

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ
ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURESDOI 10.22363/1815-5235-2020-16-5-323-333
УДК 691.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH PAPER

Множества вилок Фойгта – Рейсса и трехзубцев Фойгта – Кристенсена – Рейсса

В.Т. Ерофеев*, А.С. Тюряхин, Т.П. Тюряхина

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет имени Н.П. Огарева, Российская Федерация, 430005, Саранск, ул. Большевикская, 68

*tingaev.sl@gmail.com

История статьи

Поступила в редакцию: 3 августа 2020 г.

Доработана: 29 сентября 2020 г.

Принята к публикации: 2 октября 2020 г.

Аннотация

В литературе приводится множество исследований представительного объема композитного материала, в частности рассчитываемых по формулам Кристенсена, Фойгта и Рейсса. Цель работы состоит в исследовании особенностей оценки множества вилок эффективных модулей. Методы. На базе решения задачи Ламе (для толстостенной сферы) компоновалась сферическая модель представительного объема (ячейки) композиционного материала с зернистым (сферическим) наполнителем и определялась величина эффективного модуля упругости двухфазного композита. Исследование полученной формулы эффективного модуля, выраженной в безразмерных величинах, для материала ячейки выявило ее идентичность с формулой Р.М. Кристенсена, выраженной в размерных величинах, для объемного модуля композитов со сферическим включением. При этом решение Кристенсена ранее было получено иным методом при рассмотрении им полидисперсной модели композита. Безразмерная форма функции (эффективного модуля) трех безразмерных параметров позволила в плоских пространствах (двух координатных плоскостей) построить графические образы функции названных модулей по Кристенсену, которые сопоставляются и совмещаются в одном рисунке с аналогичными образами функций оценок значений модулей (реальных композитов) по Фойгту и Рейссу. Графические исследования (применительно к сферической модели представительного объема) показывают, что в плоском пространстве множества вилок Фойгта – Рейсса имеет место не сужение этих вилок, а их частичное заполнение плоским пространством множества вилок Кристенсена – Рейсса. При этом графики функций модулей одновременно с множествами двузубцев вилок образуют множества трехзубцев вилок (трехзубцев) Фойгта – Кристенсена – Рейсса, которые в зависимости от величины интервалов чисел исследуемых параметров имеют вилки разной величины. Результаты. Получены графические иллюстрации численных примеров, демонстрирующие, что при заданных величинах модулей матрицы и наполнителя и объемной доли последнего можно определять эффективные объемные модули и модули сдвига двухфазных композитов, проводить сопоставление с выводами прикладного плана. Безразмерная форма полученных выражений позволяет решать обратные задачи механики полидисперсных композитов, например определять объемные модули компонентов композита по эффективным модулям, полученным механическими испытаниями стандартных образцов.

Ключевые слова: сферическая модель представительного объема материала, задача Ламе для толстостенной сферы, эффективные модули двухфазных композитов, вилка Фойгта – Рейсса, вилка Кристенсена – Рейсса

Благодарности

Публикуется при поддержке гранта РФФИ РМ № 18-48-130013 «Комплексное исследование физико-химических процессов в композиционных материалах на основе эпоксидных смол и других синтетических полимеров, перспективных для применения в строительстве».

Для цитирования

Ерофеев В.Т., Тюряхин А.С., Тюряхина Т.П. Множества вилок Фойгта – Рейсса и трехзубцев Фойгта – Кристенсена – Рейсса // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 5. С. 323–333. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-323-333>

Ерофеев Владимир Трофимович, доктор технических наук, профессор, декан архитектурно-строительного факультета, заведующий кафедрой строительных материалов и технологий, академик РААСН; Scopus Author ID: 57080123300, eLIBRARY SPIN-код: 4425-5045.

Тюряхин Алексей Сергеевич, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной механики архитектурно-строительного факультета; eLIBRARY AuthorID: 6072.

Тюряхина Татьяна Павловна, аспирант кафедры строительных материалов и технологии архитектурно-строительного факультета.

© Ерофеев В.Т., Тюряхин А.С., Тюряхина Т.П., 2020

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Multitudes of Voigt – Reuss forks and Voigt – Christensen – Reuss tridents

Vladimir T. Erofeev*, Aleksey S. Tyuryakhin, Tatyana P. Tyuryakhina

National Research Ogarev Mordovia State University (National Research University), 68 Bolshevistskaya St, Saransk, 430005, Russian Federation
*tingaev.sl@gmail.com

Article history

Received: August 3, 2020

Revised: September 29, 2020

Accepted: October 2, 2020

Acknowledgements

Published with the support of the RFBR RM grant No. 18-48-130013 “Comprehensive study of physical and chemical processes in composite materials based on epoxy resins and other synthetic polymers promising for use in construction.”

For citation

Erofeev V.T., Tyuryakhin A.S., Tyuryakhina T.P. Multitudes of Voigt – Reuss forks and Voigt – Christensen – Reuss tridents. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(5): 323–333. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-323-333>

Abstract

In the literature, there are many studies of the representative volume of a composite material, in particular, those calculated using the formulas of Christensen, Voigt and Reiss. *The aim of this work* is to study the features of evaluating the set of forks of effective modules. *Methods*. On the basis of solving the Lamé problem (for a thick-walled sphere), a spherical model of a representative volume (cell) of a composite material with a granular (spherical) filler is compiled and the value of the effective modulus of elasticity of a two-phase composite is determined. The study of the obtained formula for the effective modulus, expressed in dimensionless quantities, for the cell material revealed its identity with the R.M. Christensen’s formula, expressed in dimensional values, for the bulk modulus of composites with a spherical filler. In this case, Christensen’s solution was previously obtained by a different method when he considered the polydisperse model of the composite. The dimensionless form of the function (effective module) of three dimensionless parameters made it possible in flat spaces (two coordinate planes) to construct graphical images of the function of the named modules according to Christensen, which are compared and combined in one figure with similar images of the functions of estimating the values of the modules (real composites) according to Voigt and Reiss. Graphical studies in relation to the spherical representative volume model show that in the flat space of the set of Voigt – Reuss forks, these forks are not “narrowed”, but they are partially filled by the flat space of the set of Christensen – Reiss forks. The graphs of the functions of the modules, at the same time, form, simultaneously with the sets of two-toothed forks, a set of Voigt – Christensen – Reiss trident forks (tridents), which, depending on the size of the intervals of the numbers of the studied parameters, have “forks” of different sizes. *Results*. Graphic illustrations of numerical examples have been obtained showing that for given values of the module of the matrix and filler and the volume fraction of the latter, it is possible to determine the effective volumetric module and shear module of two-phase composites, and to perform a comparison with the conclusions of the applied plan. The dimensionless form of the obtained expressions makes it possible to solve the inverse problems of the mechanics of polydisperse composites, for example, to determine the volume module of the composite components by the effective modulus obtained by mechanical testing of standard samples.

Keywords: spherical model of a representative volume of material, Lamé’s problem for a thick-walled sphere, effective module of two-phase composites, Voigt – Reiss fork, Christensen – Reiss fork

1. Введение

Полимерные композиционные материалы вытесняют многие традиционно металлические, керамические и другие материалы в различных областях техники [1–4]. В этой связи теоретические исследования, направленные на установление и предсказание физико-механических свойств композитов через свойства их компонентов и их геометрических характеристик, являются актуальными, так как позволяют значительно снизить проведение дорогостоящих экспериментальных работ.

Теоретическая модель структуры бетонов и других композиционных материалов с заполнителями сферической формы наиболее проста для построения математического алгоритма проектных расчетов. Поэтому в практических исследованиях композиционных материалов широко используется решение задачи Ламе для толстостенной сферы. Кроме того, многими специалистами задачи по исследованию толстостенных сфер решались с помощью других моделей: аналитических, численных и конечно-элементных. При этом использовались решения моделей композиционных материалов, охватывающие различные стадии работы материала: упруго-пластическую [5], вязко-пластическую [6], ползучести [7; 8]. Рассматри-

Vladimir T. Erofeev, Doctor of Technical Sciences, Professor, Dean of the Faculty of Architecture and Civil Engineering, Head of the Department of Building Materials and Technologies, Academician of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; Scopus Author ID: 57080123300, eLIBRARY SPIN-code: 4425-5045.

Aleksey S. Tyuryakhin, Doctor of Engineering, Associate Professor of the Department of Applied Mechanics of the Faculty of Architecture and Civil Engineering; eLIBRARY Author ID: 6072.

Tatyana P. Tyuryakhina, graduate student of the Department of Building Materials and Technologies of the Faculty of Architecture and Civil Engineering.

вались также задачи с применением материалов с различными прочностными и упруго-пластическими свойствами, в том числе упругопластических [5; 9–11], вязкопластических [6], функционально-градиентных [12] и подверженные воздействию силовых и не силовых нагрузок: осесимметричных [13], объемных сил [13], внешнего и внутреннего давления [10], гидростатического давления [14], коррозионно-активных сред [5], циклически действующих температур [9], электромагнитных и термомеханических нагрузок [15]. Тем не менее существует обширная область задач, в которых для их решения достаточно методов линейной теории деформирования. Для исследования таких задач мы будем использовать упомянутое решение задачи Ламе для толстостенной сферы.

В публикациях также встречается много исследований моделей представительного объема композиционного материала с применением общетеоретических и вариационных принципов оценки эффективных модулей и, в частности, рассчитываемых по формулам Кристенсена, Фойгта и Рейса. Сложилось даже определенные стереотипы оценки множеств вилок Фойгта – Рейса, Хашина – Штрикмана, Кристенсена – Рейса [3; 16–18]. Изучению особенностей некоторых из них будет уделено особое внимание, так как в известных работах подобные исследования не приводились.

2. Методы

Рассмотрению подлежит двухфазная модель представительного объема композита, имеющая вид сферической оболочки радиусом R , в которую включен шарообразный наполнитель радиусом a (рис. 1).

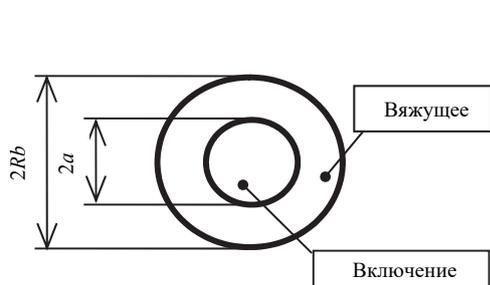


Рис. 1. Диаметральное сечение сферической ячейки композита
[Figure 1. Diametrical section of the spherical cell of the composite]

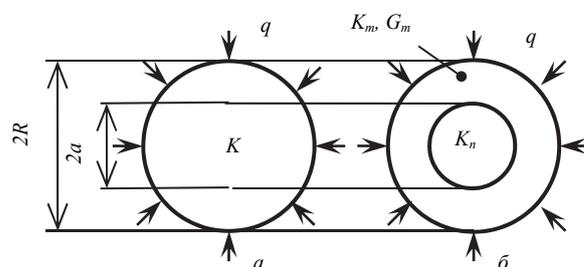


Рис. 2. Расчетные схемы ячейки:
 a – эффективная; b – структурная
[Figure 2. Design schemes of the cell:
 a – effective; b – structural]

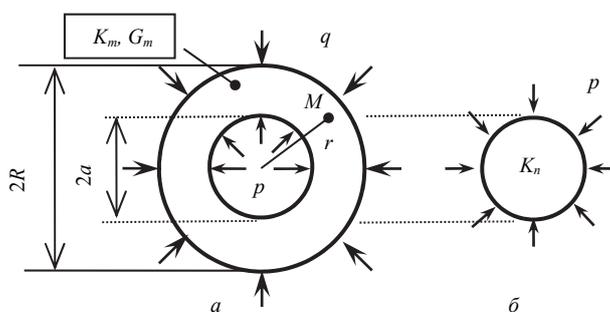


Рис. 3. Расчетные схемы компонентов ячейки:
 a – матрицы; b – включения
[Figure 3. Design diagrams of cell components:
 a – matrices; b – inclusions]

Под действием всестороннего давления q модель сферической ячейки испытывает деформацию центрального сжатия, которая вызывает (в точках раздела фаз) контактное давление p (взаимодействия двух фаз модели). Для постановки первоочередных задач рассмотрим возможные расчетные схемы модели ячейки при действии на нее давления q (рис. 2 и 3). Сначала выделим две расчетные схемы: эффективную и структурную (рис. 2).

Расчетная схема *эффективной* модели – это внешний взгляд на модель ячейки, представленной сплошным однородным изотропным упругим телом, имеющим форму шара (рис. 2, a). Шар, сжимаемый давлением q , является статически определимой системой. Из условия равновесия шара следует, что во всех его точках возникают равные напряжения σ и деформации ϵ :

$$\sigma = -q = \text{const}, \quad \varepsilon = -\frac{q}{3K} = -\frac{q}{e} = \text{const}, \quad (1)$$

где K – эффективный объемный модуль упругости композита; e – шаровой модуль объемного сжатия материала шара ($e = 3K$).

Расчетная схема *структурной* модели – это взгляд на модель изнутри (рис. 2, б). Здесь модель представлена твердым телом неоднородной структуры. Такая модель является системой статически неопределимой. Чтобы раскрыть ее неопределимость, расчленим структурную модель и представим ее совокупностью двух статически определимых расчетных схем (рис. 3).

Расчетная схема включения, аналогичная схеме эффективной модели (рис. 2, а), представлена однородным шаром (рис. 3, б). Шар находится в условиях гидростатического сжатия давлением p . Напряжения σ_n и деформации ε_n во всех точках шарового включения (наполнителя) вычисляются по формулам

$$\sigma_n = -p = \text{const}, \quad \varepsilon_n = -\frac{p}{3K_n} = -\frac{p}{e_n} = \text{const}, \quad (2)$$

где K_n, e_n – модули объемной и шаровой упругости материала шара.

Расчетная схема *матрицы* представлена *толстостенной сферой* (ТС), подверженной действию давлений q и p на ее поверхностях (рис. 3, а). Напряжения и деформации ТС, согласно решению задачи Ламе [19–21], выразим формулами, приведенными в таблице.

Таблица

Формулы решения задачи Ламе для ТС
[Table. Formulas for solving the Lamé problem for TC]

Параметры [Parameters]	Радиальные [Radial]	Тангенциальные [Tangential]
Напряжений [Stresses]	$\sigma_r = -\frac{q-pw}{V} - \frac{p-q}{V} \cdot \frac{w}{\rho^3}$	$\sigma_t = -\frac{q-pw}{V} + \frac{p-q}{2V} \cdot \frac{w}{\rho^3}$
Деформаций [Deformations]	$\varepsilon_r = -\frac{q-pw}{e \cdot V} - \frac{p-q}{g \cdot V} \cdot \frac{w}{\rho^3}$	$\varepsilon_t = -\frac{q-pw}{e \cdot V} + \frac{p-q}{2g \cdot V} \cdot \frac{w}{\rho^3}$

Примечание: r – радиальная координата точки M ; ρ – безразмерная координата точки ($\rho = r/R$); w – объемная доля наполнителя ($w = a^3/R^3$); V – объемная доля матрицы ($V = 1 - w$).

[Note: r – radial point coordinate M ; ρ – dimensionless point coordinate ($\rho = r/R$); w – volume fraction of filler ($w = a^3/R^3$); V – volume fraction of the matrix ($V = 1 - w$).]

В формулах деформаций (см. таблицу) упругие параметры e_m и g_m материала матрицы вычисляются по формулам

$$e_m = \frac{E_m}{1-2\nu_m} = 3K_m, \quad g_m = \frac{E_m}{1+\nu_m} = 2G_m, \quad (3)$$

где E_m – модуль Юнга; G_m – модуль сдвига; ν_m – коэффициент Пуассона материала; K_m – объемный модуль упругости; e_m и g_m – модули шаровой и девиаторной деформаций соответственно.

Первоочередные задачи исследования заключаются в том, чтобы, во-первых, раскрыть статическую неопределимость структурной модели (рис. 2, б) и определить величину контактного давления p , во-вторых, записать условие эквивалентности расчетных схем эффективной и структурной моделей (рис. 2) и, удовлетворяя это условие, определить величину эффективного объемного модуля K композита.

3. Результаты и их обсуждение

3.1. Контактное давление структурной модели

Запишем условие сплошности структурной модели (рис. 2, б) в виде равенства радиальных перемещений матрицы u_m (рис. 3, а) и наполнителя u_n (рис. 3, б) в точках ($r = a$) их смежной границы:

$$u_m|_{r=a} = u_n|_{r=a}. \quad (4)$$

А так как $u_m|_{r=a} = a\varepsilon_{im}|_{r=a}$ и $u_n|_{r=a} = a\varepsilon_n$, то условие (4) будет идентично условию равенства тангенциальных деформаций в тех же точках:

$$\varepsilon_{im}|_{r=a} = \varepsilon_n. \quad (5)$$

Формула деформаций ε_{im} матрицы в точках M имеет вид (см. таблицу)

$$\varepsilon_{im} = -\frac{q-pw}{e_m \cdot V} + \frac{p-q}{2g_m \cdot V} \cdot \frac{w}{\rho^3}. \quad (6)$$

Отсюда найдем деформации в точках с координатой $r = a$:

$$\varepsilon_{im}|_{r=a} = -\frac{q-pw}{e_m \cdot V} + \frac{p-q}{2g_m \cdot V}. \quad (7)$$

И, выполнив подстановки деформаций, согласно формулам (7) и (2), в условие (5), получим равенство

$$-\frac{q-pw}{e_m \cdot V} + \frac{p-q}{2g_m \cdot V} = -\frac{p}{e_n}. \quad (8)$$

Введем в рассмотрение три безразмерных (относительных) параметра:

$$\psi = \frac{p}{q}, \quad \eta = \frac{g_m}{e_m} = \frac{2G_m}{3K_m}, \quad \zeta = \frac{e_n}{e_m} = \frac{K_n}{K_m}. \quad (9)$$

Затем с учетом (9) выполним преобразования равенства (8), в результате чего найдем выражение для величины контактного давления:

$$p = q \cdot \psi, \quad \text{где } \psi = \frac{\zeta \cdot (1 + 2\eta)}{\zeta \cdot (1 + 2\eta w) + 2\eta V}. \quad (10)$$

В этой формуле величина давления p определяется величиной внешнего давления q и значением функции $\psi(\eta, \zeta, w)$ трех параметров, значения которых, в свою очередь, характеризуются интервалами чисел:

$$0 < \eta < 1, \quad 0 < \zeta < \infty \quad \text{и} \quad 0 < w < 1.$$

Тем самым, задавая величины давления q и трех параметров, сначала по формуле (10) вычисляется давление p . Напряжения и деформации в точках матрицы (рис. 3, а) рассчитываются по формулам таблицы, а в материале включения (рис. 3, б) – по формулам (2).

3.2. Эффективный объемный модуль композита

Для выявления величины эффективного модуля K двухфазной модели (рис. 1) сопоставим деформации этой модели в двух ее состояниях, соответствующих расчетным схемам эффективной и структурной моделей (рис. 2). Условие эквивалентности двух состояний запишем в виде равенства радиальных перемещений точек наружных поверхностей ($r = R$) эффективной и структурной схем модели:

$$u|_{r=R} = u_m|_{r=R}. \quad (11)$$

Перемещения левой части равенства (11) определяются согласно (1):

$$u|_{r=R} = R\varepsilon = -R \frac{q}{3K} = -R \frac{q}{e}. \quad (12)$$

Для правой части равенства (11) сначала по формуле (6) найдем деформации матрицы (рис. 3, а) в точках с координатами $r = R$ (то есть $\rho = 1$):

$$\varepsilon_{im}|_{r=R} = -\frac{q-pw}{e_m \cdot V} + \frac{p-q}{2g_m \cdot V} \cdot w. \quad (13)$$

С учетом (12) и (13), удовлетворяя условию (11), получаем выражение

$$-\frac{q}{e} = -\frac{q-pw}{e_m \cdot V} + \frac{p-q}{2g_m \cdot V} \cdot w. \quad (14)$$

С учетом (9) преобразуем (14) и после упрощений получим уравнение

$$\frac{1}{k} = \frac{\zeta + 2\eta - w(\zeta - 1)}{\zeta \cdot (1 + 2\eta w) + 2\eta V},$$

из которого следует окончательный вид формулы для вычисления величины эффективного объемного модуля K , выраженного в долях от величины модуля K_m материала матрицы:

$$k(\eta, \zeta, w) = \frac{K}{K_m} = \frac{\zeta \cdot (1 + 2\eta w) + 2\eta V}{\zeta V + (2\eta + w)}. \quad (15)$$

Вместо параметра ζ можно использовать обратный параметр $\theta = 1/\zeta$. В таком случае формула (15) примет вид

$$k(\eta, \theta, w) = \frac{(1 + 2\eta w) + 2\eta \theta V}{V + \theta(2\eta + w)}. \quad (16)$$

В работах [22–24] показано, что формула (16) идентична формуле Кристенсена [3. С. 54], которая в наших обозначениях имеет вид

$$K = K_m + \frac{w(K_n - K_m)}{1 + \frac{V(K_n - K_m)}{K_m + \frac{4}{3}G_m}}. \quad (17)$$

По формуле (17) вычисляются объемные модули K полидисперсных композитов со сферическими включениями.

В работах [22; 23] исследованы частные случаи применения формулы (16) и систематизированы семейства подмножеств возможных эффективных модулей $k = K/K_m$. В работе [24] выявлена взаимосвязь решения Кристенсена с оценками вилки Фойгта – Рейсса [17; 18]. Однако этими работами [3; 22–24] исследования формул (15) – (17) не исчерпываются, и требуется их развитие. В таком случае формулы (15) и (16) можно считать двумя модификациями формулы (17).

3.3. Оценки эффективных модулей по Кристенсену, Фойгту и Рейссу

Из формулы (9) выделим два частных случая, которые дают наибольшие и наименьшие значения величины модуля $k(\eta, \zeta, w)$, обратив внимание при этом на параметр

$$\eta = \frac{2G_m}{3K_m} = \frac{1 - 2\nu_m}{1 + \nu_m}.$$

Значения η однозначно связаны с величиной коэффициента Пуассона материала матрицы. Величине $\nu_m = 0$, например, соответствует значение $\eta = 1$, а величине $\nu_m = 0,5$ – значение $\eta = 0$. Этим двум случаям соответствуют, согласно формуле (15), две оценки (по Кристенсену):

1) максимальных значений эффективного модуля (при $\eta = 1$):

$$k^* = k(\zeta, w)_{\max} = \frac{\zeta \cdot (1 + 2w) + 2V}{\zeta V + (2 + w)}; \quad (18)$$

2) минимальных значений модуля (при $\eta = 0$):

$$k^{**} = k(\zeta, w)_{\min} = \frac{\zeta}{\zeta V + w}. \quad (19)$$

В таком случае, по Кристенсену, эффективные модули реальных композитов, соответствующих интервалу параметра η , ограничены величинами их предельных значений, определяемых выражениями (18) и (19).

Теперь обратимся к оценкам по Фойгту [17] и Рейссу [18] для эффективных модулей двухфазных материалов. Формулы этих оценок (в наших обозначениях) примут вид:

– на верхней границе значений – по Фойгту

$$K_F = (1-w)K_m + wK_n; \quad (20)$$

– на нижней границе – по Рейссу

$$K_R = \frac{1}{\frac{1-w}{K_m} + \frac{w}{K_n}}. \quad (21)$$

Смысл термина «вилка Фойгта – Рейсса» (кратко «вилка Ф–Р») заключается в том, что при всех значениях параметров K_m , K_n и w эффективные модули K реальных композитов определяются интервалом значений $K_R < K < K_F$. Все просто и понятно до очевидности. Тем не менее имеющиеся публикации, например [25], о так называемом *сужении* вилки Ф–Р свидетельствуют, что в этой вилке не все так однозначно и очевидно, как это кажется на первый взгляд. Чтобы выявить причину неоднозначности, преобразуем и представим оценки (20) и (21) в форме, более удобной для их графического исследования. С этой целью поделим левые и правые части формул (20) и (21) на величину модуля K_m . В результате получим безразмерную форму оценок:

– значений реальных модулей по Фойгту:

$$k_F = V + \zeta w; \quad (22)$$

– оценок по Рейссу:

$$k_R = \frac{\zeta}{\zeta V + w}. \quad (23)$$

Правые части выражений (19) и (23) тождественны друг другу. Это значит, что нижняя оценка k^{**} по Кристенсену точно совпала с оценкой k_R по Рейссу. Различие их в том, что оценка k_R (23) служит нижней границей значений эффективных модулей для всех возможных двухфазных композитов, а оценка k^{**} (19) – только для полидисперсных композитов со сферической моделью представительной ячейки (рис. 1).

Но верхняя оценка по Кристенсену (18) не совпала с оценкой по Фойгту (22) и удовлетворяет условию $k_R < k^* < k_F$. Таким образом, применительно к сферической модели ячейки, можно сказать, что двузубая вилка Ф–Р становится трезубой вилкой Фойгта – Кристенсена – Рейсса, или трезубцем Ф–К–Р. Следовательно, речь идет не о *сужении* вилки Ф–Р – это, вероятно, неудачный термин, так как «вилка – есть вилка». Она, в зависимости от значений ζ и w , имеет разные размеры, которые сохраняются неизменными, согласно их определениям (22) и (23).

3.4. Плоские фигуры множеств вилок Ф–Р и трезубцев Ф–К–Р

Формируя графический образ вышеназванных вилок и трезубцев, введем декартову прямоугольную систему координат $Ow\zeta k$ и в ее пространстве выделим область, ограниченную координатными плоскостями $Ow\zeta$, Owk , $O\zeta k$ и плоскостью $w = 1$, параллельной плоскости $O\zeta k$ (рис. 4).

Образы функций (15), (22) и (23) будем строить в плоскостях исследуемой области пространства $Ow\zeta k$, параллельных координатным плоскостям Owk и $O\zeta k$. Таких плоских «пространств» в исследуемой области бесчисленное множество. Рассмотрим четыре характерных примера численного исследования названных функций с построением их графиков.

Пример 1. В плоском пространстве $O\zeta k$ (с абсциссой $w = 0,25$) построим графики функций $k^*(\zeta)$, $k_F(\zeta)$ и $k_R(\zeta)$ в заданном множестве чисел интервала $0 < \zeta \leq 1$.

Результаты вычисления функций по формулам (18), (22) и (23) представим фигурой трех графиков (рис. 5).

На рис. 5 три графика имеют общую точку ($\zeta = 1, k = 1$). Верхний и нижний графики дают образ фигуры множества вилок Ф–Р. Фигура имеет вид множества двурогих вилок с общим основанием в названной

точке. Например, в случае $\zeta = 0$ вилка Ф–Р характеризуется длиной – величиной проекции графиков на ось ζ ($L_0 = 1$). Ее раскрытие (при $\zeta = 0$) характеризуется разностью аппликат $\Delta k_{\zeta=0} = 0,75 - 0 = 0,75$ (рис. 5). В другом случае ($\zeta = 1/4$, например) длина вилки и ее раскрытие будут иными: $L_{\zeta=1/4} = 1 - 0,25 = 0,75$ и $\Delta k_{\zeta=1/4} = 0,813 - 0,571 = 0,242$ и т. д. Следовательно, верхним и нижним графиками представлено бесконечное множество вилок Ф–Р, наложенных в одном створе одна на другую (в координатной плоскости $O\zeta k$).

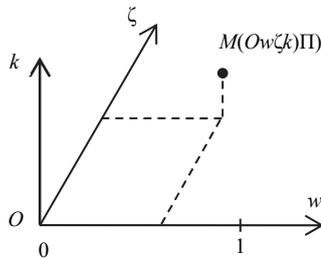


Рис. 4. Область пространства эффективных модулей

в декартовой системе координатных осей с началом в точке O : координаты точек M исследуемой области определяются абсциссами оси w в интервале $0 < w < 1$, ординатами оси ζ на интервале $0 < \zeta < \infty$, аппликатами осей k для функций $k^*(w, \zeta)$, $k^{**}(w, \zeta)$, $k_F(w, \zeta)$ и $k_R(w, \zeta)$ в интервале аппликат $0 < k < \infty$.

[Figure 4. The area of space of effective modules in the Cartesian system of coordinate axes with the origin at point O :

the coordinates of points M of the investigated area are determined by abscissas of the w axis in the interval $0 < w < 1$, the ordinates of the ζ axis in the interval $0 < \zeta < \infty$, applicates of the k -axes for the functions $k^*(w, \zeta)$, $k^{**}(w, \zeta)$, $k_F(w, \zeta)$ and $k_R(w, \zeta)$ in the interval $0 < k < \infty$]

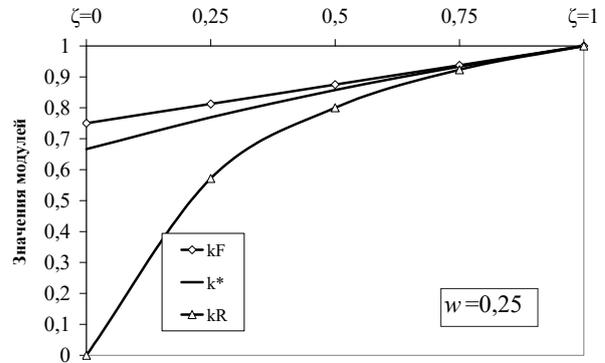


Рис. 5. Фигуры множества трезубцев Ф–К–Р, представленные плоскими графиками функций $k_F(\zeta)$, $k^*(\zeta)$ и $k_R(\zeta)$ в интервале чисел $0 < \zeta \leq 1$ при значениях $w = 0,25$
[Figure 5. Figures of the set of F–K–R tridents represented by flat graphs of the functions $k_F(\zeta)$, $k^*(\zeta)$ and $k_R(\zeta)$ in the range of numbers $0 < \zeta \leq 1$ at values of $w = 0.25$]

Средний и нижний графики (функций k^* и k_R) образуют другую фигуру – графический образ множества вилок Кристенсена – Рейсса (вилка К–Р).

График функции $k^*(\zeta)$ делит пространство множества вилок Ф–Р на две части. Нижняя часть, определяемая интервалом значений $k^{**} < k(\eta, \zeta, w) < k^*$, образует пространство множества вилок К–Р. Верхняя часть множества вилок Ф–Р остается неопределенной, так как выходит за рамки решения, даваемого формулами (9) – (11). Совмещение фигур двух множеств, вилок Ф–Р и вилок К–Р, в одном рисунке демонстрирует наглядный образ множества трезубцев Ф–К–Р.

Пример 2. В другом плоском пространстве $O\zeta k$ (с абсциссой $w = 0,5$) сохраним условия примера 1.

Решение также представим графиками трех функций в пространстве $k - \zeta$ (рис. 6).

Здесь, в отличие от рис. 5, имеем иные размеры множества трезубцев Ф–К–Р, включающих в себя пространства вилок Ф–Р и вилок К–Р. Если снова изменим величину w и примем ее равной 0,75, например, то получим третий вариант фигуры для множества трезубцев Ф–К–Р.

Следовательно, обобщая примеры 1 и 2, можно сказать, что в интервале чисел $0 < w < 1$ получается бесконечное множество фигур (множеств трезубцев Ф–К–Р). При этом в таком огромном количестве множеств фигур трезубцев Ф–К–Р никакого сужения вилок Ф–Р в традиционном смысле, как, к примеру, в [25], не выявляется.

Пример 3. В плоском пространстве $O\zeta k$ (с абсциссой $w = 0,75$) требуется построить графики функции $k_F(\zeta)$ и трех функций $k(\zeta)$ при значениях η , равных 1,0, 0,4 и 0,0 в интервале чисел $0,25 < \zeta \leq 3$.

Результаты вычисления значений четырех функций по формулам (22) и (15) соответственно представим фигурой трех графиков, выделенных сплошными линиями, и одним пунктирным графиком (рис. 7).

На рис. 7 в интервале $0,25 < \zeta \leq 3$ изображено два множества трезубцев Ф–К–Р, зубья которых из общего основания в точке (1, 1) расходятся в противоположные стороны. Множество левых трезубцев отражает величину эффективных модулей материала при значениях малых чисел параметра ζ , а правые – больших.

График, выделенный пунктирной линией, отражает, согласно (15), значения функции $k(\zeta)$ композитов, имеющих равную величину параметра $\eta = 0,4$. Это значит, что по формулам (15) – (17) определяются значения не только эффективных объемных модулей K , но и эффективных модулей сдвига (G). Другими сло-

вами, поскольку, согласно (9), модуль сдвига $G = 3\eta K/2$, то при заданном значении $\eta = 0,4$ (пунктирная линия) модуль K становится известной величиной, тем самым вычисляемой будет величина модуля сдвига.

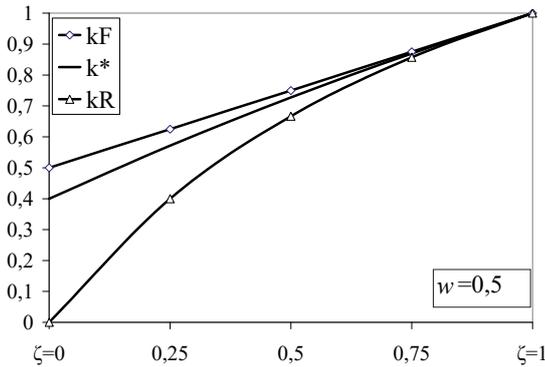


Рис. 6. Фигуры множества трезубцев Ф–К–Р, представленные графиками функций $k_F(\zeta)$, $k^*(\zeta)$ и $k_R(\zeta)$ в интервале чисел $0 < \zeta \leq 1$ при значениях $w = 0,5$
[Figure 6. Figures of the set of F–K–R tridents represented by the graphs of the functions $k_F(\zeta)$, $k^*(\zeta)$ и $k_R(\zeta)$ in the range of numbers $0 < \zeta \leq 1$ at values of $w = 0,5$]

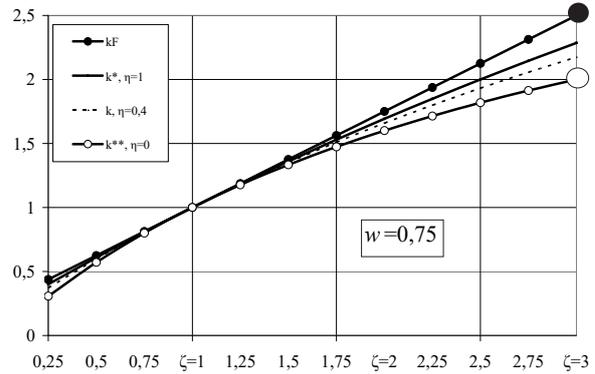


Рис. 7. Фигуры двух множеств трезубцев Ф–К–Р, представленных графиками функций $k_F(\zeta)$, $k^*(\zeta)$ и $k^{**}(\zeta)$ в интервале чисел $0,25 < \zeta \leq 3$; объемная доля наполнителя $w = 0,75$; пунктирная кривая определяет функцию $k(\zeta, \eta, w)$, в которой коэффициент $\nu_m = 0,25$ ($\eta = 0,4$)
[Figure 7. Figures of two sets of F–K–R tridents represented by graphs of functions $k_F(\zeta)$, $k^*(\zeta)$ и $k^{**}(\zeta)$ in the range of numbers $0,25 < \zeta \leq 3$; volume fraction of filler $w = 0,75$; the dashed line defines the function $k(\zeta, \eta, w)$, in which the coefficient $\nu_m = 0,25$ ($\eta = 0,4$)]

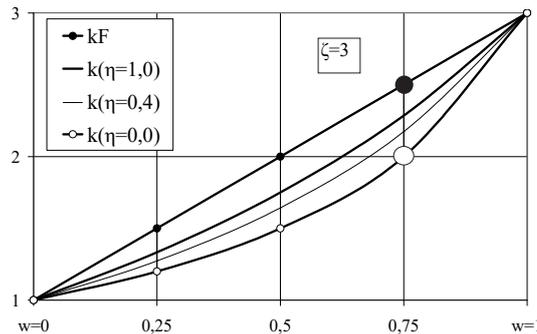


Рис. 8. Фигуры двух множеств трезубцев Ф–К–Р с основаниями: в точке (0, 1) – левое множество, в точке (1, 3) – правое; в плоском пространстве Owk с абсциссой $w = 0,75$ два смежных трезубца направлены навстречу друг другу и имеют общие аппликаты, например двух смежных вилок Ф–Р (см. выделенные точки)
[Figure 8. Figures of two sets of F–K–R tridents with bases: at point (0, 1) – the left set, at point (1, 3) – right; in the flat space Owk with abscissa $w = 0,75$ two adjacent tridents are directed towards each other and have common applicators, for example two adjacent F–R forks (see highlighted points)]

Пример 4. Для случая, когда ордината $\zeta = 3$ на сегменте оси абсцисс $0 \leq w \leq 1$ плоского пространства Owk , требуется построить графический образ эффективных модулей: функции $k_F(w)$ по Фойгту и трех функций $k(w)$ по Кристенсену (при значениях параметра $\eta = 1,0, 0,4$ и $0,0$).

Результаты вычислений по формулам (22) и (15) представим графиками четырех названных функций в плоском пространстве Owk (рис. 8).

На рис. 8 сплошными линиями трех графиков изображено множество смежных пар трезубцев Ф–К–Р. Трезубцы каждой пары имеют собственное основание: левые трезубцы в точке (0, 1), правые – в точке (1, 3). Из этих точек зубья смежных трезубцев направлены навстречу друг другу, встречаясь в точках с общей абсциссой w . Например, для случая, когда абсцисса $w = 0,75$, значения аппликаты k_F и k_R смежной пары выделены крупными точками (рис. 8). При этом слева от выделенных точек имеем трезубец с основанием в точке (0, 1), а справа – трезубец с основанием в точке (1, 3). Выделенные точки в плоском пространстве Owk со значениями функций $k_F(w)$ и $k_R(w)$ имеют точно такие же значения, как и функции $k_F(\zeta)$ и $k_R(\zeta)$ в точках с ординатой $\zeta = 3$ пространства $O\zeta k$ (рис. 7).

График, выделенный пунктирной линией (рис. 8), так же как на рис. 7, отражает, согласно (15), значения функции $k(w)$ композитов, имеющих равную величину коэффициента Пуассона: $\nu = \nu_m = 0,25$ (или $\eta = 0,4$, что то же самое). Следовательно, пространство множества вилок К–Р на рис. 8 заполнено подобными графиками с другими значениями коэффициента $\nu = \nu_m = \text{const}$.

4. Заключение

Применительно к сферической модели представительного объема композита (рис. 1–3) дан вывод формулы (15) для объемного модуля k композитов с зернистым наполнителем. Формула (15), отличаясь по форме, идентична по содержанию формуле (17), полученной Р. Кристенсеном для объемного модуля K полидисперсных композитов со сферическими включениями [3. С. 54, 55]). Причина идентичности формул (15) и (17) кроется в том, что оба решения выполнены в рамках линейно-упругого тела и одной и той же парадигмы Хашина [16].

Полученные формулы функций $k(\eta, \zeta, w)$ – по Кристенсену, $k_F(\zeta, w)$ – по Фойгту и $k_R(\zeta, w)$ – по Рейссу позволили построить наглядный образ бесконечного множества значений этих функций в двух множествах плоских пространств $O\zeta k$ и Owk (рис. 4). Совмещения графиков трех функций в одном рисунке дают графические образы бесконечного множества плоских фигур трезубцев Ф–К–Р, включающих в себя образы множеств вилок Ф–Р и вилок К–Р. Графическое исследование небольшого числа фрагментов (рис. 5–8) из бесконечного множества возможных плоских фигур трезубцев и вилок позволяет утверждать, что:

- во-первых, при заданных величинах модулей K_m , G_m , K_n и объемной доли w наполнителя по формулам (15) – (17) в рамках полидисперсной модели (рис. 1) можно определять не только эффективные объемные модули K , но и эффективные модули сдвига G двухфазных композитов;
- во-вторых, результаты совместного анализа формул (15), (22), (23) и их графических образов не подтверждают гипотезы о сужении вилки Фойгта – Рейсса в традиционном смысле;
- в-третьих, безразмерная форма выражений (15), (16) позволяет решать обратные задачи механики полидисперсных композитов; например, определять объемные модули K_m , G_m и K_n (материала компонентов) по значениям эффективных модулей (K и G), полученным в результате механических испытаний на сжатие небольшой серии стандартных образцов композита, изготовленных на одном замесе связующего материала с различным содержанием объемной доли наполнителя;
- в-четвертых, данной работой исследование формул (15) – (17) не завершается, так как бесконечное множество возможных результатов их исследования не исключает наличия других, еще не известных, но практически необходимых закономерностей.

Список литературы / References

1. Бобрышев А.Н., Ерофеев В.Т., Козомазов В.М. Физика и синергетика дисперсно-неупорядоченных конденсированных композитных систем. СПб.: Наука, 2012. 176 с.
Bobryshev A.N., Erofeev V.T., Kozomazov V.M. *Fizika i sinergetika dispersno-neuporyadochennykh kondensirovannykh kompozitnykh sistem* [Physics and synergetics of dispersively disordered condensed composite systems]. Saint Petersburg: Nauka Publ.; 2012. (In Russ.)
2. Гусев Б.В., Кондращенко В.И., Маслов Б.П., Файбусович А.С. Формирование структуры композиционных материалов и их свойства. М.: Научный мир, 2006. 566 с.
Gusev B.V., Kondrashenko V.I., Maslov B.P., Faysoovich A.S. *Formirovanie struktury kompozitsionnykh materialov i ih svoystva* [Formation of the structure of composite materials and their properties]. Moscow: Nauchnyj mir Publ.; 2006. (In Russ.)
3. Кристенсен Р.М. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 336 с.
Christensen R.M. *Vvedenie v mekhaniku kompozitov* [Introduction to the mechanics of composites]. Moscow: Mir Publ.; 1982. 336 p. (In Russ.)
4. Васильев В.В., Протасов В.Д., Болотин В.В. и др. Композиционные материалы: справочник. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
Vasiliev V.V., Protasov V.D., Bolotin V.V. *Kompozitsionnye materialy* [Composite material]: handbook. Moscow: Mashinostroenie Publ.; 1990. (In Russ.)
5. Pronina Y.G. Analytical solution for decelerated mechanochemical corrosion of pressurized elastic-perfectly plastic thick-walled spheres. *Corrosion Science*. 2015;90:161–167. DOI: 10.1016/j.corsci.2014.10.007.
6. Arya V.K. Analytical and finite element solutions of some problems using a viscoplastic model. *Computers and Structures*. 1989;33(4):957–967. DOI: 10.1016/0045-7949(89)90430-6.

7. Loghman A., Shokouhi N. Creep damage evaluation of thick-walled spheres using a long-term creep constitutive model. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2009;23(10). Article number: 2577. DOI: 10.1007/s12206-009-0631-x.
8. Loghman A., Ghorbanpour Arani A., Aleayoub S.M.A. Time-dependent creep stress redistribution analysis of thick-walled functionally graded spheres. *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 2011;15(4):353–365. DOI: 10.1007/s11043-011-9147-8.
9. Cowper G.R. The elastoplastic thick-walled sphere subjected to a radial temperature gradient. *Journal of Applied Mechanics*. 1960;27(3):496–500. DOI: 10.1115/1.3644030.
10. Durban D., Baruch M. Analysis of an elasto-plastic thick walled sphere loaded by internal and external pressure. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 1977;12(1):9–22. DOI: 10.1115/1.3644030.
11. Parvizi A., Alikarami S., Asgari M. Exact solution for thermoelastoplastic behavior of thick-walled functionally graded sphere under combined pressure and temperature gradient loading. *Journal of Thermal Stresses*. 2016; 39(9):1152–1170. DOI: 10.1080/01495739.2016.1188614.
12. Chen Y.Z., Lin X.Y. An alternative numerical solution of thick-walled cylinders and spheres made of functional-ly graded materials. *Computational Materials Science*. 2010;48(3):640–647. DOI: 10.1016/j.commatsci.2010.02.033.
13. Vestyak V.A., Tarlakovskii D.V. Unsteady axisymmetric deformation of an elastic thick-walled sphere under the action of volume forces. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2015;56(6):984–994. DOI: 10.1134/S0021894415060085.
14. Sedova O.S., Pronina Y.G. Taking account of hydrostatic pressure in the modeling of corrosion of thick spherical shells. *2015 International Conference on Mechanics – Seventh Polyakhov's Reading*. 2015;7106771. DOI: 10.1109/POLYAKHOV.2015.7106771.
15. Loghman A., Moradi M. The analysis of time-dependent creep in FGPM thick walled sphere under electro-magneto-thermo-mechanical loadings. *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 2013;17(3):315–329. DOI: 10.1007/s11043-012-9185-x.
16. Hashin Z. The elastic moduli of heterogeneous materials. *J. Appl. Mech.* 1962;29:143–150.
17. Voigt W. *Lehrbuch der Kristallphysik*. Berlin: Teubner; 1928.
18. Reuss A. Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung. *Z. Angew. Math. Und Mech.* 1929;9(1):49–58.
19. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М.: Высшая школа, 1968. 512 с.
20. Bezukhov N.I. *Osnovy teorii uprugosti, plastichnosti i polzuchesti [Fundamentals of the theory of elasticity, plasticity and creep]*. Moscow: Vysshaya shkola Publ., 1968. (In Russ.)
21. Черкасов В.Д., Тюряхин А.С. Теория двухсвязных моделей микромеханики композитов: монография. Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2009. 108 с.
22. Cherkasov V.D., Tyuryakhin A.S. *Teoriya dvukhsyaznykh modelei mikromekhaniki kompozitov [Theory of two-connected models of micromechanics of composites]*: monograph. Saransk: Publishing House of the Mordovian University; 2009. (In Russ.)
23. Ерофеев В.Т., Тюряхин А.С., Ерофеева И.В. О связях параметров несущей фазы с эффективными параметрами в моделях зернистых композитов // Строительная механика и расчет сооружений. 2018. № 3. С. 7–17.
24. Erofeev V.T., Tyuryakhin A.S., Erofeeva I.V. Relationships between carrier phase parameters and effective parameters in granular composite models. *Construction mechanics and calculation of structures*. 2018;(1):7–17. (In Russ.)
25. Erofeev V.T., Tyuryakhin A.S., Tyuryakhina T.P. Flat Space of Values of Volume Module of Grain Composite with Spherical Fill-Lem. *International Journal of Civil Engineering and Technology*. 2019;10(8):333–342.
26. Ерофеев В.Т., Тюряхин А.С., Тюряхина Т.П. Система упорядоченных подмножеств значений объемного модуля полидисперсных композитов со сферическими включениями // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2019. № 6 (726). С. 5–17. DOI: 10.32683/0536-1052-2019-726-6-5-17.
27. Erofeev V.T., Tyuryakhin A.S., Tyuryakhina T.P. System of ordered subsets of the volume modulus values of polydisperse composites with spherical inclusions. *News of higher educational institutions. Construction*. 2019; 6(726):5–7. DOI: 10.32683/0536-1052-2019-726-6-5-17. (In Russ.)
28. Ерофеев В.Т., Тюряхин А.С., Тюряхина Т.П., Тиньгаев А.В. Эффективные модули двухфазных строительных композитов с зернистым наполнителем // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 6. С. 407–414. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-407-414>
29. Erofeev V.T., Tyuryakhin A.S., Tyuryakhina T.P., Tingaev A.V. Effective modules of two-phase construction composites with grain filler. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(6):407–414. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-407-414> (In Russ.)
30. Тарасюк И.А., Кравчук А.С. Сужение «вилки» Фойгта – Рейсса в теории упругих структурно неоднородных в среднем изотропных композиционных тел без применения вариационных принципов // Apriori. Серия: Естественные и технические науки. 2014. № 3. С. 1–18. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=29744041> (дата обращения: 23.06.2020).
31. Tarasyuk I.A., Kravchuk A.S. Calculation of Voigt – Reuss “Range” in the theory of elasticity of structural heterogeneous, average isotropic, composite bodies without application of variational principles. *Apriori. Series: Natural and technical Sciences*. 2014;3:1–18. Available from: <https://elibrary.ru/item.asp?id=29744041> (accessed: 23.06.2020). (In Russ.)