

## Расчет и проектирование строительных конструкций

УДК 531.2

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-180-186

### АНАЛИЗ КРАЕВОГО ЭФФЕКТА КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ СДВИГЕ ДВУХСЛОЙНОЙ БАЛКИ

В.И. АНДРЕЕВ, Н.Ю. ЦЫБИН, Р.А. ТУРУСОВ

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет  
Ярославское шоссе, д. 26, Москва, Россия, 129337

(поступила в редакцию: 6 марта 2018 г.; принята к публикации: 5 мая 2018 г.)

В статье приводится система разрешающих уравнений, описывающая напряженно-деформированное состояние многослойной балки и позволяющая решать широкий ряд задач, таких как сдвиг, изгиб, нормальный отрыв для любого числа слоев. Для каждого из слоев вводятся гипотезы, аналогичные гипотезам Кирхгофа – Лява. В предложенной модели взаимодействие слоев осуществляется с помощью контактного слоя. Контактный слой представляет собой анизотропную среду, которую можно рассматривать как «щетку» упругих коротких стержней. Для простоты предполагается, что стержни ориентированы нормально к поверхности контакта. Использование контактного слоя позволяет избежать таких проблем, как бесконечные касательные напряжения на границе раздела слоев вблизи торцов балки, а также решать задачи определения концентрации касательных напряжений, возникающих на границах между слоями и в угловых точках, и их изменения, например в процессе ползучести. Главной особенностью предлагаемой модели является строгое удовлетворение граничных условий. Ввиду сложности разрешающей системы уравнений в качестве примера рассматривается задача о сдвиге слоев двухслойной балки. Получено аналитическое решение, позволяющее качественно анализировать влияние механических и геометрических характеристик на напряженно-деформированное состояние расчетной модели, вычислять истинную адгезионную прочность, а также определять физические характеристики контактного слоя на основе экспериментальных данных. Произведен численный пример расчета балки при двух вариантах загрузки модели, на основе которого установлена связь между истинной и средней адгезионной прочностью в зависимости от различных параметров.

**Ключевые слова:** многослойные балки, контактный слой, краевой эффект, касательные напряжения

### ANALYSIS OF THE EDGE EFFECT OF SHEAR STRESSES IN THE SHIFT OF A TWO-LAYER BEAM

V.I. ANDREEV, N.YU. TSYBIN, R.A. TURUSOV

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)  
26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation

(received: March 06, 2018; accepted: May 05, 2018)

The paper presents a system of resolving equations describing the stress-strain state of multilayer beams and allowing solving a wide range of problems, such as shear, bending, and normal separation for any number of layers. For each of the layers, hypotheses similar to the Kirchhoff – Love hypotheses are introduced. In the proposed model, the layers interact with a contact layer. The contact layer is an anisotropic medium, which can be considered as a “brush” of elastic short rods. For simplicity, it is assumed that the rods are oriented normally to the contact surface. The use of a contact layer allows such problems as infinite tangential stresses at the interface between the layers near the end of the beam and also to solve the problem of determining the concentration of the shearing stresses occurring at the boundaries between the layers and in the corner points, their variation, for example, in the creep process. The main feature of the proposed model is strict satisfaction of the boundary conditions. In view of the complexity of the resolving system of equations, we consider, as an example, the problem of shearing the layers of a double-layer beam. An analytical solution is obtained that allows qualitative analysis of the influence of mechanical and geometric characteristics on the stress-strain state of the design model, calculate the true adhesive strength, and determine the physical characteristics of the contact layer on the basis of experimental data. A numerical example is given for calculating a beam in two variants of model loading, on the basis of which a relationship was established between the true and average adhesive strength, depending on various parameters.

**Keywords:** multilayer beams, contact layer, edge effect, stresses

### 1. Вывод разрешающих уравнений

Модель многослойной балки, состоящей из набора внешних и контактных слоев приведена на рис. 1.

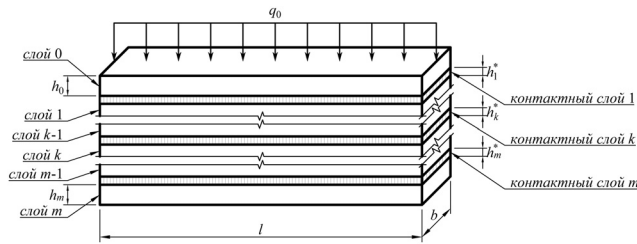


Рис. 1. Многослойная балка с контактными слоями  
[Fig. 1. Multilayer beam with contact layers]

В работах [1] и [7] была получена система разрешающих уравнений для многослойной балки. Выпишем часть данной системы для внешних слоев.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 N_k}{dx^2} &= \frac{dP_{x,k}^t}{dx} - \frac{dP_{x,k}^b}{dx}; \\ -D_k \frac{d^4 v_k}{dx^4} + \frac{h_k}{2} \left( \frac{dP_{x,k}^t}{dx} + \frac{dP_{x,k}^b}{dx} \right) &= P_{y,k}^t - P_{y,k}^b. \end{aligned} \right\} (1)$$

Уравнения описывают напряженно-деформированное состояние  $k$ -того внешнего слоя балки. Предполагается, что внешние слои подчиняются классическим гипотезам теории пластин.

В уравнения входят следующие величины:  $k$  – номер внешнего слоя;  $h_k$  – толщина слоя;  $D_k$  – интегральная изгибная жесткость;  $N_k$  – продольная сила;  $v_k$  – прогиб слоя;  $P_{y,k}^t, P_{y,k}^b$  – нормальные нагрузки;  $P_{x,k}^t, P_{x,k}^b$  – касательные нагрузки;  $t, b$  – индексы, обозначающие верхнюю и нижнюю поверхность слоя соответственно.

В общем случае силы, действующие на внешний слой представляют собой сумму нагрузок, приложенных к слою, и усилий, возникающих в контактных слоях.

$$\left. \begin{aligned} P_{y,k}^t &= q_k^t + \sigma_k^*; P_{y,k}^b &= q_k^b + \sigma_{k+1}^*; \\ P_{x,k}^t &= s_k^t + \tau_k^*; P_{x,k}^b &= s_k^b + \tau_{k+1}^*. \end{aligned} \right\} (2)$$

В выражениях  $q_k^t; q_k^b; s_k^t; s_k^b$  – внешние нагрузки,  $\sigma_k^*; \sigma_{k+1}^*; \tau_k^*; \tau_{k+1}^*$  – нормальные и касательные

напряжения в примыкающих контактных слоях. Здесь и далее все величины, относящиеся к контактному слою, будем помечать символом \*.

В работе [1] используется одномерная модель контактного слоя. Подобная модель не позволяет полностью удовлетворить все граничные условия. В данной работе мы будем использовать двухмерную модель, представленную в работе [8]. Напряжения (нормальные и касательные) в контактном слое при этом определяются из следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \tau_k^* &= \frac{(h_k^*)^2}{12 E_k^*} \frac{d^2 \tau_k^*}{dx^2} + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{dv_{t,k}^*}{dx} + \frac{dv_{b,k}^*}{dx} \right) - \frac{1}{h_k^*} (u_{t,k}^* - u_{b,k}^*); \\ \sigma_k^* &= -y_k^* \frac{d\tau_k^*}{dx} - \frac{E_k^*}{h_k^*} (v_{t,k}^* - v_{b,k}^*). \end{aligned} \right\} (3)$$

В уравнения (3) входят:  $h_k^*$  – толщина контактного слоя;  $G_k^*$  – модуль сдвига;  $E_k^*$  – модуль Юнга;  $v_{t,k}^*, v_{b,k}^*$  – нормальные перемещения на верхней и нижней гранях контактного слоя (представляют собой нормальные перемещения примыкающих внешних слоев);  $u_{t,k}^*, u_{b,k}^*$  – осевые перемещения (выражения записаны далее в тексте);  $y_k^*$  – переменная, отсчитываемая от средней линии контактного слоя.

В качестве примера рассмотрим балку, представленную двумя «внешними» слоями и одним контактным слоем. Общий вид данной балки приведен на рис. 2.

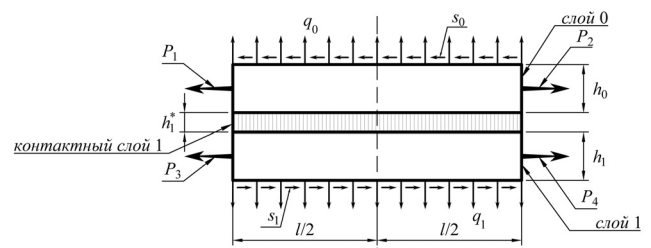


Рис. 2. Двухслойная балка  
[Fig. 2. Two-layer beam]

Подставим  $k = 0, 1$  в уравнения (1) и  $k = 1$  в уравнения (3). В результате получим разрешающую систему для двухслойной балки.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 N_0}{dx^2} &= \frac{dP_{x,0}^t}{dx} - \frac{dP_{x,0}^b}{dx}; \\ -D_0 \frac{d^4 v_0}{dx^4} + \frac{h_0}{2} \left( \frac{dP_{x,0}^t}{dx} + \frac{dP_{x,0}^b}{dx} \right) &= P_{y,0}^t - P_{y,0}^b; \\ \frac{d^2 N_1}{dx^2} &= \frac{dP_{x,1}^t}{dx} - \frac{dP_{x,1}^b}{dx}; \\ -D_1 \frac{d^4 v_1}{dx^4} + \frac{h_1}{2} \left( \frac{dP_{x,1}^t}{dx} + \frac{dP_{x,1}^b}{dx} \right) &= P_{y,1}^t - P_{y,1}^b; \\ \frac{\tau^*}{G^*} &= \frac{(h^*)^2}{12E^*} \frac{d^2 \tau^*}{dx^2} + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{dv_0}{dx} + \frac{dv_1}{dx} \right) - \frac{1}{h^*} (u_t^* - u_b^*); \\ \sigma^* &= -y^* \frac{d\tau^*}{dx} - \frac{E^*}{h^*} (v_0 - v_1). \end{aligned} \right\} (4)$$

Входящие в данную систему величины записаны ниже:

$$\left. \begin{aligned} P_{y,0}^t = q_0; P_{y,0}^b = \sigma^* (-h^*/2); P_{x,0}^t = s_0; P_{x,0}^b = \tau^*; \\ P_{y,1}^t = \sigma^* (h^*/2); P_{y,1}^b = q_1; P_{x,1}^t = \tau^*; P_{x,1}^b = s_1; \\ u_t^* = u_{0,0} - \frac{h_0}{2} \frac{dv_0}{dx}; u_b^* = u_{0,1} + \frac{h_1}{2} \frac{dv_1}{dx}. \end{aligned} \right\} (5)$$

Здесь  $u_{0,k}$  – перемещения внешнего слоя на уровне нейтральной оси. Индекс 1 для величин, относящихся к контактному слою, опущен.

Подставляя (5) в (4), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 N_0}{dx^2} &= -\frac{d\tau^*}{dx}; \\ -D_0 \frac{d^4 v_0}{dx^4} + \frac{h_0}{2} \frac{d\tau^*}{dx} &= q_0 - \sigma^* (-h^*/2); \\ \frac{d^2 N_1}{dx^2} &= \frac{d\tau^*}{dx}; \\ -D_1 \frac{d^4 v_1}{dx^4} + \frac{h_1}{2} \frac{d\tau^*}{dx} &= \sigma^* (h^*/2) - q_1; \\ \frac{\tau^*}{G^*} &= \frac{(h^*)^2}{12E^*} \frac{d^2 \tau^*}{dx^2} + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \frac{dv_0}{dx} \left( 1 + \frac{h_0}{h^*} \right) + \frac{dv_1}{dx} \left( 1 + \frac{h_1}{h^*} \right) \right] - \frac{1}{h^*} (u_{0,0} - u_{0,1}); \\ \sigma^* &= -y^* \frac{d\tau^*}{dx} - \frac{E^*}{h^*} (v_0 - v_1). \end{aligned} \right\} (6)$$

В работе [1] получены следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_{t,1}^*}{dx} = \varepsilon_{0,0} - \frac{h_0}{2} \frac{d^2 v_0}{dx^2} = \frac{N_0 + N_{f,0}}{B_0} - \frac{h_0}{2} \frac{d^2 v_0}{dx^2}; \\ \frac{du_{b,1}^*}{dx} = \varepsilon_{0,1} + \frac{h_1}{2} \frac{d^2 v_1}{dx^2} = \frac{N_1 + N_{f,1}}{B_1} + \frac{h_1}{2} \frac{d^2 v_1}{dx^2}; \\ B_k = E_k h_k; D_k = \frac{E_k h_k^3}{12}; N_{f,k} = E_k \int_{-h_k/2}^{h_k/2} \varepsilon_{f,k} dy_k. \end{aligned} \right\} (7)$$

Величины, приведенные в уравнениях (5) и (7):  $B_k$  – интегральная жесткость при растяжении;  $E_k$  – модуль Юнга внешнего слоя;  $N_{fk}$  – осевые силы, связанные с вынужденными деформациями  $\varepsilon_{f,k}$  (температурными, усадочными и т.д.).

В дальнейшем будем считать, что вынужденные деформации вызваны температурой. В этом случае

$$\varepsilon_{f,k} = \alpha_k \Delta T_k; N_{f,k} = E_k h_k \alpha_k \Delta T_k. \quad (8)$$

Из рис. 2 следует связь между продольными усилиями во внешних слоях и приложенными продольными нагрузками.

$$N_0 + N_1 = P_1 + P_3; N_0 + N_1 = P_2 + P_4. \quad (9)$$

Складывая между собой выражения (9), найдем

$$\left. \begin{aligned} N_1 = F_P - N_0; \\ F_P = \frac{1}{2} (P_1 + P_2 + P_3 + P_4). \end{aligned} \right\} (10)$$

В любом случае для обеспечения статического равновесия должно выполняться соотношение  $P_1 + P_3 = P_2 + P_4$ .

Продифференцировав пятое уравнение из (6), получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau^*}{dx} &= \frac{G^* (h^*)^2}{12E^*} \frac{d^3 \tau^*}{dx^3} + \frac{G^*}{2} \left( \frac{d^2 v_0}{dx^2} + \frac{d^2 v_1}{dx^2} \right) - \\ &- \frac{G^*}{h^*} \left( \frac{du_t^*}{dx} - \frac{du_b^*}{dx} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Используя первое и второе соотношения (7), преобразуем (11):

$$\begin{aligned} \frac{G^* (h^*)^2}{12E^*} \frac{d^3 \tau^*}{dx^3} - \frac{d\tau^*}{dx} + \frac{G^*}{2} \left[ \frac{d^2 v_0}{dx^2} \left( 1 + \frac{h_0}{h^*} \right) + \frac{d^2 v_1}{dx^2} \left( 1 + \frac{h_1}{h^*} \right) \right] - \\ - \frac{G^*}{h^*} \left( \frac{N_0 + N_{f,0}}{B_0} - \frac{N_1 + N_{f,1}}{B_1} \right) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Используем первое уравнение (6), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{G^*(h^*)^2}{12E^*} \frac{d^4 N_0}{dx^4} - \frac{d^2 N_0}{dx^2} + N_0 \frac{G^*}{h^*} \left( \frac{1}{B_0} + \frac{1}{B_1} \right) + \\ & + \frac{G^*}{h^*} \left( \frac{N_{f,0}}{B_0} - \frac{F_P + N_{f,1}}{B_1} \right) - \\ & - \frac{G^*}{2} \left[ \frac{d^2 v_0}{dx^2} \left( 1 + \frac{h_0}{h^*} \right) + \frac{d^2 v_1}{dx^2} \left( 1 + \frac{h_1}{h^*} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Преобразовывая шестое уравнение из (6) и используя первое, находим

$$\sigma^* = y^* \frac{d^2 N_0}{dx^2} - \frac{E^*}{h^*} (v_0 - v_1). \quad (14)$$

Окончательно разрешающая система уравнений примет вид

$$\left. \begin{aligned} & -D_0 \frac{d^4 v_0}{dx^4} - \frac{d^2 N_0}{dx^2} \left( \frac{h_0}{2} - \frac{h^*}{2} \right) = \\ & = q_0 + \frac{E^*}{h^*} (v_0 - v_1); \\ & -D_1 \frac{d^4 v_1}{dx^4} - \frac{d^2 N_0}{dx^2} \left( \frac{h_1}{2} + \frac{h^*}{2} \right) = \\ & = -\frac{E^*}{h^*} (v_0 - v_1) - q_1; \\ & \frac{G^*(h^*)^2}{12E^*} \frac{d^4 N_0}{dx^4} - \frac{d^2 N_0}{dx^2} + N_0 \frac{G^*}{h^*} \left( \frac{1}{B_0} + \frac{1}{B_1} \right) + \\ & + \frac{G^*}{h^*} \left( \frac{N_{f,0}}{B_0} - \frac{F_P + N_{f,1}}{B_1} \right) - \\ & - \frac{G^*}{2} \left[ \frac{d^2 v_0}{dx^2} \left( 1 + \frac{h_0}{h^*} \right) + \frac{d^2 v_1}{dx^2} \left( 1 + \frac{h_1}{h^*} \right) \right] = 0. \end{aligned} \right\} (15)$$

С использованием системы уравнений (15) также решена задача о нормальном отрыве слоистого композита [3], [6].

## 2. Соединение внахлестку

При рассмотрении подобной задачи можно пренебречь вертикальными перемещениями слоев. Данное пренебрежение оправданно ввиду малой гибкости используемых образцов.

В результате из разрешающей системы (15) остается только одно уравнение.

$$\begin{aligned} & \frac{G^*(h^*)^2}{12E^*} \frac{d^4 N_0}{dx^4} - \frac{d^2 N_0}{dx^2} + N_0 \frac{G^*}{h^*} \left( \frac{1}{B_0} + \frac{1}{B_1} \right) + \\ & + \frac{G^*}{h^*} \left( \frac{N_{f,0}}{B_0} - \frac{F_P + N_{f,1}}{B_1} \right) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Запишем (16) в более компактном виде:

$$\frac{d^4 N_0}{dx^4} - 2\omega \frac{d^2 N_0}{dx^2} + \lambda^2 N_0 + \eta = 0, \quad (17)$$

где 
$$\omega = \frac{6E^*}{G^*(h^*)^2}; \quad \lambda = \left[ \frac{12E^*}{(h^*)^3} \left( \frac{1}{B_0} + \frac{1}{B_1} \right) \right]^{1/2};$$

$$\eta = \frac{12E^*}{(h^*)^3} \left( \frac{N_{f,0}}{B_0} - \frac{F_P + N_{f,1}}{B_1} \right). \quad (18)$$

Общее решение уравнения (17) представляется в виде

$$\begin{aligned} N_0 = & -\frac{\eta}{\lambda^2} + C_1 \exp(\psi_1 x) + C_2 \exp(-\psi_1 x) + \\ & + C_3 \exp(\psi_2 x) + C_4 \exp(-\psi_2 x), \end{aligned} \quad (19)$$

где  $C_i$  – неизвестные интегрирования, определяемые из граничных условий;  $\psi_i$  – корни характеристического уравнения  $\psi^4 - 2\omega\psi^2 + \lambda^2 = 0$ . Ниже приведены данные корни:

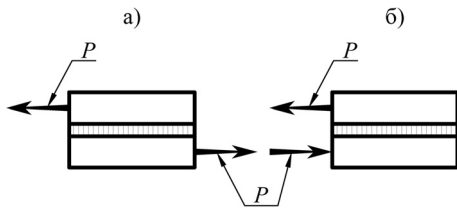
$$\psi_1 = \sqrt{\omega + (\omega^2 - \lambda^2)^{1/2}}; \quad \psi_2 = \sqrt{\omega - (\omega^2 - \lambda^2)^{1/2}}. \quad (20)$$

Укажем граничные условия для определения неизвестных констант интегрирования

$$\left. \begin{aligned} N_0 \left( -\frac{l}{2} \right) = P_1; \quad \frac{d}{dx} \left[ N_0 \left( -\frac{l}{2} \right) \right] = -\tau^* \left( -\frac{l}{2} \right) = 0; \\ N_0 \left( \frac{l}{2} \right) = P_2; \quad \frac{d}{dx} \left[ N_0 \left( \frac{l}{2} \right) \right] = -\tau^* \left( \frac{l}{2} \right) = 0. \end{aligned} \right\} (21)$$

Общее решение, полученное из данных граничных условий, весьма громоздко, поэтому здесь не приведено.

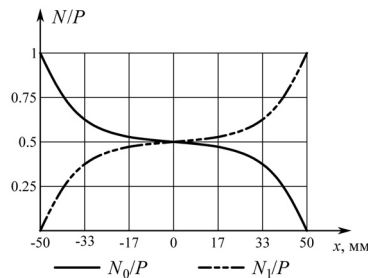
Далее будем рассматривать два варианта загрузки в соответствии с рис. 3. Дополнительные варианты нагружения модели представлены в [5].



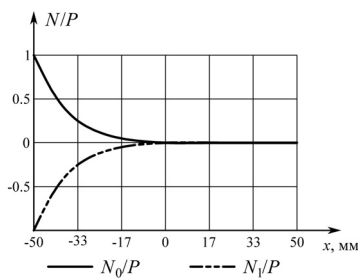
**Рис. 3. Вариант приложения нагрузки 1 (а), вариант приложения нагрузки 2 (б)**  
 [Fig. 3. Load application variant 1 (a), load application variant 2 (b)]

Для анализа влияния геометрических и физико-механических характеристик на напряженно-деформированное состояние модели будем использовать эталонные значения:  $h_0 = 10$  мм;  $h_1 = 10$  мм;  $h^* = 1$  мм;  $l = 100$  мм;  $E_0 = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $E_1 = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $E^* = 10^3$  МПа;  $P = 1$  кН/мм.

Результаты вычисления продольных сил и касательных напряжений для эталонных параметров модели приведены ниже.



**Рис. 4. Продольные усилия во внешних слоях (вариант нагружения 1)**  
 [Fig. 4. Longitudinal forces in the outer layers (loading option 1)]

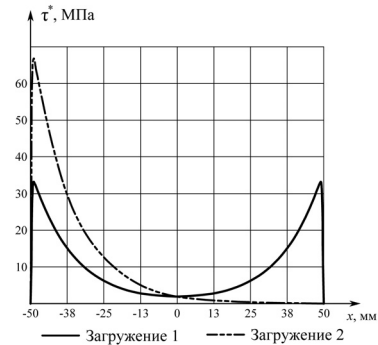


**Рис. 5. Продольные усилия во внешних слоях (вариант нагружения 2)**  
 [Fig. 5. Longitudinal forces in the outer layers (loading option 2)]

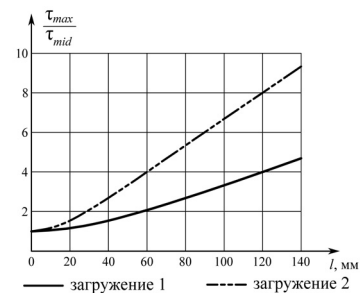
На рис. 6 можно увидеть краевой эффект, возникающий в контактном слое в узкой зоне.

При испытании образцов на сдвиг адгезионная прочность вычисляется как разрушающая нагрузка, деленная на площадь склейки. Величину, полученную таким образом, правильнее называть средней прочностью ( $\tau_{mid}$ ). Истинной адгезионной прочностью является максимальная величина касательных напряжений  $\tau_{max}$  в момент разрушения [2].

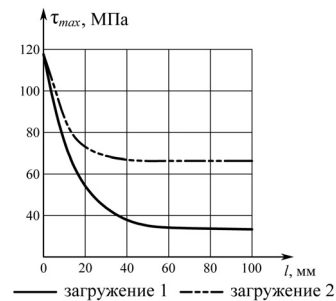
На рис. 7 и далее представлена серия графиков, отражающих соотношение между истинной и средней адгезионной прочностью.



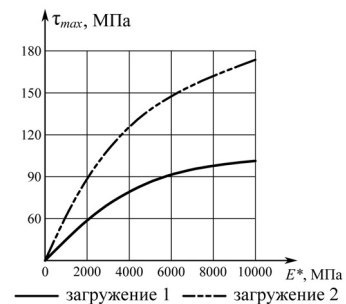
**Рис. 6. Касательные напряжения в контактном слое**  
 [Fig. 6. Tangential stresses in the contact layer]



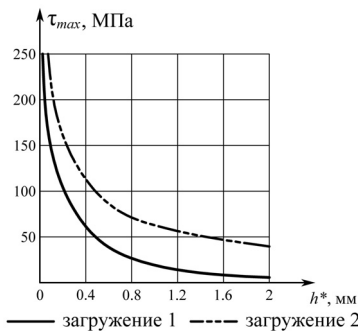
**Рис. 7. Соотношение между истинной и средней адгезионной прочностью в зависимости от длины склейки**  
 [Fig. 7. The ratio between the true and average adhesive strength, depending on the length of the gluing]



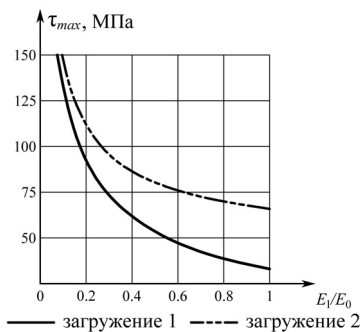
**Рис. 8. Графики зависимостей истинной и адгезионной прочности от длины склейки**  
 [Fig. 8. Graphs of dependencies of true and adhesive strength on the length of the gluing]



**Рис. 9. Графики зависимостей истинной и адгезионной прочности от модуля Юнга контактного слоя**  
 [Fig. 9. Graphs of dependencies of the true and adhesive strength on the Young's modulus of the contact layer]



**Рис. 10. Графики зависимостей истинной и адгезионной прочности от толщины контактного слоя**  
**[Fig. 10. Graphs of dependencies of the true and adhesive strength on the thickness of the contact layer]**



**Рис. 11. Графики зависимостей истинной и адгезионной прочности от соотношения модулей Юнга внешних слоев**  
**[Fig. 11. Graphs of the dependences of the true and adhesive strength on the ratio of Young's modules of the "outer" layers]**

Как видим, с увеличением длины склейки отношение истинной адгезионной прочности к средней увеличивается. Начиная с некоторого значения, данные зависимости имеют линейный характер. Это связано с тем, что увеличение длины склейки перестает влиять на максимальное значение касательных напряжений. При малых размерах истинная прочность практически совпадает со средней прочностью.

### Заключение

В статье получена система разрешающих уравнений для решения многочисленных задач теории многослойных балок. Полученные уравнения прогнозируют возникновение краевого эффекта. Получены результаты решения задачи о напряженно-деформированном состоянии соединения внахлестку. Проанализировано влияние механических характеристик на истинную адгезионную прочность.

Очевидно, что объема статьи недостаточно для подробного анализа полученных результатов. Однако можно сказать, что предложенная модель адгезионного взаимодействия с использо-

ванием контактного слоя отражает влияние многих факторов на прочность и позволяет качественно и количественно анализировать данное влияние.

© Андреев В.И., Цыбин Н.Ю., Турусов Р.А., 2018

### Список литературы

1. Андреев В.И., Турусов Р.А., Цыбин Н.Ю. Определение напряженно-деформированного состояния трехслойной балки с применением метода контактного слоя // Вестник МГСУ. 2016. № 4. С. 17–26.
2. Турусов Р.А., Маневич Л.И. Метод контактного слоя в адгезионной механике // Клеи. Герметики. Технологии. 2009. № 6. С. 2–11.
3. Tsybin N.Yu., Turusov R.A., Andreev V.I. Comparison of creep in free polymer rod and creep in polymer layer of the layered composite // Procedia Engineering. 2016. № 153. С. 51–58.
4. Турусов Р.А. Адгезия и адгезионная механика // Научно-просветительский журнал «НБИКС-наука. Технологии». 2017. № 2. С. 207–222.
5. Турусов Р.А. Адгезионная механика: монография. М., 2016. 232 с. (Серия «Библиотека научных разработок и проектов НИУ МГСУ»).
6. Андреев В.И., Турусов Р.А., Цыбин Н.Ю. Напряженное состояние слоистого композита при нормальном отрыве. Ч. 1 // Научное обозрение. 2015. № 24. С. 98–106.
7. Турусов Р.А., Андреев В.И., Цыбин Н.Ю. Общее решение задачи об изгибе многослойной балки в рядах Фурье // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 4. С. 34–42.
8. Andreev V.I., Turusov R.A., Tsybin N.Yu. The contact layer method in calculating of the shear compounds // MATEC Web of Conferences. 26. RSP 2017 – 26<sup>th</sup> R-S-P Seminar 2017 Theoretical Foundation of Civil Engineering. 2017. Vol. 17. URL: <https://doi.org/10.1051/mateconf/201711700008>.

### References

1. Andreev V.I., Turusov R.A., Tsybin N.Yu. (2016). Opredelenie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya trekhslonnoy balki s primeneniem metoda kontaktnogo sloya [Determination of the stress-strain state of a three-layer beam using the contact layer method]. *Vestnik MGSU*, No 4, 17–26. (In Russ.)
2. Turusov R.A., Manevich L.I. (2009). Metod kontaktnogo sloya v adgezionnoy mekhanike [The contact layer method in adhesion mechanics]. *Klei. Germetiki. Tekhnologii [Adhesives. Sealants. Technologies]*, No 6, 2–11. (In Russ.)
3. Tsybin N.Yu., Turusov R.A., Andreev V.I. (2016). Comparison of creep in a free polymer rod and creep in a polymer layer of the layered composite. *Procedia Engineering*, No 153, 51–58.
4. Turusov R.A. (2017). Adgeziya i adgezionnaya mekhanika [Adhesion and adhesion mechanics]. *Scientific*

and educational magazine “NBICS-science. Technology”, No 2, 207–222. (In Russ.)

5. Turusov R.A. (2016). *Adgezionnaya mekhanika: monografiya* [Adhesion mechanics: monograph]. Moscow, 232. (Series “Library of scientific developments and projects”). (In Russ.)

6. Andreev V.I., Turusov R.A., Tsybin N.Yu. (2015). Napryazhennoe sostoyanie sloistogo kompozita pri normal'nom otryve. Ch. 1 [Stress state of a layered composite under normal separation. Part 1]. *Scientific Review*, No 24, 98–106. (In Russ.)

7. Turusov R.A., Andreev V.I., Tsybin N.Yu. (2017). General solution of bending of multilayer beams in Fourier series. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, No 4, 34–42. (In Russ.)

8. Andreev V.I., Turusov R.A., Tsybin N.Yu. (2017). The contact layer method in calculating of the shear compounds // MATEC Web of Conferences. 26. RSP 2017 – 26<sup>th</sup> R-S-P Seminar 2017 Theoretical Foundation of Civil Engineering, Vol. 17. <https://doi.org/10.1051/mateconf/201711700008>.

#### Об авторах

**Андреев Владимир Игоревич** – доктор технических наук, профессор, академик РААСН, заведующий кафедрой сопротивления материалов, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет. Опубликовал более 350 научных статей, 4 монографии, 8 учебников и учебных пособий. *Область научных интересов:* строительная механика, механика деформируемого твердого тела, механика неоднородных тел, механика полимеров и композитов. *Контактная информация:* e-mail – asv@mgsu.ru.

**Цыбин Никита Юрьевич** – аспирант кафедры сопротивления материалов, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет. Научный руководитель – доктор технических наук, профессор В.И. Андреев. Заканчивает работу над диссертацией «Расчет слоистых конструкций с использованием модели контактного слоя» по специальности 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела. Опубликовал 15 научных статей, соавтор учебника «Основы теории упругих тонких оболочек». *Область научных интересов:* механика деформируемого твердого тела, механика неоднородных тел, механика полимеров и композитов. *Контактная информация:* e-mail – science@nikitatsybin.ru.

**Турусов Роберт Алексеевич** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры сопротивления материалов, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет. Опубликовал более 200 научных статей, 4 монографии. *Область научных интересов:* механика деформируемого твердого тела, физика и механика композитов и полимеров. *Контактная информация:* e-mail – rob-turusov@yandex.ru.

#### About the authors

**Andreev Vladimir** – Full Member of the Russian Academy of Architecture and Building Sciences, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Strength of Materials Department, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University). He published more than 350 scientific articles, 4 monographs, 8 textbooks and teaching aids. *Research interests:* structural mechanics, solid mechanics, mechanics of heterogeneous bodies, mechanics of polymers and composites. *Contact:* asv@mgsu.ru.

**Tsybin Nikita** – Graduate Student of the Department of Strength of Materials, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University). He published 15 scientific articles. Theme of the dissertation “Calculation of layered structures with using a contact layer model”. *Research interests:* solid mechanics, mechanics of heterogeneous bodies, mechanics of polymers and composites. *Contact:* science@nikitatsybin.ru.

**Turusov Robert** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University). He published near 200 scientific articles, 4 monographs. *Research interests:* solid mechanics, physics and mechanics of composites and polymers. *Contact:* rob-turusov@yandex.ru.

#### Для цитирования

Андреев В.И., Цыбин Н.Ю., Турусов Р.А. Анализ краевого эффекта касательных напряжений при сдвиге двухслойной балки // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 3. С. 180–186. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-180-186.

#### For citation

Andreev V.I., Tsybin N.Yu., Turusov R.A. (2018). Analysis of the edge effect of shear stresses in the shift of a two-layer beam. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 14(3), 180–186. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-180-186.