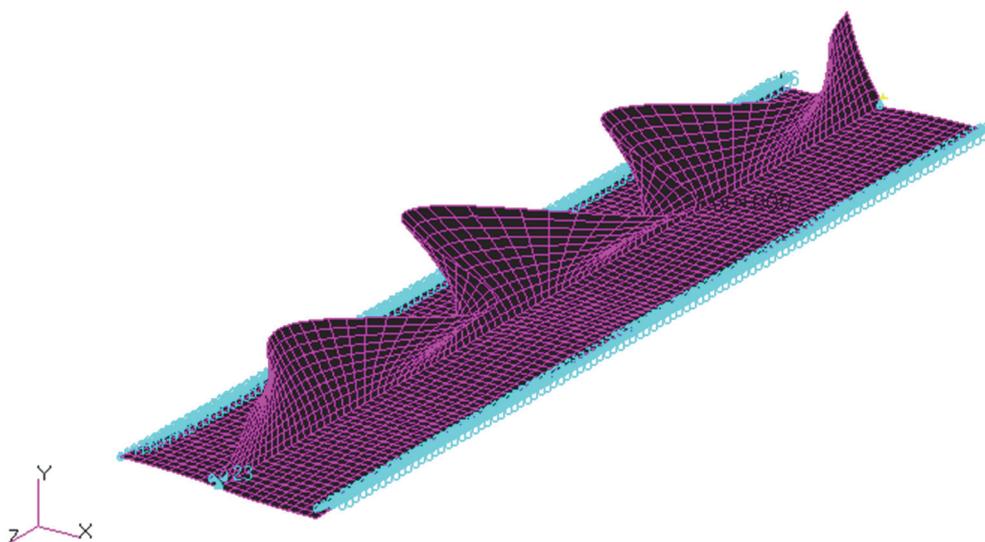


Рис. 4. Первая собственная форма  
[Figure 4. First own form]

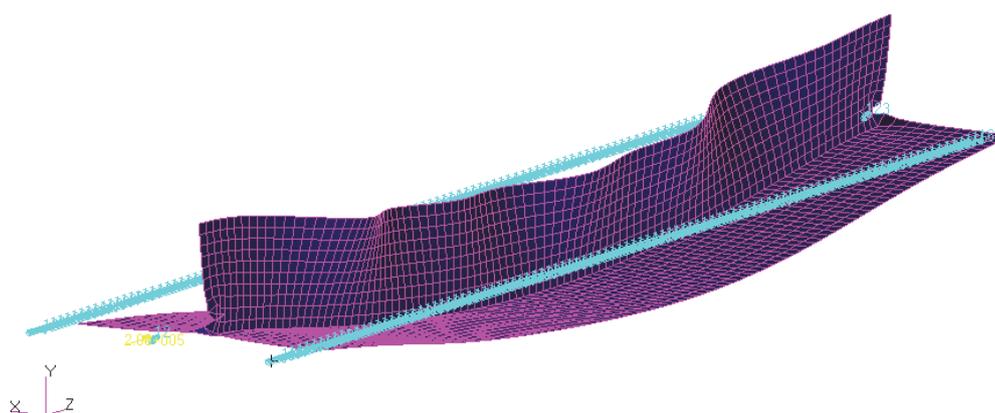


Рис. 5. Деформированное равновесие (при  $\bar{\xi}_1 = 0$ )  
[Figure 5. Deformed equilibrium (at  $\bar{\xi}_1 = 0$ )]

Вычисляя критическую нагрузку Эйлера, мы получаем значение  $P_{кр} = 229\,000$  кг. Результат, вычисленный по формуле, дает завышенное значение критической нагрузки, так как схема расчета пластины как эйлеровой стойки не учитывает деформации пластинчатых элементов стержня.

Исследование в геометрически нелинейной постановке без учета начальных несовершенств ( $\bar{\xi}_1 = 0$ ) позволило получить на равновесной кривой точку неустойчивой бифуркации, соответствующей форме волнообразованию ребра. Деформированное равновесие и равновесная кривая показаны на рис. 5 и 6. Значение критической нагрузки составило  $P_{кр} = 131\,430$  кг.

Из рис. 5 видно, что дополнительные сжимающие напряжения действуют в зонах, примыкающих к свободному краю ребра и вызывают бифуркацию волнообразования при нагрузках, меньших, чем были получены из линейного расчета. Данное деформированное состояние соответствует равновесию в точке неустойчивой бифуркации. Новая ветвь после прохождения сингулярной точки является падающей и неустойчивой.

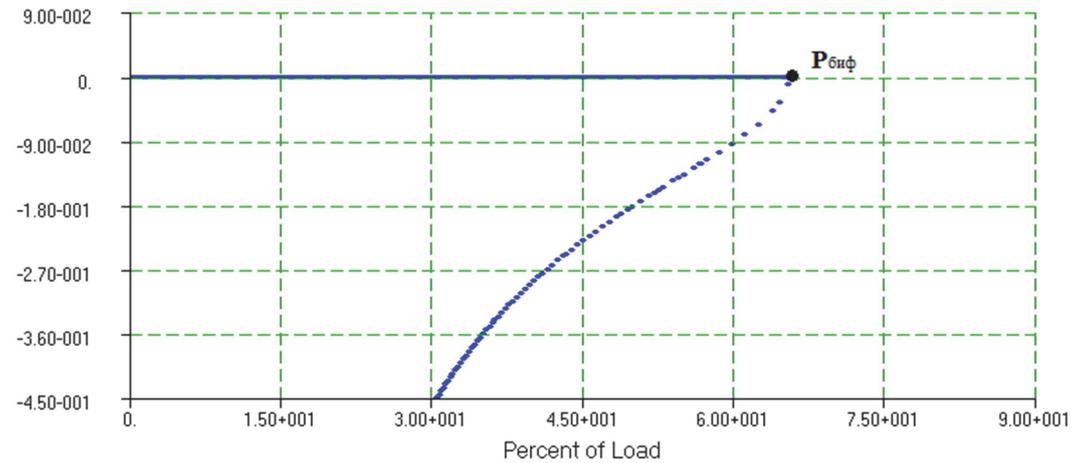


Рис. 6. Кривая равновесия (при  $\bar{\xi}_1 = 0$ )  
 [Figure 6. Equilibrium curve (at  $\bar{\xi}_1 = 0$ )]

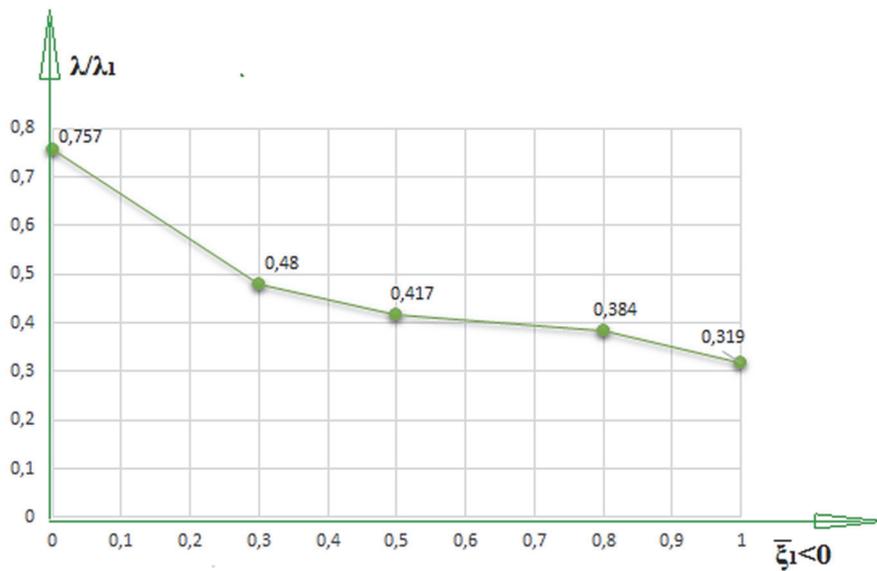
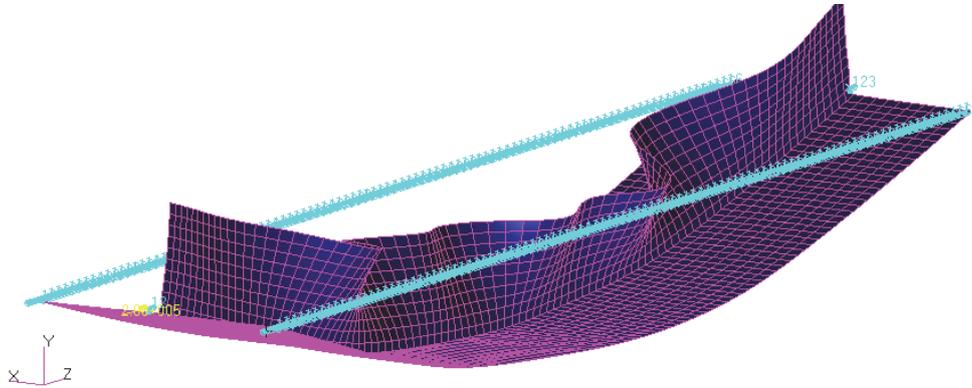


Рис. 7. Кривая чувствительности  
 [Figure 7. Sensitivity curve]

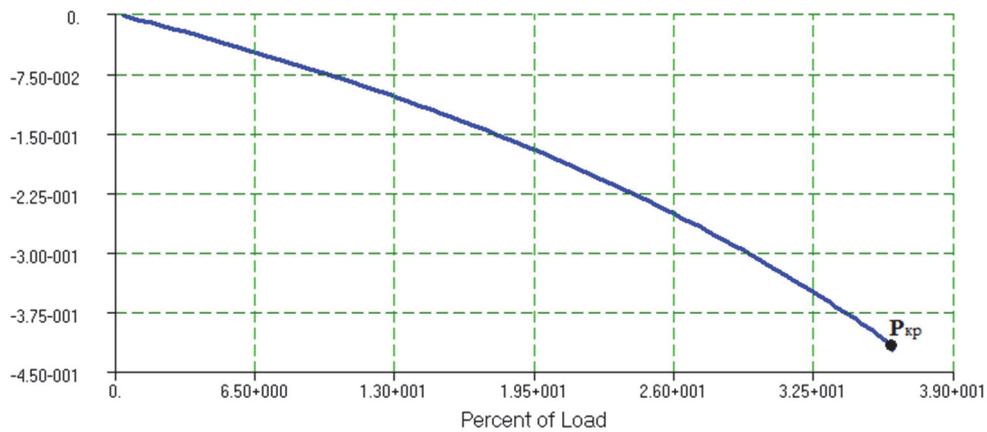
В случаях ненулевых значений начальных несовершенств по общему прогибу для построения кривой чувствительности (рис. 7) задаем амплитуды начальных прогибов и вычисляем критические нагрузки. Полученные результаты ( $\mu_1 = \frac{\lambda}{\lambda_1}$ ) имеют достаточно хорошее совпадение с результатами полуаналитического решения (рис. 2). Задавая амплитуду начального прогиба  $\bar{\xi}_1 = -0,5$  см, находим величину критической нагрузки волнообразования  $P_{кр} = 72\,400$  кг и значение  $\mu_1 = \frac{\lambda}{\lambda_1} = 0,417$ , что немногим

меньше  $\mu_1^{\text{биф}} = 0,428$ , полученного из полуаналитического решения. Величина прогиба составила  $\xi_1 = -0,427$  см, тогда как по формуле (26) мы получили  $\xi_1 = -0,3728$  см. Кривая равновесия и начальное деформированное послебифуркационное равновесие показаны на рис. 8 и 9.

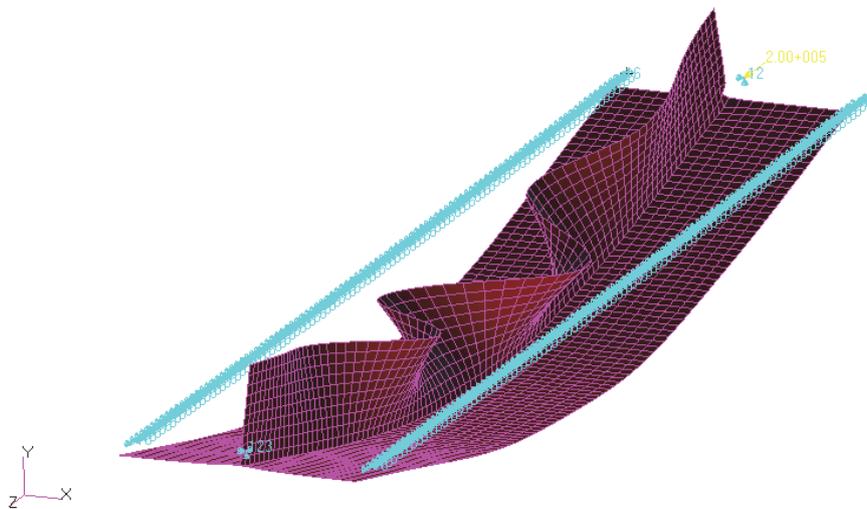
Амплитуды отклонений ребра от вертикальной плоскости значительно больше по сравнению с аналогичными отклонениями, полученными в задаче без начального несовершенства.



**Рис. 8.** Деформированное равновесие (при  $\bar{\xi}_1 = -0,5$  см)  
**[Figure 8.** Deformed equilibrium (at  $\bar{\xi}_1 = -0,5$  см)]



**Рис. 9.** Кривая равновесия (при  $\bar{\xi}_1 = -0,5$  см)  
**[Figure 9.** Equilibrium curve (at  $\bar{\xi}_1 = -0,5$  см)]



**Рис. 10.** Деформированное равновесие в предельной точке (при  $\bar{\xi}_1 = -0,5$  см;  $\bar{\xi}_2 = 0,1$  см)  
**[Figure 10.** Deformed equilibrium (at  $\bar{\xi}_1 = -0,5$  см;  $\bar{\xi}_2 = 0,1$  см)]

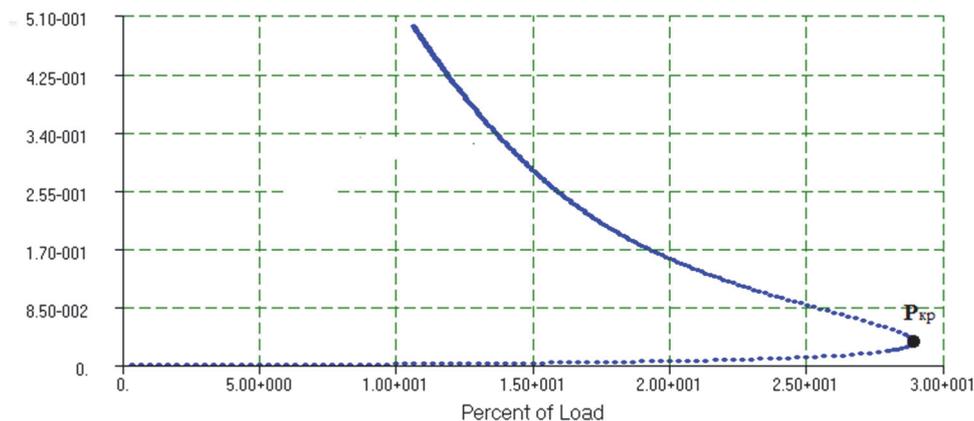


Рис. 11. Кривая равновесия (при  $\bar{\xi}_1 = -0,5$  см;  $\bar{\xi}_2 = 0,1$  см)  
 [Figure 11. Equilibrium curve (at  $\bar{\xi}_1 = -0,5$  см;  $\bar{\xi}_2 = 0,1$  см)]

Нагрузка  $P_{кр}$  является максимальной в случае, когда мы задаем начальное несовершенство по общему прогибу ( $\bar{\xi}_1 = -0,5$  см).

Чтобы получить предельную точку на кривой равновесия, необходимо задать несовершенства по местной и общей формам выпучивания. Задавая амплитуды  $\bar{\xi}_1 = -0,5$  см и  $\bar{\xi}_2 = 0,1$  см, находим величину критической нагрузки  $P_{кр} = 57\,818$  кг, тогда  $\mu_1^* = 0,33$ , что достаточно хорошо совпадает с верхней оценкой, полученной из полуаналитического решения ( $0,32 < \mu_1^* < 0,325$ ). Общий прогиб составил  $\bar{\xi}_1 = -0,673$  см. Деформированное равновесие показано на рис. 10. Кривая равновесия показана на рис. 11.

### Заключение

В статье рассмотрено решение нелинейной задачи устойчивости подкрепленной пластины в случае кратных и некратных критических нагрузок. Наиболее опасным взаимодействием форм является взаимодействие местной потери устойчивости ребер прямоугольного сечения и формы общего прогиба. Подробное решение данной задачи для подкрепленных пластин приведено в работе [10]. Снижение несущей способности достигало величины 60 %. Результаты полуаналитического и численного решения устойчивости T-образного фрагмента пластины оказались достаточно близкими. Приведенные уравнения приемлемы для определения координат сингулярных точек на кривых равновесия и критических нагрузок.

### Список литературы

1. Koiter W.T., Kuiken G.D.C. The interaction between local buckling and overall buckling on the behavior of built-up columns. Delft Laboratory Report WTHD 23. 1971.
2. Koiter W.T., Pignataro M.A. General theory for the interaction between local and overall buckling of stiffened panels. Delft WTHD Report 83. 1976. Pp. 179–222.
3. Van Der Neut A. Mode interaction with a stiffened panel // Harvard Proc. IUTAM Symp., Buckling of Structures. 1974. Pp. 117–132.
4. Tvergaard V. Imperfection sensitivity of a wide integrally stiffened panel under compression // Int. J. Solids Structures. 1973. Vol. 9. Issue 1. Pp. 177–192. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(73\)90040-1](https://doi.org/10.1016/0020-7683(73)90040-1)
5. Hunt G.W. Imperfection-sensitivity of semi-symmetric branching // Proc. R. Soc. Lond. A. 1977, October 24. Vol. 357. Issue 1689. Pp. 193–211. <https://doi.org/10.1098/rspa.1977.0163>
6. Маневич А.И. К теории связанной потери устойчивости подкрепленных тонкостенных конструкций // Прикладная математика и механика. 1982. № 2. С. 337–345.
7. Маневич А.И. Взаимодействие форм потери устойчивости, сжатой подкрепленной панели // Строительная механика и расчет сооружений. 1981. № 5. С. 24–29.
8. Маневич А.И. Нелинейная теория устойчивости подкрепленных пластин и оболочек с учетом взаимодействия форм выпучивания. Днепропетровск, 1986.
9. Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Грудцына И.Е. Численный анализ критического равновесия гибкой подкрепленной пластины с учетом влияния начальных геометрических несовершенств // Строительная механика и расчет сооружений. 2020. № 1. С. 30–36.

10. Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Грудцына И.Е. Численный анализ устойчивости подкрепленных пластин с некротными критическими нагрузками // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 1. С. 54–61. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-54-61>
11. Manuylov G., Kositsyn S., Grudtsyna I. Influence of buckling forms interaction on stiffened plate bearing capacity // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2020. Vol. 16. No. 2. Pp. 83–93.
12. Thompson J.M.T., Tan J.K.Y., Lim K.C. On the topological classification of postbuckling phenomena // *Journal of Structural Mechanics*. 1978. Vol. 6. Issue 4. Pp. 383–414.
13. Мануйлов Г.А. О вычислении корней полиномов методом продолжений // Труды МИИТа. 1971. № 371. С. 133–147.

## References

1. Koiter W.T., Kuiken G.D.C. *The interaction between local buckling and overall buckling on the behavior of built-up columns*. Delft Laboratory Report WTHD 23. 1971.
2. Koiter W.T., Pignataro M.A. *General theory for the interaction between local and overall buckling of stiffened panels*. Delft WTHD Report 83. 1976. p. 179–222.
3. Van Der Neut A. Mode interaction with a stiffened panel. *Harvard Proc. IUTAM Symp., Buckling of Structures*. 1974:117–132.
4. Tvergaard V. Imperfection sensitivity of a wide integrally stiffened panel under compression. *Int. J. Solids Structures*. 1973;9(1):177–192. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(73\)90040-1](https://doi.org/10.1016/0020-7683(73)90040-1)
5. Hunt G.W. Imperfection-sensitivity of semi-symmetric branching. *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1977, October 24; 357(1689):193–211. <https://doi.org/10.1098/rspa.1977.0163>
6. Manevich A. To the theory of coupled buckling of reinforced thin-walled structures. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1982;(2):337–345. (In Russ.)
7. Manevich A. Interaction of buckling forms compressed reinforced panels. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 1981;(5):24–29. (In Russ.)
8. Manevich A. *Nelinejnaya teoriya ustojchivosti podkreplennyh plastin i obolochek s uchetom vzaimodejstviya form vypuchivaniya [Nonlinear theory of stability of reinforced plates and shells taking into account the interaction of buckling forms]*. Dnepropetrovsk; 1986. (In Russ.)
9. Manuylov G., Kositsyn S., Grudtsyna I. Numerical analysis critical equilibrium of flexible supported plate with allowance for influence initial geometrical imperfections. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2020;(1):30–36. (In Russ.)
10. Manuylov G., Kositsyn S., Grudtsyna I. Numerical analysis of stability of the stiffened plates subjected aliquant critical loads. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(1):54–61. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-54-61>
11. Manuylov G., Kositsyn S., Grudtsyna I. Influence of buckling forms interaction on stiffened plate bearing capacity. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2020;16(2):83–93.
12. Thompson J.M.T., Tan J.K.Y., Lim K.C. On the topological classification of postbuckling phenomena. *Journal of Structural Mechanics*. 1978;6(4):383–414.
13. Manuylov G. On the calculation of the roots of polynomials by the extension method. *MIIT Proceedings*. 1971; (371):133–147. (In Russ.)